4. Dérivation des distributions

1. Définition
2. Lien avec les dérivées usuelles
3. Exemple : Y et ses dérivées
4. Formule des sauts

Objectif

Utiliser la définition pour bâtir un formulaire opérationnel

1. Définition

Définition (distribution dérivée)

Pour tout $T \in \mathcal{D}'$, on définit sa dérivée au sens des distributions par

$$\begin{array}{rcl} T' : \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \varphi & \longmapsto & < T', \varphi > \overset{\text{déf}}{=} - < T, \varphi' > \end{array}$$

<u>Exercices</u> :

1. $T' \in \mathcal{D}'$, et donc : les distributions sont indéfiniment dérivables !
2. $\mathrm{ordre}(T') \leq \mathrm{ordre}(T) + 1$
3. $(T_1 + T_2)' = T_1' + T_2'$
4. formule pour calculer la dérivée n$^{\text{ième}}$:

$$\boxed{< T^{(n)}, \varphi > = (-1)^n < T, \varphi^{(n)} >}$$

2. Lien avec les dérivées usuelles

La définition de la dérivée au sens des distributions a été choisie (par Laurent Schwartz, puis . . .) justement pour assurer le

Théorème

$$f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \implies (T_f)' = T_{f'}$$

Démonstration.

exercice. $\square$

3. Exemple : Y et ses dérivées

L'échelon de Heaviside Y

$$\begin{array}{rcl} Y : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & Y(x) = \left| \begin{array}{lll} 1 & \text{si} & x > 0 \\ 0 & \text{si} & x < 0 \end{array} \right. \end{array}$$

définit $Y \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, et on note encore $Y \in \mathcal{D}'$ sa distribution régulière associée :

$$\begin{array}{rcl} Y : \mathcal{D}' & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \varphi & \longmapsto & < Y, \varphi >= \int Y\varphi = \int_0^{+\infty} \varphi(x)dx \end{array}$$

Remarque :

$$Y = \mathbb{1}_{[0,+\infty[} = \mathbb{1}_{]0,+\infty[} \quad [pp] \text{ et donc dans } \; L^1_{loc}(\mathbb{R})$$

Dérivées de Y

Dérivées de $Y \in \mathcal{D}'$

$$\boxed{Y' = \delta} \quad \text{et plus généralement : } \forall n \geq 1, \quad \boxed{Y^{(n)} = \delta^{(n-1)}}$$

Soient $\varphi \in \mathcal{D}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
< Y^{(n)}, \varphi > &= (-1)^n < Y, \varphi^{(n)} > \\
&= (-1)^n \int_0^{+\infty} \varphi^{(n)}(x) dx \quad = \quad (-1)^n \left[\varphi^{(n-1)}(x)\right]_0^{+\infty} \\
&= (-1)^{n-1} \varphi^{(n-1)}(0) \\
&= (-1)^{n-1} < \delta, \varphi^{(n-1)} > \\
&= < \delta^{(n-1)}, \varphi >
\end{aligned}$$

4. Formule des sauts

Définition ($\mathcal{C}^k$ par morceaux)

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite $\mathcal{C}^k$ par morceaux avec sauts en x_1, ..., x_s si :

1. $f \in \mathcal{C}^k(]-\infty, x_1[\cup]x_1, x_2[\cup\cdots\cup]x_s, +\infty[$
2. $(\forall l \in [\![0, k-1]\!])(\forall j \in [\![1, s]\!]) \qquad f^{(l)}(x_j^+) \text{ et } f^{(l)}(x_j^-)$ existent
3. $f^{(k)} \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$

<u>Exercices</u> :

1. f est $\mathcal{C}^{k+1}$ par morceaux avec sauts en x_1, ..., x_s $\implies$ f' est $\mathcal{C}^k$ par morceaux avec sauts en x_1, ..., x_s
2. Dessiner le graphe de fonctions qui sont $\mathcal{C}^k$ par morceaux, d'autres qui ne sont pas.

