Analyse de Fourier et Applications
2ème cycle de mathématiques

J.-P. Conze

Université de Rennes I

14 mai 2007

On trouvera dans ce cours une présentation de l'analyse de Fourier, des compléments d'analyse qui lui sont liés (mesures de Radon, distributions, ...), ainsi que des éléments d'application à la théorie du signal (convolution/filtrage, mesure spectrale, échantillonnage, ...).

Le cours se situe au niveau 3ème et 4ème année d'un cursus de mathématiques et requiert les connaissances de bases d'analyse et de théorie de l'intégration.

Table des matières

Introduction

Avant d'aborder ce cours d'analyse de Fourier, il peut être utile d'indiquer comment l'analyse harmonique et les objets mathématiques qui y sont étudiés sont liés au traitement du signal.

Les signaux (véhicules de l'information) sont souvent transmis matériellement par la propagation de phénomènes (acoustiques, électro-magnétiques,...) résultant en une somme de quantités périodiques dont la fréquence est grande par rapport au laps de temps de l'observation. On peut considérer que la représentation mathématique d'un signal est :

– d'une part, une fonction $(t \to x(t), t \in \mathbb{R})$ définie dans le domaine temporel (ou sur un domaine bidimensionnel dans le cas des images),

– d'autre part, une répartition définie par une mesure μ dans le domaine des fréquences.

La relation entre x et μ est donnée formellement par la représentation de Fourier :

$$x(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i t s} \, d\mu(s),$$

qui exprime le signal observé au temps t comme une "superposition" de signaux élémentaires de fréquence s. Ainsi la théorie du signal est liée à l'analyse harmonique qui étudie ce type de représentation.

Le traitement du signal a pour objet d'extraire des informations pertinentes d'un signal complexe, d'atténuer le bruit contenu dans un signal, d'effectuer les opérations permettant le transfert et le stockage de l'information. La théorie du signal de son côté doit proposer un cadre mathématique permettant de formaliser la mise en oeuvre de ces traitements.

Elle doit d'abord préciser la nature mathématique des objets que nous avons appelés signaux. La nature duale, temps-fréquence, des signaux nécessite le recours à l'analyse de Fourier et à des notions telles que celles de mesure et de distribution.

Le deuxième objectif théorique est l'identification mathématique des systèmes ou dispositifs transformant les signaux d'excitation en réponses ou permettant d'effectuer un traitement des signaux reçus en entrée. L'hypothèse naturelle d'invariance par translation dans le temps de ces dispositifs conduit à représenter ces systèmes comme des opérateurs de convolution. Il est donc nécessaire de développer l'étude de la convolution dans divers espaces fonctionnels.

Le temps, qui est l'ensemble sur lequel sont naturellement définis les signaux, est assimilé d'abord à $\mathbb{R}$. Les contraintes des mesures physiques et du traitement numérique conduisent également à considérer les signaux à temps discret pour lesquels le temps est assimilé à $\mathbb{Z}$. Le sens du temps introduit une autre contrainte physique traduite par la notion de causalité.

A côté de l'aspect théorique de l'étude des signaux, il convient, du point de vue pratique, de mettre en oeuvre des méthodes effectives, avec des contraintes de rapidité d'exécution et de contrôle des erreurs. Ceci conduit à étudier des algorithmes efficaces, dont l'un des plus importants est l'algorithme de calcul rapide de la transformée de Fourier (FFT).

Le cours présenté ici est un cours théorique d'analyse de Fourier, en correspondance avec les étapes suivantes de la théorie du signal :
– identification des objets mathématiques : espaces fonctionnels et extensions (mesures de Radon, distributions) ; représentation temporelle et fréquentielle des signaux : analyse de Fourier ;
– opérations appliquées aux signaux à temps continu : filtrage ; caractérisation mathématique du filtrage en terme de convolution ;
– signaux à temps discret, opérations sur ces signaux ; passage du temps continu au temps discret : échantillonage.

Notations :

On utilisera les lettres x, y, z,... pour désigner les signaux considérés comme des fonctions du temps noté t. La variable de fréquence sera notée s ou u (notée f dans certains ouvrages). Par $\widehat{x}$ ou X on désignera la transformée de Fourier d'un signal x.

BIBLIOGRAPHIE

C. Gasquet, P. Witomski, *Analyse de Fourier et applications : filtrage, calcul numérique et ondelettes*, Dunod, 2000.
N. Lerner, *Cours d'intégration*, Université de Rennes.
E.H. Lieb, M.Loss, *Analysis*, Graduate studies in mathematics, vol.14, AMS.
W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*, Masson.
C. Sogge, *Fourier integral in classical analysis*, Cambridge tracts in Mathematics, vol.105.

Chapitre 1

Algèbres de convolution

Dans ce chapitre, nous étudions la structure d'algèbre de convolution définie sur des espaces de fonctions (à valeurs réelles ou complexes) sur $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{T}$. Nous traitons d'abord le cas discret (espaces des suites p-périodiques, espace des suites sommables sur $\mathbb{Z}$), puis la convolution entre fonctions sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{T}$, obtenant ainsi différentes algèbres de convolution ($\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}_c(\mathbb{T})$, $L^1(\mathbb{R})$, $L^1(\mathbb{T})$). La convolée de deux fonctions f et g, avec $f \in L^p$ et $g \in L^q$, pour $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, est également définie.

1.1 Algèbres de convolution, cas discret

Sur des espaces de suites, on peut définir la multiplication comme l'opération habituelle de produit terme à terme. On peut également définir une autre loi, la convolution, donnant à ces espaces une autre structure d'algèbre.

• **L'algèbre de convolution** $(\ell(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}), *)$

Soit p un entier > 0. On considère le groupe abélien fini $G_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Les fonctions à valeurs complexes définies sur G_p, c'est-à-dire les suites périodiques de période p, forment un espace vectoriel noté $\ell(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Cet espace est naturellement isomorphe à $\mathbb{C}^p$, puisque la donnée d'une suite p-périodique u est celle du vecteur $(u(0), \cdots, u(p-1))$, l'ensemble $\{0, \cdots, p-1\}$ formant un système de représentants des classes de $\mathbb{Z}$ *modulo* $p\mathbb{Z}$.

Nous pouvons munir l'espace $\ell(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ d'une structure d'algèbre à l'aide du produit ordinaire (coordonnées par coordonnées). Nous pouvons également définir une autre loi, le produit de convolution :

Définition 1.1.1 Le produit de convolution de deux suites $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$ périodiques de période p est la suite p-périodique $u * v$ définie par :

$$(u * v)(n) = \sum_{k=0}^{p-1} u(n-k)v(k), \ n = 0, 1, ..., p-1.$$

On vérifiera en exercice que ce produit définit bien une loi interne sur l'espace des suites périodiques de période p, qui en fait une algèbre. Cette algèbre joue un rôle important dans les calculs en traitement numérique du signal, car elle fournit une version discrétisée et de taille finie des algèbres de convolution $L^1(\mathbb{R})$ et $L^1(\mathbb{T})$ que nous allons définir dans ce chapitre.

• **Convolution de suites, l'algèbre** $(\ell^1(\mathbb{Z}), *)$

Considérons maintenant l'espace des suites indexées par $\mathbb{Z}$.

Soit $\ell^1(\mathbb{Z})$ l'espace des suites "bilatères" $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ à valeurs complexes telles que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |u(n)| < \infty$. Sur cet espace, la somme est définie terme à terme. Le produit de deux suites peut être défini également terme à terme, mais nous pouvons définir une autre loi : la convolution.

Définition 1.1.2 Le **produit de convolution** $u * v$ de deux suites $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$ dans $\ell^1(\mathbb{Z})$ est la suite $u * v$ définie par :

$$(u * v)(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u(n-k)v(k), \ n \in \mathbb{Z}. \tag{1.1}$$

Pour vérifier que cette série est convergente, pour chaque n, et que $u*v$ est dans $\ell^1(\mathbb{Z})$, on utilise le résultat suivant (dans lequel les sommes des séries peuvent être égales à $+\infty$) :

Lemme 1.1.3 *Si $(x_{n,k})_{n,k}$ est une série à termes positifs à deux indices, on peut permuter l'ordre de sommation dans la série double :*

$$\sum_{n,k} x_{n,k} = \sum_n (\sum_k x_{n,k}) = \sum_k (\sum_n x_{n,k}).$$

Lemme 1.1.4 *Si u et v sont dans $\ell^1(\mathbb{Z})$, alors $u * v$ est dans $\ell^1(\mathbb{Z})$ et on a :*

$$\sum_n |\sum_k u(n-k)v(k)| \leq (\sum_n |u(n)|) \ (\sum_k |v(k)|),$$

avec égalité si les séries sont à termes positifs.

Preuve : On raisonne d'abord dans le cas de suites à termes positifs et on applique le lemme précédent. On traite ensuite le cas général en utilisant la décomposition $u_n = u_n^+ - u_n^-$, $v_n = v_n^+ - v_n^-$, en parties positives et négatives des suites u et v.

□

L'espace $\ell^1(\mathbb{Z})$ muni de la norme $u \to \|u\|_1 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_n|$ est un espace vectoriel normé complet (espace de Banach), qui forme une algèbre de Banach $(\ell^1(\mathbb{Z}), \| \ \|_1, *)$, quand on le munit de la loi définie par le produit de convolution $*$.

Nous laissons la preuve de ces assertions en exercice.

Notation 1.1.5 Pour ℓ dans $\mathbb{Z}$, on note δ_ℓ la suite définie par

$$\delta_\ell(k) = 1, \text{ si } k = \ell, \ = 0, \text{ sinon.}$$

L'algèbre $(\ell^1(\mathbb{Z}), \| \ \|_1, *)$ a une **unité**, qui est la suite δ_0. La convolution par δ_ℓ s'identifie à la translation par $-\ell$: pour toute suite $(u(n)$, on a $(\delta_\ell * u)(n) = u(n-\ell)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

1.1.6 Sous-algèbres On obtient deux sous-algèbres de $(\ell^1(\mathbb{Z}), \| \|_1, *)$ en considérant :
- l'algèbre de convolution des suites indexées par $\mathbb{Z}$ à support fini,
- l'algèbre de convolution des suites sommables indexées par $\mathbb{Z}$ à support dans $\mathbb{Z}^+$.

De façon générale, si u et v sont deux suites nulles pour les indices < 0, le produit de convolution $u * v$ est bien défini (même si les suites ne sont pas sommables) et s'écrit :

$$(u * v)(n) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{n} u(k)v(n-k), & \text{pour } n \geq 0, \\ 0, & \text{pour } n < 0. \end{cases}$$

On obtient ainsi l'agèbre de convolution des suites à support dans $\mathbb{Z}^+$.

1.2 Convolution sur $\mathbb{R}$

L'intégrale permet également de définir une structure d'algèbre de convolution sur certains espaces de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^d$. Nous commençons par donner formellement la définition du produit de convolution. Nous discuterons ensuite la validité de cette définition, en traitant d'abord le cas le plus simple, celui de l'algèbre de convolution $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$.

Définition 1.2.1 Etant données deux fonctions f et g, on appelle **convolée** de f et g (ou produit de **convolution** de f par g) la fonction notée $f * g$ définie par :

$$(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(s)\ g(t-s)\ ds, \tag{1.2}$$

La fonction $f * g$ apparaît donc comme une "combinaison linéaire généralisée" des translatées $g(. - s)$. La formule (1.2) est dissymétrique, mais par changement de variable, nous pouvons échanger les rôles de f et g.

• Cas de l'espace $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ des fonctions continues à support compact

Nous nous plaçons tout d'abord dans le cas simple où f et g sont deux fonctions continues à support compact sur $\mathbb{R}$. La fonction $s \to f(s)g(t-s)$ est continue à support compact et peut être intégrée. L'application $t \to \int_{\mathbb{R}} f(s)g(t-s)\ ds$ définit donc une fonction (notée $f * g$).

1.2.2 Propriétés de la convolution

1) **Support** : Si f et g sont à support compact, $f * g$ est également à support compact. En effet, soient a, b, c, d tels que l'on ait $f(s) = 0$, pour $s \notin [a, b]$, $g(s) = 0$, pour $s \notin [c, d]$.

Pour avoir $f(s)g(t-s) \neq 0$, il faut $f(s) \neq 0$ et $g(t-s) \neq 0$ et donc $a \leq s \leq b$ et $c \leq t-s \leq d$, ce qui implique $a + c \leq t = t - s + s \leq b + d$. Ceci montre que $f * g$ est à support dans l'intervalle compact $[a + c, b + d]$.

2) **Commutativité** : Par le changement de variables $z = t - s$ dans (1.2), on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}} f(s)\ g(t-s)\ ds = \int_{\mathbb{R}} f(t-z)\ g(z)\ dz = \int_{\mathbb{R}} g(z)\ f(t-z)\ dz,$$

d'où

$$(f * g)(t) = (g * f)(t). \tag{1.3}$$

3) **Associativité** : Soient f, g, h trois fonctions continues à support compact. En échangeant l'ordre d'intégration (par application d'une forme élémentaire du théorème de Fubini) et en faisant le changement de variable $u = s - z$, on obtient :

$$\begin{aligned}
((f * g) * h)(t) &= \int (f * g)(s)\ h(t-s)\ ds \\
&= \int (\int f(z)\ g(s-z)\ dz) h(t-s)\ ds \\
&= \int f(z)\ (\int g(s-z)\ h(t-s)\ ds)\ dz \\
&= \int f(z)\ (\int g(u)\ h(t-z-u)\ du)\ dz \\
&= \int f(z)\ (g * h)(t-z)\ dz = (f * (g * h))(t).
\end{aligned}$$

4) **Continuité** de la fonction $f * g$

Si g est continue à support compact, elle est uniformément continue : pour tout ϵ, il existe $\eta > 0$ tel que $|g(t+h) - g(t)| \leq \epsilon$, pour $|h| \leq \eta$ et tout t. On a donc :

$$\begin{aligned}
|(f * g)(t+h) - (f * g)(t)| &\leq \int |f(s)||g(t+h-s) - g(t-s)|\ ds \\
&\leq \epsilon \int |f(s)|\ ds, \quad \text{pour} \quad |h| \leq \eta,
\end{aligned}$$

ce qui prouve la continuité de $f * g$.

Sur l'espace $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ des fonctions continues à support compact, la convolution définit donc une loi interne qui est associative et commutative. L'espace $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ muni de l'addition, de la multiplication par les scalaires et du produit de convolution a une **structure d'algèbre commutative**.

Remarque 1.2.3 Dans les preuves précédentes, nous avons rencontré des versions élémentaires du théorème de Fubini. Nous aurons besoin plus loin de la version de ce théorème dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue. On trouvera en annexe un rappel de ces énoncés.

Exemple 1.2.4 *(Exemple de convolution) :* On considère les fonctions u_h définies par : $u_h(s) = \frac{1}{h^2}(h - |s|)$, pour $|s| \leq h$ et $u_h(s) = 0$, pour $|s| \geq h$, où h est un réel > 0. On note que les fonction u_h sont positives et d'intégrale égale à 1.

Soit $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$. Alors $f * u_h$ s'écrit :

$$(f * u_h)(t) = \frac{1}{h^2} \int_0^h (h-s)\ (f(t-s) + f(t+s))\ ds.$$

Pour toute $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, on a : $\lim_{h \to 0} f * u_h = f$, la limite étant uniforme. Ceci implique (voir exercice 1.6.2) que $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ n'a pas d'unité pour le produit de convolution :
il n'existe pas de fonction $f_0 \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ telle que $f_0 * g = g$, pour toute fonction $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$).

Nous verrons, en étudiant la convolution des mesures de Radon bornées, qu'il faut plonger $L^1(\mathbb{R})$ dans une algèbre plus grande, pour obtenir une algèbre avec unité, l'unité étant la mesure de Dirac en 0.

• **Convolution dans** $L^1(\mathbb{R})$

Nous traitons maintenant le cas où f et g sont dans $L^1(\mathbb{R})$. Si f et g sont intégrables sur $\mathbb{R}$, leur **produit de convolution** $f * g$ est toujours défini par (1.2). Mais l'existence de ce produit de convolution est plus difficile à établir.

Proposition 1.2.5 *La convolution de deux fonctions f et g intégrables sur $\mathbb{R}$ est bien définie. Le résultat $f * g$ est encore intégrable et vérifie :*

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1. \tag{1.4}$$

Preuve : La démonstration utilise le théorème de Fubini rappelé en annexe.

Les fonctions f et g étant intégrables, la fonction de deux variables $(t, s) \to f(t-s)g(s)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^2$, d'après le théorème de Fubini (voir annexe).

En effet, $t \to f(t-s)\, g(s)$ est intégrable en t, et la fonction $s \to \int f(t-s)\, g(s)\ dt$ est à son tour intégrable, d'intégrale $(\int_{\mathbb{R}} f(t)\ dt)\ (\int_{\mathbb{R}} g(s)\ ds)$.

On peut donc appliquer le point $i)$ du théorème de Fubini : pour presque tout t la fonction $s \to f(t-s)\, g(s)$ est intégrable en s, ce qui assure d'abord que $(f * g)(t)$ est bien défini pour presque tout t, puis que la fonction $t \to \int f(t-s)\, g(s)\ ds = (f * g)(t)$ est à son tour intégrable.

On a donc montré que $f * g$ est dans $L^1(\mathbb{R})$ et vérifie :

$$\int (f * g)(t)\ dt = (\int_{\mathbb{R}} f(t)\ dt)\ (\int_{\mathbb{R}} g(s)\ ds). \tag{1.5}$$

Grâce à (1.5), on a l'inégalité d'algèbre normée :

$$\|f * g\|_1 \leq \||f| * |g|\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_1.$$

□

• **L'algèbre de convolution** $(L^1(\mathbb{R}), +, *)$.

Dans le cas de l'espace $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, nous avons vu que la convolution définit une structure d'algèbre commutative : $(\mathcal{C}_c(\mathbb{R}), +, *)$, où $+$ désigne l'addition des fonctions et $*$ leur convolution. De la même façon, $L^1(\mathbb{R})$ muni de ces deux lois a une structure d'algèbre commutative :

Théorème 1.2.6 *L'opération $(f, g) \to f * g$ définit sur $L^1(\mathbb{R})$ une structure d'algèbre commutative.*

Preuve : La commutativité ($f * g = g * f$) résulte du changement de s en $t - s$, qui laisse invariante l'intégrale.

L'associativité ($f * (g * h) = (f * g) * h$) résulte du théorème de Fubini (détailler la preuve en exercice).

□

Il est important de noter que, d'après la commutativité, il y a deux "écritures" pour la convolution :

$$(f * g)(t) = \int f(t-s)g(s)\ ds = \int f(s)g(t-s)\ ds.$$

De plus, l'inégalité $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1\ \|g\|_1$, implique la continuité de l'application $(f, g) \to f * g$ définie de $(L^1(\mathbb{R}), \|\ \|_1) \times (L^1(\mathbb{R}), \|\ \|_1)$ dans $(L^1(\mathbb{R}), \|\ \|_1)$.

On a obtenu ainsi une algèbre commutative normée, notée $(L^1(\mathbb{R}), *, \|\ \|_1)$ qui est une algèbre de Banach.

• Extension de la convolution

1.2.7 Dans le cas général, étant données deux fonctions f et g, leur produit de convolution

$$t \to \int_{\mathbb{R}} f(s)g(t-s)\ ds$$

est défini, si cette intégrale existe pour toute valeur ou presque toute valeur de t. Deux conditions entrent en jeu : la *régularité* de la fonction $s \to f(s)g(t-s)$, et la "*taille*" de cette fonction.

Il convient donc d'abord de faire sur f et g des hypothèses de régularité. Suivant la nature des intégrales utilisées, on considère des fonctions f et g continues (intégrale de Riemann), ou réglées ou plus généralement boréliennes. La fonction $s \to f(s)g(t-s)$ vérifie alors les hypothèses de régularité satisfaites par f et g (continue, réglée ou borélienne).

Il faut d'autre part s'assurer que cette fonction n'est pas trop grande et peut être intégrée. Nous avons plus haut comment pouvait être utilisé le théorème de Fubini. Donnons maintenant des situations dans lesquelles on vérifie l'existence du produit de convolution à l'aide de majorations.

○ Si f est intégrable et g bornée, $f * g$ est définie. En effet, on a la majoration par une fonction intégrable : $|f(s)g(t-s)| \leq \|g\|_\infty\ |f(s)|$. Donc la fonction $s \to f(s)g(t-s)$ est intégrable et on a l'inégalité :

$$|(f * g)(t)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(s)g(t-s)|\ ds \leq \|g\|_\infty \int_{\mathbb{R}} |f(s)|\ ds,$$

d'où :

$$\|f * g\|_\infty \leq \|g\|_\infty \int_{\mathbb{R}} |f(s)|\ ds.$$

○ Si f est continue à support compact, $f * g$ est définie, pour toute fonction g intégrable sur tout compact. En effet, soit L tel que $f(s) = 0$, pour $|s| \geq L$. la fonction $s \to f(s)g(t-s)$ est continue à support dans $[-L, L]$ et

$$\int |f(s)g(t-s)|\ ds = \int_{-L}^{L} |f(s)||g(t-s)|\ ds \leq \|f\|_\infty \int_{t-L}^{t+L} |g(s)|\ ds < \infty.$$

On notera que, dans cette situation, $f * g$ n'est pas nécessairement bornée, contrairement au cas précédent. Si f est continue à support compact et g borélienne bornée, alors $f * g$ est continue. Il suffit pour le voir d'écrire :

$$|(f * g)(t+h) - (f * g)(t)| \leq \|g\|_\infty \int ||f(t+h-s) - f(t-s)|\ ds.$$

Exemple 1.2.8 *Exemples de produit de convolution*

a) Si f est la fonction identiquement égale à 1 et si g est intégrable, alors $f * g$ se réduit à la fonction constante égale à $\int g(s)\, ds$.

b) Soit $f = 1_{[-a,a]}$. Si g est intégrable (ou simplement localement intégrable), on peut définir $f * g$ qui s'écrit explicitement sous la forme :

$$(1_{[-a,a]} * g)(t) = \int_{t-a}^{t+a} g(s)\, ds.$$

On constate sur cet exemple un effet de régularisation de la convolution (un effet de moyenne) que nous étudierons au chapitre suivant.

c) Considérons les fonctions u_h de l'exemple (1.2.4). Soit $g(s) = s$. On a :

$$(u_h * g)(t) = \frac{1}{h^2}\int_0^h (h-s)(t-s+t+s)\, ds = \frac{2t}{h^2}\int_0^h (h-s)\, ds = t.$$

• **Convolution de $f \in L^p$ et $g \in L^q$**

1.2.9 Dans le cas de deux fonctions de carré intégrable, nous allons interpréter leur produit de convolution comme un produit scalaire de fonctions translatées. Cette méthode permet, de façon plus générale, de définir $f*g$, pour f et g appartenant respectivement à L^p et L^q avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, mais soulignons que ce n'est plus une opération interne aux espaces fonctionnels considérés.

Introduisons d'abord une notation pour l'action de $\mathbb{R}$ opérant sur lui-même par translation.

Notation 1.2.10 Pour tout réel t et toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$, notons $T_t f$ la fonction translatée de f par t : $s \in \mathbb{R} \to T_t f(s) = f(s-t)$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'application $f \to T_t f$ est un opérateur linéaire défini sur les espaces de fonctions sur $\mathbb{R}$. En particulier, T_t opère sur les espaces $L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p \le \infty$ et l'invariance de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ implique que ces opérateurs sont des isométries. De plus, il y a continuité en norme $\|\ \|_p$, pour $1 \le p < +\infty$ (mais pas pour $p = +\infty$) :

$$\lim_{t\to t_0} \|T_t f - T_{t_0} f\|_p = \lim_{t\to t_0} \|T_{t-t_0} f - f\|_p = 0.$$

On notera que, par contre, $\|T_t - T_{t_0}\| = \sup_{\|f\|_p \le 1} \|T_t f - T_{t_0} f\|_p = 2$, pour $t \neq t_0$.

Théorème 1.2.11 *Si $f \in L^1$ et $g \in L^\infty$, ou $f \in L^p$ et $g \in L^q$, avec $1 < p, q < \infty$ et $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, alors $f*g$ est bien définie et est continue. Si $1 < p < \infty$, $f*g$ tend vers 0 à l'infini ($f*g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$).*

Preuve : a) Soient $f \in L^p$ et $g \in L^q$. Notons $\widetilde{g}$ la fonction $s \to g(-s)$. La formule du produit de convolution s'écrit :

$$(f*g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(s)\, T_t\widetilde{g}(s)\, ds.$$

En particulier, pour $p = q = 2$, il s'agit du produit scalaire de deux fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ (pour des fonctions à valeurs réelles). Dans tous les cas, l'inégalité de Hölder implique que la fonction $s \to f(s)\ T_t\widetilde{g}(s)$ est bien intégrable, ce qui assure l'existence du produit de convolution, et on a :

$$|(f*g)(t)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(s)||T_t\widetilde{g}(s)|\ ds \leq \|f\|_p\|T_tg\|_q \leq \|f\|_p\|g\|_q.$$

On a donc :

$$\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_p\|g\|_q.$$

Pour f et g dans $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, nous savons que $f*g$ est continue à support compact. Par approximation, nous allons montrer que cette régularité de la fonction $f*g$ est encore vérifiée quand f est dans $L^p(\mathbb{R})$ et g dans $L^q(\mathbb{R})$, pour $1 < p < +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Il convient de traiter séparément le cas où $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^\infty(\mathbb{R})$.

b) Soit p tel que $1 < p < \infty$ (ce qui implique $1 < q < \infty$). D'après la densité de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ dans $L^p(\mathbb{R})$, $L^q(\mathbb{R})$, il existe des suites (f_n) et (g_n) dans $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ telles que $\lim_n \|f - f_n\|_p = 0$ et $\lim_n \|g - g_n\|_q = 0$. La suite $(\|f_n\|_p)_{n\geq 1}$ est bornée.

On a alors

$$\begin{aligned} \|f*g - f_n*g_n\|_\infty &\leq \|(f-f_n)*g\|_\infty + \|f_n(g-g_n)\|_\infty \\ &\leq \|f-f_n\|_p\|g\|_q + \|f_n\|_p\|g-g_n\|_q, \end{aligned}$$

ce qui prouve la convergence uniforme de la suite $(f_n * g_n)$ vers $f*g$, et donc la continuité de $f*g$. De plus, comme $f_n * g_n$ est à support compact, la limite $f*g$ est une fonction qui tend vers 0 à l'infini.

c) Soit maintenant $p = 1$ (ce qui implique $q = \infty$). Notons que, pour ϕ dans $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ et ψ dans $L^\infty(\mathbb{R})$, $\phi * \psi$ est uniformément continue.

Il existe une suite (f_n) dans $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ telle que $\lim_n \|f - f_n\|_1 = 0$. On a alors :

$$\|f*g - f_n*g\|_\infty \leq \|f-f_n\|_1\|g\|_\infty.$$

Ceci prouve la convergence uniforme de la suite $(f_n * g)$ vers $f*g$, et donc la continuité de $f*g$. Comme $f_n * g$ est uniformément continue, on a de plus la continuité uniforme de $f*g$.

□

Remarque 1.2.12 L'espace $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ n'est pas dense dans $L^\infty(\mathbb{R})$ pour la norme $\|\ \|_\infty$ (il est dense dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ pour cette norme). La convolée d'une fonction de $L^1(\mathbb{R})$ et d'une fonction g de $L^\infty(\mathbb{R})$ est continue et bornée, mais ne tend pas nécessairement vers 0 à l'infini. Par exemple, pour $f \in L^1(\mathbb{R})$ et g constante, égale à 1, on obtient : $(f*g)(t) = \int f(s)\ ds, \forall t \in \mathbb{R}$.

1.3 Convolution des fonctions périodiques

Pour fixer les idées, on raisonne avec des fonctions de période 1. On note $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ l'espace des fonctions continues périodiques de période 1. On se ramène au cas de la période égale à 1, en observant que, si f est a-périodique, $x \to f(ax)$ est 1-périodique.

Remarque 1.3.1 Si f est a-périodique, pour un $a > 0$, l'intégrale $\int_{t_0}^{t_0+a} f(t)\, dt$ ne dépend pas de t_0. En effet, soit $n \in \mathbb{Z}$ tel que $t_0 \leq na < t_0 + a$. Nous avons :

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_0+a} f(t)\, dt &= \int_{t_0}^{na} f(t)\, dt + \int_{na}^{t_0+a} f(t)\, dt\\ &= \int_{t_0-(n-1)a}^{a} f(t)\, dt + \int_0^{t_0+a-na} f(t)\, dt = \int_0^a f(t)\, dt.\end{aligned}$$

Définition 1.3.2 *(Produit de convolution de fonctions 1-périodiques)* Soient f et g deux fonctions continues 1-périodiques. On définit leur produit de **convolution** $f * g$ par :

$$(f * g)(t) = \int_0^1 f(s)g(t-s)\, ds.$$

On notera que cette définition tient compte du fait que les fonctions sont périodiques et diffère de celle donnée dans le cas de $\mathbb{R}$: l'intégrale est restreinte à un intervalle de longueur égale à la période.

Il est clair que $f*g$ est à son tour périodique de période 1. En utilisant le changement de variable $s \to t - s$ et la remarque 1.3.1, on obtient :

$$\begin{aligned}(f * g)(t) &= \int_0^1 f(s)g(t-s)\, ds = \int_{t-1}^{t} f(t-s)g(s)\, ds\\ &= \int_0^1 f(t-s)g(s)\, ds = (g * f)(t).\end{aligned}$$

La convolution est une opération interne à $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ ($f * g$ est continue, si f et g le sont). On démontre, comme sur $\mathbb{R}$, qu'elle est associative et commutative. Notons que les fonctions de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ sont uniformément continues et bornées et que $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ muni de la norme uniforme est une algèbre de Banach pour le produit ordinaire.

Théorème 1.3.3 *L'opération $(f, g) \to f * g$ définit sur $(\mathcal{C}(\mathbb{T}), \|\ \|_1)$ une structure d'algèbre normée (non complète) commutative.*

De même que sur $\mathbb{R}$, la convolution peut être étendue à des classes plus générales de fonctions. En particulier, on peut définir l'algèbre de convolution $(L^1(\mathbb{T}), *, \|\ \|_1)$, par la même méthode. Nous ne reproduisons pas les preuves qui sont identiques.

Théorème 1.3.4 *L'opération $(f, g) \to f * g$ définit sur $(L^1(\mathbb{T}), \|\ \|_1)$ une structure d'algèbre de Banach commutative.*

Algèbre des polynômes trigonométriques

Pour $k \in \mathbb{Z}$, notons e_k les fonction $t \to e^{2\pi ikt}$. Un polynôme trigonométrique (de période 1) est une combinaison linéaire finie des fonctions e_k, c'est-à-dire une fonction de la forme

$$P(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{2\pi ikt}. \tag{1.6}$$

Les polynômes trigonométriques forment une sous-algèbre de $(\mathcal{C}(\mathbb{T}), *)$ pour la convolution. De plus, on a le résultat simple et important suivant :

Proposition 1.3.5 *Si f est une fonction de période 1 intégrable sur $[0,1]$, pour tout polynôme trigonométrique P de période 1, $f * P$ est un polynôme trigonométrique de période 1.*

Preuve : On a, pour $P(t) = \sum_{-N}^{N} c_n(P)\ e^{2\pi int}$:

$$\begin{aligned}(f * P)(t) &= \int_0^1 f(s)(\sum_{-N}^{N} c_n(P)\ e^{2\pi in(t-s)})\ ds \\ &= \sum_{-N}^{N} c_n(P)(\int_0^1 f(s)e^{-2\pi ins}\ ds)e^{2\pi int}.\end{aligned}$$

Si l'on note pour $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = \int_0^1 f(s)e^{-2\pi ins}\ ds$ le coefficient de Fourier de f d'ordre n, on obtient donc :

$$(f * P)(t) = \sum_{-N}^{N} c_n(P)c_n(f)e^{2\pi int}. \tag{1.7}$$

□

1.4 Caractères sur un groupe

• Le cas discret

1.4.1 Considérons un groupe abélien G, son opération de groupe étant notée $+$. Pour l'instant, nous ne mettons pas de topologie sur G, ou nous considérons que G est muni de la tolopogie discrète (toute fonction est alors continue !).

Les groupes $(\mathbb{Z}, +)$ et les groupes quotients finis $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +)$, p entier ≥ 1, sont des exemples de groupes discrets.

Dans la suite, nous noterons $\mathcal{K}$ le groupe multiplicatif formé des nombres complexes de module 1 : $\mathcal{K} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\} = \{e^{2\pi it}, t \in \mathbb{R}\}$. Rappelons que ce groupe (qui est compact abélien et que l'on peut aussi voir comme le tore de dimension 1) est isomorphe à $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, l'application $t \to \exp(2\pi it)$ étant un isomorphisme du groupe $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ additif sur le groupe multiplicatif $\mathcal{K}$.

Définition 1.4.2 Un **caractère** sur G est un homomorphisme de G dans le groupe multiplicatif $\mathcal{K}$. C'est donc une fonction χ sur G à valeurs complexes de module 1, telle que :

$$\chi(t-s) = \chi(t)\chi(s)^{-1}, \forall t, s \in G.$$

On a donc pour un caractère χ, les propriétés suivantes : pour tout $t \in G$, $|\chi(t)| = 1$, $\chi(-t) = \chi(t)^{-1} = \overline{\chi(t)}$ et pour tous $t, s \in G$, $\chi(t+s) = \chi(t)\chi(s)$.

• **Cas de $\mathbb{Z}$**

Comme le groupe additif $\mathbb{Z}$ est engendré par un unique élément, l'entier 1, la valeur d'un caractère χ sur $\mathbb{Z}$ est complètement déterminée par sa valeur $\chi(1) = e^{2\pi ia}$ sur cet élément. Tout caractère χ sur $\mathbb{Z}$ est donc de la forme :

$$n \in \mathbb{Z} \to \chi(n) = \chi(1)^n = (e^{2\pi ia})^n = e^{2\pi ina}.$$

Notons que l'élement a dans la formule précédente est déterminé à un entier relatif près, d'après la périodicité des exponentielles complexes. Il y a donc une correspondance biunivoque entre l'ensemble des caractères sur $\mathbb{Z}$ et le quotient de $\mathbb{R}$ par $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire $\mathbb{T}$.

De la même façon, on montrera (exercice) que, pour tout caractère χ sur $\mathbb{Z}^d$, il existe des réels $a_1, \cdots, a_d$ tels que χ soit donné par :

$$n = (n_1, \cdots, n_d) \in \mathbb{Z}^d \to \chi(n) = \Pi_{k=1}^d (e^{2\pi ia_k})^{n_k} = e^{2\pi i \sum_1^d n_k a_k}.$$

Les réels (a_i) sont déterminés à des entiers relatifs près. Il y a donc une correspondance bijective entre l'ensemble des caractères sur $\mathbb{Z}^d$ et $\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$.

• **Groupe $G_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$**

Les caractères sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sont les caractères χ sur $\mathbb{Z}$ tels que $\chi(pn) = 1$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, soit $\chi(p) = 1$. Un caractère sur $\mathbb{Z}$ étant donné par $n \to \chi(n) = e^{2\pi ian}$, où a est un réel, la condition $\chi(p) = 1$ impose :

$$e^{2\pi iap} = 1,$$

et donc a est de la forme $a = \ell/p$, avec $\ell \in \mathbb{Z}$. L'entier ℓ est défini **modulo** p. On a ainsi obtenu la liste des caractères sur G_p : ils sont de la forme

$$e_\ell : k \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to e^{2\pi ik\ell/p}, \ \ell = 0, 1, \cdots, p-1.$$

L'ensemble des caractères de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est en correspondance bijective avec le groupe de départ $G_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Il s'identifie, comme G_p, au groupe des racines p-ièmes de l'unité.

• **Notion de caractère : cas général**

Dans le cas de $\mathbb{R}$, la définition purement algébrique de la notion de caractère ne suffit pas. Il convient de se limiter à des fonctions continues. Dans ce cas, et de façon générale pour un groupe muni d'une topologie, il nécessaire d'exiger la continuité des caractères. Avant de définir cette notion dans le cas général, donnons la définition d'un groupe topologique (en fait nous ne considèrerons que les cas simples de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{T}$ ou $\mathbb{T}^d$).

Définition 1.4.3 Un **groupe topologique abélien** G est un groupe abélien muni d'une topologie telle que l'application $(t, s) \to t - s$ soit continue de $G \times G$ dans G.

Définition 1.4.4 On appelle **caractère** sur un groupe abélien topologique tout homomorphisme χ **continu** du groupe G dans le groupe multiplicatif du cercle.

Nous avons déjà déterminé tous les caractère sur $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}^d$ (dans ce cas il n'y a pas de contrainte de continuité !). Considérons maintenant le cas de $\mathbb{R}$.

Proposition 1.4.5 *Pour tout caractère χ sur $\mathbb{R}$, il existe un unique réel u tel que χ soit de la forme :*

$$t \in \mathbb{R} \to \chi(t) = e^{2\pi iut}.$$

Preuve : Soit χ un caractère sur $\mathbb{R}$. D'après la propriété d'homomorphisme,

$$\chi(t+s) = \chi(t)\chi(s), \forall t, s \in \mathbb{R} \tag{1.8}$$

on peut écrire, pour tout $t_0 > 0$:

$$\chi(t) \int_0^{t_0} \chi(s)\ ds = \int_0^{t_0} \chi(t+s)\ ds = \int_t^{t+t_0} \chi(s)\ ds.$$

Comme la fonction χ est continue et égale à 1 en 0, pour t_0 proche de 0, l'intégrale dans le membre de gauche est de l'ordre de t_0 et elle est non nulle. (En effet, soit $\eta > 0$ tel que $|\chi(t) - 1| < \frac{1}{2}$, pour $|t| < \eta$. Nous avons :

$$|\int_0^{t_0} \chi(s)\ ds| \geq t_0 - |\int_0^{t_0} (\chi(s) - 1)\ ds| \geq \frac{1}{2} t_0 > 0.)$$

On peut donc écrire :

$$\chi(t) = [\int_0^{t_0} \chi(s)\ ds]^{-1} \int_t^{t+t_0} \chi(s)\ ds.$$

Cette relation montre que χ est dérivable avec une dérivée continue. On peut alors dériver en s la relation (1.8). On obtient $\chi'(t+s) = \chi'(s)\chi(t), \forall t, s \in \mathbb{R}$, puis en faisant $s = 0$, l'équation différentielle

$$\chi'(t) = \chi'(0)\chi(t),\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

La fonction χ est donc de la forme $\chi(t) = e^{zt}$, où z est un nombre complexe. Comme χ est de module 1, ce nombre est imaginaire pur : $z = 2\pi iu$, pour un réel u. Le caractère χ est donc de la forme $\chi(t) = e^{2\pi iut}$, pour un réel u.

□

Les caractères sur $\mathbb{T}$ se déduisent immédiatement de ceux du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$. De façon générale, si H est un sous-groupe fermé d'un groupe topologique G, les caractères sur le quotient G/H sont donnés par les caractères χ sur G tels que $\chi(h) = 1,\ \forall h \in H$ (le vérifier en exercice et dessiner le diagramme commutatif correspondant). Ceci, appliqué à $\mathbb{T}$ quotient de $\mathbb{R}$ par $\mathbb{Z}$, donne la proposition :

Proposition 1.4.6 *Pour tout caractère χ sur $\mathbb{T}$, il existe un unique entier relatif n tel que χ soit de la forme :*

$$t \in \mathbb{R} \to \chi(t) = e^{2\pi int}.$$

Preuve : Soit χ un caractère sur $\mathbb{T}$. On peut identifier χ à un caractère sur $\mathbb{R}$, qui, d'après la proposition précédente, est de la forme $\chi(t) = e^{2\pi iut}$, où u est un nombre réel déterminé de façon unique. Pour que χ définisse une caractère sur $\mathbb{T}$, il faut avoir $e^{2\pi iuk} = 1,\ \forall k \in \mathbb{Z}$, ce qui implique $e^{2\pi iu} = 1$, soit $u \in \mathbb{Z}$.

□

• Groupe dual d'un groupe topologique

Soit G un groupe topologique abélien. Si χ et χ' sont deux caractères sur G, on obtient un troisième caractère sur G en faisant leur produit. En effet, l'application $t \to \chi(t)\chi'(t)$ de G dans le sous-groupe des nombres complexes de module 1 est encore un caractère, noté $\chi.\chi'$.

Exemple 1.4.7

Sur $G_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, nous avons vu que les caractères sont de la forme $e_\ell, \ell = 0, 1, \cdots, p-1$. Cet ensemble est en bijection avec le groupe $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ lui-même. Pour $\ell, \ell' \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, on a, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$e_\ell(k)e_{\ell'}(k) = e^{2\pi i(\ell+\ell')k/p} = e_{\ell+\ell' \text{ mod } \mathrm{p}}(k).$$

La multiplication de deux caractères correspond donc à la somme modulo p :

$$e_\ell.e_{\ell'} = e_{\ell+\ell' \text{ mod } p}.$$

On a ainsi une structure de groupe sur la famille des caractères sur G_p : c'est le groupe dual de G_p, qui est isomorphe à G_p.

Exemple 1.4.8

Sur $\mathbb{Z}$, nous avons vu que les caractères sont de la forme $e_u, u \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Cet ensemble est en bijection avec le tore $\mathbb{T}$ de dimension 1. Pour $u, u' \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, on a, pour $k \in \mathbb{Z}$,

$$e_u(k)e_{u'}(k) = e^{2\pi i(u+u')k} = e_{u+u' \text{ mod } 1}(k).$$

La multiplication de deux caractères correspond donc à la somme modulo 1 :

$$e_u.e_{u'} = e_{u+u' \text{ mod } 1}.$$

On a ainsi une structure de groupe sur la famille des caractères sur $\mathbb{Z}$: c'est le groupe dual de $\mathbb{Z}$, qui est isomorphe à $\mathbb{T}$.

Définition 1.4.9 On appelle **groupe dual** de G le groupe topologique $\widehat{G}$ formé de l'ensemble des caractères de G muni de la loi produit $(\chi, \chi') \to \chi.\chi'$.

[Si l'on s'intéresse uniquement à l'étude élémentaire des caractères sur les groupes considérés ici, on pourra omettre ce passage.]

Dans la définition précédente, pour obtenir sur $\widehat{G}$ une structure de groupe topologique, il faut définir une topologie sur $\widehat{G}$.

Nous nous restreignons aux groupes G qui sont localement compacts, i.e. tels que tout point possède un voisinage relativement compact (il suffit que cette propriété soit vraie pour l'élément neutre du groupe). Les éléments de $\widehat{G}$ sont des fonctions. Nous allons définir une topologie sur cet ensemble de fonctions, en précisant en quel sens est définie la notion de convergence d'une suite de fonctions. Nous choisissons la topologie de la *convergence uniforme sur tout compact* : si (χ_n) est une suite de caractères sur G, nous disons que cette suite converge vers un caractère χ, si elle converge vers χ uniformément sur tout compact de G. On peut vérifier (exercice) qu'on obtient bien une topologie de groupe (continuité de l'application $(\chi, \chi') \to \chi.\chi'^{-1}$).

Nous avons déjà déterminé le groupe dual de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et celui de $\mathbb{Z}$. Dans le premier cas, il n'y a pas de difficultés, il s'agit d'un groupe fini. Dans le cas de $\mathbb{Z}$, comme nous l'avons vu, $\widehat{\mathbb{Z}}$ est isomorphe à $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Ici le groupe dual n'est pas discret.

On vérifie (exercice) que la topologie de groupe dual définie précédemment coïncide avec la topologie de $\mathbb{T}$.

Exemple 1.4.10

Sur $\mathbb{R}$, nous avons vu que les caractères sont de la forme $e_u(t) = e^{2\pi i u t}$, avec $u \in \mathbb{R}$. Cet ensemble est en bijection avec $\mathbb{R}$ lui-même. Il est clair que la structure de groupe du groupe des caractères correspond à la structure additive sur $\mathbb{R}$. On voit donc qu'algébriquement, le groupe dual de $\mathbb{R}$ est isomorphe au groupe additif de $\mathbb{R}$. Comme précédemment, il faut encore vérifier que la topologie de groupe dual coïncide avec la topologie de $\mathbb{R}$. Nous laissons cette vérification en exercice.

Exemple 1.4.11

Nous avons enfin le cas du groupe du cercle $\mathbb{T}$. Ici le groupe dual s'identifie à $\mathbb{Z}$ (cf. proposition (1.4.6)). On pourra vérifier en exercice que la topologie de groupe dual coïncide avec la topologie (discrète) de $\mathbb{Z}$. On est donc ici dans le cas d'un groupe dual d'un groupe **compact** abélien et on note que ce dual est **discret**.

Résumons les résultats obtenus :

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} &\simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \\ \widehat{\mathbb{Z}} &\simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z} = \mathbb{T}, \\ \widehat{\mathbb{R}} &\simeq \mathbb{R}, \\ \widehat{\mathbb{T}} &\simeq \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

On remarque que dans les exemples traités :
- le dual d'un groupe discret est compact,
- le dual d'un groupe compact est discret,
- le dual du dual d'un groupe G est isomorphe au groupe de départ.

Nous nous bornerons à mentionner qu'il s'agit là de propriétés générales que l'on établit dans l'étude de la dualité des groupes abéliens topologiques (théorie de la dualité de Pontryagin).

1.5 Homomorphismes d'algèbres de convolution

1.5.1 Soit G un groupe topologique abélien, localement compact. De même que l'on construit l'intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, $f \to \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx$, on peut construire sur G une intégrale $f \in \mathcal{C}_c(G) \to \int_G f(g)\, dg$ invariante par les translations de G ($\int_G f(g+g_0)\, dg = \int_G f(g)\, dg, \forall g_0 \in G$) unique à un facteur constant près et, à partir de là, l'espace $L^1(G)$ des fonctions intégrables sur G.

Nous n'aborderons pas ici la construction générale, mais nous examinons quatre exemples où cette situation se présente de façon explicite : $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^d$ munis de la mesure de Lebesgue habituelle,

$\mathbb{T}$ ou $\mathbb{T}^d$ munis de la mesure de Lebesgue restreinte à un "domaine fondamental", c'est-à-dire l'intervalle $[0,1]$ dans le cas où $d = 1$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}^d$ munis de la mesure de comptage (somme des séries absolument convergentes) et enfin les groupes abéliens finis, dont les plus simples sont les groupes $G_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, p entier ≥ 1.

Dans tous les cas, on dispose sur G de l'espace vectoriel $\mathcal{C}_0(G)$ des fonctions continues à support compact et d'une forme linéaire invariante sur cet espace, $f \to \int_G f(g)\ dg$. Cette forme linéaire définit une norme, $f \to \|f\|_1 = \int_G |f(g)|\ dg$ sur $\mathcal{C}_0$. L'espace $L^1(G)$ est l'espace de Banach complété de $\mathcal{C}_0$ pour cette norme et peut être réalisé comme un espace de fonctions sur G.

On obtient ainsi les espaces $L^1(G)$ correspondant aux quatre situations examinées dans ce chapitre : $L^1(\mathbb{R})$, $L^1(\mathbb{T})$, $\ell^1(\mathbb{Z})$, $\ell(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Ces espaces sont munis d'un produit de convolution défini formellement pour $f_1, f_2 \in L^1(G)$ par :

$$(f_1 * f_2)(g) = \int_G f_1(g-h) f_2(h)\ dh.$$

Rappelons encore qu'il s'agit bien d'une intégrale dans le cas de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{T}$, mais d'une somme discrète dans le cas de $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

On a de cette façon contruit l'agèbre de convolution $(L^1(G), \|\ \|_1, *)$.

En raisonnant toujours formellement, montrons qu'on peut définir un homomorphisme de l'algèbre de convolution $(L^1(G), *)$ dans l'algèbre (multiplicative) des fonctions sur le groupe dual $\widehat{G}$ de G. Etant donnée $f \in L^1(G)$, on lui associe la fonction $\widehat{f}$, notée aussi $\mathcal{F}f$, sur $\widehat{G}$ définie par :

$$\widehat{f}(\chi) = \int_G f(g)\ \overline{\chi(g)}\ dg. \tag{1.9}$$

Compte-tenu de la propriété d'homomorphisme des caractères, on a la relation d'homomorphisme au sens des lois de convolution "$*$" et de multiplication "$.$" :

$$\widehat{f_1 * f_2}(\chi) = \widehat{f_1}(\chi)\widehat{f_2}(\chi). \tag{1.10}$$

En utilisant, toujours formellement, le "théorème de Fubini" et l'invariance par translation de l'intégrale sur G, on obtient en effet :

$$\begin{aligned}
\widehat{f_1 * f_2}(\chi) &= \int_G [\int_G f_1(g-h) f_2(h)\ dh]\ \overline{\chi(g)}\ dg \\
&= \int_G [\int_G f_1(g-h)\overline{\chi(g)}\ dg]\ f_2(h)\ dh \\
&= \int_G [\int_G f_1(g-h)\overline{\chi(g-h)}\ dg]\ f_2(h)\overline{\chi(h)}\ dh \\
&= (\int_G f_1(g)\overline{\chi(g)}\ dg)\ (\int_G f_2(h)\overline{\chi(h)}\ dh) \\
&= \widehat{f_1}(\chi)\ \widehat{f_2}(\chi).
\end{aligned}$$

Pour tout caractère χ, l'application $f \to \widehat{f}(\chi)$ est donc un homomorphisme (continu) de l'algèbre $(L^1(G), *)$ dans $\mathbb{C}$. On peut montrer qu'on obtient ainsi tous les homomorphismes de $(L^1(G), *)$ dans $\mathbb{C}$ (voir exercice pour les cas de $G = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$).

Nous allons appliquer successivement cette construction aux quatre exemples de groupes envisagés plus haut. (Attention : les notations corespondent soit à $\int_G f(g)\ \overline{\chi(g)}\ dg$, soit à $\int_G f(g)\ \chi(g)\ dg$).

Exemple 1.5.2

Sur $G_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, les caractères sont de la forme $e_\ell, \ell = 0, 1, \cdots, p-1$. Une fonction sur G_p est une suite périodique s que l'on peut restreindre à l'ensemble d'indices $\{0, \dots, p-1\}$. A une telle suite s, on associe une nouvelle suite périodique (fonction sur le groupe dual de G_p qui s'identifie à G_p), sa **transformée de Fourier discrète** définie (en choisissant le signe '+' dans l'exponentielle) par :

$$\mathcal{F}s(n) = \widehat{s}(n) = \sum_{k=0}^{p-1} s(k) e^{2\pi i n k/p}, \ n = 0, 1, \dots, p-1.$$

Cette transformation joue un grand rôle dans les applications de l'analyse de Fourier. En effet, d'une part elle sert de modèle discret fini remplaçant dans les calculs numériques les transformées définies sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$, d'autre part il existe des algorithmes rapides de calcul de cette transformée de Fourier discrète (algorithme "FFT"= Fast Fourier Transform).

L'application $\mathcal{F} : s \to \widehat{s}$ est une application linéaire de $\ell(G_p)$ dans lui-même.

On a une formule d'inversion élémentaire. Si l'on définit la transformée de Fourier discrète inverse $\mathcal{I}$ par

$$\mathcal{I}s(n) = \frac{1}{p} \sum_{0}^{p-1} s(k) e^{-2\pi i n k/p}, \ n = 0, 1, \dots, p-1,$$

on a la relation :

$$\mathcal{I} \circ \mathcal{F} = \mathcal{F} \circ \mathcal{I} = Id.$$

Exemple 1.5.3

Sur $\mathbb{Z}$, les caractères sont de la forme $e_u, u \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Une fonction sur $\mathbb{Z}$ est une suite bilatère $c = (c(n), n \in \mathbb{Z})$. On lui associe une fonction définie sur le groupe dual $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ par

$$(\mathcal{F}c)(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c(n) e^{2\pi i n t}.$$

La fonction $\mathcal{F}c$ est bien définie si la condition $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c(n)| < \infty$ est satisfaite et c'est alors une fonction continue 1-périodique. Il s'agit de la fonction dont les coefficients de Fourier sont les coefficients $c(n)$ de la suite (voir chapitre *séries de Fourier*).

Exemple 1.5.4

Sur $\mathbb{R}$, les caractères sont de la forme $e_u(t) = e^{2\pi i u t}$, avec $u \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction sur $\mathbb{R}$. Si f est dans $L^1(\mathbb{R})$, on lui associe sa **transformée de Fourier**, fonction notée $\widehat{f}$ ou encore $\mathcal{F}f$ sur le groupe dual, donc sur $\mathbb{R}$, définie par

$$\widehat{f}(u) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \, \overline{e_u(t)} \, dt = \int_{\mathbb{R}} f(t) \, e^{-2\pi i u t} \, dt.$$

En appliquant le théorème de Fubini, on vérifie que l'application $f \to \mathcal{F}f$ est un homomorphisme de l'algèbre de convolution $(L^1(\mathbb{R}), *)$ dans l'algèbre des fonctions sur $\mathbb{R}$ muni du produit ordinaire (voir chapitre sur la *transformation de Fourier*).

Exemple 1.5.5

Enfin, dans le cas du groupe du cercle $\mathbb{T}$, le groupe dual s'identifie à $\mathbb{Z}$ et la construction consiste à associer à une fonction f 1-périodique appartenant à $L^1(\mathbb{T})$, la suite $(c_n(f))$ définie par :

$$c_n(f) = \int_0^1 f(t)\ e^{-2\pi int}\ dt.$$

Il s'agit de la suite des coefficients de Fourier de f.

Annexe (Rappels)

A. Le théorème de Fubini (rappels)

Rappelons d'abord un énoncé élémentaire pour des fonctions continues.

Soit ϕ une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$, continue à support compact. Pour chaque x, la fonction $y \to \phi(x,y)$ est continue à support compact sur $\mathbb{R}$. On peut donc l'intégrer et l'intégrale définit une nouvelle fonction continue à support compact que l'on peut intégrer à son tour. La version élémentaire du théorème de Fubini assure que le résultat ne dépend pas de l'ordre d'intégration.

Proposition 1.5.6 $\int_{\mathbb{R}}(\int_{\mathbb{R}} \phi(x,y)\ dy)\ dx = \int_{\mathbb{R}}(\int_{\mathbb{R}} \phi(x,y)\ dx)\ dy.$

Preuve : On utilise le fait que les fonctions continues à support compact sur $\mathbb{R}^2$ sont des limites uniformes de fonctions décomposables, i.e. de la forme

$$\psi(x,y) = \sum_{i,j} u_i(x) v_j(y), \tag{1.11}$$

où u_i, v_j sont des fonctions continues à support compact sur $\mathbb{R}$ et $a_{i,j}$ des constantes.

(Pour montrer la densité de ces fonctions, on peut utiliser le théorème de Stone-Weierstrass rappelé ci-dessous, ou utiliser directement l'uniforme continuité des fonctions continues à support compact.)

Pour les fonctions de cette forme, il est clair que l'on peut permuter l'ordre d'intégration. Le résultat analogue pour une fonction ϕ continue à support compact quelconque s'obtient par passage à la limite : soit K un rectangle compact de $\mathbb{R}^2$ contenant le support de ϕ; pour tout $\epsilon > 0$, il existe ψ de la forme (1.11) et à support dans K telle que $\|\phi - \psi\|_\infty < \epsilon$.

□

[Rappel : Théorème de Stone-Weierstrass) Soit (E,d) un espace métrique compact. Soit $\mathcal{B}$ une sous-algèbre de l'algèbre $\mathcal{C}(E)$ des fonctions continues sur E à valeurs réelles, contenant les constantes. Si $\mathcal{B}$ sépare les points de E, $\mathcal{B}$ est dense dans $\mathcal{C}(E)$ muni de la norme uniforme.]

Rappelons maintenant l'énoncé du théorème de Fubini dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue. Nous l'énoncerons pour des fonctions de deux variables.

Etant donnée une fonction f de deux variables, on obtient, en fixant l'une des deux coordonnées, des fonctions "**partielles**" d'une seule variable. Si f est borélienne, les fonctions partielles pour x fixé, $y \to f(x,y)$ et pour y fixé, $x \to f(x,y)$ sont boréliennes. On peut examiner si elles sont intégrables.

Théorème 1.5.7 *Soit f une fonction borélienne de deux variables.*

i) Si f est dans $L^1(\mathbb{R}^2)$, alors, pour presque tout x, la fonction $y \to f(x,y)$ est intégrable, la fonction d'une variable $x \to \int f(x,y)\, dy$ est à son tour intégrable et nous avons :

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\ dy\ dx = \int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\ dy)\ dx = \int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\ dx)\ dy. \tag{1.12}$$

ii) Inversement, si la fonction $y \to f(x,y)$ est intégrable, pour presque tout x, et vérifie

$$\int (\int_{\mathbb{R}} |f(x,y)|\ dy)\ dx < +\infty,$$

alors f est dans $L^1(\mathbb{R}^2)$ et vérifie donc (1.12).

B. Dualité dans les espaces ℓ^p

(B.1) Soit $1 \leq p < \infty$. Soit y un élément de $\ell^q(\mathbb{N})$, où q défini par $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ est l'exposant conjugué de p. L'application $x \to y^*(x) = \sum_n x_n \overline{y_n}$ définit une forme linéaire continue sur $\ell^p(\mathbb{N})$, puisque, d'après l'inégalité de Hölder dans le cas discret, cette série est convergente et vérifie $\sum_n |x_n||y_n| \leq \|x\|_p \|y\|_q$. On a donc $\|y^*\| \leq \|y\|_q$.

Les termes y_n de la suite y s'écrivent $y_n = e^{i\theta_n}|y_n|$, avec θ_n réel. Posons $z = (z_n)$ avec $z_n = e^{i\theta_n}|y_n|^{q-1}$. On a $\|z\|_p^p = \|y\|_q^q$, soit $\|z\|_p = \|y\|_q^{q/p}$; d'où :

$$y^*(z) = \sum_n e^{i\theta_n}|y_n|^{q-1}\overline{y_n} = \sum_n |y_n|^q = \|z\|_p \|y\|_q.$$

On a ainsi l'égalité $\|y^*\| = \|y\|_q$. La correspondance $y \to y^*$ est donc une isométrie de $\ell^q(\mathbb{N})$ dans le dual de $\ell^p(\mathbb{N})$.

On note qu'ici la borne supérieure dans le calcul de la norme de la forme linéaire définie par y est atteinte (sur la suite z).

Montrons que l'on obtient ainsi toutes les formes linéaires continues sur $\ell^p(\mathbb{N})$.

Proposition 1.5.8 *Pour tout $p \in [1, \infty[$, l'application $y \to y^*$ définit une isométrie surjective de $\ell^q(\mathbb{N})$ sur le dual de $\ell^p(\mathbb{N})$.*

Preuve : Il est clair que, pour toute forme linéaire ϕ sur un espace de suites contenant l'espace $\ell_c(\mathbb{N})$ des suites à support fini, la restriction de ϕ à ce sous-espace est donnée, pour $x \in \ell_c(\mathbb{N})$, par $\phi(x) = \sum_n x_n \overline{y_n}$, avec $y_n = \phi(\delta_n)$, cette somme se réduisant à la somme d'un nombre fini de termes.

Il reste donc à montrer que la suite y est dans $\ell^q(\mathbb{N})$. Faisons le raisonnement dans le cas $1 < p < \infty$. Nous utilisons pour cela la suite z introduite précédemment, mais tronquée au rang L. Soit $z^{(L)}$ telle que $z_n^{(L)} = e^{i\theta_n}|y_n|^{q-1}$, pour $1 \leq n \leq L$, et nulle ailleurs.

Supposons maintenant que ϕ soit une forme linéaire continue sur $\ell^p(\mathbb{N})$. Nous avons :

$$|\phi(z^{(L)})| = |\sum_1^L e^{i\theta_n}|y_n|^{q-1}\overline{y_n}| = \sum_1^L |y_n|^q \leq \|\phi\| \|z^{(L)}\|_p = \|\phi\| (\sum_1^L |y_n|^q)^{1/p}.$$

D'où $(\sum_1^L |y_n|^q)^{1/q} \leq \|\phi\|$, pour tout L, et donc $y \in \ell^q(\mathbb{N})$, avec $\|y\|_q = \|\phi\|$.

□

1.6 Exercices

Exercice 1.6.1

a) Montrer que l'espace $\ell^1(\mathbb{Z})$ muni de la norme $u \to \|u\|_1 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_n|$ est un espace vectoriel normé complet (espace de Banach),

b) Montrer que, muni de la loi définie par le produit de convolution '$*$ ', $(\ell^1(\mathbb{Z}), \| \ \|_1, *)$ forme une algèbre de Banach possédant une unité (la suite δ_0).

Exercice 1.6.2 *$(\mathcal{C}_c(\mathbb{R}),\ *\ )$, $(L^1(\mathbb{R}),\ *\ )$ n'ont pas d'unité*

Soit h un réel > 0. On considère les fonctions u_h définies par :

$$u_h(t) \ = \ \begin{cases} \frac{1}{h^2}(h - |t|), & \text{pour } |t| \le h, \\ 0, & \text{pour } |t| \ge h. \end{cases}$$

Soit $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, l'espace des fonctions continues à support compact sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que $f * u_h$ s'écrit :

$$(f * u_h)(t) = \frac{1}{h^2} \int_0^h (h - s)\ (f(t - s) + f(t + s))\ ds.$$

b) Montrer que l'on a, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, $\lim_{h\to 0} f * u_h = f$, la limite étant uniforme.

c) En utilisant ce résultat, prouver que l'algèbre de convolution $(\mathcal{C}_c(\mathbb{R}),\ *)$ n'a pas d'unité.

[[*Indications :*

On supposera qu'une telle fonction f_0 existe. On a : $\lim_h f_0 * u_h = f_0$, mais aussi, si f_0 est une unité pour la convolution : $f_0 * u_h = u_h$. Comme $\lim_{h\to 0} u_h(t) = 0$, pour $t \neq 0$, ceci est impossible.]]

d) Etendre ce résultat à $L^1(\mathbb{R})$.

Exercice 1.6.3

a) Soit d un entier ≥ 1. Montrer que, pour tout caractère χ sur $\mathbb{Z}^d$, il existe des réels $a_1, \cdots, a_d$ tels que χ soit de la forme :

$$n = (n_1, \cdots, n_d) \in \mathbb{Z}^d \to \chi(n) = \Pi_{k=1}^d (e^{2\pi i a_k})^{n_k} = e^{2\pi i \sum_1^d n_k a_k}.$$

b) Montrer que le groupe dual de $\mathbb{Z}^d$ est isomorphe au tore $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ de dimension d.

Exercice 1.6.4 *Continuité des homomorphismes d'algèbre de Banach dans* $\mathbb{C}$

Montrer que tout homomorphisme ϕ d'une algèbre normée de Banach A dans $\mathbb{C}$ est continu, de norme au plus 1.

[[⇒ *Indications :*

Notons '$*$ ' la deuxième loi de l'algèbre A. Rappelons qu'on a, par hypothèse, $\|u * v\| \leq \|u\| \, \|v\|$, $\forall u, v \in A$.

Cette inégalité implique l'inégalité

$$\|v^{*n}\| \leq \|v\|^n, \forall v \in A, \ \forall n \geq 0.$$

Supposons qu'il existe v_0 dans A tel que $|\phi(v_0)| > \|v_0\|$. Soit $v = v_0/\phi(v_0)$.

L'inégalité sur les normes $\|v^{*n}\| \leq \|v\|^n$ et l'inégalité $\|v\| < 1$ montrent que la série géométrique $-(v + v^{*2} + \ldots + v^{*n} + \ldots)$ converge. Sa somme w vérifie $v + w = v * w$.

On a donc : $\phi(v) + \phi(w) = \phi(v)\phi(w)$, avec $\phi(v) = 1$, ce qui est impossible.

On observera que la preuve repose sur le fait que, dans une algèbre de Banach, pour tout élément y tel que $\|y\| < 1$, il existe w tel que $y + w = y * w$]]

Exercice 1.6.5 *Homomorphismes de l'algèbre de convolution* $(\ell^1(\mathbb{Z}), *)$

1) Montrer que, pour tout réel u, l'application

$$c \in \ell^1(\mathbb{Z}) \to \sum_{n \in \mathbb{Z}} c(n) e^{2\pi i u n},$$

est un homomorphisme de l'algèbre de convolution $(\ell^1(\mathbb{Z}), *)$ dans $\mathbb{C}$.

Nous allons montrer que tous les homomorphismes de $(\ell^1(\mathbb{Z}), *)$ dans $\mathbb{C}$ sont de cette forme.

2) Soit ϕ un homomorphisme de $(\ell^1(\mathbb{Z}), *)$ dans $\mathbb{C}$.

Montrer que l'application $c \in \ell^1(\mathbb{Z}) \to \phi(c)$ est une forme linéaire continue sur $\ell^1(\mathbb{Z})$.

3) Montrer que, pour toute forme linéaire continue λ sur l'espace vectoriel normé $\ell^1(\mathbb{Z})$, il existe une suite bornée α, telle que

$$\lambda(c) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha(n) c(n), \ \forall c \in \ell^1(\mathbb{Z}).$$

4) Pour $p \in \mathbb{Z}$, on note δ_p la suite définie par $\delta_p(n) = 1$, si $n = p$, $= 0$, si $n \neq p$. [[On observe que $\delta_p * \delta_q = \delta_{p+q}$, $\forall p, q \in \mathbb{Z}$, d'où $\delta_p = \delta_1^{*p}$, $\forall p \in \mathbb{Z}$.]]

En appliquant ϕ aux suites δ_p, montrer que la suite λ est de la forme $\lambda(n) = e^{2\pi i u n}$, pour un réel u.

Exercice 1.6.6 *Homomorphismes de l'algèbre de convolution* $(L^1(\mathbb{R}), *)$

Nous savons que, pour tout réel u, l'application $f \to \widehat{f}(u)$ est un homomorphisme de l'algèbre de convolution $(L^1(\mathbb{R}), *)$ dans $\mathbb{C}$. Nous allons montrer que tous les homomorphismes de $(L^1(\mathbb{R}), *)$ dans $\mathbb{C}$ sont de cette forme.

1) Soit ϕ un homomorphisme de $(L^1(\mathbb{R}), *)$ dans $\mathbb{C}$.

Montrer que l'application $f \in L^1(\mathbb{R}) \to \phi(f)$ est une forme linéaire continue sur $L^1(\mathbb{R})$ (cf. exercice 1.6.4).

2) On admettra que, pour toute forme linéaire continue λ sur l'espace vectoriel normé $L^1(\mathbb{R})$, il existe une fonction α_λ dans $L^\infty(\mathbb{R})$, telle que

$$\lambda(f) = \int f(t)\ \alpha_\lambda(t)\ dt,\ \forall f \in L^1(\mathbb{R}).$$

a) Montrer qu'il existe une fonction $\alpha \in L^\infty(\mathbb{R})$ telle que ϕ soit de la forme :

$$f \in L^1(\mathbb{R}) \to \phi(f) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\ \alpha(t)\ dt.$$

b) A partir des relations

$$\begin{aligned} \phi(f) \int g(s)\ \alpha(s)\ ds &= \phi(f)\phi(g) \\ &= \phi(f * g)\ = \int (\int f(t-s)\ g(s)\ ds)\ \alpha(t)\ dt \\ &= \int (\int f(t-s)\ \alpha(t)\ dt)\ g(s)\ ds, \end{aligned}$$

montrer que l'on a, pour presque tout s,

$$\phi(f)\ \alpha(s) = \int f(t-s)\ \alpha(t)\ dt. \tag{1.13}$$

c) En déduire qu'il existe une version continue de α vérifiant la relation (1.13).

3) a) Montrer que la relation

$$\int \int F(t,s)\ [\alpha(t+s) - \alpha(t)\alpha(s)]\ dt\, ds = 0,$$

est vérifiée pour $F(t,s) = f(t)g(s)$, avec f et g dans $L^1(\mathbb{R})$ et s'étend à toutes les fonctions F de $L^1(\mathbb{R}^2)$.

b) En déduire que

$$\alpha(t+s) = \alpha(t)\,\alpha(s), \quad \text{pour presque tous } t, s \in \mathbb{R}.$$

c) Etablir enfin la propriété d'homomorphisme :

$$\alpha(t+s) = \alpha(t)\,\alpha(s),\ \forall t, s \in \mathbb{R}.$$

4) En conclure que, pour un réel u, α est de la forme $\alpha(t) = e^{2\pi i u t}$.

Exercice 1.6.7

1) Soit (χ_n) une suite de caractères sur $\mathbb{R}$, $\chi_n(t) = e^{2\pi i a_n t}$. Montrer que la convergence uniforme sur tout compact de la suite (χ_n) vers un caractère χ de la forme $\chi(t) = e^{2\pi i a t}$, où a est un réel, équivaut à la convergence de la suite de réels (a_n) vers a.

2) En déduire que le groupe topologique dual de $\mathbb{R}$ est isomorphe à $\mathbb{R}$.

[[*Indications* Pour montrer le point 1, on pourra observer que, si (a_n) est une suite telle que $\lim_n e^{2\pi i a_n t} = 1$, pour tout réel t, alors (théorème de convergence dominée de Lebesgue), on a :

$$\lim_n \int_0^\alpha e^{2\pi i a_n t}\, dt = \alpha,$$

pour tout $\alpha > 0$. Nous avons

$$\int_0^\alpha e^{2\pi i a_n t}\, dt = \frac{1}{2\pi i a_n}(e^{2\pi i a_n \alpha} - 1), \text{ pour } a_n \neq 0.$$

En notant I_n l'intégrale, nous obtenons $2\pi |a_n| |I_n(\alpha)| \leq 2$. Comme $\lim_n I_n(\alpha) = \alpha$ et comme α peut être pris arbitrairement grand, on en déduit que $\lim_n a_n = 0$.]]

Notons que l'on peut montrer, de façon générale, que la topologie de la convergence uniforme sur tout compact définit une topologie de groupe topologique sur le groupe des caractères d'un groupe topologique abélien localement compact.

Chapitre 2

Applications de la convolution sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{T}$

Dans le chapitre *Algèbres de convolution*, nous avons défini sous certaines conditions la convolution entre fonctions sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{T}$. Formellement, la convolution entre deux fonctions f et g est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(s)g(t-s)\ ds. \tag{2.1}$$

Nous avons traité le cas de l'espace $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ des fonctions continues à support compact et montré que sur $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ la convolution définit une loi interne associative et commutative. L'espace $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ muni de l'addition, de la multiplication par les scalaires et du produit de convolution a une **structure d'algèbre commutative**. Puis nous avons étendu la convolution aux fonctions intégrables, définissant ainsi une structure d'algèbre de convolution sur $L^1(\mathbb{R})$.

Nous avons vu également qu'il est possible de définir la convolée, $f*g$, pour $f \in L^p(\mathbb{R})$, $g \in L^q(\mathbb{R})$, si $p, q \geq 1$ sont des exposants conjugués ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), ainsi que pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, $g \in L^\infty\mathbb{R})$.

Rappelons enfin que la convolution est également définie dans le cas des espaces analogues de fonctions 1-périodiques, à condition de la définir par la formule :

$$(f * g)(t) = \int_0^1 f(s)g(t-s)\ ds. \tag{2.2}$$

Nous donnons maintenant plusieurs applications du procédé de convolution. Nous étudierons en particulier les propriétés de régularisation par convolution et la notion importante d'identité approchée pour la convolution, qui permet d'obtenir des résultats d'approximation.

2.1 Régularisation par convolution

Nous montrons que la convolution a un effet de régularisation. Ainsi, nous avons vu au chapitre *algèbres de convolution* que, si f est une fonction intégrable et g une fonction mesurable bornée, $f * g$ est continue (voir aussi *exercice 2.5.2*). Le produit de convolution "hérite" également, sous certaines conditions, les propriétés de différentiabilité vérifiées éventuellement par l'un ou l'autre des facteurs.

Proposition 2.1.1 *Soient f une fonction intégrable et g une fonction bornée, dérivable, de dérivée g' continue et bornée. La fonction $f * g$ est dérivable et de dérivée $(f * g)' = f * g'$.*

Preuve : D'après le théorème des accroissements finis, il existe un nombre $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$|\frac{1}{h}[g(t+h-s) - g(t-s)]| = |g'(t+\theta h - s)| \leq \|g'\|_\infty.$$

La famille de fonctions (dépendant du paramètre h) :

$$s \to \frac{1}{h} f(s)[g(t+h-s) - g(t-s)]$$

est donc majorée par la fonction intégrable fixe $s \to \|g'\|_\infty |f(s)|$ et on peut appliquer le *théorème de convergence dominée de Lebesgue* :

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}[(f*g)(t+h) - (f*g)(t)] &= \lim_{h\to 0} \int f(s) \frac{1}{h}[g(t+h-s) - g(t-s)]\ ds \\
&= \int f(s)\ \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}[g(t+h-s) - g(t-s)]\ ds \\
&= \int f(s) g'(t-s)\ ds = (f * g')(t).
\end{aligned}$$

□

En appliquant la proposition aux dérivées successives de $f * g$, on obtient :

Corollaire 2.1.2 *Si f est une fonction intégrable et g une fonction bornée indéfiniment dérivable à dérivées bornées, la fonction $f * g$ est indéfiniment dérivable.*

Corollaire 2.1.3 *Si f et g sont deux fonctions indéfiniment dérivables, bornées et intégrables ainsi que leur dérivées , on a, pour tous entiers $p, q \geq 1$:*

$$(f * g)^{(p+q)} = f^{(p)} * g^{(q)}. \tag{2.3}$$

Proposition 2.1.4 *Si f est une fonction dans $L^\infty(\mathbb{R})$ et g une fonction dérivable intégrable, ayant une dérivée continue et intégrable, la fonction $f*g$ est dérivable, de dérivée $(f*g)' = f*g'$.*

Preuve : Dans la démonstration précédente, nous avons utilisé un procédé de passage à la limite. Nous utilisons un autre type de raisonnement.

Nous savons que la fonction $f * g'$ est bien définie et continue. Elle est la dérivée de la fonction $x \to \int_a^x (f * g')(t)\ dt$, où a est une valeur fixée. Il suffit donc de démontrer que cette dernière fonction est égale à une constante près à la fonction $f * g$.

On obtient en échangeant l'ordre d'intégration grâce au théorème de Fubini :

$$\begin{aligned}
\int_a^x (f * g')(t)\ dt &= \int_a^x \int_{\mathbb{R}} f(s)\ g'(t-s)\ ds\ dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(s)\ (\int_a^x g'(t-s)\ dt)\ ds \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(s)\ [g(x-s) - g(a-s)] ds \\
&= (f*g)(x) - (f*g)(a).
\end{aligned}$$

Corollaire 2.1.5 *Si f est une fonction dans $L^\infty(\mathbb{R})$ et g une fonction indéfiniment dérivable et intégrable ainsi que toutes ses dérivées, la fonction $f * g$ est indéfiniment dérivable et on a :*

$$(f * g)^{(n)} = f * g^{(n)}, \ \forall n \geq 1.$$

Remarques 2.1.6 Dans la formule de dérivation, on ne dérive que l'un des facteurs, contrairement à la formule de dérivation d'un produit ordinaire. Noter que l'on peut choisir le facteur que l'on dérive, si des hypothèses convenables de régularité et de taille des fonctions sont vérifiées.