Pour f $\mathcal{C}^1$ par morceaux avec sauts en x_1, ..., x_s

formule des sauts, $k=1$

$$(T_f)' = T_{f'} + \sum_{j=1}^{s} \Big(f(x_j^+) - f(x_j^-) \Big) \, \delta_{x_j}$$

$$\begin{aligned}
< (T_f)', \varphi > &= - < T_f, \varphi' > = - \int f \varphi' \\
&= - \int_{-\infty}^{x_1} f \varphi' - \sum_{j=1}^{s-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f \varphi' - \int_{x_s}^{+\infty} f \varphi' \\
&= \cdots \text{ à compléter en exercice}
\end{aligned}$$

Si f $\mathcal{C}^k$ par morceaux avec sauts en x_1, ..., x_s

formule des sauts, cas général

$$(T_f)^{(k)} = T_{f^{(k)}} + \sum_{l=0}^{k-1} \left(\sum_{j=1}^{s} \left(f^{(l)}(x_j^+) - f^{(l)}(x_j^-) \right) \delta_{x_j}^{(k-1-l)} \right)$$

Démonstration.

Par récurrence sur k, à l'aide de la formule au rang 1. $\square$

5. Multiplication fT

1. Définition
2. Dérivation d'un produit fT
3. Exemples

Truc heuristique pour l'extension à $\mathcal{D}'$ des formules usuelles

1. écrire la formule au sens faible
2. étendre cette formule à $\mathcal{D}'$ par $\displaystyle\int f(x)\varphi(x)dx \rightsquigarrow < T, \varphi >$
3. vérifier que cette formule étendue définit une distribution

1. Définition

Difficulté : le produit TS des applications $T : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ et $S : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ défini par

$$\begin{array}{rcl} TS : \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \varphi & \longmapsto & < T, \varphi >< S, \varphi > \end{array}$$

n'est pas linéaire (sauf cas particulier), et donc $TS \notin \mathcal{D}'$

Truc heuristique :
Si $f \in \mathcal{C}^\infty$, on peut écrire :

$$\int f(x)g(x)\varphi(x)dx =< T_g, f\varphi >$$

Ce qui suggère :

$$< fT, \varphi >=< T, f\varphi >$$

Définition (produit fT, où $f \in \mathcal{C}^\infty$ et $T \in \mathcal{D}'$)

Pour toute distribution $T \in \mathcal{D}'$ et toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty$, on définit le produit fT par

$$\begin{aligned} fT : \mathcal{D}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\longmapsto \; < fT, \varphi > \overset{\text{déf}}{=} < T, f\varphi > \end{aligned}$$

Exercices :

1. $fT \in \mathcal{D}'$, et donc : $\mathcal{D}'$ est stable par multiplication par fonctions $\mathcal{C}^\infty$
2. $\boxed{f\delta = f(0)\delta}$, $x\delta = 0$, $e^x\delta = \delta$.
3. $f\delta' = f(0)\delta' - f'(0)\delta$
4. $x \ \mathrm{vp}\frac{1}{x} = 1$
5. échantillonnage et peigne de Dirac $\sqcup\!\sqcup = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_k$

$$f\sqcup\!\sqcup = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k)\delta_k$$

2. Dérivation d'un produit fT

Soient $f \in \mathcal{C}^\infty$ et $T \in \mathcal{D}'$.

Théorème (Leibniz dans $\mathcal{D}'$)

$$\begin{aligned} (fT)' &= f'T + fT' \\ (fT)^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} T^{(n-k)} \end{aligned}$$

Démonstration.

Exercice. □

3. Exemples

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty$.

$$(Yf)' = f\delta + Yf' = f(0)\delta + Yf'$$

$$\begin{aligned} (f\delta)' &= f'\delta + f\delta' = f'(0)\delta + f\delta' \\ &= (f(0)\delta)' = f(0)\delta' \end{aligned}$$

On retrouve : $f\delta' = f(0)\delta' - f'(0)\delta$.

<u>Exercice</u> :

Calculer les dérivées première et seconde de

1. $Ye^{\alpha t}$
2. $Yte^{\alpha t}$

Retrouver le résultat avec la formule des sauts.