La convolution permet de régulariser une fonction, mais ne permet pas de contrôler le comportement à l'infini de la fonction convolée. De même, la multiplication par une fonction régulière ne permet pas de régulariser une fonction. Par contre, par multiplication par une fonction, on peut obtenir une fonction "petite" à l'infini, le procédé le plus radical étant de multiplier par une fonction à support compact !

2.2 Convolution et approximation

• Identités approchées

Définition 2.2.1 On dit qu'une suite $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions intégrables forme une **identité approchée**, si elle vérifie les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \phi_n(x) &\geq 0, \forall x, \forall n \in \mathbb{N}, & (2.4) \\ \int \phi_n(x)\, dx &= 1, \forall n \in \mathbb{N}, & (2.5) \\ \lim_{n\to\infty} \int_{-\eta}^{\eta} \phi_n(x)\, dx &= 1, \forall \eta > 0. & (2.6) \end{aligned}$$

Comme l'intégrale totale vaut 1, une condition équivalente à la condition (refconv2.1.3) est :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{|x|>\eta} \phi_n(x)\, dx = 0, \ \forall \eta > 0.$$

De façon analogue, on dit qu'une famille de fonctions intégrables $(\phi_t)_{t\in I}$, où t varie dans un intervalle I, forme une identité approchée, pour t tendant vers t_0, si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} \phi_t(x) &\geq 0, \forall x, \forall t \in I, & (2.7) \\ \int \phi_t(x)\, dx &= 1, \forall t \in I, & (2.8) \\ \lim_{t\to t_0} \int_{-\eta}^{\eta} \phi_t(x)\, dx &= 1, \forall \eta > 0. & (2.9) \end{aligned}$$

Une condition supplémentaire

Les conditions 1), 2) et 3) suffisent à établir qu'une identité approchée forme une approximation de l'identité (d'où la terminologie) dans l'algèbre de convolution $(L^1(\mathbb{R}), \| \|_1, *)$ (voir théorème (2.2.4) ci-dessous). Néanmoins il est utile, dans certains théorèmes de convergence ponctuelle, de renforcer les propriétés d'identité approchée par la condition 4) suivante :

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|x|\geq\eta} \phi_n(x) = 0, \ \forall\eta > 0. \tag{2.10}$$

Dans le cas des identités indexées par un paramètre t variant continuement, cette condition supplémentaire s'écrit :

$$\lim_{t\to t_0} \sup_{|x|\geq\eta} \phi_t(x) = 0, \ \forall\eta > 0. \tag{2.11}$$

Exemple 2.2.2 Soit ϕ une fonction intégrable ≥ 0, telle que $\int_{\mathbb{R}} \phi(x)\, dx = 1$. Alors la suite (ϕ_n) définie par $\phi_n(x) = n\phi(nx)$ forme une identité approchée.

En effet, nous avons $\phi_n \geq 0$ et, par le changement de variable $u = nx$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \phi_n(x)\, dx &= n\int_{\mathbb{R}} \phi(nx)\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \phi(u)\, du = 1, \end{aligned}$$

et, pour $\eta > 0$ fixé,

$$\int_{-\eta}^{\eta} n\phi(nx)\, dx = \int_{-n\eta}^{n\eta} \phi(u)\, du,$$

d'où :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\eta}^{\eta} \phi_n(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-n\eta}^{n\eta} \phi(x)\, dx = 1.$$

De même, pour t tendant vers 0, la famille $(\phi_t)_{t>0}$ définie par

$$\phi_t(x) = \frac{1}{t}\phi(\frac{x}{t})$$

forme une identité approchée.

La condition (2.10) est vérifiée, si

$$\forall\eta > 0, \lim_{n\to\infty}[n \sup_{|x|\geq n\eta} \phi(x)] = 0,$$

ce qui est le cas, par exemple, si ϕ est à support compact, ou si $|\phi(x)| \leq \frac{C(x)}{x}$, avec $\lim_{|x|\to+\infty} C(x) = 0$.

Théorème 2.2.3 *Soient f une fonction mesurable bornée sur $\mathbb{R}$ et $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite formant une identité approchée. Alors la suite $((f * \phi_n)(t))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(t)$ en tout point t de continuité de f.*

Si f est continue, la convergence a lieu en tout point, uniformément sur tout intervalle compact. La convergence est uniforme si f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Si les fonctions ϕ_n vérifient

$$\int_{-\infty}^{0} \phi_n(t)\ dt = \int_{0}^{\infty} \phi_n(t)\ dt\ = \frac{1}{2} \tag{2.12}$$

(ce qui est le cas si elles sont paires), la suite $((f*\phi_n)(t))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{2}(f(t^-)+f(t^+))$ en tout point t pour lequel les limites à gauche et à droite de f (notées $f(t^-)$ et $f(t^+)$) existent.

Si f est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ et si (ϕ_n) est une une identité approchée vérifiant (2.10) , on a les mêmes conclusions : convergence en tout point de continuité de f, convergence uniforme sur tout intervalle compact si f est continue, convergence uniforme si f est uniformément continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

Preuve : 1) Traitons le cas où f est bornée. Les fonctions ϕ_n étant intégrables, $f*\phi_n$ est bien définie. Soit t un point de continuité de f. Montrons que $\lim_n (f*\phi_n)(t) = f(t)$.

Soit $\epsilon > 0$. D'après la continuité de f en t, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout s vérifiant $|s| \le \eta$, on ait $|f(t-s) - f(t)| < \epsilon$. Les fonctions ϕ_n étant positives, d'intégrale 1, on peut écrire :

$$(\phi_n * f)(t) - f(t) = \int \phi_n(s)[f(t-s) - f(t)]\ ds,$$

d'où :

$$\begin{aligned}
|(\phi_n * f)(t) - f(t)| &\le \int_{\mathbb{R}} \phi_n(s)|f(t-s) - f(t)|\ ds \\
&= \int_{|s|\le\eta} \phi_n(s)|f(t-s) - f(t)|\ ds \\
&+ \int_{|s|>\eta} \phi_n(s)|f(t-s) - f(t)|\ ds \\
&\le \epsilon \int_{|s|\le\eta} \phi_n(s)\ ds + 2\|f\|_\infty \int_{|s|>\eta} \phi_n(s)\ ds \\
&\le \epsilon + 2\|f\|_\infty \int_{|s|>\eta} \phi_n(s)\ ds.
\end{aligned}$$

Choisissons n_0 tel que $\int_{|s|>\eta} \phi_n(s)\ ds < \epsilon$, pour $n \ge n_0$. On obtient alors $|(\phi_n * f)(t) - f(t)| \le \epsilon(1 + 2\|f\|_\infty)$, pour $n \ge n_0$. Ceci prouve la convergence annoncée.

Si f est uniformément continue, la convergence est uniforme, puisque dans ce cas l'entier $N = N(\epsilon)$ est déterminé indépendamment de t.

Soit t un point pour lequel les limites à gauche et à droite de f existent. Pour $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout s vérifiant $0 \le s \le \eta$, on ait $|f(t-s) - f(t^-)| < \epsilon$, $|f(t+s) - f(t^+)| < \epsilon$.

Supposons vérifiées les relations (2.12). On peut écrire

$$\begin{aligned}
| \quad & (\phi_n * f)(t) - \frac{1}{2}(f(t^-) + ft^+))| \\
& \le \int_{-\infty}^{0} \phi_n(s)|f(t-s) - f(t^+)|\ ds + \int_{0}^{\infty} \phi_n(s)|f(t-s) - f(t^-)|\ ds \\
\le \quad & \epsilon \int_{|s|\le\eta} \phi_n(s)\ ds + 2\|f\|_\infty \int_{|s|>\eta} \phi_n(s)\ ds \\
\le \quad & \epsilon + 2\|f\|_\infty \int_{|s|>\eta} \phi_n(s)\ ds
\end{aligned}$$

et on conclut comme plus haut.

2) Considérons maintenant le cas où f est intégrable et supposons que (ϕ_n) vérifie (2.10) . Les mêmes majorations permettent d'écrire, si l'on a $|f(t-s) - f(t)| < \epsilon$, pour $|s| \leq \eta$:

$$|(\phi_n * f)(t) - f(t)| \leq \epsilon \int_{|s|\leq\eta} \phi_n(s)\ ds + (|f(t)| + \|f\|_1) \sup_{|s|>\eta} \phi_n(s).$$

□

• **Identité approchée et convolution dans L^1**

Théorème 2.2.4 *Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$ et (ϕ_n) une identité approchée. Alors la suite $(f * \phi_n)$ converge vers f au sens L^1 :*

$$\|f * \phi_n - f\|_1 \to 0.$$

Preuve : Nous savons que $f * \phi_n$ est bien défini. Notons $T_s f$ la fonction translatée de f par $-s$: $T_s f(t) = f(t-s)$. Par passage aux valeurs absolues, on a les majorations :

$$\begin{aligned}
\|f * \phi_n - f\|_1 &\leq \int\int |f(t-s) - f(t)|\phi_n(s)\ ds\ dt \\
&= \int(\int |f(t-s) - f(t)|\ dt)\phi_n(s)\ ds \\
&= \int \|T_s f - f\|_1 \phi_n(s)\ ds
\end{aligned}$$

(par intervertion de l'ordre d'intégration justifiée par le théorème de Fubini). On a donc, pour $\delta > 0$:

$$\|f * \phi_n - f\|_1 \leq \sup_{|s|\leq\delta} \|T_s f - f\|_1 + 2\|f\|_1 \int_{|s|>\delta} \phi_n(s)\ ds.$$

Il reste à appliquer le fait que la fonction $s \to \|T_s - f\|_1$ est uniformément continue et bornée. Il existe $\delta > 0$ tel que, $\forall s : |s| < \delta$, on ait $\|T_s - f\|_1 < \epsilon$.

□

On a un énoncé analogue dans L^p, pour $1 \leq p < \infty$. Nous avons en effet la continuité de la translation en norme L^p, ainsi que la majoration suivante (conséquence du théorème de Fubini et de l'inégalité de convexité vérifiée pour toute fonction $\phi \geq 0$ et d'intégrale égale à 1 : $(\int |f|\phi\ dt)^p \leq \int |f|^p \phi\ dt)$:

$$\begin{aligned}
\|f * \phi_n - f\|_p^p &\leq \int[\int |f(t-s) - f(t)|\phi_n(s)\ ds]^p\ dt \\
&\leq \int\int |f(t-s) - f(t)|^p \phi_n(s)\ ds\ dt \\
&= \int \|T_s f - f\|_p^p \phi_n(s)\ ds \to 0.
\end{aligned}$$

[Rappel : Si u est une fonction convexe sur un intervalle $[c, d]$, si ϕ est une fonction positive et d'intégrale égale à 1, pour toute fonction f à valeurs dans $[c, d]$, nous avons (inégalité de Jensen) :

$$u(\int f(t)\ \phi(t)\ dt) \leq \int u(f(t))\ \phi(t)\ dt.]$$

• **Applications**

Les résultats obtenus ont mis en évidence l'effet de régularisation de la convolution (par exemple, par convolution par une fonction C^∞ on peut, sous certaines hypothèses, obtenir une fonction C^∞, à partir d'une fonction qui est seulement borélienne). D'autre part, une fonction f peut être obtenue comme limite de la suite de ses convolées par des fonctions formant une identité approchée. Ces deux propriétés donnent un procédé pour obtenir des théorèmes de densité analogues au théorème de Weierstrass. Donnons des exemples.

Théorème 2.2.5 *Toute fonction uniformément continue bornée est limite uniforme de fonctions indéfiniment dérivables.*

Preuve : D'après le théorème précédent et le corollaire (2.1.5) il suffit de construire une suite $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions indéfiniment dérivables, dont les dérivées de tous les ordres soient intégrables, formant une identité approchée.

Partons de la fonction $\phi(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$. Il est clair que les fonctions ϕ_n définies par $\phi_n(x) = n\phi(nx)$ sont indéfiniment dérivables et vérifient $\phi(x) \geq 0, \forall x$ et

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(x)\ dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{2}{\pi}[\ \mathrm{arctg}\ \ x]_0^\infty = 1.$$

La suite (ϕ_n) forme donc une identité approchée.

On montre par récurrence sur k que les dérivées de ϕ sont de la forme

$$\phi^{(k)}(x) = \frac{P_k(x)}{(1+x^2)^{k+1}},$$

où les P_k sont des polynômes de $d^\circ k$. Elles sont donc intégrables et bornées sur $\mathbb{R}$, de même que les dérivées des fonctions ϕ_n. Ceci prouve le théorème.

□

Une variante de la construction précédente consiste à utiliser des identités approchées formées de fonctions à support compact. On peut dans ce cas régulariser par convolution des fonctions qui ne seraient pas bornées, mais intégrables sur tout intervalle compact, ou obtenir des approximations par des fonctions à support compact.

On pourra ainsi montrer que toute fonction f continue est limite uniforme sur tout intervalle compact de fonctions indéfiniment dérivables. (Voir *exercices*)

2.3 Cas des fonctions périodiques

• **Identité approchée pour les fonctions périodiques** :

Définition 2.3.1 On dit qu'une suite $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions 1-périodiques intégrables sur $[0,1]$ forme une **identité approchée** au sens des fonctions périodiques, si elle vérifie les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \phi_n(x) &\geq 0, \forall x, \forall n \in \mathbb{N}, && (2.13)\\ \int_{-1/2}^{1/2} \phi_n(x)\ dx &= 1, \forall n \in \mathbb{N}, && (2.14)\\ \lim_{n\to\infty} \int_{-\eta}^{\eta} \phi_n(x)\ dx &= 1, \forall \eta \in]0, \frac{1}{2}]. && (2.15) \end{aligned}$$

On pourra également renforcer ces conditions par l'analogue de la condition (2.10) de la définition (2.2.1) :

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\eta \leq |x| \leq \frac{1}{2}} \phi_n(x) = 0,\ \forall \eta > 0. \qquad (2.16)$$

Donnons d'abord l'exemple important d'un suite de polynômes périodiques (noyaux de Fejer), qui joue un grand rôle dans l'étude des séries de Fourier. Posons

$$F_N(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (\sum_{k=-n}^{n} e^{2\pi ikt}).$$

Un calcul simple (que le lecteur pourra faire en exercice) permet d'exprimer F_N sous les formes suivantes :

$$\begin{aligned} F_N(t) &= \frac{1}{N} |\sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi int}|^2 \\ &= \frac{1}{N} |\frac{\sin N\pi t}{\sin \pi t}|^2,\ \text{si } t \notin \mathbb{Z}, = N,\ \text{si } t \in \mathbb{Z}, \\ &= \frac{1}{N} \sum_{0 \leq n,m \leq N-1} e^{2\pi i(n-m)t} = \sum_{\ell=-N+1}^{N-1} (1 - \frac{|\ell|}{N}) e^{2\pi i\ell t}. \end{aligned}$$

Les fonctions F_N sont donc ≥ 0 et d'intégrale 1, car

$$\int F_N(t)dt = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \int D_n(t)\ dt = \frac{N}{N} = 1,$$

où $D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{2\pi ikt}$.

Proposition 2.3.2 *La suite* $(F_N)_{N\geq 1}$ *forme une identité approchée sur* $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Preuve : Les fonctions F_N sont périodiques, de période 1, positives ou nulles, d'intégrale égale à 1. Il reste à montrer que "la masse des F_N se concentre en 0", i.e.

$$\lim_{N\to\infty} \int_{|t|\leq\epsilon} F_N(t)dt = 1,\ \text{pour tout } \epsilon \text{ tel que } 0 < \epsilon \leq \frac{1}{2}.$$

Ceci résulte de l'inégalité

$$0 \leq F_N(t) \leq \frac{1}{N} \frac{1}{\sin^2 \pi\epsilon},\ \text{pour } \epsilon \leq |t| \leq \frac{1}{2},$$

qui implique que

$$\lim_{N\to\infty}\int_{\epsilon\le|t|\le 1/2} F_N(t)dt = 0.$$

□

Autre exemple :

Considérons les fonctions

$$Q_n(t) = c_n(\frac{1+\cos 2\pi t}{2})^n = c_n(\cos\pi t)^{2n},$$

où c_n est la constante telle que

$$\int_{-1/2}^{1/2} Q_n(t) = 1$$

On a :

$$c_n^{-1} = \int_{-1/2}^{1/2}(\frac{1+\cos 2\pi t}{2})^n\, dt.$$

Les fonctions Q_n sont des polynômes trigonométriques de période 1. (Développer Q_n en utilisant $(\cos 2\pi t = \frac{1}{2}(e^{2\pi it}+e^{-2\pi it}))$.)

Enfin, on a :

$$Q_n \ge 0 \text{ et } \int_{-1/2}^{1/2} Q_n(t)\; dt = 1.$$

Montrons la propriété d'identité approchée pour la suite (Q_n).

D'après le choix de c_n, on a, en utilisant la relation $1+\cos 2a = 2\cos^2 a$ et le changement de variable $u = \cos\pi t$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} &= c_n\int_0^{1/2}(\frac{1+\cos 2\pi t}{2})^n\, dt \ge c_n\int_0^{1/2}(\frac{1+\cos 2\pi t}{2})^n \sin 2\pi t\; dt\\ &= 2c_n\int_0^{1/2}(\cos\pi t)^{2n+1}\sin\pi t\; dt = \frac{2}{\pi}c_n\int_0^1 u^{2n+1}du\\ &= \frac{2}{\pi}c_n\frac{1}{2n+2} = \frac{c_n}{\pi(n+1)}.\end{aligned}$$

On a donc l'inégalité : $c_n \le \frac{\pi}{2}(n+1)$.

Comme Q_n décroît sur $[0,1/2]$, on a, pour $0<\eta\le t\le 1/2$:

$$0 \le Q_n(t) \le Q_n(\eta) = c_n(\frac{1+\cos 2\pi\eta}{2})^n \le \frac{\pi}{2}(n+1)(\frac{1+\cos 2\pi\eta}{2})^n.$$

On sait que $\lim_n (n+1)\alpha^n = 0$, pour tout α fixé tel que $0\le\alpha<1$. Ici, on a : $0 \le \frac{1+\cos 2\pi\eta}{2} < 1$, puisque $0<\eta\le 1/2$. Il en résulte :

$$\int_\eta^{1/2} Q_n(t)\; dt \le (\frac{1}{2}-\eta)Q_n(\eta) \le \frac{\pi}{4}(n+1)(\frac{1+\cos 2\pi\eta}{2})^n \to 0,$$

quand n tend vers l'infini.

On pourra également vérifier (exercice) que la condition (2.16) est satisfaite par les suites (F_n) et (Q_n).

Les théorèmes (2.2.3) et (2.2.4) se formulent et se démontrent, dans le cadre des fonctions périodiques de façon analogue au cas de $\mathbb{R}$ (en notant cependant que *toute fonction continue 1-périodique est uniformément continue*). Nous nous bornerons à donner l'énoncé :

Théorème 2.3.3 *Soient f une fonction mesurable bornée 1-périodique et $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite formant une identité approchée (au sens des fonctions périodiques). Alors la suite $((f*\phi_n)(t))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(t)$ en tout point t de continuité de f.*

Si f est continue, la convergence a lieu en tout point, et est uniforme.

Si les fonctions ϕ_n vérifient

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \phi_n(t)\ dt = \int_{0}^{\frac{1}{2}} \phi_n(t)\ dt\ = \frac{1}{2} \tag{2.17}$$

(ce qui est le cas si elles sont paires), la suite $((f*\phi_n)(t))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{2}(f(t^-)+f(t^+))$ en tout point t pour lequel les limites à gauche et à droite de f (notées $f(t^-)$ et $f(t^+)$) existent.

Si f est une fonction 1-périodique intégrable sur $[0,1]$ et si (ϕ_n) est une identité approchée vérifiant (2.16), on a les mêmes conclusions : convergence en tout point de continuité de f, convergence uniforme si f est continue.

Théorème 2.3.4 *Soient $f \in L^1(\mathbb{T})$ et (ϕ_n) une identité approchée (au sens des fonctions périodiques). Alors la suite $(f*\phi_n)$ converge vers f au sens $L^1(\mathbb{T})$:*

$$\|f*\phi_n - f\|_1 \to 0.$$

• **Approximation par les polynômes trigonométriques**

Le procédé de convolution va nous permettre de démontrer un théorème analogue à celui de Weierstrass, pour des fonctions continues périodiques. (Attention ! il s'agit ici de polynômes trigonométriques.) Nous allons montrer que toute fonction continue 1-périodique est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques. Ce résultat peut également être obtenu comme un corollaire du *théorème de Stone-Weierstrass.*

Rappelons d'abord que, si f est une fonction 1-périodique, intégrable sur $[0,1]$, et si g est un polynôme trigonométrique (de période 1), $f*g$ est un polynôme trigonométrique de période 1.

Théorème 2.3.5 *Soit f une fonction continue périodique de période 1. Pour tout $\epsilon>0$, il existe un polynôme trigonométrique P (de période 1) tel que $\|f-P\|_\infty<\epsilon$.*

Preuve : Les fonctions

$$(f*Q_n)(t) = \int_{-1/2}^{1/2} f(s)Q_n(t-s)\ ds$$

sont des polynômes trigonométriques, d'après une remarque précédente. Comme la suite (Q_n) forme une identité approchée (au sens des fonctions périodiques), le résultat est une conséquence du théorème (2.3.3).

□

• **Exemple d'application du théorème d'approximation**

Théorème 2.3.6 *Soit α un nombre irrationnel. Pour toute fonction continue f 1-périodique, on a :*

$$\lim_N \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(n\alpha) = \int_0^1 f(x)\ dx.$$

Preuve : 1) Supposons d'abord que f soit un polynôme trigonométrique (de période 1), $f(x) = \sum_{k=-\ell}^{\ell} c_k e^{2\pi ikx}$. Le coefficient c_0 du développement de f est égal à $\int_0^1 f(x)\ dx$. Nous avons :

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(n\alpha) &= \frac{1}{N}\sum_{k=-\ell}^{\ell} c_k(\sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi ikn\alpha}) \\ &= c_0 + \frac{1}{N}\sum_{k=-\ell,k\neq 0}^{\ell} c_k\ \frac{1-e^{2\pi ikN\alpha}}{1-e^{2\pi ik\alpha}},\end{aligned}$$

d'où, en utilisant le fait que α est irrationnel et donc que $e^{2\pi ik\alpha} \neq 1$, pour tout $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$:

$$|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(n\alpha) - c_0| \leq \frac{2}{N}\sum_{k=-\ell,k\neq 0}^{\ell} \frac{|c_k|}{|1-e^{2\pi ik\alpha}|}.$$

L'expression

$$E = \sum_{k=-\ell,k\neq 0}^{\ell} \frac{|c_k|}{|1-e^{2\pi ik\alpha}|}$$

est une quantité fixe (indépendante de N).

Donc, $\epsilon > 0$ étant donné, il existe N_0 tel que, pour $N \geq N_0$, on ait $2E/N < \epsilon$.

2) Soit maintenant f une fonction continue de période 1. D'après le théorème (2.3.5), pour $\epsilon > 0$ donné, il existe un polynôme trigonométrique P, de période 1, tel que $\|f - P\|_\infty < \epsilon$. On a :

$$\begin{aligned}|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(n\alpha) - \int_0^1 f(x)\ dx| &\leq \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |f(n\alpha) - P(n\alpha)| + |\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} P(n\alpha) \\ &- \int_0^1 P(x)\ dx| + \int_0^1 |P(x) - f(x)|\ dx \\ &\leq \epsilon + |\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} P(n\alpha) - \int_0^1 P(x)\ dx| + \epsilon.\end{aligned}$$

D'après la première partie de raisonnement, il existe N_0 tel que, pour $N \geq N_0$, on ait :

$$|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} P(n\alpha) - \int_0^1 P(x)\ dx| < \epsilon.$$

D'où, pour $N \geq N_0$,

$$|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(n\alpha) - \int_0^1 f(x)\ dx| < 3\epsilon.$$

□

2.4 Semi-groupes de convolution

Définition 2.4.1 On dit qu'une famille à un paramètre $(\phi_t)_{t>0}$ de fonctions intégrables forme un **semi-groupe de convolution**, si elle vérifie la relation $\phi_s * \phi_t = \phi_{s+t}, \forall s, t > 0$.

Il peut être commode, pour vérifier la propriété de semi-groupe, de raisonner sur les transformées de Fourier. En effet une famille $(\phi_t)_{t>0}$ forme un semi-groupe de convolution si, et seulement si, la famille $(\widehat{\phi_t})_{t>0}$ des transformées de Fourier forme un semi-groupe multiplicatif à un paramètre (voir chapitre *transformée de Fourier*).

Nous allons donner deux exemples importants de semi-groupes de convolution et montrer comment ces semi-groupes permettent de résoudre des équations aux dérivées partielles.

• **Exemples**

Exemple 2.4.2 (semi-groupe Gauss ou de la chaleur)

Soit $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, la fonction de Laplace-Gauss. Posons

$$\phi_t(x) = \frac{1}{\sqrt{t}} \phi(\frac{x}{\sqrt{t}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}. \tag{2.18}$$

La famille $(\phi_t)_{t>0}$ forme un semi-groupe de convolution. Ceci peut être vérifié par un calcul direct de convolution. Mais nous verrons par la suite que c'est aussi une conséquence immédiate de la forme de la transformée de Fourier de $(\phi_t)_{t>0}$:

$$\widehat{\phi}_t(u) = \int_{\mathbb{R}} \phi_t(x) e^{-2\pi i u x} \, dx = e^{-2\pi^2 t u^2}.$$

D'autre part, nous avons vu en (2.2.2) que cette famille forme une identité approchée, pour t tendant vers 0. On a donc, pour toute fonction f continue et bornée : $\lim_{t\to 0} f * \phi_t = f$, la convergence ayant lieu au sens de la convergence ponctuelle.

Exemple 2.4.3 (semi-groupe de Cauchy)

Considérons maintenant $\gamma(x) = \dfrac{1}{\pi} \dfrac{1}{1+x^2}$. Pour $t > 0$, posons

$$\gamma_t(x) = \frac{1}{t} \gamma(\frac{x}{t}) = \frac{1}{\pi} \frac{t}{t^2 + x^2}.$$

On vérifie comme précédemment que la famille $(\gamma_t)_{t>0}$ forme un semi-groupe de convolution et une identité approchée. Comme précédemment, on peut faire un calcul direct de convolution ou utiliser la *transformée de Fourier* :

$$\widehat{\gamma}_t(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \gamma_t(x) e^{-2\pi i u x} \, dx = e^{-2\pi t |u|}.$$

• **Application**

Pour une fonction de classe C^2 sur un domaine $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^d$, posons

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

Si la fonction u vérifie $\Delta u = 0$ sur $\mathcal{D}$, elle est dite **harmonique** sur le domaine $\mathcal{D}$. L'opérateur Δ est appelé Laplacien et l'équation $\Delta u = 0$ est appelée équation de Laplace. C'est l'équation à laquelle satisfait par exemple le potentiel créé par des charges électriques.

Une autre équation importante est l'équation dite de la chaleur,

$$\frac{1}{2}\Delta u = \frac{\partial u}{\partial t},$$

où u est une fonction de classe C^2 dans un domaine de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$. C'est l'équation à laquelle satisfait la température à l'instant t en un point x d'un milieu homogène dans lequel la chaleur se propage.

Considérons la famille de fonctions de Laplace-Gauss, définies en (2.18). Posons $\Phi(x,t) = \phi_t(x)$. La fonction Φ est définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. Le calcul des dérivées partielles de Φ donne :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x,t) &= \frac{-1}{t}\Phi(x,t) + \frac{x^2}{t^2}\Phi(x,t), \\
\frac{\partial \Phi}{\partial t}(x,t) &= \frac{-1}{2t}\Phi(x,t) + \frac{x^2}{2t^2}\Phi(x,t).
\end{aligned}$$

La fonction Φ vérifie donc l'équation $D\Phi = 0$ (équation de la chaleur), où D est l'opérateur aux dérivées partielles

$$D = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial t}.$$

A l'aide de la fonction Φ, on peut construire une solution de l'équation de la chaleur sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ prenant des valeurs données au bord de son domaine de définition, le demi-plan supérieur.

Proposition 2.4.4 *Si f est une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$, la fonction Ψ définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ par $\Psi(x,t) = (f * \phi_t)(x)$ vérifie l'équation $D\Psi = 0$ et la condition au bord : $\lim_{t\to 0} \Psi(x,t) = f(x)$.*

Preuve : La condition au bord est une conséquence du fait que la famille $(\phi_t)_{t>0}$ forme une identité approchée.

Montrons qu'on a la relation $D\Psi = f * D\Phi$. Comme Φ vérifie l'équation de la chaleur, ceci impliquera que Ψ la vérifie aussi. La dérivation en x est la dérivation appliquée au produit de convolution. On a donc, d'après la proposition (2.1.4),

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}(x,t) = (f * \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2})(x,t).$$

Pour obtenir la relation

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t}(x,t) = (f * \frac{\partial \Phi}{\partial t})(x),$$

nous devons effectuer une dérivation sous le signe somme. Pour justifier cette dérivation, il suffit, d'après le théorème de convergence dominée, de majorer localement, pour chaque t fixé, les rapports $|\frac{1}{h}[\phi(x-y,t+h)-\phi(x-y,t)]|$ par une fonction de y intégrable, indépendante de h variant dans un voisinage de 0.

Par le théorème des accroissements finis, on a, pour $|h| \leq t/2$,

$$\begin{aligned} |\frac{1}{h}[\phi(x-y,t+h)-\phi(x-y,t)]| &\leq \sup_{|h|\leq t/2} |\frac{\partial \phi}{\partial t}(x-y,t+h)| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\pi t}}(\frac{1}{t}+\frac{2(x-y)^2}{t^2})e^{-(x-y)^2/3t}. \end{aligned}$$

□

De la même façon, on montre que la fonction

$$\Gamma(x,t) = \gamma_t(x) = \frac{1}{\pi}\frac{t}{t^2+x^2}$$

vérifie l'équation $\Delta\Gamma = 0$, où Δ est l'opérateur (Laplacien) aux dérivées partielles défini par $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}$.

Si f est une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$, on définit une fonction Ψ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ par $\Psi(x,t) = (f * \gamma_t)(x)$. On montre, comme précédemment, que Ψ est une fonction harmonique dans le demi-plan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ (c'est-à-dire telle que $\Delta\Psi = 0$) vérifiant la condition au bord : $\lim_{t\to 0} \Psi(x,t) = f(x)$.

2.5 Exercices

Exercice 2.5.1 *Un calcul explicite de convolution*

Etant donné un réel $h > 0$, on note $\phi_h = 1_{[-h,h]}$ la fonction indicatrice de l'intervalle $[-h,h]$.

a) Calculer $\phi_h * \phi_1$. (On pourra supposer $h \leq 1$).

b) Etudier le comportement en tout point $t \in \mathbb{R}$ de $\frac{1}{2h}(\phi_h * \phi_1)(t)$, quand h tend vers zéro par valeurs > 0.

Exercice 2.5.2 *Identité approchée formée de fonctions C^∞, régularisation par convolution*

1) En utilisant une fonction $h \geq 0$, indéfiniment dérivable, à support compact, positive ou nulle et non identiquement nulle, construire une suite de fonctions indéfiniment dérivables formant une identité approchée.

[Rappelons comment on construit une telle fonction h. On part de la fonction ψ définie par $\psi(x) = \exp(-\frac{1}{x^2})$, pour $x > 0$, $\psi(x) = 0$, pour $x \leq 0$.

Vérifier que la fonction $x \to \psi(x)\psi(1-x)$ est C^∞ à support compact, puis normaliser cette fonction pour obtenir h, telle que $\int_{\mathbb{R}} h(x)\ dx = 1$.

Considérer alors la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $h_n(x) = nh(nx)$. Elle forme une identité approchée et les fonctions h_n sont indéfiniment dérivables à support compact (noter que si A est tel que $h(x) = 0$, pour $|x| \geq A$, nous avons : $h_n(x) = 0$, pour $|x| \geq A/n$).]

2) Utiliser les fonctions h_n pour montrer que toute fonction f continue est limite, uniformément sur tout intervalle compact, de fonctions indéfiniment dérivables.

3) Soit f une fonction continue à support compact.

Etudier la suite $(h_n * f)_{n\in\mathbb{N}}$, et montrer que toute fonction continue à support compact est limite uniforme de fonctions indéfiniment dérivables à support compact.

4) Utiliser le théorème de Weierstrass pour donner une autre preuve du résultat précédent.

[$\Rightarrow$ *Indications :*

Soit $A > 0$ et soit f une fonction continue telle que $f(x) = 0$, pour $|x| \geq A$. On sait qu'il existe une fonction χ indéfiniment dérivable $0 \leq \chi \leq 1$, telle que $\chi(x) = 1$, pour $|x| \leq A$ et $\chi(x) = 0$, pour $|x| \geq A + 1$.

Par le théorème de Weierstrass, il existe un polynôme P tel que

$$\sup_{|x|\leq A+1} |f(x) - P(x)| \leq \epsilon.$$

La fonction χP est indéfiniment dérivable à support compact, et on a :

$$\chi(x)f(x) = f(x), \text{ pour tout } x,$$

d'où :

$$|f(x) - \chi(x)P(x)| = |f(x) - P(x)|\chi(x) \leq \sup_{|x|\leq A+1} |f(x) - P(x)| \leq \epsilon.]$$

5) Montrer que toute fonction continue est limite uniforme sur tout invervalle compact de fonctions indéfiniment dérivables.

Exercice 2.5.3 *Une application de la convolution*

Pour $n \geq 0$, on considère les fonctions g_n définies par

$$g_n(x) \;=\; \begin{cases} \frac{1}{c_n}(1-x^2)^n, & \text{pour } |x| \leq 1, \\ 0, & \text{sinon }, \end{cases}$$

où

$$c_n = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n\ dx.$$

1) a) Montrer la minoration $c_n > \dfrac{1}{n+1}, n \geq 0$.

b) Montrer que la famille $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme une identité approchée, au sens de la convolution sur $\mathbb{R}$.

2) Soit f intégrable. Etudier la convergence de la suite $(f * g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si f est supposée :
- continue,
- uniformément continue.

3) a) Montrer que, si f est nulle en dehors de $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, la restriction de $f * g_n$ à $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ coïncide avec un polynôme.

b) On considère une fonction f définie et continue sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. En utilisant ce qui précède, obtenir une preuve du théorème de Weierstrass : *toute fonction continue sur un intervalle compact* $[a, b]$ *est limite uniforme de polynômes sur [a,b].*

Exercice 2.5.4

Pour prouver des résultats d'approximation dans des espaces de fonctions, on dispose de plusieurs techniques (parmi lesquelles le théorème de Stone-Weierstrass et la convolution). Le principe de la méthode de convolution utilisée dans ce chapitre peut être formulé dans le cas des identités approchées de la forme ci-dessous comme suit :

Fixons une fonction u intégrable ≥ 0 telle que $\int u(t)\,dt = 1$ et soit, pour $\epsilon > 0$, u_ϵ définie par

$$u_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon} u(\frac{t}{\epsilon}).$$

Alors la famille $(u_\epsilon)_{\epsilon>0}$ forme une identité approchée pour la convolution, quand ϵ tend vers 0.

Soit f intégrable. La convolée $u_\epsilon * f$ s'écrit en effectuant un changement de variables :

$$\begin{aligned} (u_\epsilon * f)(t) &= \int f(t-s) u_\epsilon(s)\,ds \\ &= \frac{1}{\epsilon}\int f(t-s) u(\frac{s}{\epsilon})\,ds \\ &= \int f(t-\epsilon s) u(s)\,ds \end{aligned}$$

On a :

$$\lim_{\epsilon\to 0} (u_\epsilon * f)(t) = f(t), \tag{2.19}$$

la convergence ayant lieu **en différents sens suivant les propriétés** de u et de f. La preuve de la convergence dans (2.19) repose sur la majoration suivante qui résulte des hypothèses faites sur u :

$$\begin{aligned} |f(t) - \int f(t-\epsilon s) u(s)\,ds| &= |\int (f(t-\epsilon s) - f(t))\, u(s)\,ds| \\ &\leq \int |f(t-\epsilon s) - f(t)|\, u(s)\,ds. \end{aligned}$$

1) Montrer que la convergence est :

a) uniforme, si u et f sont continues à support compact,

b) uniforme sur tout compact, si u est continue à support compact et f continue.

c) en norme L^1, si u est continue à support compact et f intégrable.

Pour cette dernière assertion, on utilise la continuité, pour le norme $\| \|_1$ de la translation.

2) a) Montrer que toute fonction continue à support compact est limite uniforme sur son support de fonctions lipchitziennes.

b) En notant que les fonctions lipchitziennes forment une algèbre séparant les points, retrouver ce résultat en appliquant le théorème de Stone-Weierstrass.

Exercice 2.5.5 *Identité approchée pour les fonctions périodiques*

Soient Q_n les polynômes trigonométriques définis par :

$$Q_n(t) = c_n(\frac{1+\cos 2\pi t}{2})^n = c_n(\cos \pi t)^{2n},$$

où c_n est tel que

$$\int_{-1/2}^{1/2} Q_n(t)\ dt = 1.$$

On considère ici la convolution au sens des fonctions périodiques, de période 1. On revient sur les résultats du paragraphe 3.

1) Tracer les graphes de fonctions Q_n et étudier le comportement de la suite (Q_n) quand n tend vers l'infini.

2) En utilisant la convolution par les polynomes Q_n, montrer que toute fonction f continue de période 1 à valeurs réelles est limite uniforme de polynômes trigonométriques réels, i.e. de fonctions de la forme :

$$a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos 2\pi kt + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin 2\pi kt.$$

3) Montrer que toute fonction f continue de période 1 à valeurs réelles et paire ($f(-t) = f(t), \forall t$) est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques réels de la forme :

$$a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos 2\pi kt.$$

4) Soit f une fonction 1-périodique, intégrable sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

a) Montrer que l'on a, en tout point de continuité t de f :

$$\lim_n (f * Q_n)(t) = f(t).$$

b) Montrer que, si f possède en un point t_0 une limite à gauche (notée $f(t_0^-)$) et une limite à droite (notée $f(t_0^+)$), on a :

$$\lim_n (f * Q_n)(t_0) = \frac{1}{2}((f(t_0^-) + f(t_0^+)).$$

Problème 2.5.6 *Moyennes de fonctions périodiques sous une translation irrationnelle*

Ce problème reprend et développe l'application présentée dans le théorème (2.3.6).

1) Cas rationnel :

Soit f une fonction périodique, de période 1. Identifier la limite des moyennes :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(t+k\alpha)$$

quand α est un nombre **rationnel**.

Dans toute la suite, on suppose que α est un nombre **irrationnel**. On étudie le comportement des moyennes précédentes, sous des hypothèses assez générales sur f. On considèrera différentes classes de fonctions.

2) Soit f une fonction continue, **périodique, de période 1**.

On se propose de montrer la relation

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(t+k\alpha) = \int_0^1 f(s)\ ds,\ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{2.20}$$

a) On suppose d'abord que f est un polynôme trigonométrique de période 1,

$$f(t) = \sum_{-L}^{L} c_k e^{2i\pi kt}.$$

Calculer, en fonction des c_k les moyennes $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(k\alpha)$.

Montrer qu'il existe une constante C telle que :

$$|\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(k\alpha) - c_0| \leq \frac{C}{n}. \tag{2.21}$$

En déduire (2.20) dans ce cas particulier.

b) En utilisant le théorème d'approximation des fonctions périodiques, de période 1 par les polynômes trigonométriques, montrer que la relation (2.20) reste valable pour toute fonction f continue périodique de période 1.

3) a) Soit maintenant f une fonction périodique, de période 1, telle que, pour tout ϵ, il existe deux fonctions g_1 et g_2 continues périodiques, de période 1, vérifiant :

$$g_1 \leq f \leq g_2,\ \text{et}\ \int_0^1 (g_2 - g_1)\ dt < \epsilon. \tag{2.22}$$

Montrer que f vérifie encore (2.20).

b) Soit $I = [a, b]$ un intervalle contenu dans $[0, 1]$. Soit ϕ_I la fonction périodique, de période 1, coïncidant avec la fonction indicatrice de I sur $[0, 1]$: $\phi_I(t) = 1$, si $t \in I$, $=0$ sinon.

Montrer que ϕ_I vérifie la propriété (2.22).

En déduire qu'on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi_I(t + k\alpha) = b - a.$$

4) Application : (répartition de la première décimale du développement de 2^n en base 10)

On considère la suite $(2^n, n \in \mathbb{N})$, et on pose, pour $j = 1, ..., 9$,

$$\theta_j(n) = 1, \text{ si } j10^l \leq 2^n < (j+1)10^l, \text{ avec } l \text{ entier}, \ = 0, \text{ sinon.}$$

(Autrement dit la somme $\sum_0^{n-1} \theta_j(k)$ compte combien de fois l'écriture de 2^k en base 10 commence par j, pour $k = 0, ..., n-1$.)

a) Montrer que $\alpha = \log_{10} 2$ est irrationnel.

b) Montrer que, pour $j = 1, ...9$, on a :

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \theta_j(k) = \log_{10}(1 + \frac{1}{j}).$$

c) Montrer qu'il existe un entier n tel que la représentation de 2^n en base 10 commence par 123456789.

5) (Cette question suppose connue l'intégrale de Lebesgue) Soit f une fonction périodique, de période 1, intégrable sur $[0, 1[$.

Montrer la convergence en norme $\| \|_1$ des moyennes, c'est-à-dire :

$$\lim_n \int_0^1 |\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(t + k\alpha) - \int_0^1 f(s)\ ds|\ dt = 0$$

Le problème qui suit est proche du précédent, mais envisage le cas général d'une suite équirépartie, dont un exemple, discuté dans le problème 2.5.6, est donné par $(n\alpha \ mod \ 1)$, où α est un nombre irrationnel.

Définition 2.5.7 Une suite de points $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de l'intervalle $[0, 1]$ est dite **équirépartie** (on dit aussi uniformément répartie) si, pour tout intervalle $J = [a, b]$ contenu dans $[0, 1]$, on a :

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_1^n 1_J(u_k) = b - a,$$

où 1_J est la fonction caractéristique de J ($1_J(t) = 1$, si $t \in J$, $= 0$ sinon).

Problème 2.5.8 *Sur les suites équiréparties*

1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite équirépartie. Etant donnée une fonction f définie sur $[0,1]$, montrer que la relation

$$\lim_n \frac{1}{n}\sum_1^n f(u_k) = \int_0^1 f(s)\ ds, \tag{2.23}$$

est vérifiée :
- quand f est une fonction en escalier
- quand f est une fonction continue
- quand f est une fonction Riemann-intégrable

La relation (2.23) est-elle vérifiée par toute fonction f intégrable ?

a) Montrer que, pour toute fonction intégrable f, on a la relation :

$$\lim_n \int_0^1 |\frac{1}{n}\sum_1^n f(u_k+t) - \int_0^1 f(s)\ ds|\ dt = 0.$$

b) Etablir un résultat analogue en norme L^p, pour les fonctions $f \in L^p[0,1]$, $1 \leq p < \infty$.

2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $[0,1]$ telle que

$$\lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n e^{2\pi i\ell u_k} = 0, \text{ pour tout } \ell \text{ non nul dans } \mathbb{N}.$$

a) Montrer que la relation (2.23) est vérifiée quand f est un polynôme trigonométrique de période 1, puis quand f est une fonction continue.

b) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équirépartie.

3) On note $[t]$ la partie entière d'un nombre réel t.

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = n\alpha - [n\alpha]$ est équirépartie si et seulement si α est irrationnel.

Problème 2.5.9 *Prolongement à l'intérieur du disque d'une fonction définie sur le cercle unité*

Dans la suite , r est un paramètre réel, $0 \leq r < 1$. On note P_r la fonction définie, pour $t \in \mathbb{R}$ par :

$$P_r(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} r^{|n|}e^{2\pi int}.$$

On note D le disque unité ouvert, $D = \{z \in \mathbb{C} | z| < 1\}$.

1) a) Montrer la relation

$$P_r(t) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos 2\pi t}.$$

b) Montrer que la famille $(P_r, 0 \leq r < 1)$ est une famille de fonctions positives, d'intégrale égale à 1 sur $[0,1]$, formant dans la classe des fonctions périodiques de période 1 une identité approchée, quand $r \to 1_-$ (i.e. quand r tend vers 1 par valeurs inférieures.)

(On étudiera le comportement de $P_r(t)$, quand $r \to 1_-$, pour $\epsilon \le t \le 1-\epsilon$ où ϵ est un nombre fixé vérifiant $0 < \epsilon < 1$.)

2) Soit f une fonction continue, périodique, de période 1. Montrer que, en un sens que l'on précisera,

$$\lim_{r \to 1_-} P_r * f = f.$$

3) Soit ϕ une fonction définie et continue sur le cercle unité.
On pose $c_n = \int_0^1 \phi(e^{2\pi it})e^{-2\pi int}\, dt$, pour $n \in \mathbb{Z}$.
On suppose que ϕ vérifie la condition : $c_n = 0$ pour tout $n \le -1$.

Montrer qu'il existe une fonction Φ, définie sur D, vérifiant les conditions suivantes :
a) Φ est développable en série entière sur D,
b) $\lim_{r\to 1_-} \Phi(re^{it}) = \phi(e^{it})$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(On définira Φ par $\Phi(z) = \sum_0^\infty z^n c_n$, et on montrera que cette série est convergente sur D, puis on utilisera les propriétés de la famille (P_r) définie plus haut.)

Chapitre 3

Séries de Fourier

La représentation des phénomènes périodiques comme superposition d'harmoniques élémentaires a conduit depuis la fin du 18ème siècle au développement de la théorie des séries de Fourier. Le calcul des coefficients de Fourier d'une fonction périodique correspond à une analyse de la fonction, alors que la représentation, quand cela est possible, de la fonction comme la somme de sa série de Fourier, est une opération de synthèse mettant en jeu des problèmes de convergence.

Nous donnerons dans ce chapitre d'abord des résultats de convergence ponctuels pour des fonctions suffisamment régulières. Puis nous complèterons l'étude de la convergence ponctuelle, sous des hypothèses plus faibles, grâce aux propriétés d'identité approchée (noyau de Fejer). Nous présenterons ensuite l'étude des série de Fourier du point de vue "quadratique", qui entre dans le cadre général des méthodes développées pour les espaces de Hilbert.

3.1 Séries trigonométriques et séries de Fourier

Notations 3.1.1 Pour fixer les idées, et sauf mention contraire, nous supposerons que les fonctions périodiques considérées sont de période 1. Rappelons que les fonctions exponentielles d'argument imaginaire, $t \to \exp(i\lambda t)$, sont périodiques, de (plus petite) période $2\pi/\lambda$, pour $\lambda > 0$. On obtient des fonctions 1-périodiques, en choisissant $\lambda = 2\pi k$, avec k dans $\mathbb{Z}$.

Désignons par $\mathbb{T}^1 = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$, ou simplement $\mathbb{T}$, le cercle unité (tore de dimension 1, d'où la notation). L'application $t \to \exp(2\pi it)$, de $[0, 1[$ dans $\mathbb{T}^1$ met en correspondance l'espace des fonctions périodiques, de période 1, et l'espace des fonctions définies sur $\mathbb{T}^1$. On peut également identifier ces espaces à l'espace des fonctions définies sur l'intervalle $[0, 1]$ et prenant les mêmes valeurs au bord. On prendra garde cependant que la continuité au sens des fonctions 1-périodiques impose que $\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{t\to 1^-} f(t)$.

On notera $\mathcal{C}(\mathbb{T}^1)$ l'espace des fonctions continues 1-périodiques, $\mathcal{L}^p(\mathbb{T})$ l'espace formé des fonctions de période 1, mesurables et telles que $|f|^p$ soit intégrable sur un intervalle de période.

Par la suite, pour tout $p \geq 1$, la notation $\| \ \|_p$ désignera la semi-norme définie sur l'espace $\mathcal{L}^p(\mathbb{T})$ par $\|f\|_p = (\int_0^1 |f|^p dt)^{1/p}$.

Rappelons que l'espace normé $L^p(\mathbb{T})$ est l'espace des classes d'équivalence de fonctions dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{T})$, pour la relation d'équivalence définie par l'égalité presque-partout. Dans la suite, nous travaillerons avec les fonctions plutôt qu'avec leur classe d'équivalence, mais nous utiliserons la notation $f \in L^p(\mathbb{T})$.

• **Polynômes trigonométriques**

3.1.2 Nous noterons e_k, avec $e_k(t) = \exp(2\pi i k t)$, les fonctions exponentielles imaginaires de période 1.

Rappelons qu'un polynôme trigonométrique (de période 1) d'ordre n est une combinaison linéaire finie des fonctions e_k, pour $|k| \leq n$, c'est-à-dire une fonction de la forme

$$P(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{2\pi i k t}. \tag{3.1}$$

Rappelons également que la famille des fonctions $\{e_k, k \in \mathbb{Z}\}$ vérifie les relations d'orthogonalité suivantes :

$$\int_0^1 e^{2\pi i m t} e^{-2\pi i n t} dt = \begin{cases} 0, & \text{pour } n \neq m, \\ 1, & \text{pour } n = m. \end{cases}$$

Ces relations impliquent que l'écriture d'un polynôme trigonométrique P sous la forme (3.1) est unique.

Nous verrons plus loin que les fonctions $\{e_k, k \in \mathbb{Z}\}$ forment une base orthonormée de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{T})$.

• **Séries trigonométriques**

Définition 3.1.3 On appelle **série trigonométrique** toute série de la forme

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{2\pi i k \omega t},$$

où $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite indexée par $\mathbb{Z}$ de nombres complexes et ω un nombre réel > 0 fixé.

Conformément au choix de travailler avec des fonctions 1-périodiques, nous choisissons $\omega = 1$ et considérons donc des séries trigonométriques de la forme

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{2\pi i k t}. \tag{3.2}$$

Sous forme réelle, une série trigonométrique s'écrit :

$$a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(2\pi k t) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(2\pi k t). \tag{3.3}$$

Les expressions (3.2) et (3.3) sont formelles. Pour leur donner un sens, on peut étudier soit la convergence ponctuelle des séries (i.e. pour chaque valeur de t), soit leur convergence au sens d'une norme telle que la norme $\| \|_2$. Il convient également de préciser comment on effectue le passage à la limite dans les sommes partielles.

Dans le cas de (3.3), il s'agit de la convergence, quand N tend vers $+\infty$ des sommes partielles : $a_0 + \sum_{k=1}^N a_k \cos(2\pi kt) + \sum_{k=1}^N b_k \sin(2\pi kt)$.

Dans le cas de (3.2), il peut s'agir :
- de la convergence des deux suites $\sum_{k=0}^N c_k e^{2\pi ikt}$ et $\sum_{k=-N}^{-1} c_k e^{2\pi ikt}$, ce qui revient à étudier $\lim_{N,M\to+\infty} \sum_{k=-N}^M c_k e^{2\pi ikt}$,
- ou (ce qui est plus faible) de la convergence de la suite des sommes partielles **symétriques**, i.e. de la convergence de la suite $(S_N(t))$ définie par $S_N(t) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{2\pi ikt}$.

Remarquons que la formulation du problème de convergence est plus compliqué pour des séries trigonométriques à $d \geq 2$ variables.

Dans l'étude des séries trigonométriques, on peut soit se donner a priori les coefficients (c_k) et étudier la convergence de la série correspondante, soit partir d'une fonction f et essayer de la représenter comme somme d'une série trigonométrique, sa série de Fourier, qui est son *développement* dans le systèmes des (e_k). Dans ce deuxième problème, on doit d'abord définir les coefficients de Fourier de f.

• Coefficients de Fourier

Définitions 3.1.4 Soit f une fonction périodique, de période 1, intégrable sur $[0,1]$, intervalle de période. Pour tout n, la fonction $t \to f(t)e^{-2\pi int}$ est également intégrable sur $[0,1]$: elle est périodique, de période 1, et égale en module à $|f(t)|$. On peut donc définir :

$$c_n(f) = \int_0^1 f(t)e^{-2\pi int}dt, \; n \in \mathbb{Z}, \tag{3.4}$$

que l'on appelle **coefficient de Fourier** de f d'ordre n.

• Propriétés de la suite des coefficients de Fourier

Il résulte immédiatement de (3.4) que les coefficients $c_n(f)$ dépendent linéairement de f :

$$c_n(\lambda f + \mu g) = \lambda c_n(f) + \mu c_n(g), \; \forall n \in \mathbb{Z}, \; \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C},$$

et vérifient la majoration :

$$|c_n(f)| \leq \|f\|_1, \; \forall n \in \mathbb{Z},$$

la norme $\| \|_1$ étant calculée sur [0,1].

Dans le cas où la fonction f est un polynôme trigonométrique P, $P(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{2\pi ikt}$, les relations d'orthogonalité (3.1) impliquent que les coefficients c_k sont les coefficients de Fourier de P. En particulier, si P est un polynôme trigonométrique dont tous les coefficients de Fourier sont nuls, alors P est identiquement nul. Si P est d'ordre n, ses coefficients de Fourier $c_k(P)$ d'indice k, pour $|k| > n$, sont nuls.

L'unicité de l'écriture d'un polynôme P sous la forme

$$P(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{2\pi ikt},$$

équivaut au fait que les fonctions $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ forment un système libre, ce qui est évidemment une conséquence des relations d'orthogonalité.

Nous allons montrer que, de façon générale, une fonction dans $L^1(\mathbb{T})$ est déterminée (à un ensemble négligeable près) par ses coefficients de Fourier. On peut donc considérer que l'"analyse" d'une fonction f, à partir de ses coefficients de Fourier, est "exhaustive". Mais la reconstruction (la synthèse) de f à partir de ses coefficients est un problème plus délicat.

Proposition 3.1.5 *Soit $h \in L^1(\mathbb{T})$ telle que $c_n(h) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$. Alors $h(t) = 0$, pour presque tout t. Si $h \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, alors h est identiquement nulle.*

Preuve : D'après le théorème (4.2) du chapitre *"Applications de la convolution"*, il existe une suite de polynômes trigonométriques (Q_n) telle que la suite des polynômes trigonométriques $(P_n = Q_n * h)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers h, en norme $\| \|_1$ (uniformément si h est continue).

Le calcul des coefficients de la fonction convolée donne $c_k(P_n) = c_k(Q_n).c_k(h) = 0$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, et donc les polynômes P_n sont identiquement nuls. Il en est de même pour h, qui est la limite en norme $\| \|_1$ de la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (limite uniforme si $h \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$).

□

La proposition exprime que l'application linéaire qui à une fonction f associe la suite $(c_n(f))$ de ses coefficients de Fourier est injective. On notera que deux fonctions intégrables égales presque partout, au sens de la mesure de Lebesgue, ont les mêmes coefficients de Fourier. Les coefficients de Fourier d'une fonction f sont donc en fait attachés à la classe d'équivalence de f (i.e. l'ensemble des fonctions égales à f presque partout). L'injectivité assurée par la proposition (3.1.5) est vérifiée au sens de l'espace L^1, espace des classes d'équivalence, et non de l'espace $\mathcal{L}^1$ des fonctions.

Considérons l'espace $\ell_0(\mathbb{Z})$ formé par les suites définies sur $\mathbb{Z}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$ et tendant vers 0 à l'infini (un élément $c \in \ell_0(\mathbb{Z})$ est donc une suite $c = (c_n, n \in \mathbb{Z})$ telle que $\lim_{|n|\to\infty} c_n = 0$).

Cet espace $\ell_0(\mathbb{Z})$ est une **algèbre normée** pour l'addition et la multiplication ordinaire et la norme du sup : $\|c\|_\infty = \sup_n |c_n|$. Par ailleurs, nous avons défini une opération de convolution entre fonctions dans $L^1(\mathbb{T})$.

Théorème 3.1.6 *L'application $f \to C(f) = (c_n(f), n \in \mathbb{Z})$ est un homomorphisme continu injectif de l'algèbre $L^1(\mathbb{T})$ (muni du produit de convolution et de la norme $\| \|_1$) dans l'algèbre $(\ell_0(\mathbb{Z}), +, \cdot, \| \|_\infty)$.*

Preuve : La propriété d'homomorphisme $c_n(f * g) = c_n(f) \cdot c_n(g)$ s'obtient en appliquant le théorème de Fubini (en observant que la fonction $(t, s) \to f(s)g(t-s)\ e^{-2\pi int}$ est dans $L^1([0,1] \times [0,1])$) et l'invariance de l'intégrale par translation :

$$\begin{aligned} c_n(f * g) &= \int_0^1 (\int_0^1 f(s)g(t-s)ds)\ e^{-2\pi int}\ dt \\ &= \int_0^1 f(s)\ e^{-2\pi ins} (\int_0^1 g(t-s)\ e^{-2\pi in(t-s)}\ dx)\ ds \\ &= c_n(f) \cdot c_n(g). \end{aligned}$$

La majoration $\sup_n |c_n(f)| \leq \|f\|_1$ assure la continuité de cet homomorphisme. L'injectivité est établie dans la proposition (3.1.5).

La propriété $\lim_n |c_n(f)| = 0$ fait l'objet du lemme ci-dessous.

□

Lemme 3.1.7 *(Riemann-Lebesgue) Pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{T})$, on a $\lim_{|n|\to\infty} |c_n(f)| = 0$.*

Preuve : Soit f une fonction 1-périodique qui, en restriction à $[0,1]$, est la fonction indicatrice d'un intervalle $[a,b]$, où $0 \leq a < b \leq 1$. Un calcul élémentaire donne :

$$c_n(f) = -\frac{1}{2\pi i n}(e^{-2\pi i n b} - e^{-2\pi i n a}),\ n \neq 0.$$

On a donc, dans ce cas, $|c_n(f)| \leq \frac{1}{\pi|n|} \to 0,$ pour $|n| \to \infty$.

Ce résultat s'étend par linéarité aux fonctions en escalier, puis par densité aux fonctions intégrables sur $[0,1]$ (le vérifier en exercice).

Une variante de la démonstration consiste à approcher f par des polynômes trigonométriques.

□

Remarque 3.1.8 Si f est une fonction 1-périodique, intégrable sur $[0,1]$, la suite $(c_n(f)_{n\in\mathbb{Z}})$ de ses coefficients de Fourier coïncide avec la suite des valeurs de la transformée de Fourier de la fonction $f1_{[0,1[}$. Le lemme (3.1.7) résulte du lemme analogue pour la transformation de Fourier (voir chapitre *"Transformation de Fourier"*) appliqué à la fonction $f1_{[0,1[}$.

• **Série de Fourier**

Définition 3.1.9 Etant donnée une fonction f dans $L^1(\mathbb{T})$, on appelle **série de Fourier** de f la série trigonométrique

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f)e^{2\pi i k t}.$$

On se pose le problème de la convergence de la suite des sommes partielles symétriques définies par :

$$S_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{2\pi i k t}.$$

Forme réelle des séries de Fourier

Si f est une fonction à valeurs réelles, on représentera plutôt les sommes partielles de la série de Fourier de f sous forme réelle :

$$a_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)\cos 2\pi n t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(f)\sin 2\pi n t,$$

où l'on a posé $a_0(f) = \int_0^1 f(t)\, dt$ et, pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_n(f) &= 2\int_0^1 f(t)\cos 2\pi n t\, dt, \\ b_n(f) &= 2\int_0^1 f(t)\sin 2\pi n t\, dt. \end{aligned}$$

On note que
- si f est paire, on a $b_n(f) = 0, \forall n \geq 1$,
- si f est impaire, on a $a_n(f) = 0, \forall n \geq 0$.

On a les formules d'orthogonalité, pour n et m entiers ≥ 1 :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \cos 2\pi nt \cos 2\pi mt \, dt &= 0, \text{ si } n \neq m, = \tfrac{1}{2}, \text{ si } n = m, \\
\int_0^1 \sin 2\pi nt \sin 2\pi mt \, dt &= 0, \text{ si } n \neq m, = \tfrac{1}{2}, \text{ si } n = m, \\
\int_0^1 \cos 2\pi nt \sin 2\pi mt \, dt &= 0, \forall n, m \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Le système de fonctions $\{1, \sqrt{2}\cos 2\pi nt, \sqrt{2}\sin 2\pi nt, n \geq 1\}$ forme une base orthonormée de $L^2(\mathbb{T})$.

• **Noyau de Dirichlet**

La somme partielle $S_n(f)$ d'ordre n peut s'écrire sous la forme :

$$S_n(f)(t) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(s) D_n(t-s) ds = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t-s) D_n(s) \, ds, \tag{3.5}$$

où l'on a posé

$$D_n(t) = \sum_{-n}^{n} e^{2i\pi kt} = \begin{cases} \frac{\sin(2n+1)\pi t}{\sin \pi t}, & t \notin \mathbb{Z}, \\ 2n+1, & \text{si } t \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Le polynôme trigonométrique D_n est appelé **noyau de Dirichlet** d'ordre n, $n \geq 1$.

Les sommes partielles symétriques d'ordre n sont donc obtenues, d'après (3.5), comme convolées de f avec le noyau de Dirichlet d'ordre n.

3.2 Premiers résultats de convergence ponctuelle

Le problème général de la convergence ponctuelle des séries de Fourier est un problème difficile, qui a joué un rôle important dans le développement de l'analyse réelle aux 19ème et 20ème siècles et en particulier en théorie de l'intégration.

Des résultats partiels peuvent être obtenus facilement, si l'on fait des hypothèses sur les coefficients de Fourier ou sur la régularité des fonctions. Commençons par un premier résultat élémentaire de convergence.

Théorème 3.2.1 *Si $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite telle que $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| < \infty$, alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n e^{2\pi int}$ converge uniformément vers une fonction continue et périodique, de période 1, dont le coefficient de Fourier d'ordre n est égal à c_n.*

Preuve : La convergence de la série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi int}$ est normale (au sens de la norme uniforme), d'après l'égalité

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n e^{2\pi int}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty,$$

et donc uniforme. Ceci implique la convergence pour tout t de la série et la continuité de la fonction f somme de la série. Il est clair que f est périodique.

Pour calculer son coefficient de Fourier d'ordre n,

$$c_n(f) = \int_0^1 f(t)e^{-2\pi int}\,dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{2\pi ikt}e^{-2\pi int}\,dt,$$

on peut permuter l'intégrale et la sommation de la série, la convergence étant uniforme et l'intégrale prise sur un compact. Les relations d'orthogonalité (3.1) impliquent alors $c_n(f) = c_n$.

□

Dans le théorème (3.2.1), nous sommes partis d'une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Si nous partons maintenant d'une fonction continue, ou seulement intégrable, f dont les coefficients $c_n(f)$ vérifient la condition $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)| < \infty$, le résultat suivant montre que la somme de sa série de Fourier redonne bien la fonction f (et donc que cette fonction possède une "version continue"). On notera l'analogie de ce résultat avec le théorème d'inversion pour la transformée de Fourier.

Théorème 3.2.2 *Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ telle que $\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n(f)| < \infty$. On a, pour tout t :*

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{2\pi int},$$

et la convergence vers f de la série de Fourier de f est uniforme.

Preuve : Soit $\widetilde{f}(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{2\pi int}$. D'après le théorème (3.2.1), les coefficients de Fourier de $\widetilde{f}$ et ceux de f coïncident : $c_n(\widetilde{f}) = c_n(f)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Les coefficients de Fourier de la différence $f - \widetilde{f} = h$, donnés par la différence $c_n(h) = c_n(f) - c_n(\widetilde{f})$ (par linéarité de l'intégrale), sont donc nuls. Il reste à appliquer la proposition (3.1.5).

□

Le lemme de majoration d'Abel permet également d'obtenir de façon élémentaire un théorème de convergence pour des suites de coefficients réels tendant en décroissant vers 0 (pour la démonstration, voir *exercices*).

Théorème 3.2.3 *Soit une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réelle positive décroissant vers 0. Alors, pour tout $t \notin \mathbb{Z}$, les séries $\sum_n a_n \cos(2\pi nt)$ et $\sum_n a_n \sin(2\pi nt)$ convergent et on a la majoration :*

$$|\sum_{k\geq n} a_n \cos(2\pi kt)|,\ |\sum_{k\geq n} a_n \sin(2\pi kt)| \leq \frac{a_n}{|\sin \pi t|}.$$

En particulier, la convergence est uniforme sur tout intervalle $[a, b]$ contenu dans l'un des intervalles $]k, k+1[$, $k \in \mathbb{Z}$.

Comme pour le théorème (3.2.1), on peut demander, dans le cas où les a_n sont les coefficients de Fourier (sous forme réelle) d'une fonction intégrable f, si les sommes données par les séries redonnent bien la fonction de départ. La réponse est oui, d'après le théorème de convergence en norme L^1 vers f des moyennes des sommes partielles (théorème (3.3.3) ci-dessous).

• **Exemples de séries de Fourier**

Exemple 3.2.4 On considère la fonction f de période 1, qui sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ est définie par $f(t) = 1 - 2|t|$.

Cette fonction étant paire, on a $b_n(f) = 0$, $\forall n \geq 1$. Ses coefficients de Fourier sont donnés, après calcul, par $a_0(f) = \frac{1}{2}$, $a_n = \frac{4}{\pi^2 n^2}$, si n est impair, $= 0$ sinon, $n \geq 1$.

La série de Fourier de f s'écrit donc

$$\frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos 2\pi(2k+1)t}{(2k+1)^2}.$$

La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ étant convergente et f continue, nous pouvons appliquer le théorème (2.1). On a, pour $|t| \leq \frac{1}{2}$,

$$1 - 2|t| = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos 2\pi(2k+1)t}{(2k+1)^2},$$

la convergence étant de plus uniforme.

En particulier, en faisant $t = 0$, on obtient la relation numérique

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2},$$

d'où l'on déduit :

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

(2.5) Exemple :

Exemple 3.2.5 On considère maintenant la fonction f impaire de période 1 définie par

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{pour } 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ -1, & \text{pour } -\frac{1}{2} \leq t < 0. \end{cases}$$

Cette fonction est continue **sauf** aux points de la forme $\frac{p}{2}, p \in \mathbb{Z}$, points pour lesquels, elle possède cependant une limite à gauche et une limite à droite (on note que la demi-somme de ces limites à gauche et à droite est nulle).

La fonction est impaire. On a donc $a_0(f) = a_n(f) = 0$, $\forall n \geq 1$, et le calcul donne : $b_n(f) = \frac{4}{\pi n}$ si n impair, $= 0$ sinon. Sa série de Fourier est donnée par

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi} \frac{\sin 2\pi(2k+1)t}{(2k+1)}.$$

On constate que les coefficients de Fourier sont en $\frac{1}{n}$, série **non** absolument convergente ($\sum |b_n| = +\infty$), bien que de carré sommable ($\sum |b_n|^2 < \infty$). Nous ne pouvons donc pas appliquer le théorème (3.2.1).

Prenons $t = 0$. La série se réduit à $0 \neq f(0)$; il n'y donc pas convergence au point 0 vers $f(0)$ (notons cependant que l'on trouve la demi-somme des limites à gauche et à droite de f en 0, $\frac{1}{2}[f(0^-) + f(0^+)]$, qui est une façon plus naturelle définir la valeur de f en 0. Nous expliquerons ce résultat dans un cadre général plus loin).

Par contre, si nous prenons $t = \frac{1}{4}$, la série de Fourier converge en ce point (série alternée) et sa somme est égale à $f(\frac{1}{4})$.

En effet, on a la relation

$$\begin{aligned} \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\sin(2k+1)\frac{\pi}{2} &= \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)} \\ &= \frac{4}{\pi}\ \mathrm{arctg}(1) = 1, \end{aligned}$$

(voir *exercices* pour une autre preuve de cette relation).

Nous montrerons plus loin que, de façon générale, pour une fonction f vérifiant la condition $|c_n(f)| \leq \frac{K}{|n|}$, il y a convergence de la série de Fourier de f en tout point de continuité de f, et convergence vers la demi-somme des limites à gauche et à droite, en tout point où ces limites existent.

• **Régularité et ordre de grandeur des coefficients**

L'ordre de grandeur des coefficients de Fourier $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ d'une fonction f, et donc le comportement de sa série de Fourier, sont liés à la régularité de f. Nous allons préciser cette remarque, en montrant que si f est de classe $C^p, p \geq 1$, les coefficients de Fourier de f sont petits pour n grand, de l'ordre de n^{-p}.

Proposition 3.2.6 *Soit p un entier ≥ 1. Si f est de classe C^p, on a*

$$c_n(f^{(p)}) = (2\pi i n)^p c_n(f)$$

et donc $c_n(f) = o(n^{-p})$ (i.e. $\lim_n n^p c_n(f) = 0$).

Preuve : Pour f dans $C^1(\mathbb{T})$, nous avons

$$\begin{aligned} |c_n(f)| &= |\int_0^1 f(t)e^{-2\pi int}dt| \\ &= |[\frac{1}{(-2\pi in)}f(t)e^{-2\pi int}]_0^1 + \frac{1}{2\pi in}\int_0^1 f'(t)e^{-2\pi int}\,dt| \\ &= |\frac{c_n(f')}{2\pi n}| \leq \frac{1}{2\pi|n|}\int_0^1 |f'(t)|\,dt = \frac{\|f'\|_1}{2\pi|n|}. \end{aligned}$$

Pour f dans $C^p(\mathbb{T})$, en intégrant p fois par parties, nous obtenons :

$$c_n(f) = (\frac{1}{2\pi in})^p c_n(f^{(p)}),$$

et on a $\lim\limits_{|n|\to\infty} c_n(f^{(p)}) = 0$, d'où le résultat.

□

Remarque 3.2.7 En fait, pour $f \in C^1(\mathbb{T})$, nous avons $\sum |c_n(f)| < \infty$, résultat que nous montrerons plus loin (théorème (4.6)).

Définition 3.2.8 Une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est dite indexdécroissance rapide à **décroissance rapide**, si elle vérifie

$$\forall p \geq 1, \lim_{|n|\to\infty} |n^p c_n| = 0.$$

Théorème 3.2.9 *Soit f une fonction continue 1-périodique. Une condition nécessaire et suffisante pour que f soit dans $C^\infty(\mathbb{T}^1)$ est que ses coefficients de Fourier forment une suite à décroissance rapide.*

Preuve : Supposons f de classe C^∞. D'après la proposition précédente, $c_n(f) = o(\frac{1}{n^p})$, pour tout $p \geq 1$. Donc la suite $(c_n(f))$ est à décroissance rapide.

Inversement, supposons qu'on ait $\forall p \geq 1, c_n(f) = o(\frac{1}{n^p})$. Alors la série de Fourier $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{2\pi int}$ converge uniformément vers f, d'après le théorème (2.2). De même, pour tout $p \geq 1$, la série $\sum_{-\infty}^{+\infty}(2\pi in)^p c_n(f)e^{2\pi int}$ converge uniformément (puisqu'on a $|n|^p|c_n(f)| = o(\frac{1}{n^2})$). C'est la série obtenue en dérivant p fois terme à terme. Un résultat classique sur les séries de fonctions montre que ceci implique la dérivabilité de f à l'ordre p, pour tout entier $p \geq 1$.

□

• **Le théorème de Dirichlet**

Nous allons montrer la convergence $\lim_n S_n f(t) = f(t)$, sous une condition de régularité de f au point t. Cette condition est la dérivabilité de f au point t et peut être affaiblie en condition de Lipschitz, ou de Hölder, dont nous rappelons la définition.

Définitions 3.2.10 Une fonction f définie sur un voisinage de $t \in \mathbb{R}$ est dite **lipschitzienne** au point t s'il existe $\delta > 0$ et M fini tels que :

$$|f(t+s) - f(t)| \leq M|s|, \text{ pour tout } s \text{ tel que } |s| \leq \delta.$$

Soit α un réel tel que $< \alpha \leq 1$. Plus généralement, une fonction f définie sur un voisinage de $t \in \mathbb{R}$ est dite **höldérienne** d'ordre α au point t, s'il existe $\delta > 0$ et M fini tels que :

$$|f(t+s) - f(t)| \leq M|s|^\alpha, \text{ pour tout } s \text{ tel que } |s| \leq \delta.$$

Théorème 3.2.11 *Si f est une fonction dans $L^1(\mathbb{T})$ dérivable au point t ou seulement lipschitzienne au point t, alors $\lim_{n\to\infty} S_n(f)(t) = f(t)$.*

Preuve : Supposons f dérivable au point t. Définissons une fonction g_t par

$$g_t(s) = \frac{f(t-s) - f(t)}{\sin \pi s}, \text{ pour } 0 < |s| \leq \frac{1}{2}.$$

En 0, on peut définir g_t par continuité : $g_t(0) = -\frac{1}{\pi}f'(t)$.

En tenant compte du fait que $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} D_n(t)dt = 1$, pour tout $n \geq 1$, on a, d'après (3.5) :

$$S_n(f)(t) - f(t)$$
$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g_t(s)\sin((2n+1)\pi s)\ ds$$
$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g_t(s)[\sin(\pi s)\cos(2n\pi s) + \cos(\pi s)\sin(2n\pi s)]\ ds.$$

Les fonctions $s \to g_t(s)\sin(\pi s)$ et $s \to g_t(s)\cos(\pi s)$ sont intégrables sur $[0,1]$. Le lemme de Riemann-Lebesgue implique la convergence vers 0 de la suite des coefficients de Fourier de ces fonctions. La convergence vers 0 de la différence $S_n(f)(t) - f(t)$ en résulte.

On montrera en exercice que, dans la démonstration précédente, il suffit de supposer f lipschitzienne au point t, en observant que la propriété de g_t que l'on a utilisé est de rester bornée dans un voisinage de t.

□

En exercice, on pourra étendre le théorème précédent aux fonctions höldériennes. L'énoncé suivant permet de traiter le cas de fonctions dérivables par morceaux.

Théorème 3.2.12 *(de Dirichlet) : Soient f une fonction dans $L^1(\mathbb{T})$ et t un point tel que les limites à gauche et à droite, $f(t^-)$, $f(t^+)$, existent et soient finies, ainsi que les "demi-dérivées", définies par $f'_g(t) = \lim_{h\to 0, h<0} \frac{1}{h}(f(t+h) - f(t^-))$, $f'_d(t) = \lim_{h\to 0, h>0} \frac{1}{h}(f(t+h) - f(t^+))$. Alors $\lim_{n\to\infty} S_n(f)(t) = \frac{1}{2}(f(t^+) + f(t^-))$.*

Preuve : Compte-tenu des relations $\int_0^{\frac{1}{2}} D_n(t)dt = \int_{-\frac{1}{2}}^0 D_n(t)dt = \frac{1}{2}$, nous avons

$$S_n(f)(t) - \frac{1}{2}(f(t^+ + f(t^-))) = \int_0^{\frac{1}{2}} g_t(s)\sin((2n+1)\pi s)\ ds,$$

où g_t est maintenant la fonction définie, pour $0 < |s| \leq \frac{1}{2}$, par

$$g_t(s) = \frac{1}{\sin\pi s}(f(t+s) - f(t^+) + [f(t-s) - f(t^-)]).$$

Les hypothèses assurent que la fonction g_t est bornée sur un voisinage de t. On peut alors conclure comme dans la preuve du théorème (3.2.11).

□

Le théorème (3.2.11) montre le principe de "localisation" suivant :

Corollaire 3.2.13 *Si une fonction intégrable f est nulle sur un intervalle ouvert I, alors $\lim_n S_n f(t) = 0$, $\forall t \in I$.*

On voit donc que, si deux fonctions intégrables f et g coïncident sur un voisinage d'un point t, alors la différence $S_n f(t) - S_n g(t)$ tend vers vers 0, quand n tend vers $+\infty$. Le comportement de la série de Fourier d'une fonction f en un point t ne dépend donc que des valeurs de f sur un voisinage arbitraire de t. En d'autres termes, si on modifie f en dehors d'un voisinage ouvert d'un point t, on ne change pas le "comportement" de la suite $((S_n f)(t))$. On remarquera que, cependant, les coefficients de Fourier dépendent de l'ensemble des valeurs de la fonction.

3.3 Noyaux de Fejer et convergence des séries de Fourier

• **Convergence en moyenne des séries de Fourier**

3.3.1 Jusqu'ici nous n'avons obtenu la convergence vers f de la série de Fourier d'une fonction f que sous des hypothèses restrictives de régularité portant sur f. Nous allons maintenant examiner la convergence sous des hypothèses plus générales.

Nous avons vu que l'étude de la convergence de $(S_n(f))$ vers f revient à l'étude de la suite des convolées $(D_n * f)$ des noyaux de Dirichlet et de f. Il se trouve que la suite des moyennes des noyaux (D_n) a de meilleures propriétés que la suite des (D_n) elle-même et fournit en fait le **bon procédé de reconstruction** de f à partir de ses coefficients de Fourier. Nous sommes donc conduits à étudier la convergence de la suite des moyennes des sommes partielles.

Posons $F_N = \frac{1}{N}\sum_0^{N-1} D_n$. Un calcul élémentaire donne

$$\begin{aligned} F_N(t) = \frac{1}{N}\sum_0^{N-1}(\sum_{-n}^{n} e^{2\pi ikt}) &= \frac{1}{N}|\sum_0^{N-1} e^{2\pi int}|^2 \\ &= \frac{1}{N}|\frac{\sin N\pi t}{\sin \pi t}|^2, \text{ si } t \notin \mathbb{Z}, = N, \text{ si } t \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Les fonctions F_N, appelées **noyaux de Féjer**, sont donc ≥ 0, d'intégrale 1 ($\int F_N dt = \frac{1}{N}\sum_0^{N-1}\int D_n dt = \frac{N}{N} = 1$). Cette positivité, que ne possèdent pas les fonctions D_N, va permettre de traiter le problème de la convergence (**en moyenne**) des sommes partielles $S_N(f)$.

Rappelons le résultat obtenu dans le chapitre *Applications de la convolution.*

Proposition 3.3.2 *La suite $(F_N)_{N>0}$ forme une identité approchée sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.*

Ce résultat et les théorèmes de convergence pour les identités approchées appliqués à la suite des convolées

$$\frac{1}{N}\sum_0^{N-1} S_n(f)(t) = (F_{N^*}f)(t).$$

impliquent le théorème :

Théorème 3.3.3 *Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$.*

En tout point t, pour lequel f possède une limite à gauche et une limite à droite $f(t_{0-})$, $f(t_{0+})$, on a :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} S_n(f)(t) = \frac{1}{2}[f(t_{0-}) + f(t_{0+})].$$

Si f est continue en t, on a :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} S_n(f)(t) = f(t).$$

Si f est continue en tout point, la convergence est uniforme.

D'autre part, la convergence a lieu en norme L^1 vers f :

$$\|\frac{1}{N}\sum_{1}^{N} S_n f - f\|_1 \to 0.$$

En ce qui concerne la convergence ponctuelle, rappelons que les fonctions réglées possèdent une limite à gauche et une limite à droite en tout point. Le théorème précédent est donc bien adapté à ces fonctions.

Le théorème 3.3.3 donne un moyen explicite de construire une approximation uniforme d'une fonction f 1-périodique continue (ou en norme $\| \, \|_1$ pour une fonction f dans $L^1(\mathbb{T})$), les moyennes des sommes partielles s'écrivant :

$$\sum_{-N}^{N}(1 - \frac{|k|}{N}) \; c_k(f) \; e^{2\pi ikt}.$$

• Retour aux sommes partielles

Le théorème précédent montre, sous certaines conditions assez générales, la convergence des moyennes des sommes partielles de la série de Fourier d'une fonction. Dans ce paragraphe, nous allons montrer qu'en faisant des **hypothèses** convenables sur **l'ordre de grandeur** des coefficients de f, on peut établir la convergence des sommes partielles elles-mêmes, autrement dit la convergence de la série de Fourier.

Nous aurons besoin du lemme général d'analyse suivant :

Définition 3.3.4 On dit qu'une suite numérique $(S_n, n = 1, 2, \ldots)$ converge en moyenne ou **au sens de Césaro** vers une limite ℓ, si les moyennes $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} S_n$ convergent vers ℓ.

On montre facilement que la convergence au sens habituel implique la convergence au sens de Césaro. Par contre la réciproque n'est pas vérifiée (prendre par exemple $S_n = (-1)^n$).

On a cependant la réciproque **partielle** suivante.

Lemme 3.3.5 *Soit (a_n) une suite numérique telle que $|a_k| \leq \frac{C}{k}, k \geq 1$, pour une constante C. Soit $S_n = \sum_1^n a_k$. Alors*

$$\frac{1}{N}\sum_{1}^{N} S_n \to \ell \Longleftrightarrow S_n \to \ell.$$

Preuve : Nous devons donc démontrer que, sous l'hypothèse que la suite $|ka_k|$ est bornée, la condition

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(\sum_{k=1}^{n} a_k) \to \ell \text{ implique } \sum_{k=1}^{n} a_k \to \ell.$$

Soit $\sigma_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} S_n = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(\sum_1^n a_k)$. En remplaçant a_1 par $a_1 - \ell$, on peut se ramener au cas où $\ell = 0$. Pour $n \geq m$, on a la relation

$$(n - m)S_n = n\sigma_n - m\sigma_m + a_{m+2} + 2a_{m+3} + \cdots + (n - m - 1)a_n.$$

Pour $\alpha > 0$ donné, soit $L(\alpha)$ un entier tel que

$$n \geq L(\alpha) \Rightarrow |\sigma_n| \leq \alpha,$$

Soient deux entiers $n, m \geq L(\alpha)$ et donc vérifiant

$$|\sigma_n| < \alpha, \ |\sigma_m| < \alpha.$$

On déduit de la relation précédente

$$\begin{aligned} |S_n| &\leq (n+m)\tfrac{\alpha}{(n-m)} + \tfrac{1+2+\cdots+(n-m-1)}{(n-m)}\tfrac{C}{m} \\ &\leq (n+m)\tfrac{\alpha}{(n-m)} + \tfrac{C(n-m)}{2m}. \end{aligned}$$

Posons $\lambda = \dfrac{n-m}{m}$. Pour $n > m \geq L(\alpha)$, on a donc :

$$|S_n| \leq (2+\lambda)\frac{\alpha}{\lambda} + \frac{C\lambda}{2}. \tag{3.6}$$

Soit maintenant $\epsilon > 0$. On peut supposer qu'on a $2\epsilon/C \leq 1$. Montrons qu'il existe un entier N tel que $n \geq N \Rightarrow |S_n| < 2\epsilon$.

Nous commençons par choisir un nombre $\alpha > 0$ tel que : $0 < \alpha < \dfrac{2}{3}\dfrac{\epsilon^2}{C}$. L'inégalité $\dfrac{3\alpha}{\epsilon} < \dfrac{2\epsilon}{C}$ est alors vérifiée.

Nous déterminons maintenant un entier $N(\epsilon)$ tel que, pour tout $n > N(\epsilon)$, il existe un entier $m = m(n) = n/(1+\lambda(n))$ vérifiant les conditions $(*)$ suivantes :

$$\frac{3\alpha}{\epsilon} \leq \lambda(n) \leq \frac{2\epsilon}{C} \text{ et } m > L(\alpha).$$

Pour cela, il suffit de choisir pour N le plus petit entier tel que :

$$N \geq [\frac{1}{1+3\alpha/\epsilon} - \frac{1}{1+2\epsilon/C}]^{-1}, \text{ et } N \geq (1+2\epsilon/C)L.$$

Montrons que $N(\epsilon)$ répond à la question. Pour $n > N(\epsilon)$, on considère l'entier m vérifiant les conditions $(*\ )$ et on applique l'inégalité $(fous3.6.1)$:

$$|S_n| \leq (2+\lambda)\frac{\alpha}{\lambda} + \frac{C\lambda}{2} \leq \epsilon + \epsilon = 2\epsilon.$$

□

Pour pouvoir appliquer le lemme à l'étude des séries de Fourier, on est conduit à rechercher une classe de fonctions f dont les coefficients de Fourier vérifient la condition $\sup_{n\in\mathbb{Z}} |nc_n(f)| < \infty$.

Proposition 3.3.6 *Si f est monotone par morceaux, il existe une constante C telle que*

$$|c_n(f)| < \frac{C}{|n|}, \forall n \neq 0. \tag{3.7}$$

Preuve : Nous nous bornerons au cas où f est dérivable avec dérivée continue, par morceaux, c'est-à-dire au cas où il existe une décomposition finie de $[0,1]$ en intervalles (a_j, b_j) tels que f' existe et est continue et bornée sur $]a_j, b_j[$. On a :

$$c_n(f) = \int_0^1 f(t)e^{-2\pi int}\, dt = \sum_j \int_{a_j}^{b_j} f(t)e^{-2\pi int}\, dt.$$

Comme il s'agit d'une somme finie, on est ramené à montrer qu'il existe, pour chaque j, une constante C_j telle que

$$|\int_{a_j}^{b_j} f(t)e^{-2\pi int}\, dt| \leq \frac{C_j}{|n|} \quad n \neq 0.$$

En intégrant par parties, on obtient

$$|\int_{a_j}^{b_j} f(t)e^{-2\pi int}\, dt| \leq \frac{1}{2\pi|n|}[|f(b_j)| + |f(a_j)| + \int_{a_j}^{b_j} |f'(t)|\, dt],$$

d'où le résultat.

Le cas général d'une fonction monotone par morceaux est traité en exercice.

□

Nous pouvons maintenant tirer les conséquences des résultats précédents.

Théorème 3.3.7 *Si f est une fonction périodique, de période 1, monotone par morceaux, on a*

$$\lim_N S_N f(t) = \begin{cases} f(t), & \textit{si } f \textit{ est continue au point } t, \\ \frac{1}{2}[f(t^-) + f(t^+)], & \textit{sinon}. \end{cases}$$

La convergence est uniforme si f est supposée, en outre, continue en tout point.

Preuve : Les résultats annoncés sont vérifiés, d'après le théorème (3.3.3), si l'on remplace $S_N f(t)$ par $\frac{1}{N}\sum_0^{N-1} S_n f(t)$. Comme f est monotone par morceaux, ses coefficients vérifient d'après (3.7) $\sup_{n\in\mathbb{Z}} |nc_n(f)| < \infty$, et on peut donc appliquer le lemme (3.3.5) pour déduire de la convergence de la suite des moyennes $\frac{1}{N}\sum_0^{N-1} S_n f(t)$ la convergence de la suite $(S_n f(t))_{n>0}$.

□

Exemple 3.3.8 Reprendre l'exemple (3.2.5) et appliquer le théorème précédent pour obtenir la formule

$$\sum_0^\infty \frac{(-1)^k}{(2k+1)} = \frac{\pi}{4}.$$

3.4 Inégalité de Bessel, convergence en norme $\| \|_2$

3.4.1 Après les résultats de convergence ponctuelle, qui nécessitent des hypothèses sur les fonctions ou sur les coefficients de Fourier, nous abordons la théorie L^2 des séries de Fourier. Nous allons exploiter les relations d'orthogonalité (3.1) vérifiées par les exponentielles e_n pour étudier le comportement quadratique (c'est-à-dire en norme $\| \|_2$) des séries de Fourier.

En fait, nous sommes ici dans un cas particulier d'espace hilbertien (l'espace $L^2(\mathbb{T})$ muni du produit scalaire $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f\overline{g}dt$) et d'un système orthonormé (le système formé par les fonctions $e_k, k \in \mathbb{Z}$). Tout ce qui suit pourrait être formulé dans le cadre général des développements dans une base orthonormée d'un espace de Hilbert.

Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$. La fonction f est intégrable sur $[0,1]$ (rappelons que $L^2(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$) et on peut considérer sa série de Fourier et les sommes partielles formées par les polynômes trigonométriques $S_n(f)$ définis par

$$S_n(f)(t) = \sum_{k=-n}^{k=n} c_k(f) e^{2\pi ikt}.$$

Le résultat suivant exprime que $S_n(f)$ est la **projection orthogonale** de f sur le sous-espace vectoriel E_n de $L^2(\mathbb{T})$ engendré par les fonctions $e_{-n}, ..., e_n$.

Théorème 3.4.2 *Pour tout $n \geq 0$, $S_n(f)$ est l'unique polynôme trigonométrique P d'ordre n tel que l'on ait $\langle f-P, e_k\rangle = 0$, pour $k=-n,...,n$. C'est l'unique polynôme trigonométrique d'ordre n qui réalise le minimum de "l'écart quadratique moyen" à f.*

Preuve : a) Le coefficient de Fourier d'ordre k de $S_n(f)$, pour $k=-n,...,n$, est égal à $c_k(f)$. On a donc $\langle f - S_n(f), e_k\rangle = c_k(f) - c_k(f) = 0$, pour $k=-n,...,n$. Ainsi $f - S_n(f)$ est orthogonal à e_k, pour $k=-n,...,n$, donc orthogonal à E_n.

Si P est un polynôme trigonométrique d'ordre n tel que $f-P$ soit orthogonal à e_k, pour $k=-n,...,n$, son coefficient d'ordre k, pour $k=-n,...,n$, doit être égal à $c_k(f)$, et donc P coïncide avec $S_n(f)$.

b) Soit $Q = \sum_{\ell=-n}^{n} d_\ell e_\ell$ un polynôme trigonométrique d'ordre n. D'après a), $f - S_n(f)$ est orthogonal à $S_n(f) - Q$; d'où la relation (de Pythagore) :

$$\|f-Q\|_2^2 = \|f - S_n(f)\|_2^2 + \|S_n(f) - Q\|_2^2. \tag{3.8}$$

De cette relation résulte l'inégalité $\|f - S_n(f)\|_2 \leq \|f-Q\|_2$, l'égalité n'étant réalisée que si $Q = S_n(f)$.

□

A l'ordre n, S_nf est le polynôme trigonométrique donnant la meilleure approximation en norme $\| \ \|_2$ de f. Notons que l'approximation de f par la moyenne $F_n * f = \sum_{-n}^{n}(1-\frac{|k|}{n})\ c_k(f)\ e_k$ a l'avantage de préserver la positivité des fonctions, et donc aussi l'ordre : si $f \leq g$, $F_n * f \leq F_n * g$.

Lemme 3.4.3 *Si f est une fonction dans $L^2(\mathbb{T})$, ses coefficients de Fourier vérifient :*

$$\sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2 \leq \int_0^1 |f(t)|^2\ dt = \|f\|_2^2.$$

La série des carrés des coefficients est convergente ($(c_k(f))_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$) et on a

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2 \leq \int_0^1 |f(t)|^2\ dt. \tag{3.9}$$

Preuve : Appliquons la relation (3.8) avec $Q = 0$. On obtient :

$$\|f\|_2^2 = \|f - S_n(f)\|_2^2 + \|S_n(f)\|_2^2. \tag{3.10}$$

Le développement du carré de la norme $\|S_n(f)\|_2^2$ donne par les relations d'orthogonalité :

$$\|S_n(f)\|_2^2 = \sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2.$$

D'où la première assertion a) par $(fous4.3.2)$.

La deuxième assertion en résulte par passage à la limite.

□

• Egalité de Bessel-Parseval

Théorème 3.4.4 *Pour toute fonction f dans $L^2(\mathbb{T})$, on a*

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2 = \int_0^1 |f(t)|^2 \, dt = \|f\|_2^2 < \infty.$$

Preuve : La preuve est basée sur le fait que le sous-espace engendré par les fonctions $e_k, k \in \mathbb{Z}$, autrement dit le sous-espace des polynômes trigonométriques, est dense pour la topologie de la norme $\| \|_2$ dans l'espace $L^2(\mathbb{T})$.

A toute fonction f de carré intégrable sur $[0, 1]$, de période 1, associons les quantités

$$q_N(f) = (\sum_{-N}^{N} |c_k(f)|^2)^{\frac{1}{2}} = \|S_N(f)\|_2,$$

$$q(f) = (\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2)^{\frac{1}{2}} = \lim_N q_N(f).$$

D'après l'inégalité du lemme (3.4.3), la quantité $q(f)$ est bien définie et vérifie $q(f) \leq \|f\|_2, \forall f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$. De plus elle vérifie l'inégalité triangulaire, car on a

$$\begin{aligned} q_N(f+g) &= \|S_N(f+g)\|_2 = \|S_N(f) + S_N(g)\|_2 \\ &\leq \|S_N(f)\|_2 + \|S_N(g)\|_2 = q_N(f) + q_N(g). \end{aligned}$$

Nous voulons montrer que $q(f)$ est égale à $\|f\|_2$, pour toute $f \in L^2(\mathbb{T})$. Pour cela, observons que cette relation est vérifiée par tout polynôme trigonométrique, et que, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, il existe une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes trigonométriques telle que $\lim_n \|f - P_n\|_2 = 0$.

Par continuité de la fonction q (au sens de la topologie de la norme $\| \|_2$ sur $L^2(\mathbb{T})$), la relation $q(f) = \|f\|_2$ reste vraie pour toute $f \in L^2(\mathbb{T})$.

□

• Forme réelle de l'égalité de Bessel-Parseval

Soit f dans $L^2(\mathbb{T})$ et $f(t) = a_0(f) + \sum_1^\infty a_n(f)\cos 2\pi nt + \sum_1^\infty b_n \sin 2\pi nt$ sa série de Fourier sous forme trigonométrique. L'égalité de Bessel-Parseval s'écrit :

$$\|f\|_2^2 = |a_0(f)|^2 + \frac{1}{2} \sum_1^\infty |a_n(f)|^2 + \frac{1}{2} \sum_1^\infty |b_n(f)|^2.$$

Donnons maintenant une application de l'égalité Bessel-Parseval.

Théorème 3.4.5 *Si f est une fonction périodique, de période 1, et de classe C^1, alors on a $\sum_{-\infty}^\infty |c_n(f)| < +\infty$. Par suite, f est la somme de sa série de Fourier (avec convergence uniforme).*

Preuve : D'après la proposition (3.2.6), nous savons qu'il existe une constante C telle que $|c_n(f)| \leq \frac{C}{|n|}$, $n \neq 0$. Cette majoration est insuffisante pour prouver que $\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n(f)| < \infty$. Pour obtenir ce résultat, nous utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwartz élémentaire

$$\sum_{n=-m}^{m} |u_n v_n| \leq (\sum_{n=-m}^{m} |u_n|^2)^{1/2} (\sum_{n=-m}^{m} |v_n|^2)^{1/2}$$

et l'égalité de Bessel-Parseval appliquée à f' :

$$\begin{aligned}\sum_{n=-m, n\neq 0}^{m} |c_n(f)| &= \textstyle\sum_{n=-m,n\neq 0}^{m} |nc_n(f)| \frac{1}{|n|} \\ &\leq (\textstyle\sum_{n=-m,n\neq 0}^{m} \frac{1}{n^2})^{1/2} (\sum_{n=-m,n\neq 0}^{m} n^2 |c_n(f)|^2)^{1/2}.\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\sum_{n=-m}^{m} |c_n(f)| &\leq |c_0(f)| + (\textstyle\sum_{n\neq 0} \frac{1}{n^2})^{1/2} (\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f')|^2)^{1/2} \ \frac{1}{2\pi} \\ &\leq |c_0(f)| + (\tfrac{\pi^2}{3})^{1/2} (\tfrac{1}{2\pi}) \|f'\|_2 \leq \|f\|_1 + \tfrac{1}{2\sqrt{3}} \|f'\|_2 < \infty.\end{aligned}$$

La série $\sum_{-\infty}^\infty |c_n(f)|$ est donc convergente et on termine la preuve du théorème en appliquant le théorème (3.2.1).

□

Remarque 3.4.6 La condition $\sum_n |c_n|^2 < \infty$ ne suffit pas à assurer la convergence en tout point. Le théorème précédent **n'affirme pas** que, pour $f \in L^2(\mathbb{T})$, la série $\sum c_n(f) e^{2\pi int}$ converge vers f, pour tout t ou pour presque tout t. Il permet seulement d'affirmer que toute fonction de $L^2(\mathbb{T})$ peut être représentée comme somme -au sens L^2- de sa série de Fourier.

En fait, un théorème relativement récent et difficile (théorème de Carleson) permet d'établir la convergence presque partout de la série de Fourier d'une fonction f dans $L^2(\mathbb{T})$ et même pour les fonctions dans $L^p(\mathbb{T})$, pour $p > 1$. Ce résultat est faux pour $p = 1$: on peut construire des fonctions dans $L^1(\mathbb{T})$ dont la série de Fourier ne converge en aucun point !

D'après l'égalité de Bessel-Parseval, l'application $f \in L^2(\mathbb{T}) \to (c_n(f), n \in \mathbb{Z})$ est une isométrie de $L^2(\mathbb{T})$ dans $\ell^2(\mathbb{Z})$. Nous allons montrer que cette isométrie est **surjective**. On notera que ce n'est qu'ici qu'intervient le fait que $L^2(\mathbb{T})$ est complet et que la plupart des autres résultats de ce chapitre n'utilisent pas cette propriété. Dans l'énoncé, nous confondrons fonction et classe d'équivalence de fonctions.

Théorème 3.4.7 *(Riesz-Fischer) Pour toute suite $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ dans $\ell^2(\mathbb{Z})$, les séries $\sum_{n\geq 0} c_n\ e^{2\pi in.}$ et $\sum_{n<0} c_n\ e^{2\pi in.}$ convergent dans $L^2(\mathbb{T})$ (i.e. au sens de la norme $\|\ \|_2$) et la somme $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\ e^{2\pi in.}$ est une fonction de $L^2(\mathbb{T})$ telle que $c_n(f) = c_n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.*

Preuve : Il suffit de vérifier le critère de Cauchy dans $L^2(\mathbb{T})$ (c'est ici que l'on utilise le fait que $L^2(\mathbb{T})$ est complet). Pour tous N et $p > 0$, nous avons :

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |\sum_{k=N}^{N+p} c_k\ e^{2\pi ikt}|^2\ dt = \sum_{k=N}^{N+p} |c_k|^2 \leq \sum_{k\geq N} |c_k|^2.$$

Le majorant de droite, reste de la série convergente $\sum_k |c_k|^2$, tend vers 0, quand N tend vers l'infini. On raisonne de même pour N tendant vers $-\infty$.

□

3.5 Un exemple d'application (équation de la chaleur)

Un exemple d'application : équation de la chaleur

Considérons une barre de longueur L identifiée au segment $[0, L]$. On désigne par $u(x, t)$ la température en un point x de la barre au temps t. Le problème est d'obtenir une expression de u en supposant vérifiée l'équation de la chaleur (équation (2) ci-dessous et la condition initiale, température de la barre donnée au temps 0 (relation (4).

Notons D le domaine $D =]0, L[\times]0, \infty[$, et $\overline{D} = [0, L]\times]0, \infty[$ sa fermeture.

Soit h une fonction continue sur $[0, L]$ de classe C^1 sur $]0, L[$ et telle que $h(0) = h(1) = 0$. La température à l'instant 0 en un point x de la barre est fonction h est donnée par $h(x)$.

La fonction u cherchée est, si elle existe, une fonction vérifiant les conditions suivantes : (1) $u \in \mathcal{C}(\overline{D})$ et sa restriction à D est C^∞ ;
(2) $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ dans D ;
(3) $u(0, t) = u(L, t) = 0$;
(4) $u(x, 0) = h(x)$.

Cherchons d'abord une solution de 2) de la forme $v(x, t) = f(x)\phi(t)$, avec $f \in \mathcal{C}[0, L] \bigcap \mathcal{C}^\infty(]0, L[)$, et $\phi \in \mathcal{C}[0, \infty] \bigcap \mathcal{C}^\infty(]0, \infty[)$. Si f et ϕ ne s'annulent pas respectivement sur $]0, L[$ et sur $]0, \infty[$, on obtient :

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{\phi'(t)}{\phi(t)}, \forall x \in]0, L[,\ \ t \in]0, \infty[.$$

Les fonctions f et ϕ vérifient donc, pour une constante réelle λ, les équations différentielles :

$$f'' = \lambda f,\ \phi' = \lambda\phi,$$

avec les conditions au bord : $f(0) = f(L) = 0$.

Ces conditions excluent que λ soit ≥ 0 (car alors f serait identiquement nulle). On a donc $\lambda = -\omega^2$, pour une constante ω réelle, d'où $f(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x$, et la condition (3) donne : $A = 0$, $B\sin\omega L = 0$. Ceci impose que wL soit de la forme $\omega L = \pi n$, pour un entier n. La fonction ϕ est alors de la forme $\phi(t) = Ce^{-\omega^2 t}$, pour une constante C

On a ainsi obtenu des solutions particulières de l'équation de la chaleur pour le segment $[0, L]$ de la forme

$$v_n(x,t) = \sin(\frac{n\pi}{L}x)\ e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2}t}.$$

En formant une série à l'aide de ces solutions, nous allons construire une solution satisfaisant à la condition initiale (4).

La fonction h reprend les mêmes valeurs au bord du segment $[0, L$. Notons $\widetilde{h}$ la fonction impaire $2L$-périodique qui coïncide avec h sur $[0, L]$. Soit

$$\widetilde{h}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin(\frac{n2\pi}{2L}x)$$

son développement en série de Fourier.

Définissons formellement u par la série :

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin(\frac{n2\pi}{2L}x)\ e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2}t}. \qquad (*)$$

La fonction $\widetilde{h}$ est continue sur $\mathbb{R}$, $2L$-périodique et C^1 par morceaux. On a donc $\sum_n |b_n| < \infty$ et la série de Fourier de $\widetilde{h}$ converge absolument vers h en tout point.

La fonction u définie par $(*)$ est donc continue sur $\overline{D}$ et C^∞ sur D.

Fixons $\epsilon > 0$ et $M > \epsilon$. Nous avons, pour $t \in [\epsilon, M]$, la majoration :

$$|b_n \sin(\frac{n2\pi}{2L}x)(\frac{-n^2\pi^2}{L^2})^k\ e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2}t}| \leq |b_n|(\frac{n^2\pi^2}{L^2})^k\ e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2}\epsilon},$$

par le terme général d'une série convergente.

Sur tout compact de D, on obtient la convergence normale, donc uniforme des séries dérivées.

3.6 Exercices

Exercice 3.6.1 *Un cas particulier de convergence des séries trigonométriques : méthode d'Abel*

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels positifs. Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels telle que, pour tous $k, k' \in \mathbb{N}$, $|\sum_k^{k'} b_j| \leq M$, où M est une constante.

a) Montrer l'inégalité :

$$|\sum_n^{n'} a_j b_j| \leq M a_n. \tag{1}$$

b) On suppose, de plus, que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers zéro. Montrer la convergence de la série $\sum_n a_n b_n$.

c) Déduire de ce qui précède le théorème suivant :

Théorème : *Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à termes positifs décroissante et tendant vers zéro, les séries $\sum_n a_n \cos(2\pi nt)$ et $\sum_n a_n \sin(2\pi nt)$ convergent pour tout $t \notin \mathbb{Z}$.*

Pour tout $\epsilon, 0 < \epsilon < 1$, la convergence est uniforme sur l'intervalle $[\epsilon, 1-\epsilon]$, $0 < \epsilon < 1$.

[[*Indications* : *Preuve de a)* :

$$\begin{aligned} a_n b_n + ... + a_{n'} b_{n'} \\ = \quad & a_n(b_n) + a_{n+1}(b_{n+1} + b_n - b_n) + ... + a_{n'}(b_{n'} + ... \\ = \quad & b_n(a_n - a_{n+1}) + (b_{n+1} + b_n)(a_{n+1} - a_{n+2}) + ... \\ +(b_{n'-1} + ... + b_n)(a_{n'-1} - a_{n'}) + (b_{n'} + ... + b_n)a_{n'}; \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} &|a_n b_n + ... + a_{n'} b_{n'}| \\ &\leq |b_n|(a_n - a_{n+1}) + ... + |b_{n'-1} + ... + b_n|(a_{n'-1} - a_{n'}) \\ &\quad +|b_{n'} + ... + b_n|a_{n'} \\ &\leq M[a_n - a_{n+1} + a_{n+1} - a_{n+2} + ... + a_{n'-1} - a_{n'} + a_{n'}] = M a_n. \end{aligned}$$

Preuve de b) : L'inégalité (1) montre que le critère de Cauchy est satisfait.

Le théorème résulte de a), b) et des inégalités suivantes vérifiées pour $n, n' \in \mathbb{N}, n' > n$.

$$|\sum_{j=n}^{n'} \cos 2\pi jt|, \ |\sum_{j=n}^{n'} \sin 2\pi jt| \leq |\sum_{j=n}^{n'} \exp 2\pi ijt| \leq \frac{2}{|1 - \exp 2\pi it|}.$$

]]

Remarque : sous les mêmes hypothèses sur la suite (a_n), on obtient la convergence des séries $\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n \cos 2\pi nt$, $\sum_{n\geq 1}(-1)^n a_n \sin 2\pi nt$, pour $t - \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.

Exercice 3.6.2 *Calcul de séries de Fourier*

a) Calculer les coefficients de Fourier des fonctions f, g périodiques, de période 1, définies sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ par :

$f(t) = 0$, pour $-\frac{1}{2} \leq t \leq 0$, $= t^2$, pour $0 \leq t < \frac{1}{2}$,

$g(t) = 1 - t$, pour $0 \leq t < \frac{1}{2}$ et g est paire.

b) En utilisant la fonction g, calculer les sommes des séries :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}, \quad \text{puis} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

c) Retrouver ces résultats en utilisant la fonction f.

Exercice 3.6.3 *Calcul d'une série de Fourier*

Soit f de période 1 définie sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ par $f(t) = (1 - 2|t|)^2$.

Calculer la série de Fourier de f et en déduire les valeurs des séries

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Exercice 3.6.4

Soit $T > 0$. On rappelle que le développement d'une fonction T-périodique est de la forme $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2\pi i n \frac{t}{T}}$. Soit f la fonction périodique de période T définie sur $[0, T]$ par

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{pour } 0 < t < \frac{T}{2}, \\ 0, & \text{pour } \frac{T}{2} < t < T. \end{cases}$$

a) Développer f en série de Fourier.

b) En déduire la valeur de la somme de la série $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 3.6.5

En utilisant le développement de $\frac{1}{1+t^2}$, montrer la relation

$$\frac{4}{\pi} \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} = \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg}(1) = 1.$$

[[*Indications* : Partant du développement $\frac{1}{1+t^2} = \sum_0^\infty (-1)^n t^{2n}, 0 \leq t < 1$, où la série est uniformément convergente sur tout intervalle $[0, x] \subset [0, 1[$, par intégration entre 0 et x, on obtient :

$$\operatorname{arctg}(x) = \sum_{0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, 0 \leq x < 1.$$

Posons $\phi_n(x) = \sum_0^n (-1)^k x^{2k}, \phi(x) = \sum_0^\infty (-1)^k x^{2k} = \frac{1}{(1+x^2)}, 0 \leq x < 1$.

On note que la fonction arctg x est continue sur $[0, 1]$, que les fonctions arctg x et $\sum_0^n (-1) x^{2k+1}/(2k+1) = \Phi_n(x)$ sont les primitives de ϕ et de ϕ_n respectivement sur $[0, 1[$, que ϕ_n est bornée sur $[0, 1[$ indépendamment de n : $|\phi_n(x)| \leq 2$ et enfin que (ϕ_n) converge vers ϕ uniformément sur tout compact $[0, x] \subset [0, 1[$.

Ces propriétés impliquent $\lim\limits_n \Phi_n(1) = \text{arctg}(1)$.]]

Exercice 3.6.6 *Un exemple de série de Fourier*

Soit f définie par : $f(t) = \exp(\alpha e^{i2\pi t})$, où α est réel.

1) Quelle est la série de Fourier associée à f ?

2) Montrer la relation

$$\sum_{n \geq 0} \frac{|\alpha|^{2n}}{(n!)^2} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\alpha \cos(2\pi t)} \, dt.$$

Exercice 3.6.7 *Une inégalité pour f périodique de classe C^1 (inégalité de Wirtinger)*

Soit f de période 1, de classe C^1, telle que $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f dt = 0$

1) Montrer l'inégalité

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f'(t)|^2 dt \geq 4\pi^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f(t)|^2 dt. \tag{1}$$

2) Chercher les fonctions f pour lesquelles il y a égalité dans (1) et montrer que la constante $4\pi^2$ ne peut pas être améliorée.

3) Généraliser l'inégalité précédente aux fonctions périodiques de période a et de classe C^1.

Exercice 3.6.8 *Calcul de* $\int_0^\infty (\frac{\sin t}{t})^2 \, dt$

a) Soit $\delta \in]0, \frac{1}{2}[$. Soit f la fonction de période 1, définie sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ par

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{pour } |t| \leq \delta, \\ 0, & \text{pour } \delta < |t| \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Calculer les coefficients de Fourier de f.

b) Par l'égalité de Parseval, calculer la somme :

$$\sum_1^\infty \frac{\sin^2(2\pi n \delta)}{n^2 \delta}.$$

[[Résultat : $\pi^2(1-2\delta)$.]]

c) En déduire la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^\infty (\frac{\mathrm{sin} t}{t})^2 \ dt.$$

Exercice 3.6.9 *Exemple de série de Fourier*

Soit δ un réel, $0 \leq \delta < \frac{1}{2}$.
Soit ϕ la fonction périodique, de période 1, définie par

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{pour } |x| < \delta, \\ \frac{1-2|x|}{1-2\delta}, & \text{pour } \delta \leq |x| \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

a) Calculer les coefficients de Fourier (sous forme réelle) de la fonction ϕ.

b) Montrer la convergence de la série de Fourier de ϕ vers ϕ en tout point. (On donnera un énoncé précis du théorème employé.)

c) Exprimer en fonction de δ la somme des séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\cos(2\pi n\delta) - (-1)^n)}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi n\delta)}{n^2} \ .$$

d) Donner une expression simple de la somme de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} \ .$$

[[*Indications* :

$a_0 = \delta + \dfrac{1}{2}, \quad a_n = \dfrac{2}{1-2\delta} \dfrac{1}{\pi^2 n^2} [\cos 2\pi n\delta - (-1)^n].$

Par l'égalité de Parseval, on obtient

$$(\delta + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} \frac{4}{(1-2\delta)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^4} \frac{[\cos 2\pi n\delta - (-1)^n]^2}{n^4} = \frac{1}{3} + \frac{4}{3}\delta,$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} [\cos 2\pi n\delta) - (-1)^n]^2 = \frac{\pi^4}{2} (1-2\delta)^2 \frac{1}{12} (1 + 4\delta - 12\delta^2).$$

En faisant tendre δ vers 0, on obtient :

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

]]

Exercice 3.6.10

Démontrer (cf. cours) la proposition suivante :

Proposition : *Si f est une fonction monotone par morceaux, il existe une constante C telle que*

$$|c_n(f)| < \frac{C}{|n|}, \forall n \neq 0.$$

[[(Rappel) *Deuxième formule de la moyenne : étant données deux fonction f et g à valeurs réelles, f monotone sur $[a, b]$ et g intégrable sur $[a, b]$, il existe $c \in [a, b]$ tel que*

$$\int_a^b f(t)g(t)\ dt = f(a) \int_a^c g(t)\ dt + f(b) \int_c^b g(t)\ dt.$$

Application : Soit f croissante sur $[a, b]$. On a, pour tout entier $n \geq 1$, et pour un $c \in [a, b]$:

$$\int_a^b f(t)\ \cos 2\pi nt\ dt = f(a) \int_a^c \cos 2\pi nt\ dt + f(b) \int_c^b \cos 2\pi nt\ dt;$$

d'où

$$|\int_a^b f(t)\ \cos 2\pi nt\ dt| \leq \frac{|f(a)| + |f(b)|}{\pi n},$$

et de même pour $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \sin 2\pi nt\ dt$, $n \neq 0$.

Exercice 3.6.11

Montrer que, si f est de classe C^p, on a : $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n^{p-1} c_n(f)| < \infty$.

Exercice 3.6.12 *Coefficients de Fourier d'une fonction höldérienne*

1) Montrer que les coefficients de Fourier d'une fonction f 1-périodique peuvent être exprimés sous la forme :

$$c_n(f) = \int_0^1 \frac{1}{|n|} \sum_{k=0}^{|n|-1} f(\frac{s}{|n|} + \frac{k}{|n|})\ e^{-2\pi i\ sgn(n)\, s}\ ds, n \neq 0.$$

2) On rappelle qu'une fonction est (globalement) **höldérienne** d'ordre $\alpha \in]0, 1]$ (on dit aussi lipschitzienne si $\alpha = 1$), s'il existe une constante C telle que $|f(t) - f(s)| \leq C|t - s|^\alpha, \forall t, s \in \mathbb{R}$.

Montrer que les coefficients de Fourier d'une fonction f höldérienne vérifiant la condition précédente satisfont à l'inégalité :

$$|c_n(f)| \leq \frac{C}{|n|^\alpha}, n \neq 0$$

Exercice 3.6.13

Soit α un réel tel que $0 < \alpha \leq 1$. On rappelle qu'une fonction f sur $\mathbb{R}$ est (localement) höldérienne d'ordre α en un point t, s'il existe $\delta(t) > 0$ et une constante finie $C(t)$ telle que

$$|f(t+h) - f(t)| \leq C(t)|h|^\alpha, \ \forall h \in [t - \delta(t), t + \delta(t)]. \tag{1}$$

a) On note f la fonction périodique, de période 1 et paire, définie sur $[0, \frac{1}{2}[$ par : $f(t) = \sqrt{t}$.

En mettant les coefficients de Fourier de f sous la forme $n^{-3/2} I_n$, où I_n est une intégrale dépendant de n, montrer une majoration des coefficients de Fourier de f de la forme

$$|a_n(f)| \leq C \frac{1}{n^{3/2}}, \ n \geq 1,$$

où C est une constante.

b) Etudier la convergence vers f de la série de Fourier de f.

c) La fonction f est-elle (localement) höldérienne en tout point $t \in \mathbb{R}$?

Quelle est la (meilleure) valeur de l'ordre α suivant le point t ?

d) On considère la fonction g dérivée de f (définie pour $t \notin \mathbb{Z}$).

Etudier le comportement de la série de Fourier de g.

Exercice 3.6.14 *Une preuve du lemme de Riemann-Lebesgue*

a) Soit (e_n) un système orthonormée dans un espace préhilbertien $\mathcal{V}$. Montrer que pour tout vecteur f dans $\mathcal{V}$, on a $\lim_n \langle f, e_n \rangle = 0$.

b) En particulier, montrer que si $f \in L^2(\mathbb{T})$, $\lim_{|n| \to \infty} \langle f, e_n \rangle = 0$, où ici e_n est $e_n(t) = \exp(2\pi i n t)$, $n \in \mathbb{Z}$.

c) En déduire le lemme de Riemann-Lebesgue :

$$\lim_{|n| \to \infty} \int_0^1 f(t)\, e^{2\pi i n t}\, dt = 0, \forall f \in L^1(\mathbb{T}).$$

Exercice 3.6.15 *Phénomène de Gibbs, calcul de* $\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\, du$

(La non-uniformité de la convergence de la suite des sommes partielles pour une fonction discontinue se traduit “quantitativement” par le phénomène de Gibbs.)

On note f la fonction 1-périodique définie sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ par

$$f(t) \ = \ \begin{cases} 1, & \text{pour } 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ -1, & \text{pour } -\frac{1}{2} \leq t < 0. \end{cases}$$

La notation $\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\,du$ désigne la limite $\lim_{T\to\infty}\int_0^T \frac{\sin u}{u}\,du$ (attention, la limite existe, mais $u\to\frac{\sin u}{u}$ n'est pas intégrable).

1 a) En utilisant la relation $\sin 4\pi(n+1)t - \sin 4\pi nt = 2\sin 2\pi t\,\cos 2\pi(2n+1)t$, ou par un calcul direct, établir la relation

$$2\sum_{k=0}^{n-1}\cos 2\pi(2k+1)t = \frac{\sin 4\pi nt}{\sin 2\pi t}, 2t \notin \mathbb{Z}.$$

b) Calculer la série de Fourier de f sous forme complexe et sous forme réelle.

c) Montrer la relation

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

2) On note $S_n(t)$ la somme partielle d'ordre $2n-1$ de la série de Fourier de f.

Calculer $\lim_n S_n(t)$, pour tout point $t\in\mathbb{R}$.

3) a) Montrer que $S_n(t)$ peut s'exprimer sous la forme :

$$S_n(t) = 4\int_0^t \frac{\sin 4\pi ns}{\sin 2\pi s}\,ds.$$

b) En déduire la valeur de

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T \frac{\sin u}{u}\,du.$$

[[Considérer, pour une valeur fixée de t, $0<t<\frac{1}{2}$, la fonction ϕ_t 1-périodique définie sur $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ par

$$\phi_t(s) = 1_{[0,t]}(s)\left(\frac{1}{2\pi s} - \frac{1}{\sin 2\pi s}\right),$$

et montrer que ses coefficients de Fourier tendent vers 0. En déduire :

$$\begin{aligned} S_n(t) &= \frac{2}{\pi}\int_0^t \frac{\sin 4\pi ns}{s}\,ds - 4\int_0^t \phi_t(s)\,\sin 4\pi ns\,ds \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{4\pi nt}\frac{\sin s}{s}\,ds + \epsilon_n \to \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\,du. \end{aligned}$$

Comme $S_n(t)\to 1$, pour $t\in]0,\frac{1}{2}[$, on en déduit : $\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\,du = \frac{\pi}{2}$.]]

c) Montrer que, pour $\lambda>0$ fixé, on a

$$\lim_n S_n(\frac{\lambda}{n}) = \frac{2}{\pi}\int_0^{4\pi\lambda}\frac{\sin u}{u}\,du.$$

[[*Indications* :

$$S_n(\frac{t}{n}) = \frac{2}{\pi}\int_0^{4\pi t}\frac{\sin s}{s}\,ds + \int_0^{\frac{t}{n}} \phi_{\frac{t}{n}}(s)\,\sin 4\pi ns\,ds,$$

et $\phi_{\frac{t}{n}}$ est bornée.

L'ensemble des graphes des sommes partielles de la série de Fourier possède donc dans son adhérence l'intervalle : $\{\frac{2}{\pi}\int_0^{4\pi\lambda} \frac{\sin u}{u}\, du,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.]]

d) En prenant $\lambda = \frac{1}{4}$, montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\sup_{t\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} |S_n(t) - f(t)| \geq \alpha, \text{ pour tout } n.$$

[[On trouve numériquement : $\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u}\, du - 1 > 0.178....$]].

Chapitre 4

Transformation de Fourier

L'analyse de Fourier permet de représenter certaines fonctions d'une variable réelle comme "superposition d'harmoniques", c'est-à-dire de fonctions e_u de la forme $e_u : t \to e^{2\pi iut}, u \in \mathbb{R}$, cette représentation étant obtenue sous la forme d'une intégrale ou, dans le cas des fonctions périodiques, d'une série, la série de Fourier de la fonction.

L'analyse de Fourier est à la fois un moyen d'analyser les grandeurs physiques variant dans le temps, telles que des signaux acoustiques, et un moyen de synthétiser ces grandeurs. Les signaux apparaissent ainsi sous deux formes de représentation suivant qu'on les considère dans l'espace temporel ou dans l'espace fréquentiel, la transformation de Fourier permettant de passer de l'une à l'autre de ces représentations.

4.1 Propriétés de la transformation de Fourier

Notations : Rappelons que, pour $p \in [1, \infty[$, l'espace $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ est formé des fonctions mesurables telles que $|f|^p$ soit intégrable. On le munit de la semi-norme $\| \ \|_p$ définie par $\|f\|_p = (\int_0^1 |f|^p dt)^{1/p}$. L'espace normé $L^p(\mathbb{R})$ est l'espace des classes d'équivalence de fonctions dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, pour la relation d'équivalence définie par l'égalité presque partout. Dans la suite, nous travaillerons avec les fonctions plutôt qu'avec leurs classes d'équivalence, mais on écrira "$f \in L^p(\mathbb{R})$".

Définition 4.1.1 Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On appelle **transformée de Fourier** de f la fonction notée $\widehat{f}$ ou encore $\mathcal{F}(f)$ définie par

$$u \to \widehat{f}(u) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\ e^{-2\pi iut}\ dt. \tag{4.1}$$

L'application $f \to \mathcal{F}f$ est appelée **transformation de Fourier**.

Il est clair que cette transformation est linéaire et qu'on a : $\widehat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\ dt$.

On notera le choix de la constante '-2π' intervenant dans la définition de la transformée de Fourier, bien approprié au traitement du signal et évitant la présence d'un facteur dans la formule d'inversion. Un autre choix de la constante dans la définition de $\widehat{f}$ est la valeur 1. C'est en particulier le cas dans le calcul des fonctions caractéristiques utilisées en Calcul des Probabilités. La passage d'une constante C_1 à une constante C_2 revient à changer la variable u en $\frac{C_1}{C_2}u$ dans l'expression de la transformée de Fourier $\widehat{f}$.

Théorème 4.1.2 *La transformée $\widehat{f}(u)$ est bien définie pour toute valeur de u. La fonction $\widehat{f}$ est une fonction continue et tendant vers 0 à l'infini ($\widehat{f} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$), vérifiant :*

$$\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1.$$

Preuve : La fonction $t \to e^{-2\pi itu} f(t)$ est mesurable (elle est le produit d'une fonction continue et d'une fonction mesurable). Son module est égal à $|f(t)|$ qui est intégrable. Elle est donc intégrable et on a la majoration :

$$\|\widehat{f}\|_\infty \leq \int_{\mathbb{R}} |e^{2\pi itu} f(t)| \ dt = \int_{\mathbb{R}} |f(t)| \ dt = \|f\|_1.$$

Montrons que $\widehat{f}$ est continue. On a :

$$|\widehat{f}(u+h) - \widehat{f}(u)| \leq \int_{\mathbb{R}} |e^{-2\pi iht} - 1||f(t)| \ dt.$$

La fonction dans l'intégrale, à droite, est majorée par la fonction intégrable $2|f(t)|$ et tend vers 0, pour t fixé, quand h tend vers 0. Le théorème de convergence dominée de Lebesgue implique que l'intégrale tend vers 0, quand h tend vers 0.

La convergence $\lim_{|u|\to\infty} \widehat{f}(u) = 0$ est montrée dans le lemme ci-dessous.

□

Lemme 4.1.3 *(Riemann-Lebesgue) Pour toute fonction f intégrable, on a*

$$\lim_{|u|\to\infty} \widehat{f}(u) = 0.$$

Preuve : Pour $f = 1_{[a,b]}$, nous avons :

$$\widehat{1}_{[a,b]}(u) = \int_a^b e^{-2\pi itu} \ dt = \frac{e^{-2\pi iub} - e^{-2\pi iua}}{-2\pi iu};$$

d'où :

$$|\widehat{1}_{[a,b]}(u)| \leq \frac{1}{\pi|u|} \to 0, \ \textit{quand } |u| \textit{ tend vers l'infini.}$$

Cette propriété s'étend par linéarité aux fonctions en escalier, i.e. aux combinaisons linéaires de fonctions indicatrices d'intervalles. Montrons qu'elle s'étend, par densité à $L^1(\mathbb{R})$. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe g en escalier tel que $\|f - g\|_1 < \epsilon$. Soit A tel que $|u| > A$ implique $|\widehat{g}(u)| < \epsilon$. Nous avons, pour $|u| > A$, la majoration :

$$|\widehat{f}(u)| \leq \|\widehat{f} - \widehat{g}\|_\infty + |\widehat{g}(u)| \leq \|f - g\|_1 + |\widehat{g}(u)| \leq \epsilon + |\widehat{g}(u)| \leq 2\epsilon.$$

□

Exemples 4.1.4 *(calcul de transformées de Fourier)*

1) Fonction caractéristique d'intervalle :

$$\mathcal{F}(1_{[a,b]})(u) \;=\; \begin{cases} e^{-2\pi iu\frac{b+a}{2}}\,\frac{\sin\pi u(b-a)}{\pi u}, & \text{si } u \neq 0, \\ b-a, & \text{si } u = 0. \end{cases}$$

En particulier, si l'intervalle est symétrique, on a :

$$\mathcal{F}(1_{[-a,a]})(u) \;=\; \begin{cases} \frac{\sin 2\pi au}{\pi u}, & \text{si } u \neq 0, \\ 2a, & \text{si } u = 0. \end{cases}$$

On note que $\widehat{1}_{[a,a]} \notin L^1(\mathbb{R})$, ce qui montre que la transformée de Fourier d'une fonction intégrable peut ne pas être intégrable.

2) Fonction $\psi : t \to e^{-|t|}$:

Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, la fonction $t \to e^{\lambda t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ si $\Re e\,\lambda < 0$. En effet, on a

$$|e^{\lambda t}| = |e^{\Re e\,\lambda\cdot t} \cdot e^{i\,\Im m\,\lambda\cdot t}| = e^{\Re e\,\lambda\cdot t},$$

d'où

$$\int_0^\infty e^{\lambda t}\;dt = \lim_{A\to\infty} [\frac{1}{\lambda}e^{\lambda t}]_0^A = \frac{-1}{\lambda},$$

car $\lim\limits_A e^{\lambda A} = 0$ si, et seulement si, $\Re e\,\lambda < 0$.

La fonction ψ est donc intégrable. Sa transformée de Fourier s'écrit

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} e^{-|t|}\,e^{-2\pi iut}\;dt &= \int_0^{+\infty} e^{-(1+2\pi iu)t}\;dt + \int_{-\infty}^0 e^{(1-2\pi iu)t}\;dt \\ &= \frac{1}{1+2\pi iu} + \frac{1}{1-2\pi iu} = \frac{2}{1+4\pi^2u^2}. \end{aligned}$$

On a donc $\mathcal{F}(\psi)(u) = \dfrac{2}{1+4\pi^2u^2}$.

On peut inversement partir de la fonction $u \to \frac{2}{1+4\pi^2u^2}$ et calculer sa transformée de Fourier par une *méthode de résidus.* On retrouve la fonction ψ.

• **Calcul par la méthode des résidus**

Exemple : $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$.

En intégrant sur un demi-cercle γ centré à l'origine, de rayon R, dans le demi-plan positif, on obtient, pour $u > 0$,

$$\int_\gamma \frac{e^{iuz}}{1+z^2}\;dz = \int_{-R}^R \frac{e^{iut}}{1+t^2}\;dt + i\int_0^\pi \frac{e^{iuR(\cos\theta+i\sin\theta)}}{1+R^2e^{2i\theta}}Re^{i\theta}\;d\theta = (1)+(2).$$

Par la formule des résidus, on a, pour $R > 1$,

$$\int_\gamma \frac{e^{iuz}}{1+z^2}\;dz = \pi e^{-u}.$$

Quand R tend vers $+\infty$, la quantité (1) converge, vers l'intégrale cherchée et la quantité (2), qui est majorée par $\displaystyle\int_0^\pi \frac{e^{-uR\sin\theta}}{|1+R^2e^{2i\theta}|}R\ d\theta$, tend vers 0.

Pour $u<0$, on utilise un demi-cercle γ centré à l'origine, de rayon R, dans le demi-plan négatif. On a ainsi :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-iut}}{1+t^2}\ dt = \pi e^{-|u|},$$

soit :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-2\pi iut}}{1+t^2}\ dt = \pi e^{-2\pi|u|}.$$

• Transformée de Fourier et parité

Soit f une fonction intégrable. Nous avons :

$$\begin{aligned}
\overline{\widehat{f}(u)} &= \int_{\mathbb{R}} \overline{f(t)}e^{2\pi iut}\ dt = \widehat{\overline{f}}(-u),\\
\widehat{f}(-u) &= \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{2\pi iut}\ dt = \int_{\mathbb{R}} f(-t)e^{-2\pi iut}\ dt\\
\widehat{f}(u) &= \int_{\mathbb{R}} f(t)\cos(2\pi ut)\ dt - i\int_{\mathbb{R}} f(t)\sin(2\pi ut)\ dt.
\end{aligned}$$

En particulier pour f à valeurs réelles, nous avons : $\widehat{f}(-u) = \overline{\widehat{f}(u)}$.

En utilisant l'injectivité de $\mathcal{F}$ (cf. théorème d'inversion) qui permet de montrer que les conditions sont nécessaires, on obtient :

- la fonction f est paire si, et seulement si, $\widehat{f}$ est paire et on peut alors écrire :

$$\widehat{f}(u) = 2\int_0^\infty f(t)\cos(2\pi ut)\ dt;$$

- la fonction f est impaire si, et seulement si, $\widehat{f}$ est impaire et on peut écrire :

$$\widehat{f}(u) = -2i\int_0^\infty f(t)\sin(2\pi ut)\ dt;$$

- la fonction f est paire et à valeurs réelles si, et seulement si, $\widehat{f}$ est paire et à valeurs réelles ;

- si la fonction f est réelle, $\widehat{f}$ est réelle si, et seulement si, f est paire ;

- si la fonction f est réelle, $\widehat{f}$ est imaginaire pure si, et seulement si, f est impaire.

• Régularité et transformée de Fourier

Montrons maintenant que la régularité de $\widehat{f}$ est liée à la grandeur à l'infini de la fonction f.

Proposition 4.1.5 *Si f est intégrable et si $\int_{\mathbb{R}}|t||f(t)|\ dt<\infty$, alors $\widehat{f}\in C^1$ et*

$$\frac{d}{du}\widehat{f}(u) = -2\pi i\int_{\mathbb{R}} te^{-2\pi itu}f(t)\ dt.$$

Preuve : Nous avons, pour $h \neq 0$,

$$\frac{1}{h}[\widehat{f}(u+h) - \widehat{f}(u)] = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi itu} \cdot (\frac{e^{-2\pi iht} - 1}{h})\ f(t)\ dt.$$

L'inégalité $|\frac{e^{ia}-1}{a}| \leq 1$, vérifiée pour tout $a \in \mathbb{R}$, et l'hypothèse d'intégrabilité de $t \to tf(t)$ permettent de passer à la limite quand h tend vers 0 dans la relation précédente, en appliquant le théorème de Lebesgue.

Ainsi $\frac{d}{du}\widehat{f}$ existe et est, au coefficient $-2\pi i$ près, la transformée de Fourier de la fonction $t \to tf(t)$ qui est intégrable par hypothèse. De plus elle est dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, puisque transformée de Fourier d'une fonction intégrable.

□

Plus généralement, par récurrence, on a, pour p entier ≥ 1 :

Proposition 4.1.6 *Si f est une fonction intégrable et si $\int_{\mathbb{R}} |t^p||f(t)|\ dt < \infty$, $\widehat{f}$ est de classe C^p et*

$$\frac{d^p}{du^p}\widehat{f}(u) = (-2\pi i)^p \int_{\mathbb{R}} t^p e^{-2\pi itu} f(t)\ dt, \forall u \in \mathbb{R}.$$

Preuve : Notons que la fonction g_r définie par $g_r(t) = t^r f(t)$ est intégrable, pour $r = 1, 2, ..., p$, car l'inégalité $|t|^r \leq 1 + |t|^p$, permet de la majorer :

$$|g_r(t)| \leq |f(t)| + |t^p f(t)|, \forall t \in \mathbb{R}.$$

On raisonne alors par récurrence sur $r = 1, 2, ..., p$, en appliquant le résultat de la proposition précédente.

□

Sous les conditions de la proposition, on a donc montré qu'on obtient les dérivées sucessives de $\widehat{f}$ en "dérivant sous le signe somme". Permutant maintenant le rôle de la dérivation et de la multiplication par t, nous avons le résultat suivant :

Proposition 4.1.7 *Si f est une fonction intégrable et de classe C^1 telle que f' soit intégrable, la transformée de Fourier de sa dérivée est donnée par :*

$$\widehat{f'}(u) = 2\pi iu\widehat{f}(u), \forall u \in \mathbb{R}.$$

Preuve : Par intégration par partie, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f'(t)e^{-2\pi iut}\ dt &= \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} f'(t)e^{-2\pi iut}\ dt \\ &= \lim_{A\to\infty} \left([f(t)e^{-2\pi iut}]_{-A}^{A} + 2\pi iu \int_{-A}^{A} f(t)e^{-2\pi iut}\ dt \right).\end{aligned}$$

Montrons que $\lim_{A\to\pm\infty} f(A) = 0$, ce qui entraînera, en passant à la limite, le résultat. On peut écrire :

$$f(A) = f(0) + \int_0^A f'(y)\ dy;$$

d'où :

$$\lim_{A\to+\infty} f(A) = f(0) + \int_0^\infty f'(y)\, dy.$$

Donc la limite de $f(A)$, pour A tendant vers $+\infty$, existe. Cette limite est nécessairement nulle : dans le cas contraire, en la supposant par exemple > 0, on aurait $f(t) \geq \epsilon > 0$, pour $t \geq L$, pour un L convenable ; ce qui impliquerait $\int_L^\infty f(t)\, dt = +\infty$. On montre de même que $\lim_{A\to+\infty} f(-A) = 0$.
$\square$

En raisonnant par récurrence sur l'ordre de la dérivation, on obtient la proposition suivante :

Proposition 4.1.8 *Si f est de classe C^p et si les fonctions $f, f', \ldots, f^{(p)}$ sont intégrables, nous avons :*

$$\widehat{f^{(p)}}(u) = (2\pi i u)^p \widehat{f}(u), \forall u \in \mathbb{R}.$$

Sous les hypothèses de la proposition (4.1.8), nous avons donc la majoration :

$$|\widehat{f}(u)| \leq \|f^{(p)}\|_1 |2\pi u|^{-p},\ \forall u \neq 0,$$

et nous pouvons écrire, puisque $\lim_{|u|\to+\infty} |\widehat{f^{(p)}}(u)| = 0$, $|\widehat{f}(u)| = o(|u|^{-p})$, pour $|u|$ tendant vers $+\infty$.

Notations 4.1.9 Pour toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$, notons Mf la fonction $t \to (Mf)(t) = tf(t)$. Si f est dérivable, notons Df sa dérivée. [D est donc l'opérateur de dérivation, M l'opérateur de multiplication par t et $\mathcal{F}$ l'opérateur $f \to \mathcal{F}(f) = \widehat{f}$, qui à f fait correspondre sa transformée de Fourier.]

Les résultats précédents montrent que la transformation de Fourier échange la dérivation et la multiplication par t et conduisent ainsi aux relations formelles entre les opérateurs $\mathcal{F}$, D et M (cf. *exercices*) :

$$D\mathcal{F} = -2\pi i \mathcal{F} M,$$
$$\mathcal{F} D = 2\pi i M \mathcal{F}.$$

Plus généralement, on a formellement :

$$D^k \mathcal{F} = (-2\pi i)^k \mathcal{F} M^k,$$
$$\mathcal{F} D^k = (2\pi i)^k M^k \mathcal{F}.$$

Pour tout polynôme Q en une variable, $Q(t) = \sum_{k=0}^{\ell} a_k t^k$, notons $\widetilde{Q}$ le polynôme $\widetilde{Q}(t) = \sum_{k=0}^{\ell} (2\pi i)^k a_k\, t^k$.

Définissons l'opérateur différentiel $Q(D) = \sum_0^\ell a_k D^k$, i.e. pour une fonction f de classe C^ℓ,

$$Q(D)f(t) = \sum_0^l a_k \frac{d^k}{dt^k} f(t).$$

Nous avons alors, tout au moins formellement, la relation

$$\mathcal{F} Q(D) = \widetilde{Q}(M) \mathcal{F}. \tag{4.2}$$

Pour pouvoir appliquer ces formules à une fonction f, nous devons bien sûr vérifier que les hypothèses des propositions précédentes sont satisfaites.

• **Effet de la transformée de Fourier sur la translation**

Notons T_τ la translation par τ : $(T_\tau f)(t) = f(t+\tau)$. Nous avons :

$$(\mathcal{F} \circ T_\tau)(f)(u) = \int_{\mathbb{R}} f(t+\tau) e^{-2\pi itu}\, dt = e^{2\pi iu\tau} \int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-2\pi itu}\, dt. \tag{4.3}$$

La transformation de Fourier échange la translation par τ et la multiplication par la fonction $u \to e^{2\pi iu\tau}$.

• **Effet sur la convolution**

Montrons que la transformée de Fourier échange la convolution et la multiplication au sens ordinaire.

Proposition 4.1.10 *Si f et g sont intégrables, on a :*

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}f.\mathcal{F}g.$$

Preuve : La fonction $(t,s) \to f(t-s)g(s)e^{2\pi iut}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}^2$, on peut appliquer le théorème de Fubini. On obtient :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f*g)(u) &= \int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} f(t-s)g(s)\, ds)\, e^{-2\pi iut}\, dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} f(t-s)\, e^{-2\pi iut}\, dt)\, g(s)\, ds \\
&= \int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} f(t-s) e^{-2\pi iu(t-s)}\, dt)\, e^{-2\pi ius} g(s)\, ds \\
&= (\int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-2\pi iut}\, dt)(\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi ius} g(s)\, ds).
\end{aligned}$$

□

• **Transformée de Laplace**

Définition 4.1.11 Soit f une fonction mesurable. On définit formellement sa **transformée de Laplace** Lf par

$$Lf(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-zt}\, dt.$$

De façon précise, le domaine de définition D_f de la transformée de Laplace est le sous-ensemble du plan complexe :

$$D_f = \{z \in \mathbb{C} : \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)e^{-zt}|\, dt < \infty\}.$$

D'après la relation sur les modules : $|f(t)e^{-zt}| = |f(t)|e^{-\Re e(z)t}$, le domaine D_f est formé de droites verticales dans le plan complexe. On montre (cf. exercice) que D_f est de la forme $D_f = I \times \mathbb{R}$, où I est un intervalle (au sens large) de $\mathbb{R}$. Le domaine de définition est donc une bande verticale, qui peut être un demi-plan ou le plan tout entier. Tous les cas de figure se présentent pour le domaine de définition de la transformée de Laplace : ce domaine peut être vide (prendre $f(t) = e^{t^2}$), coïncider avec un demi-plan de la forme $\Re e\, z > a$ (prendre $f(t) = e^{at} 1_{[0,\infty[}(t)$), etc...

Si le domaine de définition de Lf contient l'axe imaginaire, ce qui est le cas si f est intégrable, la restriction à l'axe imaginaire de la transformée de Laplace coïncide avec la transformée de Fourier (au coefficient 2π près).

Dans le cas de fonctions à support dans la demi-droite $\mathbb{R}^+$, la transformée de Laplace prend la forme :

$$Lf(z) = \int_0^\infty f(t)e^{-zt}\,dt.$$

Dans le cas où f est une fonction intégrable à support compact, alors sa transformée de Laplace est définie dans tout le plan complexe et est analytique (et sa transformée de Fourier est développable en série entière) (cf. exercice).

• Transformée de Laplace de la fonction de Laplace-Gauss

Calculons la transformée de Laplace de

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}.$$

La méthode est basée sur les propriétés des *fonctions analytiques*. Commençons par calculer, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, l'intégrale

$$I_\alpha = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2}e^{\alpha t}\,dt.$$

On a :

$$I_\alpha = e^{\alpha^2/2}\int_{\mathbb{R}} e^{-(t-\alpha)^2/2}\,dt = e^{\alpha^2/2}\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2}\,dt = \sqrt{2\pi}e^{\alpha^2/2},$$

d'après le calcul classique (cf. exercice) de $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2}\,dt$.

D'après la relation $|e^{-t^2/2}\,e^{-zt}| = e^{-t^2/2}\,e^{-\Re e(z)\cdot t}$, l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2}e^{-zt}\,dt$ existe, pour tout $z \in \mathbb{C}$. Avant de calculer sa valeur, montrons qu'elle définit une fonction analytique de z.

Lemme 4.1.12 *La fonction $z \to \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2}\,e^{-zt}\,dt$ est analytique dans le plan complexe.*

Preuve : Soit R un réel arbitraire. On a, pour $|z| \le R$, la majoration :

$$|\sum_{n=0}^{N}(-1)^n z^n \frac{1}{n!}e^{-t^2/2}t^n| \le \sum_{n=0}^{\infty}|z|^n\frac{1}{n!}e^{-t^2/2}|t|^n = e^{-t^2/2}\,e^{|z||t|} \le e^{-t^2/2}e^{R|t|}.$$

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue :

$$\lim_N\Big(\int_{\mathbb{R}}\sum_{n=0}^{N} z^n\frac{1}{n!}e^{-t^2/2}t^n\,dt\Big) = \int_{\mathbb{R}}\lim_N\sum_{n=0}^{N} z^n\frac{1}{n!}e^{-t^2/2}t^n\,dt,$$

d'où :

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n\,\frac{1}{n!}\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2}\,t^n\,dt = \lim_N\sum_{n=0}^{N} z^n\,\frac{1}{n!}\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2}\,t^n\,dt = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2}\,e^{-zt}\,dt.$$

□

Corollaire 4.1.13 *On a*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2}\ e^{-zt}\ dt = e^{z^2/2}, \forall z \in \mathbb{C}. \tag{4.4}$$

Preuve : Les fonctions $z \to e^{z^2/2}$ et $z \to \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} e^{-zt}\ dt$ sont toutes les deux analytiques sur $\mathbb{C}$. D'après le calcul pour z réel, elles coïncident sur l'axe réel. Donc elles sont égales partout.

De plus, nous avons le développement :

$$e^{z^2/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2}\ t^n\ dt) \frac{z^n}{n!}. \tag{4.5}$$

□

On obtient la **transformée de Fourier** de φ à partir de l'expression de sa transformée de Laplace en faisant $z = 2\pi i u$:

$$\widehat{\phi}(u) = e^{-2\pi^2 u^2}. \tag{4.6}$$

Notons aussi les relations suivantes déduites de $(tfou1.15.2)$:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2}\ t^{2n}\ dt = \frac{(2n)!}{2^n n!},\ \forall n \geq 0.$$

Remarque 4.1.14 Posons, pour $\sigma > 0$,

$$\varphi_\sigma(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}.$$

De la formule (4.6) on déduit, par changement de variable :

$$\mathcal{F}(\varphi_\sigma)(u) = e^{-2\pi^2\sigma^2 u^2}, \forall u \in \mathbb{R},$$

soit

$$\mathcal{F}(\varphi_\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \varphi_{\frac{1}{2\pi\sigma}}.$$

On a donc $\mathcal{F}(\mathcal{F}(\varphi_\sigma)) = \varphi_\sigma$; d'où la relation :

$$\varphi_\sigma(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(\varphi_\sigma)(u) e^{2\pi i u t}\ du. \tag{4.7}$$

Nous allons montrer que cette relation est générale (formule d'inversion de la transformée de Fourier), en utilisant ce cas particulier.

4.2 Formule d'inversion

4.2.1 Soit f une fonction intégrable. Nous avons vu que sa transformée de Fourier $\widehat{f}$ est bien définie, continue, bornée et vérifie : $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$. En général, $\widehat{f}$ n'est pas à son tour intégrable. Par exemple, si l'on prend $f = 1_{[-A,A]}$, on obtient $\widehat{f}(u) = \frac{\sin(2\pi uA)}{\pi u}$, fonction qui n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$.

[Noter que l'intégrale généralisée $\lim_{L\to\infty} \int_{-L}^{L} \frac{\sin(2\pi uA)}{\pi u}\, du$ existe mais que

$$\lim_{L\to\infty} \int_{-L}^{L} |\frac{\sin(2\pi uA)}{\pi u}|\, du = +\infty.$$

La non-intégrabilité de $\widehat{f}$ dans cet exemple est liée au fait que f n'est pas suffisamment régulière (discontinuité en $\pm A$).]

Si l'on fait l'hypothèse additionnelle que $\widehat{f}$ est à son tour intégrable, alors l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(u)e^{2\pi iut}\, du$ est bien définie pour tout t réel.

Théorème 4.2.2 Théorème d'inversion *: Si f est intégrable et si sa transformée de Fourier $\widehat{f}$ est intégrable, on a, pour presque tout réel t (pour tout t, si f est continue) :*

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(u)\ e^{2\pi itu}\ du. \tag{4.8}$$

Avant de démontrer ce résultat, faisons quelques remarques.

Remarques 4.2.3

a) Si l'on définit $\mathcal{J}$ par $\phi \in L^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{J}\phi$ avec

$$\mathcal{J}\phi(t) = \int_{\mathbb{R}} \phi(u)\ e^{2\pi itu}\ du,$$

on obtient une transformation "inverse" de la transformation de Fourier "directe". Nous l'appellerons *transformée de Fourier inverse.* Les transformations $\mathcal{F}$ et $\mathcal{J}$ sont effectivement inverses l'une de l'autre d'après (4.8), à condition de restreindre leur domaine de définition au sous-espace formé des fonctions f intégrables telles que $\widehat{f}$ soit intégrable.

b) Pour un $u \neq 0$ fixé, la fonction $e_u : t \to e^{2\pi itu}$ est un signal à valeurs complexe de fréquence $|u|$, de période $T = |u|^{-1}$.

La fréquence est le nombre de répétitions du signal périodique par unité de temps. Cette grandeur physique est homogène à l'inverse d'un temps. Si le temps est mesuré en secondes, la fréquence est mesurée en **Herz** (notation Hz).

La formule (4.8) permet d'exprimer, sous les conditions de validité du théorème, un signal comme une superposition des signaux élementaires e_u (les signaux de fréquence "pure" indécomposables). Nous donnerons dans la suite une extension de cette représentation en remplaçant la "densité spectrale" $\widehat{f}(u)$ par une "mesure spectrale".

c) Si f est une fonction intégrable dont la transformée de Fourier $\widehat{f}$ est intégrable, elle est égale pour presque tout t à la fonction *continue* définie par l'intégrale dans (4.8), c'est-à-dire à la transformée de Fourier inverse de $\widehat{f}$. On obtient ainsi une *version continue* de f.

d) La situation considérée dans le théorème d'inversion est analogue au cas où, dans les séries de Fourier, on suppose que $\sum_n |c_n(f)| < +\infty$.

On pourrait également chercher, par analogie avec les séries de Fourier, à reconstruire f, sous des hypothèses plus faibles, comme une limite de la forme

$$\lim_{T\to+\infty} \int_{-T}^{T} \widehat{f}(u)\ e^{2\pi itu}\ du.$$

Lemme 4.2.4 *Soit* $\varphi_\sigma(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$. *Si f est intégrable, on a*

$$(f * \varphi_\sigma)(t) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(u)\, \widehat{\varphi_\sigma}(u)\ e^{2\pi iut}\ du.$$

Preuve : La formule établie dans le lemme est la formule d'inversion pour la fonction $f * \varphi_\sigma$. Montrons cette formule pour $\varphi = \varphi_1$, les calculs étant analogues pour φ_σ. Partons du fait que l'on peut écrire

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(u) e^{2\pi iut}\ du,$$

d'après (4.7). On en déduit, en remplaçant φ par cette expression dans le calcul de $f * \varphi$:

$$(f * \varphi)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t-s)\Big(\int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(u) e^{2\pi ius}\ du\Big)\ ds.$$

Les fonctions f et $\widehat{\varphi}$ étant intégrables, on peut appliquer le théorème de Fubini et mettre, en effectuant un changement de variable, l'expression de droite successivement sous la forme :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(t-s)\ \widehat{\varphi}(u) e^{2\pi ius}\ duds &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(u)\Big(\int_{\mathbb{R}} f(t-s) e^{2\pi ius}\ ds\Big) du \\
&= \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(u)\Big(\int_{\mathbb{R}} f(t-s) e^{-2\pi iu(t-s)}\ ds\Big)\ e^{2\pi iut}\ du \\
&= \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(u)\widehat{f}(u) e^{2\pi iut}\ du.
\end{aligned}$$

□

4.2.5 *Preuve du théorème d'inversion*

En appliquant le lemme précédent avec $\sigma = \frac{1}{n}$, on obtient :

$$(f * \varphi_{1/n})(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(u)\ e^{-2\pi^2 u^2/n^2}\ e^{2\pi iut}\ du. \qquad (4.9)$$

Remarquons que :

$$0 \le e^{-2\pi^2 u^2/n^2} \le 1 \text{ et } \lim_n e^{-2\pi^2 u^2/n^2} = 1.$$

A droite, dans (4.9), on a la majoration

$$|\widehat{f}(u)e^{-2\pi^2u^2/n^2}e^{2\pi iut}| \leq |\widehat{f}(u)|,$$

avec $\widehat{f}$ intégrable, et

$$\lim_n(\widehat{f}(u)e^{-2\pi^2u^2/n^2}e^{2\pi iut}) = \widehat{f}(u)e^{2\pi iut}.$$

Par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on en déduit que la limite est égale à $\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(u)\ e^{2\pi iut}\ du.$

A gauche, on observe que la suite $(\varphi_{1/n})_{n\in\mathbb{N}}$ forme une identité approchée. Si f est continue, on a donc

$$\lim_n(f * \varphi_{1/n})(t) = f(t), \forall t \in \mathbb{R},$$

ce qui implique l'égalité (4.8), pour tout t.

Dans le cas général, on sait qu'il y a convergence en norme L^1. D'après un théorème d'intégration, il existe une sous-suite pour laquelle la convergence a lieu pour presque tout t. En passant à la limite le long de cette sous-suite dans (4.9), on prouve que l'égalité (4.8) est bien réalisée, pour presque tout t.

□

Corollaire 4.2.6 *(Injectivité de la transformation de Fourier) Si deux fonctions intégrables f et g ont la même transformée de Fourier, elles sont égales presque partout.*

Preuve : Si f et g ont la même transformée de Fourier, on a $\widehat{f-g} = 0$. La fonction $f-g$ vérifie les hypothèses de la formule d'inversion. Il en résulte :

$$(f-g)(t) = \int_{\mathbb{R}} (\widehat{f-g})(u)\ e^{2\pi itu}\ du = 0$$

□

Corollaire 4.2.7 *Si f est de classe C^2 bornée et intégrable, avec f' et f'' intégrables, on a*

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(u)e^{2\pi iut}\ du.$$

Preuve : Vérifions que $\widehat{f}$ est intégrable. Nous avons (cf. proposition (4.1.8)), pour une constante K,

$$|\widehat{f}(u)| \leq \frac{K}{u^2}, \forall u \neq 0.$$

La fonction $\widehat{f}$ est continue, donc intégrable sur tout compact. Elle est intégrable à l'infini d'après la majoration précédente. Elle est donc intégrable.

□

4.3 Transformée de Fourier et espace $\mathcal{S}$

Nous recherchons un espace convenable de fonctions intégrables sur lequel la transformée de Fourier définit une bijection. Les propositions (4.1.6) et (4.1.5) suggèrent que, pour satisfaire cette condition, on doit prendre des fonctions f simultanément régulières et, en un sens à préciser, petites pour t grand.

Rappelons qu'en effet, si f est intégrable et si $\int_{\mathbb{R}} |t|^p |f(t)|\ dt < \infty$, $\widehat{f}$ est p fois continuement dérivable. D'autre part, si f est une fonction de classe C^p et si $f, f', \ldots, f^{(p)}$ sont intégrables, on a : $\widehat{f^{(p)}}(u) = (2\pi i u)^p \widehat{f}(u)$ et donc $|\widehat{f}(u)| = o(|u|^{-p})$, pour $|u|$ tendant vers $+\infty$.

Une bonne classe de fonctions est celle des fonctions qui sont d'une part très régulières, d'autre part très petites ainsi que leurs dérivées pour les grandes valeurs de la variable. Cette dernière notion est précisée dans la définition suivante.

Définition 4.3.1 Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est dite **à décroissance rapide** si elle vérifie :

$$\forall \text{ entier } n \geq 1,\ \exists\ C_n \text{ tel que } |f(t)| \leq \frac{C_n}{1 + |t|^n},\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Définition 4.3.2 On appelle $\mathcal{S}$ la classe des fonctions f qui sont **dérivables à tous les ordres et à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées**. On a donc, par définition :

$$f \in \mathcal{S} \Longleftrightarrow \forall p, n, \exists\ C_{n,p}\ : |\frac{d^p f}{dt^p}(t)| \leq \frac{C_{n,p}}{1 + |t|^n},\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

On note que, si une fonction f est dans $\mathcal{S}$, elle est intégrable et bornée, ainsi que toutes ses dérivées. Elle est également dans $L^p(\mathbb{R})$, pour tout $p \geq 1$, et en particulier de carré intégrable.

Proposition 4.3.3 *L'espace $\mathcal{S}$ est une algèbre de fonctions pour la multiplication (au sens ordinaire) qui est stable par dérivation et multiplication par les polynômes.*

Preuve : Exercice.

Il résulte également de la définition de $\mathcal{S}$ que, si f est dans $\mathcal{S}$, les combinaisons des fonctions obtenues à partir de f par multiplication par t et dérivation, qui s'écrivent comme combinaisons de $t \to \frac{d^p}{dt^p}(t^n f(t))$, pour $n, p \geq 1$, sont bornées et intégrables.

Exemples 4.3.4

a) Il est clair que toute fonction f qui est C^∞ à support compact est dans $\mathcal{S}$.

b) La fonction φ définie par $\varphi(t) = e^{-t^2/2}$ est dans $\mathcal{S}$. En effet, on montre facilement par récurrence sur k que les dérivées successives de φ sont de la forme :

$$\frac{d^k}{dt^k}(e^{-t^2/2}) = P_k(t)\ e^{-t^2/2},$$

où P_k est un polynôme de degré k.

Corollaire 4.3.5 *Pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R}) \bigcap L^2(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, on a :*

$$\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2.$$

Preuve : On note que $\widehat{f}$, qui est bornée, est dans $L^2(\mathbb{R})$ si elle est dans $L^1(\mathbb{R})$. Comme f est de carré intégrable et $\widehat{f}$ est intégrable, on obtient, en utilisant la formule d'inversion et le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 \, dt &= \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{f(t)} \, dt = \int_{\mathbb{R}} f(t) \, (\int_{\mathbb{R}} \overline{\widehat{f}(u)} \, e^{-2\pi iut} \, du) \, dt \\
&= \int \int \, f(t) \, \overline{\widehat{f}(u)} \, e^{-2\pi iut} \, du \, dt = \int_{\mathbb{R}} \overline{\widehat{f}(t)} \, (\int_{\mathbb{R}} f(t) \, e^{-2\pi iut} \, dt) \, du \\
&= \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(u)|^2 \, du.
\end{aligned}$$

□

Théorème 4.3.6 *La transformée de Fourier définit une isométrie bijective de $\mathcal{S}$ sur lui-même. Pour toute fonction $f \in \mathcal{S}$, on a :*

$$\begin{aligned}
\frac{d^p}{du^p}\widehat{f}(u) &= (-2\pi i)^p \int_{\mathbb{R}} t^p f(t) \, e^{-2\pi iut} \, dt, \forall p \geq 0, \\
\widehat{f^{(p)}}(u) &= (2\pi iu)^p \widehat{f}(u), \forall p \geq 0.
\end{aligned}$$

Toute fonction $f \in \mathcal{S}$ vérifie la formule d'inversion de la transformée de Fourier :

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(u) \, e^{2\pi iut} \, du, \forall t \in \mathbb{R}.$$

L'espace $\mathcal{S}$ est une sous-algèbre de convolution de $L^1(\mathbb{R})$: $f, g \in \mathcal{S} \Rightarrow f * g \in \mathcal{S}$.

Preuve : Posons $g_p(t) = t^p f(t)$. On note que f satisfait aux hypothèses des propositions (4.1.6) et (4.1.8) : $f^{(p)}$ et g_p sont intégrables, pour tout $p \geq 0$. Il en résulte que les formules sur la dérivation à l'ordre p de la transformée de Fourier sont satisfaites.

Ces formules montrent la relation

$$u^n \frac{d^p}{du^p}\widehat{f(u)} = (-2\pi i)^p u^n \widehat{g_p}(u) = (-2\pi i)^p \, (\frac{1}{2\pi i})^n \widehat{g_p^{(n)}}(u).$$

Pour tout $n \geq 1$ et tout $p \geq 1$, la fonction $u \to u^n \dfrac{d^p}{du^p}\widehat{f(u)}$ est ainsi la transformée de Fourier d'une fonction intégrable, ce qui implique qu'elle est bornée. Nous en déduisons que $\widehat{f} \in \mathcal{S}$.

La formule d'inversion peut être appliquée, car $\widehat{f}$ est intégrable. On en déduit que la transformation de Fourier est une bijection de $\mathcal{S}$ sur $\mathcal{S}$. La propriété d'isométrie :

$$\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2,$$

résulte du lemme précédent.

Enfin, $\mathcal{S}$ étant stable par produit ordinaire, nous avons, pour f et g dans $\mathcal{S}$:

$$f * g = \mathcal{J}(\mathcal{F}(f * g)) = \mathcal{J}(\mathcal{F}(f).\mathcal{F}(g)) \in \mathcal{S}.$$

□

Remarque 4.3.7 Il résulte des formules ci-dessus que la transformée de Fourier $\mathcal{F}$ échange dans $\mathcal{S}$ les opérateurs différentiels et les opérateurs de multiplication par un polynôme. La relation formelle (4.2) s'applique à toute fonction dans l'espace $\mathcal{S}$.

• **Densité de $\mathcal{S}$**

Il reste à vérifier que l'espace $\mathcal{S}$ est assez "gros". En utilisant, par exemple, un procédé de convolution, on montre facilement le résultat d'approximation suivant :

Proposition 4.3.8 *Toute fonction continue à support compact est limite uniforme d'une suite de fonctions de $\mathcal{S}$.*

Preuve : On sait qu'il existe une fonction $\psi \geq 0$ à support compact et C^∞ telle que $\int_{\mathbb{R}} \psi \, dt = 1$. Notons $\psi_n(t) = n\psi(nt)$. La suite (ψ_n) forme une identité approchée, quand n tend vers $+\infty$.

Si f est une fonction continue à support compact, $f * \psi_n$ est C^∞ à support compact et on a, au sens de la convergence uniforme : $\lim_n (f * \psi_n) = f$.

□

Cette méthode nécessite la construction de ψ, mais fournit une approximation des fonctions à support compact par des fonctions C^∞ à **support compact**, donc a fortiori dans $\mathcal{S}$.

Corollaire 4.3.9 *L'espace $\mathcal{S}$ est dense en norme uniforme dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ et dense en norme $\| \, \|_p$, dans $L^p(\mathbb{R})$, pour $1 \leq p < \infty$.*

4.4 Transformation de Fourier des fonction dans L^2

Pour définir la transformée de Fourier des fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ qui ne sont pas intégrables, une difficulté se présente : on ne peut pas la définir directement à l'aide d'une intégrale, comme pour les fonctions intégrables. Ainsi des fonctions très simples comme $t \to t^{-1} 1_{[1,\infty[}(t)$ ou $t \to t^{-1} \sin t$, qui sont de carré intégrable, mais non intégrables sur $\mathbb{R}$, n'ont pas de transformée de Fourier définie directement par la formule (4.1).

Pour cette raison, on procède en deux étapes. On commence par définir la transformée de Fourier quand f est à la fois intégrable et de carré intégrable, ce qui est le cas par exemple si f est dans $\mathcal{S}$. On observe alors qu'on a une isométrie et on étend la définition à $L^2(\mathbb{R})$ par densité. Mais on perd dans le cas général l'expression explicite sous forme d'intégrale donnée par la formule (4.1).

Théorème 4.4.1 *Il existe une isométrie surjective $\mathcal{F}$ de l'espace $L^2(\mathbb{R})$ sur lui-même,*

$$\int |f(t)|^2 \, dt = \int |\mathcal{F}f(u)|^2 du, \forall f \in L^2(\mathbb{R}), \tag{4.10}$$

qui sur $L^1(\mathbb{R}) \bigcap L^2(\mathbb{R})$ coïncide avec la transformée de Fourier définie par (4.1).

Preuve : La formule d'isométrie (4.10) a été établie dans le cas des fonctions de l'espace $\mathcal{S}$. Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. Il existe une suite (ϕ_n) dans $\mathcal{S}$ telle que $\|f - \phi_n\|_2 \to 0$. La suite $(\mathcal{F}\phi_n)$ est de

Cauchy, donc convergente. Notons $\mathcal{F}f$ sa limite. Par les arguments classiques de prolongement, on montre facilement que cette limite ne dépend pas, à un ensemble négligeable près (c'est en fait la classe d'équivalence dans $L^2(\mathbb{R})$ qui est bien définie), du choix de la suite (ϕ_n) convergent vers f et que l'application $\mathcal{F}$ est encore linéaire et isométrique (formule (4.10)).

La surjectivité de $\mathcal{F}$ dans $L^2(\mathbb{R})$ résulte de la surjectivité dans $\mathcal{S}$: soient $g \in L^2(\mathbb{R})$ et (ψ_n) une suite dans $\mathcal{S}$ telle que $\|g - \psi_n\|_2 \to 0$. Alors la suite de Cauchy $(\mathcal{J}\psi_n)$ converge vers une fonctions h de $L^2(\mathbb{R})$ et on a $\mathcal{F}h = \lim_n \mathcal{F}\mathcal{J}\psi_n = \lim_n \psi_n = g$.

Soit enfin $f \in L^1(\mathbb{R}) \bigcap L^2(\mathbb{R})$. On peut construire (à l'aide d'une identité approchée) une suite (ϕ_n) dans $\mathcal{S}$ qui converge vers f en norme $\| \|_1$ et en norme $\| \|_2$. La suite $(\mathcal{F}\phi_n)$ des transformées de Fourier des fonctions ϕ_n converge alors d'une part uniformément vers la transformée de Fourier $\widehat{f}$ (au sens de l'intégrale (4.1) de f, d'autre part au sens de la norme $\| \|_2$ vers la transformée $\mathcal{F}f$ définie plus haut. Ces deux transformées coïncident donc (presque partout).

□

La formule (4.10) (dite de **Plancherel**) exprimant l'isométrie de la transformée de Fourier dans L^2 est particulièrement importante. En terme d'énergie, elle s'interprète comme l'égalité entre l'énergie d'un signal calculée dans l'espace temporel et son énergie calculée dans l'espace des fréquences.

• **Corrélation et transformée de Fourier**

Définitions 4.4.2 Soit f une fonction de carré intégrable. Notons $(T_\tau f)(t) = f(t-\tau)$ sa translatée (dans le temps) par $-\tau$. La fonction d'**auto-corrélation** R_f de f est définie comme le produit scalaire de f et de $T_\tau f$:

$$R_f(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{f(t-\tau)}\, dt = \langle f, T_\tau f \rangle.$$

De même, on définit la fonction d' **inter-corrélation** de deux fonctions de carré intégrable f et g :

$$R_{f,g}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t-\tau)}\, dt = \langle f, T_\tau g \rangle.$$

On vérifie facilement les propriétés suivantes :

$$R_f(-\tau) = \overline{R_f(\tau)},$$

$$|R_f(\tau)| \leq R_f(0) = \|f\|_2^2.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a :

$$|R_{f,g}(\tau)| \leq \|f\|_2 \, \|g\|_2.$$

On note que la fonction R_f est bien définie si f est de carré intégrable (dans ce cas elle est bornée et même continue, tendant vers 0 à l'infini), mais n'est pas nécessairement intégrable ou de carré intégrable.

Cas de L^1

On peut définir la corrélation R_f, si f est intégrable, comme un produit de convolution.

Soit $\widetilde{f}$ définie par $\widetilde{f}(t) = \overline{f(-t)}$. Si f est intégrable, alors $\widetilde{f}$ l'est aussi, et l'auto-corrélation de f est le produit de convolution $R_f(\tau) = (f * \widetilde{f})(\tau)$. C'est donc une fonction également intégrable, définie a priori pour presque tout t. Dans le cas où f est de carré intégrable, R_f est définie pour **tout** τ.

En notant que la transformée de Fourier de $\widetilde{f}$ est $\overline{\widehat{f}}$, et en appliquant les propriétés de la convolution, on obtient :

Proposition 4.4.3 *Soit f une fonction intégrable. La transformée de Fourier de sa fonction d'auto-corrélation est égale au carré du module de la transformée de Fourier de f.*

***

4.5 Annexe : Calcul d'intégrales par la méthode des résidus

• Singularités et pôles

Soient D un domaine du plan complexe et a un point de D.

A.1 Définition : Soit f une fonction holomorphe sur $D - \{a\}$. On dit que a est une *singularité isolée* de f, si f ne peut pas être étendue en une fonction holomorphe sur D.

Si a est une singularité isolée de f, on dit que f possède un **pôle** d'ordre m en a, s'il existe une fraction rationnelle de la forme

$$R(z) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k}{(z-a)^k}, \qquad (*)$$

telle que $f - R$ ait un prolongement holomorphe à D. La fraction rationnelle R est alors appelée **partie principale** de f au point a. Le coefficient α_1 du développement $(*)$ de R est appelé **résidu** de f au point a. Il est noté $Res(f, a)$.

Si a est une singularité isolée de f qui n'est pas un pôle, on dit que a est une singularité essentielle de f.

• Le théorème de Cauchy

Soit Γ un chemin orienté dans le plan complexe contenu dans un domaine D. Si f est une fonction définie et continue sur D, on peut définir l'intégrale "curviligne" de la forme différentielle $f\ dz$ suivant le chemin Γ par :

$$\int_\Gamma f(z)\ dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\ dt,$$

γ étant une paramétrisation $t \in [a, b] \to \gamma(t)$ de Γ.

La valeur de l'intégrale ne dépend pas de la paramétrisation γ du chemin Γ choisie. En effet, si $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{C}$ est une autre paramétrisation de Γ, alors il existe un application ϕ biunivoque et continûment différentiable de $[a_1, b_1]$ sur $[a, b]$ telle que $\gamma_1 = \gamma \circ \phi$. On a alors par dérivation des fonctions composées et en posant $s = \phi(t)$:

$$\int_{a_1}^{b_1} f(\gamma_1(t))\ \gamma_1'(t)\ dt \quad = \quad \int_{a_1}^{b_1} f(\gamma(\phi(t)))\ \gamma'(\phi(t))\ \phi'(t)\ dt$$

$$= \int_a^b f(\gamma(s))\ \gamma'(s)\ ds.$$

Définitions : Deux chemins Γ_1 et Γ_2 ayant mêmes extrémités contenus dans un domaine D du plan complexe sont dits **homotopes** dans D, si on peut passer de l'un à l'autre par une déformation continue en restant dans D.

Un domaine connexe D est dit **simplement connexe** si tout chemin différentiable par morceaux fermé est homotope à un point, ou, de façon équivalente, deux chemins différentiables par morceaux quelconques ayant mêmes extrémités sont homotopes.

On note qu'un disque ouvert est un exemple de domaine simplement connexe. Rappelons le théorème fondamental :

A.2 Théorème : *Si D est un domaine simplement connexe et si f est définie, continue sur D et holomorphe sur D privé éventuellement d'un point, alors, pour tout chemin fermé Γ dans D ne passant pas par ce point, on a*

$$\int_\Gamma f(z)\ dz = 0.$$

A.3 Théorème : *Si D est un ouvert simplement connexe et si f est définie, continue et holomorphe sur D, alors, pour tout chemin fermé Γ dans D et tout $z \in D - \Gamma$, on a*

$$f(z).Ind_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(u)}{u-z}du,$$

où $Ind_\Gamma(z)$ est un entier égal à l'intégrale $\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{u-z}du$.

Preuve : La formule s'obtient en appliquant le théorème précédent à la fonction g définie par

$$g(u) \;=\; \begin{cases} f'(z), & \text{si } u = z, \\ \frac{f(u)-f(z)}{u-z}, & \text{si } u \neq z. \end{cases}$$

Pour vérifier que $Ind_\Gamma(z)$ est un entier, considérons une paramétrisation $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ du chemin fermé Γ avec $\gamma(a) = \gamma(b)$: nous devons montrer que l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z}ds$$

est un entier. Pour cela soit ϕ la fonction définie par

$$\phi(t) = \exp(\int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z}ds).$$

Un calcul de dérivée montre que $t \to \frac{\phi(t)}{\gamma(t)-z}$ est une fonction constante. On a donc $\phi(b) = \phi(a)\frac{\gamma(b)-z}{\gamma(a)-z} = 1$.

L'entier $Ind_\Gamma(z)$ représente le "nombre de tours" effectués autour de z par un point mobile décrivant le chemin orienté fermé Γ suivant l'une (quelconque) des paramétrisations de Γ.

□

Par exemple, si Γ est un cercle parcouru un seule fois dans le sens direct, l'intégrale curviligne $Ind_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{u-z}du$ est égale à 1 si z appartient au disque ouvert de bord Γ, à 0 si z appartient au complémentaire du disque fermé de bord Γ. Elle n'est pas définie si z est un point du bord.

• **Calcul d'intégrales par la méthode des résidus**

A.4 Théorème : (**des résidus**) *Soient D un domaine simplement connexe, $a_1, ..., a_n$ des points de D, f une fonction holomorphe dans $D - \{a_1, ..., a_n\}$, ayant $a_1, ..., a_n$ comme pôles. Pour tout chemin fermé orienté Γ dans D tel que les pôles a_k, $k = 1, ..., n$, n'appartiennent pas au support géométrique du chemin, on a :*

$$\int_\Gamma f(z)\ dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f, a_k) Ind_\Gamma(a_k).$$

Preuve : Soient R_k les parties principales de f aux points a_k. L'intégrale curviligne précédente coïncide avec l'intégrale obtenue en remplaçant f par la fraction rationnelle $\sum R_k$. On décompose cette fraction rationnelle en élément simples et on est ainsi ramené au cas où f est de la forme :

$$f(z) = \frac{\alpha_1}{(z-a)} + \frac{\alpha_2}{(z-a)^2} + ... + \frac{\alpha_m}{(z-a)^m},$$

a étant l'un des a_k.

On peut, sans changer l'intégrale curviligine, déformer le chemin d'intégration en un petit cercle centré au point a. Un calcul direct donne alors le résultat.

□

• **Calcul du résidu en un pôle**

A.5 Cas d'un pôle simple

Si a est un pôle simple d'une fonction holomorphe sur $D - \{a\}$, où D est un disque de centre a, on peut écrire

$$f(z) = \frac{\alpha_1}{z-a} + h(z),\ \text{avec } h \text{ holomorphe sur } D.$$

Le résidu de f au point a est donné par α_1 et on a : $\alpha_1 = \lim_{z\to a}(z-a)f(z)$.

En particulier, si f est une fraction rationnelle, $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, où Q est un polynôme admettant a comme zéro simple, $Q(z) = (z-a)Q_1(z)$, on a :

$$\alpha_1 = \lim_{z\to a}(z-a)f(z) = \frac{P(a)}{Q_1(a)} = \frac{P(a)}{Q'(a)}.$$

• **Calcul d'intégrales**

Le point essentiel de la méthode utilisée est, avec le choix du contour d'intégration, l'usage implicite des résultats suivants (**lemmes de Jordan**) :

A.6 Lemme : *Si C_ρ désigne un arc de cercle centré en 0, d'angle au centre α et si $\lim\limits_{\rho\to\infty} \rho \sup\limits_{z\in C_\rho} |f(z)| = 0$, alors $\lim_{\rho\to\infty} \int_{C_\rho} f(z)\ dz = 0$.*

Preuve : On applique la majoration :

$$|\int_{C_\rho} f(z)\ dz| \leq \int_0^\alpha |f(z)|\ \rho\ d\theta \leq 2\pi\rho \sup_{z\in C_\rho} |f(z)|.$$

□

A.7 Lemme : *Si c_ϵ désigne un arc de cercle centré en 0, allant de $(\epsilon, 0)$ à $(-\epsilon, 0)$ et si f a un pôle simple en 0 de résidu α_1, on a $\lim_{\epsilon\to 0}\int_{c_\epsilon} f(z)\,dz = \pi i\alpha_1$.*

Preuve : On explicite f sous la forme $f(z) = \alpha_1 z^{-1} + h(z)$, avec h holomorphe, donc bornée au voisinage de 0.

□

Application : calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$.

A.8 Exemple

Si P et Q sont deux polynômes tels que degré$(Q) \geq$ degré(P) $+2$, et si Q est non nul sur l'axe réel, on peut calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ en appliquant la formule des résidus à P/Q et au contour d'intégration formé par un demi-cercle de centre 0.

A.9 Exemple 1 :

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta}, \text{ pour } a > 1.$$

Une première méthode de calcul consiste à faire le changement de variable $t = \tan\frac{\theta}{2}$. Une autre méthode, basée sur le calcul des résidus, consiste à exprimer I comme une intégrale curviligne :

Considérons le chemin orienté Γ donné par la paramétrisation $([0, 2\pi], \theta \to e^{i\theta})$ du cercle unité. L'intégrale I s'écrit comme l'intégrale curviligne le long de Γ :

$$\int_\Gamma \frac{1}{a+\frac{1}{2}(z+z^{-1})}(-i)\frac{dz}{z} = -2i\int_\Gamma \frac{dz}{z^2+2az+1}.$$

Le polynôme $Q(z) = z^2 + 2az + 1$ a deux zéros dont l'un $z_1 = -a + (a^2-1)^{\frac{1}{2}}$ est contenu à l'intérieur du contour d'intégration. Le résidu de la fraction rationnelle $f = 1/Q$ en ce pôle est donné par

$$Res(f, z_1) = \frac{1}{Q'(z_1)} = \frac{1}{2(a^2-1)^{\frac{1}{2}}}.$$

Le théorème des résidus donne donc pour valeur de l'intégrale

$$I = 2\pi i(-2i)\frac{1}{2(a^2-1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\pi}{(a^2-1)^{\frac{1}{2}}}.$$

A.10 Exemple 2 :

Calcul de l'intégrale : $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n}, n \geq 2$. Cette intégrale converge pour $n \geq 2$.

Considérons le chemin orienté Γ formé du segment OA de l'axe réel de longueur ρ, de l'arc de cercle de A à B de rayon ρ et d'angle $\theta_0 = \frac{2\pi}{n}$ et du segment BO fermant le contour dans le plan complexe. Soit $f(z) = \dfrac{1}{1+z^n} = \dfrac{1}{Q(z)}$, où $Q(z) = 1 + z^n$.

L'intégrale curviligne $\displaystyle\int_\Gamma \frac{1}{1+z^n}\,dz$ se compose de trois intégrales :

$$\int_\Gamma \frac{1}{1+z^n}\,dz \quad = \quad \int_0^\rho \frac{dx}{1+x^n}$$

$$\begin{aligned} &+ \int_{AB} \frac{dz}{1+z^n} \\ &+ \int_{BO} \frac{dz}{1+z^n}. \end{aligned}$$

Posons $I_\rho = \displaystyle\int_0^\rho \frac{dx}{1+x^n}$.

La dernière intégrale de la somme se calcule en fonction de I_ρ :

$$\int_{BO} \frac{dz}{1+z^n} = -\int_0^\rho e^{2\pi i/n} \frac{dx}{1+x^n} = -e^{2\pi i/n} I.$$

Le contour Γ contient, pour $\rho > 1$, en son intérieur un pôle et un seul de la fraction f. En effet les zéros de Q sont donnés par $z^n = -1$, soit $z = e^{i\pi\frac{2k+1}{n}}$, $k = 0, 1, ..., n-1$. Le pôle de f à l'intérieur de Γ est $z_1 = e^{i\pi/n}$, et le résidu :

$$Res(f, z_1) = \frac{1}{Q'(z_1)} = \frac{1}{nz_1^{n-1}} = \frac{1}{n} e^{-i\pi\frac{n-1}{n}}.$$

Montrons que $\lim_{\rho\to\infty} \int_{AB} \frac{dz}{1+z^n} = 0$. Ceci résulte de la majoration (on a supposé $n \geq 2$) :

$$\begin{aligned} |\int_{AB} \frac{dz}{1+z^n}| &= |\int_0^{\theta_0} \frac{i\rho e^{i\theta}}{1+\rho^n e^{in\theta}} d\theta| \\ &\leq |\int_0^{\theta_0} \frac{\rho}{1+\rho^n e^{in\theta}} d\theta| \leq 2\frac{\theta_0 \rho}{|\rho^n - 1|}. \end{aligned}$$

On trouve donc en passant à la limite : $\dfrac{2\pi i}{n} e^{-i\pi(n-1)/n} = (1 - e^{2\pi i/n}) I$, soit

$$I = \frac{\pi}{n} \frac{1}{\sin(\pi/n)}.$$

On vérifie que, pour $n = 2$, on retrouve $I = \pi/2$, et que, quand n tend vers l'infini, la limite de l'intégrale est 1.

4.6 Exercices

Exercice 4.6.1

Soit T un réel > 0. On considère les fonctions suivantes :

$$f(t) = 1_{[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]}(t),$$

$$g(t) = (T - |t|)\, 1_{[-T,T]}(t).$$

a) Calculer leur transformée de Fourier.

b) Montrer que $y = x * x$.

[[*Remarques : On obtient*

$$\begin{aligned}\widehat{f}(u) &= \frac{1}{\pi u}\sin\pi uT, \\ \widehat{g}(u) &= (\frac{\sin\pi uT}{\pi u})^2 = |\widehat{f}(u)|^2.\end{aligned}$$

La transformée de Fourier de x est de carré intégrable, mais n'est pas intégrable. Par contre la transformée de Fourier de y est intégrable. Ces exemples simples illustrent le lien existant entre la régularité d'une fonction et la "localisation" de sa transformée de Fourier.]]

Exercice 4.6.2 *Calcul de t. de F.*

1) Pour $\lambda > 0$, calculer la transformée de Fourier de la fonction

$$x_\lambda(t) = \exp(-\lambda t)1_{[0,\infty[},$$

puis, pour n entier ≥ 1, de

$$x_{\lambda,n}(t) = \exp(-\lambda t)\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}1_{[0,\infty[}.$$

Représenter graphiquement le module et l'argument de ces transformées.

[[*résultats* : $\frac{1}{\lambda+2\pi iu}$, $\frac{1}{(\lambda+2\pi iu)^n}$]]

2) Calculer le produit de convolution $x_\lambda * x_\beta$ par un calcul direct de convolution et en utilisant la transformée de Fourier.

3) On définit par récurrence les fonctions y_n, $n = 1, 2, ...$, en posant : $y_1 = x_\lambda$ et

$$y_{n+1} = y_n * x_\lambda, \text{ pour } n \text{ entier } \geq 1.$$

a) Expliciter y_n.

[[*Remarquer que $x_0 = 1_{[0,\infty[}$ n'est pas intégrable, mais peut être convolée avec elle-même (cas des fonctions à support dans* $[0,\infty[$.]]

b) Calculer la transformée de Fourier de y_n, pour $n \geq 1$, par un calcul direct et en utilisant les propriétés de la transformation de Fourier.

Exercice 4.6.3 *Calcul de t. de F.*

a) Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-|t|}e^{itu}\, dt = \frac{2}{1+u^2}.$$

b) En déduire, par la formule d'inversion,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-itu}}{1+t^2}\, du = \pi e^{-|t|}.$$

c) Retrouver ce résultat par une méthode de calcul de résidus.

Exercice 4.6.4 *Fonction* Γ

On rappelle que la fonction Γ est définie, pour $\Re e\, z > 0$ par

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\; dt.$$

Pour α paramètre réel > 0, on note γ_α la fonction (densité de la loi gamma de paramètre α) définie par :

$$\gamma_\alpha(t) = (\Gamma(\alpha))^{-1} t^{\alpha-1} e^{-t}\; 1_{[0,\infty[}(t).$$

Par une méthode d'intégrale curviligne sur un contour fermé du plan complexe, montrer que la transformée de Fourier de γ_α est donnée par :

$$\int_{\mathbb{R}} \gamma_\alpha(t)\; e^{-2\pi i u t}\; dt = \frac{1}{(1+2\pi i u)^\alpha}.$$

Exercice 4.6.5

Calculer $\int_0^\infty e^{-t^2/2}\; dt$.

[[*Méthode* : considérer l'intégrale double

$$\begin{aligned}(\int_0^\infty e^{-t^2/2}\; dt).(\int_0^\infty e^{-s^2/2}\; ds) &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(t^2+s^2)/2}\; dt\; ds \\ &= \lim_R \int_0^R \int_0^R e^{-(t^2+s^2)/2}\; dt\; ds.\end{aligned}$$

et utiliser le passage en coordonnées polaires pour obtenir :

$$\int_0^\infty e^{-t^2/2}\; dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.\;]]$$

Exercice 4.6.6 *Calcul de la transformée de Fourier de la fonction de Laplace-Gauss*

Calculer la transformée de Fourier de la fonction $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$.

Première méthode [Rappel, cf. Corollaire 4.1.13]

1) Calculer l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2}\; e^{\alpha t}\; dt$, pour α réel.

2) Montrer que $F(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2}\; e^{zt}\; dt$ existe, pour tout $z \in \mathbb{C}$, et que F est développable en série entière.

3) En déduire que la transformée de Fourier $\widehat{\varphi}$ de φ est :

$$\widehat{\varphi}(u) = e^{-2\pi^2 u^2}\; .$$

Deuxième méthode

1) En intégrant par parties, montrer que $\widehat{\varphi}$ vérifie l'équation différentielle

$$\frac{d}{du}\widehat{\varphi}(u) = -4\pi^2 u\widehat{\varphi}.$$

2) En déduire l'expression de $\widehat{\varphi}$.

Exercice 4.6.7 *Domaine de définition de la transformée de Laplace*

Soit f une fonction mesurable sur $\mathbb{R}$. On considère le domaine de définition D_f de sa transformée de Laplace

$$\mathcal{L}f(z) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\ e^{-tz}\ dt,$$

c'est-à-dire le sous-ensemble du plan complexe défini par :

$$D_f = \{z \in \mathbb{C} : \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)\ e^{-zt}|\ dt < \infty\}.$$

a) Montrer que D_f est formé de droites verticales dans le plan complexe.

b) Montrer que D_f est de la forme $D_f = I \times \mathbb{R}$, où I est un intervalle (au sens large) de $\mathbb{R}$.

c) En utilisant l'inégalité de H́older, montrer la convexité de la fonction

$$y \in \mathbb{R} \to \ln\Big(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|\ e^{yt}\ dt\Big)$$

[[*Indications* : Pour $y_0 \leq y \leq y_1$, on pourra majorer e^{-yt} par $e^{-y_0 t}$, pour $t \geq 0$, et par $e^{-y_1 t}$, pour $t < 0$.

Autre méthode : utiliser le résultat de convexité de la question c).]]

d) D'après ce qui précède, D_f est une bande verticale. On suppose D_f d'intérieur non vide. Montrer que $\mathcal{L}f$ est développable en série entière au voisinage de tout point de l'intérieur de D_f.

[[*Indications* : Soit z_0 un point de l'intérieur de D_f. On peut choisir deux réels x_0 et x_1 tels que : $x_0 < \Re e\, z_0 < x_1$ et

$$\int_0^{\infty} |f(t)|\ e^{-x_0 t}\ dt < \infty,\ \int_{-\infty}^{0} |f(t)|\ e^{-x_1 t}\ dt < \infty.$$

En appliquant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on montre que $\mathcal{L}f$ est développable en série entière sur le disque $D(z_0, r)$ de centre z_0 et de rayon r, où $r = \inf(\Re e\, z_0 - x_0, x_1 - \Re e\, z_0)$.]]

Exercice 4.6.8

Montrer que, si f est intégrable et à support compact, alors sa transformée de Laplace est définie dans le plan complexe et analytique.

[*Indications* : Soit $[-L, L]$ un intervalle compact contenant le support de f. On a :

$$\mathcal{L}f(z) = \int_{-L}^{L} f(t)\ e^{-tz}\ dt = \sum_{0}^{\infty} a_n z^n,$$

avec

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n!} \int_{-L}^{L} f(t)\ t^n\ dt.$$

[On pourra utiliser la majoration suivante :

$$|\sum_{0}^{N} \frac{(-1)^n}{n!} t^n f(t) z^n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|t|^n}{n!} |f(t)| R^n = e^{|t|R} |f(t)|, \text{ pour } |z| \leq R.$$

qui permet d'appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue.]

Exercice 4.6.9 *Une démonstration du théorème d'inversion de Fourier*

La démonstration du théorème d'inversion donnée en (4.2.5) utilise la famille $(\varphi_r)_{r>0}$ définie par

$$\varphi_r(t) = \frac{1}{r} \varphi(\frac{t}{r})), \text{ où } \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-t^2/2)\ .$$

Donner une variante de la démonstration en utilisant la famille de fonctions $(\theta_r)_{r>0}$ définie par

$$\theta_r(t) = \frac{1}{r} \theta(\frac{t}{r}), \text{ où } \theta(t) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+t^2}\ .$$

Exercice 4.6.10 *Une preuve du lemme de Riemann-Lebesgue*

I. Soit f une fonction intégrable.

1) Montrer, par un changement de variable, la relation :

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\ e^{-2\pi i u t}\ dt = -\int_{\mathbb{R}} f(t - \frac{1}{2u})\ e^{-2\pi i u t}\ dt, \text{ pour tout réel } u \neq 0.$$

2) En utilisant les propriétés de continuité du groupe des translations, montrer (lemme de Riemann-Lebesgue) :

$$\lim_{|u| \to \infty} \widehat{f}(u) = 0\ .$$

[*Indications* : On a :

$$\int f(t)\ e^{iut}\ dt = -\int f(t + \pi/u) e^{iut}\ dt.$$

D'où :

$$\begin{aligned} 2|\int f(t)e^{iut}\,dt| &= |\int [f(t)-f(t+\pi/u)]e^{iut}\,dt| \\ &\le \|f-f_{\pi/u}\|_1 \to 0,\ \text{pour } |u|\to+\infty.] \end{aligned}$$

II. On fait maintenant une hypothèse de régularité sur f. Etant donné α un réel tel que $0<\alpha\le 1$, on suppose que f est hölderienne d'ordre α et que l'on peut écrire la majoration dans la condition de Hölder sous la forme :

$$|f(t+h)-f(t)| \le C(t)|h|^\alpha,\ \forall h,t\in\mathbb{R}, \tag{$*$}$$

avec une fonction $C(t)$ intégrable.

1) Montrer que, si la fonction f vérifie $(*)$, il existe une constante M telle que :

$$|\widehat{f}(u)| \le \frac{M}{|u|^\alpha},\ \forall u.$$

2) Montrer que toute fonction g intégrable et de classe C^2, telle que g' et g'' soient intégrables, satisfait aux conditions de la formule d'inversion de Fourier.

3) Montrer que, si l'on suppose seulement que g est dérivable, telle que sa dérivée g' soit intégrable et vérifie $(*)$ pour un $\alpha\in]0,1]$, la fonction g satisfait encore aux conditions de la formule d'inversion de Fourier.

Exercice 4.6.11

On note φ la fonction $t\to e^{-t^2/2}$.

1) Montrer que si f est intégrable, alors $f*\varphi$ est C^∞.

2) A-t-on $f*\varphi\in\mathcal{S}$?

[Remarquer que, si f est dans L^1, $\widehat{f*\varphi}=\widehat{f}.\widehat{\varphi}$ a la régularité de $\widehat{f}$.]

Exercice 4.6.12 *Calcul de* $\lim_{T\to\infty}\int_0^T \frac{\sin t}{t}\,dt$

1) En intégrant par partie (et en prenant $1-\cos t$ comme primitive de $\sin t$), montrer la relation

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T \frac{\sin t}{t}\,dt = \int_0^\infty \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\,dt.$$

2) En représentant la fonction $t\to\frac{\sin t}{t}$ comme une transformée de Fourier, en déduire la valeur de

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T \frac{\sin t}{t}\,dt.$$

Exercice 4.6.13 *"Principe d'incertitude"*

Le principe d'incertitude (exprimé par l'inégalité établie dans l'exercice) signifie ici que, pour un signal convenablement normalisé, on ne peut simultanément avoir une "localisation" arbitrairement bonne du signal **et** *de sa transformée de Fourier.*

On considère un signal x (à valeurs réelles) dérivable, d'énergie finie ($\int x(t)^2 dt < \infty$) et tel que $\int x'(t)^2 dt < \infty$.

On suppose que x satisfait de plus les conditions suivantes :

$$\int t^2 x(t)^2 dt < \infty, \quad \int tx(t)^2 dt = 0, \quad \lim_{t \to \pm\infty} tx(t)^2 = 0,$$

On définit sa "durée moyenne quadratique" par

$$\Delta_T = (\frac{\int t^2 |x(t)|^2 dt}{\int |x(t)|^2 dt})^{1/2}$$

et sa "bande moyenne quadratique" par

$$\Delta_B = (\frac{\int u^2 |\widehat{x}(u)|^2 du}{\int |\widehat{x}(u)|^2 du})^{1/2}.$$

(Rappelons qu'un intervalle dans le domaine des fréquences s'appelle aussi une "bande de fréquence", d'où la terminologie).

a) Montrer que l'on a toujours l'inégalité :

$$\Delta_B \Delta_T \geq \frac{1}{4\pi}.$$

b) Déterminer pour quels types de signaux il y a égalité dans l'inégalité précédente.

[*Indications* : calculer l'intégrale $\int tx(t)x'(t)dt$ et utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Le cas d'égalité, dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, conduit à l'équation différentielle

$$tx(t) = \lambda x'(t),$$

où λ est une constante.

On en déduit que x est de la forme

$$x(t) = Ce^{t^2/2\lambda}.$$

Pour que x soit de carré intégrable, il faut que λ soit < 0. En posant $\sigma^2 = -\lambda$, on obtient donc, comme solutions, les fonctions de Laplace-Gauss : $Ce^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$.]

Exercice 4.6.14 *Formule de sommation de Poisson*

1) On considère une fonction f continue et intégrable sur $\mathbb{R}$, telle que la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(t+n)$ converge uniformément sur tout compact et telle que la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|$ soit absolument convergente.

Montrer la relation (formule de Poisson)

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)e^{2\pi int}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

En particulier, on a :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n).$$

2) Application :

a) En prenant $f(t) = e^{-r|t|}, r > 0$, en déduire la formule :

$$\frac{1+e^{-r}}{1-e^{-r}} = \frac{2}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4r}{r^2+4\pi^2n^2} \ .$$

b) On prend maintenant, pour $\sigma > 0$, $f_\sigma(t) = \exp(-\dfrac{t^2}{2\sigma^2})$.

Quelle relation obtient-on en utilisant la méthode précédente ?

[[*Indications* :

1) Soit $\widetilde{f}(t) = \sum_k f(t+k)$. D'après les hypothèses, $\widetilde{f}$ est bien définie et continue comme somme d'une série de fonctions continues convergeant uniformément sur tout compact. Nous avons :

$$\begin{aligned}\widehat{f}(n) = \int f(t)e^{-2\pi int}\ dt &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^1 f(t+k)\, e^{-2\pi int}\ dt \\ &= \int_0^1 \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(t+k)\, e^{-2\pi int}\ dt.\end{aligned}$$

Les relations précédentes expriment les $\widehat{f}(n)$ comme coefficients de Fourier de $\widetilde{f}$. La condition $\sum_n |\widehat{f}(n)| < \infty$ assure que $\widetilde{f}$ est en tout point la somme de sa série de Fourier.

2) a) Pour $f(t) = e^{-r|t|}$, on a $\widehat{f}(s) = \dfrac{2r}{r^2+4\pi^2s^2}$.

b) Soit $\theta(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2\lambda}$, $\lambda > 0$.

La formule de Poisson appliquée à f_σ donne alors la relation fonctionnelle :

$$\theta(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\theta(\frac{1}{\lambda}), \text{ pour tout } \lambda > 0.$$

]]

3) On suppose maintenant simplement que f est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que la série $\sum_n f(t+n)$ converge absolument pour presque tout t.

(On étudiera la série de fonctions $\sum_n f_n$, où $f_n(t) = f(t+n)1_{[0,1[}(t)$).

b) On note $\widetilde{f}$ la fonction (**périodisée** de f) définie par $\widetilde{f}(t) = \sum_n f(t+n)$.

Montrer que $\widetilde{f}$ est dans $L^1(\mathbb{T}^1)$ et que l'application $f \to \widetilde{f}$ est une application linéaire de norme 1 de l'espace $L^1(\mathbb{R})$ sur l'espace $L^1(\mathbb{T})$.

Exprimer les coefficients de Fourier de $\widetilde{f}$ à l'aide de la transformée de Fourier $\widehat{f}$ de f.

c) On suppose qu'il existe des constantes C et $\delta > 0$ telles que

$$|\widehat{f}(u)| \leq C|u|^{-(1+\delta)}.$$

Montrer qu'on a, pour presque tout t, l'égalité :

$$\sum_n f(t+n) = \sum_n \widehat{f}(n)\exp(2i\pi nt).$$

Exercice 4.6.15 *Recherche de fonctions égales à leur transformée de Fourier*

L'objet du problème est de rechercher des exemples de fonctions égales (à une constante multiplicative près) à leur transformée de Fourier.

Notations : on note $\widehat{f}$ la transformée de Fourier d'une fonction f intégrable. On dit qu'une fonction f est de classe C^p, pour un entier $p \geq 1$, si elle est dérivable jusqu'à l'ordre p et si $f^{(p)}$ est continue.

I. (Question de cours)

a) Montrer que la transformée de Fourier d'une fonction f intégrable est une fonction continue.

b) Montrer que, si $\int_{\mathbb{R}} |t||f(t)|\, dt < \infty$, alors $\widehat{f}$ est de classe C^1.

c) On considère une fonction f telle que, pour un entier $p \geq 1$, la fonction $t \to t^p f(t)$ soit intégrable.

Montrer que les fonctions

$$t \to f(t), t \to tf(t), \ldots, t \to t^{p-1}f(t)$$

sont aussi intégrables, puis que $\widehat{f}$ est de classe C^p.

d) On considère une fonction f, vérifiant la condition suivante : *pour un entier $p \geq 1$, f est de classe C^p et les fonctions $f, f', \ldots, f^{(p)}$ sont intégrables.*

Exprimer à l'aide de $\widehat{f}$ la transformée de Fourier de $f^{(k)}$, $1 \leq k \leq p$. (On justifiera les calculs en effectuant une intégration par partie.)

II.

On considère l'équation différentielle

$$y''(t) - 4\pi^2 t^2 y(t) = \lambda y(t) \tag{1}$$

où λ est une constante. On note ϕ la fonction définie par $\phi(t) = e^{-\pi t^2}$.

a) Montrer que, pour tout polynôme H, la fonction ϕ_H définie par $\phi_H(t) = H(t)\phi(t)$, vérifie, pour tout entier p, les conditions des questions I.c) et I.d) précédentes.

b) Montrer que, si f est une fonction vérifiant la condition de la question I.d), pour $p = 2$, et l'équation (1), alors sa transformée de Fourier vérifie également (1).

c) Montrer que ϕ est (à une constante multiplicative près) l'unique solution de (1) pour $\lambda = -2\pi$, qui soit intégrable.

En déduire un calcul de la transformée de Fourier de ϕ.

d) On cherche des solutions de (1) de la forme $\phi_H(t) = H(t)\phi(t)$, où H est un polynôme de degré n.

Montrer qu'il existe une solution ϕ_H de (1), avec H de degré n (et de terme de degré n non nul) si, et seulement si, $\lambda = -2\pi(2n+1)$.

e) En déduire une famille de fonctions égales (à une constante multiplicative près) à leur transformée de Fourier.

Exercice 4.6.16 *Etude d'une équation fonctionnelle*

I. On se propose de déterminer les fonctions Φ intégrables qui vérifient l'équation fonctionnelle :

$$\Phi(2x) + \Phi(2x-1) = \Phi(x), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

1) Exprimer les transformées de Fourier des fonctions

$$\Phi_1 : x \to \Phi(2x) \text{ et } \Phi_2 : x \to \Phi(2x-1)$$

à l'aide de la transformée de Fourier $\widehat{\Phi}$ de Φ.

2) En déduire une relation fonctionnelle, notée (2), vérifiée par $\widehat{\Phi}$.

3) Montrer que la fonction

$$\phi : u \to \begin{cases} e^{-\pi i u}\frac{\sin \pi u}{\pi u}, & \text{si } u \neq 0, \\ 1, & \text{si } u = 0. \end{cases}$$

est solution de (2) et qu'elle est la seule solution de (2) qui soit continue et égale à 1 pour $u = 0$.

4) Quelles sont les fonctions Φ intégrables solutions de (1) ?

II. (Autre méthode)

1) Etant donnée une solution intégrable de (1), établir, pour toute fonction f continue à support compact, la relation :

$$\int \Phi(x)\, f(x)\, dx = \int \Phi(x) \frac{f(\frac{x}{2}) + f(\frac{x+1}{2})}{2}\, dx. \tag{3}$$

2) On définit une application linéaire P de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ dans lui-même en posant

$$(Pf)(x) = \frac{f(\frac{x}{2}) + f(\frac{x+1}{2})}{2}.$$

a) Etudier le comportement des itérés $P^n\phi$, pour n tendant vers $+\infty$, quand ϕ est dans $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$.

b) Retrouver le résultat du I) en utilisant (3).

III. (Généralisation)

1) Par un procédé analogue à celui du I., déterminer les solutions intégrables de l'équation fonctionnelle :

$$2\Phi(2x) + \Phi(2x-1) + \Phi(2x+1) = 2\Phi(x), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

2) On considère, plus généralement, l'équation fonctionnelle

$$\sum_{k=-N}^{N} a_k \Phi(2x-k) = \Phi(x), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

où N est un entier ≥ 2 et les $a_k, k = -N, \ldots, N$, sont des constantes réelles.

Donner une condition nécessaire sur les coefficients a_k pour que l'équation (5) possède une solution f intégrable d'intégrale égale à 1.

Exercice 4.6.17 *Equations différentielles et t. de F.*

I. On considère l'équation différentielle

$$y(t) + y'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}. \tag{1}$$

1) Soit y une fonction intégrable solution de (1). Déterminer la transformée de Fourier de y.

2) En déduire que l'équation (1) a une solution de classe C^1 bornée intégrable et une seule.

Exprimer cette solution en utilisant la fonction d'erreur notée erf définie par

$$erf(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-s^2/2}\, ds.$$

3) Retrouver ce résultat en résolvant directement (1).

II. On considère maintenant l'équation différentielle

$$y(t) - y''(t) = g(t), \tag{2}$$

où g est une fonction intégrable dont la transformée de Fourier est intégrable. On recherche les solutions y de classe C^2 de (2) qui sont intégrables et tendent vers 0 à l'infini.

1) Déterminer la transformée de Fourier d'une telle solution y, si elle existe.

En déduire que y est égale à $g * h$, où h est définie par $h(t) = \frac{1}{2} e^{-|t|}$.

2) Montrer que la fonction $t \to t^2 \widehat{g * h}(t)$ est intégrable.

En déduire que $g * h$ est de classe C^2 et est solution de (2).

3) Déduire de ce qui précède que (2) a une solution et une seule de classe C^2, intégrable et tendant vers 0 à l'infini.

4) Calculer cette solution lorsque $g = h$. Retrouver directement ce résultat.

Exercice 4.6.18

On considère une fonction f intégrable, à support compact, telle que $\widehat{f}$ soit intégrable.

a) Montrer que la série $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(u+k)$ est absolument convergente pour presque tout u.

On note $\gamma(u)$ la somme de cette série.

b) Montrer que γ est une fonction 1-périodique, intégrable sur $[0,1]$. (On pourra appliquer le théorème sur les séries de fonctions dans $L^1(\mathbb{R})$.)

c) Calculer les coefficients de Fourier de la fonction γ et montrer que γ coïncide (presque partout) avec un polynôme trigonométrique.

d) On pose $\widetilde{f}(t) = \overline{f(-t)}$. En utilisant la convolée $f * \widetilde{f}$, montrer que la série $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(u+k)|^2$ coïncide (presque partout) avec un polynôme trigonométrique.

e) Montrer que, si l'on suppose f à support compact et de carré intégrable, le résultat de d) subsiste, sans autre hypothèse sur $\widehat{f}$.

Chapitre 5

Mesures de Radon

L'exemple élémentaire de base de la théorie de l'intégration, l'intégrale "ordinaire", ou de Riemann, peut être vu comme un cas particulier de forme linéaire sur un espace de fonctions. Une étude plus générale des formes linéaires sur les espaces de fonctions continues va nous conduire à introduire une classe d'objets mathématiques englobant des exemples d'apparence trés différente comme les mesures avec densité ou les mesures de Dirac.

L'introduction de la notion de mesure de Radon, et plus généralement de distribution, est nécessitée par les besoins de l'analyse et des probabilités (intégration d'une fonction par rapport à une mesure ou application d'une distribution à une fonction). Mais ces objets peuvent être vus également comme généralisant la notion même de fonction.

En théorie du signal, on doit travailler avec des signaux qui ne sont pas nécessairement intégrables, ou qui sont irréguliers ou singuliers tels qu'une masse ponctuelle. On est ainsi conduit à utiliser une théorie fonctionnelle permettant d'englober les signaux dans cette classe plus générale d'objets mathématiques (mesures, distributions) sur lesquels on pourra effectuer des opérations avec beaucoup plus de liberté que sur des "signaux-fonctions".

Pour ces raisons, nous allons construire d'abord l'espace des mesures de Radon, puis au chapitre suivant l'espace des distributions. Nous nous bornerons à donner les définitions de base et à esquisser la théorie. Pour un développement plus approfondi on pourra consulter dans un cours d'analyse fonctionnelle.

La méthode de construction des mesures de Radon, puis des distributions, consiste à introduire un espace $\mathcal{V}$ de fonctions "tests" muni d'une topologie adéquate et à former l'espace des formes linéaires continues sur cet espace. Le cas des mesures de Radon correspond à $\mathcal{V} = \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$, celui des distributions à $\mathcal{V} = \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.

5.1 Mesure de Radon sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^d$

Dans la suite nous désignerons par $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions à valeurs réelles ou complexes continues à support compact sur $\mathbb{R}^d$.

• Formes linéaires positives

L'intégrale de Riemann permet d'associer à toute fonction f appartenant à $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ un nombre réel $\lambda(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, dx$, son intégrale. La correspondance $f \to \lambda(f)$ est linéaire et on a $\lambda(f) \geq 0$, pour $f \geq 0$. Cet exemple conduit à la définition générale suivante :

Définition 5.1.1 On appelle **forme linéaire positive** sur l'espace $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ toute application linéaire de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), qui est positive sur les fonctions positives.

Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel de fonctions à valeurs réelles tel que $f \in \mathcal{E} \Rightarrow |f| \in \mathcal{E}$ (on dit que $\mathcal{E}$ est "réticulé"). Si μ est une forme linéaire positive sur $\mathcal{E}$, on a :

$$|\mu(f)| \leq \mu(|f|), \forall f \in \mathcal{E}.$$

En effet $|f| - f$ est une fonction positive dans $\mathcal{E}$, et on a donc $0 \leq \mu(|f| - f) = \mu(|f|) - \mu(f)$.

De même, $|f| + f$ étant positive, $0 \leq \mu(|f| + f) = \mu(|f|) + \mu(f)$.

L'intégrale (au sens ordinaire) apparaît donc comme un exemple de forme linéaire positive sur $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$. Si l'on abandonne la positivité, il convient d'imposer une condition de *continuité* aux formes linéaires considérées, condition qui est automatiquement vérifiée par les formes linéaires positives ; d'où la définition qui suit.

Définition 5.1.2 On appelle **mesure de Radon sur** $\mathbb{R}^d$ toute application linéaire μ de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (forme linéaire) qui est continue au sens de la condition suivante :

pour tout compact K dans $\mathbb{R}^d$, il existe une constante M_K, vérifiant :

$$|\mu(f)| \leq M_K \|f\|_\infty, \text{ pour toute fonction } f \text{ continue à support dans } K.$$

On note $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ l'espace des mesures de Radon sur $\mathbb{R}^d$. Les formes linéaires positives sur $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ sont bien des mesures de Radon. En effet, elles vérifient la condition de continuité de la définition précédente :

Proposition 5.1.3 *Soit μ une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$. Pour tout compact K dans $\mathbb{R}^d$, il existe une constante M_K telle que $|\mu(f)| \leq M_K \|f\|_\infty, \forall f$ continue à support dans K.*

Preuve : Considérons une fonction ϕ continue à support compact, positive et égale à 1 sur K (utiliser une fonction trapèze). Si f est à support dans K, on a $|f| \leq \|f\|_\infty \phi$, d'où, en appliquant la positivité de μ :

$$|\mu(f)| \leq \mu(|f|) \leq \|f\|_\infty \mu(\phi) = \|f\|_\infty M_K,$$

avec $M_K = \mu(\phi)$.

□

• L'espace $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ comme espace dual de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$

Soit $K = [a, b]$ un intervalle compact. Munissons l'espace $\mathcal{C}(K)$ des fonctions continues à support dans K de la norme uniforme. Toute mesure de Radon μ définit une forme linéaire sur cet espace qui est continue dans le sens suivant : si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans $\mathcal{C}(K)$ convergeant uniformément vers une fonction f (qui est nécessairement continue à support dans K), alors $\lim_n \mu(f_n) = \mu(f)$. Cette propriété est une conséquence immédiate de la condition de la définition (5.1.2).

Inversement, il est facile de vérifier que, pour toute forme linéaire μ sur $\mathcal{C}(K)$ vérifiant la condition de continuité précédente, il existe une constante M_K telle que

$$|\mu(f)| \leq M_K\|f\|_\infty, \forall f \in \mathcal{C}(K).$$

Rappelons que le dual d'un espace vectoriel normé $(V, \| \ \|)$ est l'espace des formes linéaires continues sur $(V, \| \ \|)$. Nous avons ici un exemple d'espace dual : l'espace vectoriel normé est l'espace $\mathcal{C}(K)$ muni de la norme uniforme ; la restriction à $\mathcal{C}(K)$ de toute mesure de Radon sur $\mathbb{R}^d$ définit un élément du dual de $(C(K), \| \ \|_\infty)$.

Si l'on considère maintenant l'espace $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$, il n'est plus possible de définir la continuité d'une forme linéaire sur cet espace à l'aide d'une seule norme. Il faut en effet tenir compte des supports.

Définition 5.1.4 On dit qu'une forme linéaire μ sur $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ est **continue** si elle vérifie la condition (C) suivante :

pour toute suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ qui converge uniformément vers une fonction f en restant à support dans un même compact, on a : $\lim_n \mu(f_n) = \mu(f)$.

Ceci revient à supposer que, pour tout compact K de $\mathbb{R}^d$, la restriction de μ à l'espace $\mathcal{C}(K)$ des fonctions continues à support dans K muni de la norme uniforme est continue. Cette condition est donc bien équivalente à la condition de la définition (5.1.2).

Notation 5.1.5 Soit μ une mesure de Radon sur $\mathbb{R}^d$. On utilise encore la notation intégrale pour désigner la valeur $\mu(f)$ de la forme linéaire μ sur une fonction f. On note $\mu(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f \, d\mu$ ou $\int_{\mathbb{R}^d} f(t) \, d\mu(t)$ ou encore simplement $\int f \, d\mu$.

Remarque 5.1.6 On peut se demander si les mesures de Radon peuvent être définies comme les éléments d'un dual. En d'autres termes, existe-t-il sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$ une topologie (d'espace vectoriel topologique) telle que $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ soit le dual de cet espace. La réponse est oui. Mais pour définir cette topologie il faut considérer toutes les semi-normes N sur $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ vérifiant la condition (C) rencontrée plus haut (i.e. : *les semi-normes N telles que, pour tout compact K dans $\mathbb{R}^d$, il existe une constante M_K, vérifiant : $|N(f)| \leq M_K\|f\|_\infty, \forall f$ continue à support dans K.*)

Il est plus simple d'exprimer la propriété de continuité des mesures de Radon par le fait qu'elles vérifient la condition (C). Par contre, l'espace des mesures de Radon bornées, étudié plus loin, apparaît comme le dual d'un espace normé : l'espace $(\mathcal{CB}(\mathbb{R}^d), \| \ \|_\infty)$.

Cas général des espaces localement compacts

La notion de mesure de Radon peut être définie dans le cas général des *espaces topologiques localement compacts*, dont les espaces euclidiens sont des exemples. Tous les résultats qui ne font pas appel à la structure particulière de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^d$ s'étendent sans difficulté à ce cas général.

• Espace des mesures de Radon

Une mesure de Radon μ est dite *réelle* si $\mu(f) \in \mathbb{R}$, pour toute fonction f dans $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ à valeurs réelles. Nous allons montrer comment l'étude du cas général peut être ramenée à celle des mesures réelles et même réelles positives.

Proposition 5.1.7 *L'ensemble $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ des mesures de Radon sur $\mathbb{R}^d$ forme un espace vectoriel. Toute mesure de Radon complexe est la différence de deux mesures de Radon réelles. Toute mesure de Radon réelle est la différence de deux mesures de Radon positives.*

Preuve : Il est clair que $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ forme un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

Pour toute mesure μ dans $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, on peut poser, pour f à valeurs réelles, $\mu_r(f) = \Re e(\mu(f))$ et $\mu_i(f) = \Im m(\mu(f))$.

On a : $\mu(f) = \mu_r(f) + i\mu_i(f)$, pour f à valeurs réelles.

On obtient ainsi deux mesures de Radon (en restriction aux fonctions à valeurs réelles) que l'on prolonge aux fonctions à valeurs complexes en posant, pour f quelconque dans $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$,

$$\begin{aligned}\mu_r(f) &= \mu_r(\Re e\, f) + i\mu_r(\Im m\, f),\\ \mu_i(f) &= \mu_i(\Re e\, f) + i\mu_i(\Im m\, f).\end{aligned}$$

On a alors $\mu = \mu_r + i\mu_i$, avec μ_r et μ_i à valeurs réelles sur les fonctions à valeurs réelles.

Nous allons maintenant effectuer la décomposition d'une mesure de Radon réelle comme différence de deux mesures de Radon positives (i.e. prenant des valeurs ≥ 0 sur les fonctions à valeurs réelles positives).

Soient μ_1 et μ_2 dans $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ et α et β deux scalaires. Notons $\alpha\mu_1 + \beta\mu_2$ la forme linéaire définie sur $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ par $f \to (\alpha\mu_1 + \beta\mu_2)(f) = \alpha\mu_1(f) + \beta\mu_2(f)$.

On vérifie aisément que $\alpha\mu_1 + \beta\mu_2$ est une mesure de Radon. On a défini ainsi une structure d'espace vectoriel sur $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. On note que les formes linéaires positives sur $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ forment un cône.

Soit $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. Montrons qu'on peut écrire $\mu = \mu^+ - \mu^-$, μ^+ et μ^- étant des formes linéaires **positives** sur $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$. Pour $f \geq 0$ dans $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$, posons

$$\mu^+(f) = \sup\ \{\mu(g),\ 0 \leq g \leq f, g \in C_c(\mathbb{R}^d)\},$$

La condition de majoration vérifiée par μ assure que cette borne supérieure est finie. Il est clair que $0 \leq \mu(f) \leq \mu^+(f)$ et que l'on a :

$$\forall f_1, f_2 \geq 0,\ \text{dans } \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d),\ \mu^+(f_1 + f_2) \geq \mu^+(f_1) + \mu^+(f_2).$$

Pour montrer l'additivité, il suffit d'observer que, si g dans $\mathcal{C}_c^+(\mathbb{R}^d)$ est telle que $0 \leq g \leq f_1 + f_2$, alors il existe g_1 et g_2 dans $\mathcal{C}_c^+(\mathbb{R}^d)$ telles que $g = g_1 + g_2$ et $0 \leq g_1 \leq f_1$, $0 \leq g_2 \leq f_2$ (prendre $g_1 = \inf(g, f_1), g_2 = g - g_1$), ce qui implique

$$\mu^+(f_1 + f_2) \leq \mu^+(f_1) + \mu^+(f_2).$$

On a ainsi défini μ^+, additive sur le cône $\mathcal{C}_c^+(\mathbb{R}^d)$. On étend μ^+ en une forme linéaire sur $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$, en posant $\mu^+(f) = \mu^+(f^+) - \mu^+(f^-)$. Si l'on définit μ^- par $\mu^-(f) = \mu^+(f) - \mu(f)$, l'inégalité $\mu(f) \leq \mu^+(f)$, pour $f \geq 0$, montre que μ^- est une forme linéaire positive.

□

5.2 Exemples : mesures avec densité, discrètes, singulières

Exemple 5.2.1 *Exemple de mesures ayant une densité*

1) Nous avons vu plus haut que la correspondance $f \to \int_{\mathbb{R}^d} f \, dx$, qui à f dans $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ associe son intégrale (au sens de Riemann), définit une mesure de Radon (positive).

2) Plus généralement, considérons une fonction ϕ **localement intégrable**, c'est-à-dire telles que, pour tout compact K la fonction $1_K \, \phi$ soit intégrable. La classe des fonctions localement intégrables contient celle des fonctions intégrables, des fonctions continues, des fonctions mesurables bornées sur tout compact.

On définit une mesure de Radon λ_ϕ sur $\mathbb{R}^d$ en posant $\lambda_\phi(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f\phi \, dx$, pour $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$. On vérifie que la condition de continuité est bien vérifiée :

$$|\lambda_\phi(f)| \leq \int |f||\phi| \, dx \leq \|f\|_\infty \int_K |\phi| \, dx, \text{ pour } f \text{ à support dans } K.$$

Rappelons qu'une fonction est dite localement intégrable, si elle est intégrable sur tout compact.

Définition 5.2.2 On dit qu'une mesure μ sur $\mathbb{R}^d$ a une **densité** s'il existe une fonction ϕ localement intégrable (par exemple continue) telle que $\mu = \lambda_\phi$, c'est-à-dire telle que

$$\mu(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f\phi \, dx, \text{ pour toute } f \in C_c(\mathbb{R}^d).$$

A l'opposé des mesures ayant une densité, se trouvent les mesures discrètes. L'exemple le plus simple est celui de la mesure de **Dirac** en un point a, notée δ_a et définie par $f \to \delta_a(f) = f(a)$.

Plus généralement, si $a_1, ..., a_n$ sont des points de $\mathbb{R}^d$ et $\alpha_1, ..., \alpha_n$ des réels (vus comme des masses, du moins dans le cas positif, placées aux points a_i), la correspondance $f \to \mu(f) = \sum_1^n \alpha_i f(a_i)$ définit une mesure μ.

Définition 5.2.3 On dit qu'une mesure μ sur $\mathbb{R}^d$ est **discrète** s'il existe une famille finie ou dénombrable $(a_i)_{i \in I}$ de points de $\mathbb{R}^d$ et une famille $(\alpha_i)_{i \in I}$ de réels, tels que

$$f \to \mu(f) = \sum_{i \in I} \alpha_i f(a_i), \text{ pour toute } f \in C_c(\mathbb{R}^d). \tag{5.1}$$

On montrera en exercice que la formule (5.1) définit bien une mesure de Radon, si les familles $(a_i)_{i \in I}$ et $(\alpha_i)_{i \in I}$ vérifient la condition :

$$\sum_{i : |a_i| \leq L} |\alpha_i| < \infty, \forall L. \tag{5.2}$$

Cette condition est évidemment satisfaite si la famille d'indices I est finie, ou plus généralement si la famille des points $(a_i)_{i \in I}$ est discrète (sans point d'accumulation). Il n'y a alors qu'un nombre fini de points a_i dans chaque compact de $\mathbb{R}^d$). La condition (5.2) est également satisfaite si l'on a : $\sum_{i \in I} |a_i| < \infty$.

Les mesures discrètes forment un sous-espace vectoriel de l'espace des mesures. Toute mesure discrète μ peut être représentée comme une combinaison de mesures de Dirac :

$$\mu = \sum_{i \in I} \alpha_i \delta_{a_i}.$$

Remarque 5.2.4 Nous avons ainsi défini deux classes de mesures : les mesures discrètes et les mesures ayant une densité. Plus généralement, on peut considérer la classe des mesures qui sont le somme d'une mesure discrète et d'une mesure ayant une densité.

Mais il existe des mesures qui ne sont pas dans cette classe. On peut construire des mesures diffuses (i.e. sans masse ponctuelle) et **singulières** par rapport à la mesure de Lebesgue.

Plongement des espaces de fonctions dans l'espace des mesures

Nous avons associé à toute fonction ϕ localement intégrable sur $\mathbb{R}^d$ (au sens de l'intégrale de Lebesgue) une mesure de densité ϕ, la mesure $\lambda_\phi : f \to \int_{\mathbb{R}^d} f\phi \; dt$.

Cette construction permet de "plonger" l'espace des fonctions localement intégrables dans l'espace $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ des mesures sur $\mathbb{R}^d$. On doit cependant vérifier que la correspondance est bien injective (elle est loin d'être surjective, puisque nous avons vu qu'il existe des mesures qui n'ont pas de densité).

La preuve est élémentaire dans le cas de fonctions continues. En faisant la différence des mesures μ_{ϕ_1} et μ_{ϕ_2}, en supposant ϕ_1 et ϕ_2 continues, on est ramené à montrer que, si ϕ est une fonction continue telle que $\int_{\mathbb{R}^d} \phi f dt = 0, \forall f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$, alors ϕ est identiquement nulle.

Choisissons f continue à support compact de la forme $\overline{\phi}\chi$, où χ est une "fonction trapèze". On a $\int |\phi|^2 \chi dt = 0$. Ceci implique que ϕ (qui est supposeé continue) est identiquement nulle sur le support de χ, donc identiquement nulle.

Ce résultat s'étend à des densités localement intégrables quelconques :

Proposition 5.2.5 *Si ϕ_1 et ϕ_2 sont deux fonctions localement intégrables (pour la mesure de Lebesgue λ) telles que*

$$\lambda(f\phi_1) \geq \lambda(f\phi_2), \; \forall f \in \mathcal{C}_c^+(\mathbb{R}^d),, \tag{5.3}$$

alors $\phi_1 \geq \phi_2$, λ-presque partout.

En particulier, si $\mu_{\phi_1} = \mu_{\phi_2}$, on a $\phi_1(t) = \phi_2(t)$ pour presque tout t et, si les fonctions ϕ_1 et ϕ_2 sont continues, elles sont égales en tout point.

Preuve : L'inégalité (5.3) s'étend aux fonctions f mesurables bornées positives à support compact. Pour une telle fonction, on peut en effet construire une suite (f_n) de fonctions continues positives à support compact, bornées uniformément, qui converge vers f presque partout. On peut alors passer à limite grâce au théorème de Lebesgue dans l'inégalité $\displaystyle\int f_n\phi_1 \; d\lambda \geq \int f_n\phi_2 \; d\lambda$.

Soit $A = \{\phi_2 > \phi_1\}$. En prenant $f = 1_{A \cap B}$, avec B compact, on obtient, $\lambda((\phi_1 - \phi_2) \, 1_{A \cap B}) \geq 0$, d'où $\lambda(A \cap B) = 0$. En appliquant ce résultat à $B = [-n, n]$, on obtient que $A = \cup_n (A \cap [-n, n])$ est négligeable.

En particulier, l'égalité $\lambda(f\phi_1) = \lambda(f\phi_2)$, $\forall f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$, implique l'égalité $\phi_1 = \phi_2$, λ-p.p..

□

Un exemple en dimension > 1

Voici un exemple (en dimension $d > 1$) qui ne se réduit pas aux exemples précédents :

Soit Γ une courbe dans $\mathbb{R}^d$, définie par une application continue $t \in [0,1] \to (x_1(t), ..., x_d(t)) \in \mathbb{R}^d$.

Pour toute fonction f dans $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$, la fonction $t \to f(x_1(t), ..., x_d(t))$ est continue et peut être intégrée entre 0 et 1. L'application $f \to \int_0^1 f(x_1(t), ..., x_d(t))\, dt$ définit une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$, qui n'a pas de densité et qui n'est pas discrète.

• **Majoration par une mesure positive**

La proposition (5.1.7) permet de définir, pour toute mesure de Radon réelle μ, la mesure positive $|\mu|$ par

$$|\mu| = \mu^+ + \mu^-,$$

où $\mu = \mu^+ - \mu^-$ est la décomposition de μ comme différence de deux mesures positives.

On a, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$, la majoration

$$|\int f(x)\, d\mu(x)| \leq \int |f(x)|\, d|\mu|(x).$$

Cette majoration permet souvent, dans des problèmes d'intégrabilité ou de convergence, de se ramener à des mesures positives.

Exercice 5.2.6

a) Montrer que la construction de $|\mu|$, dans le cas où la mesure μ a une densité ϕ, revient à la construction de la mesure de densité positive $|\phi|$.

b) Dans le cas où μ est une mesure discrète, déterminer $|\mu|$.

Définition 5.2.7 Soit μ une mesure de Radon. On appelle **support** de μ le fermé complémentaire de la réunion des ouverts U tels que $\mu(f) = 0$, pour toute fonction f continue à support dans U.

Une mesure est à support compact s'il existe un compact K tel que $\mu(f) = 0$ pour toute fonction f continue à support disjoint de K.

5.3 Mesures boréliennes et mesures de Radon sur $\mathbb{R}^d$

Définition 5.3.1 Nous dirons qu'une mesure μ positive sur la tribu borélienne de $\mathbb{R}^d$ est **localement finie** si $\mu(K) < \infty$, pour tout compact K de $\mathbb{R}^d$.

Les fonctions continues à support compact sont donc μ-intégrables, pour toute mesure μ localement finie. Il est clair que, pour une telle mesure, la forme linéaire $I_\mu : f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d) \to \mu(f)$ définit une mesure de Radon sur $\mathbb{R}^d$. Le théorème de Radon-Riesz établit la réciproque :

Théorème 5.3.2 *La correspondance $\mu \to I_\mu$ est une bijection entre l'espace des mesures boréliennes positives localement finies sur $\mathbb{R}^d$ et l'espace des mesures de Radon positives sur $\mathbb{R}^d$.*

Principe de la *Preuve* : A partir de la forme linéaire définie par μ sur l'espace $\mathcal{R}_c(\mathbb{R}^d)$, on procède par prolongement (par exemple par la méthode de Daniell) pour construire l'espace des fonctions boréliennes μ-intégrables.

• Les théorèmes de la théorie de l'intégration

La théorie de l'intégrale de Lebesgue développée à partir de l'intégrale des fonctions continues ou en escalier conduit à l'espace des fonctions f intégrables sur $\mathbb{R}$ par rapport à la mesure de Lebesgue : $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|\ dt < \infty$. De la même façon, on peut partir d'une mesure de Radon μ et construire l'espace des fonctions qui sont μ-intégrables. Les théorèmes de convergence classiques de l'intégrale de Lebesgue restent valides sans changement pour l'espace des fonctions μ-intégrables.

Enonçons par exemple le théorème de convergence dominée de Lebesgue (dans le cas où μ est la mesure uniforme sur $\mathbb{R}$, on retrouve l'énoncé du théorème de Lebesgue pour $L^1(\mathbb{R})$).

Théorème 5.3.3 Théorème de convergence dominée de Lebesgue *: Soit μ une mesure positive sur $\mathbb{R}^d$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions μ-intégrables telle que $\lim_n f_n(t) = f(t)$, pour (μ-presque) tout t (convergence simple). S'il existe une fonction μ-intégrable g telle que $|f_n| \leq g$, pour tout n, alors la fonction f est μ-intégrable et on a :*

$$\lim_n \int f_n(t)\ d\mu(t) = \int \lim_n f_n(t)\ d\mu(t) = \int f(t)\ d\mu(t).$$

• Dualité sur un espace de fonctions tests, principe

Les mesures de Radon ont été définies comme des formes linéaires continues sur l'espace $\mathcal{V} = \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ des fonctions continues à support compact muni d'une topologie convenable.

Cet espace sert ici d'espace de fonctions tests. Par exemple, pour vérifier l'égalité entre deux mesures de Radon μ_1 et μ_2, on doit (par définition même des mesures de Radon) vérifier que l'application de ces deux mesures aux fonctions tests donne le même résultat, c'est-à-dire que l'on a l'égalité $\mu_1(f) = \mu_2(f), \forall f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$.

Dans la définition des mesures de Radon, on a choisi $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ comme espace de fonctions tests, en précisant le mode de convergence (rappelons "qu'une suite (f_n) converge vers $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$", par définition de la topologie mise sur l'espace $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$, si les fonctions f_n restent à support dans un compact fixe et si la suite (f_n) converge uniformément vers f).

Choisissons maintenant comme espace de fonctions tests un espace plus gros : l'espace $\mathcal{CB}(\mathbb{R}^d)$ des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}^d$, muni de la topologie de la convergence uniforme. Cet espace contient l'espace $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ et toute suite (f_n) qui converge au sens de la topologie sur $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ converge au sens de la convergence uniforme. Les formes linéaires continues sur $\mathcal{CB}(\mathbb{R}^d)$ sont donc des cas particuliers de mesures de Radon : ce sont les mesures de Radon μ pour lesquelles l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^d} f(t)\ d\mu(t)$ peut être prolongée de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ à $\mathcal{CB}(\mathbb{R}^d)$. Ce sont les **mesures bornées** dont nous allons préciser la définition.

On note que la construction précédente illustre le principe général suivant : si l'on agrandit l'espace des fonctions tests (avec compatibilité des topologies), on diminue l'espace des fonctionnelles continues sur l'espace des fonctions tets.

5.4 Mesures bornées

Reprenons la définition des mesures de Radon. Soit μ une mesure de Radon sur $\mathbb{R}^d$. Nous savons que, pour tout compact K dans $\mathbb{R}^d$, il existe une constante M_K vérifiant : $|\mu(f)| \leq M_K\|f\|_\infty, \forall f$ continue à support dans K. Nous dirons que μ est bornée si la constante M_K ne dépend pas du compact K. On a donc la définition suivante :

Définition 5.4.1 On dit qu'une mesure de Radon μ est **bornée**, s'il existe une constante finie M telle que

$$\forall f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d),\ |\mu(f)| \leq M\|f\|_\infty. \tag{5.4}$$

On note $\mathcal{MB}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des mesures de Radon bornées.

Si μ est une mesure bornée, alors μ peut être prolongée à l'espace $\mathcal{CB}(\mathbb{R}^d)$ des fonctions continues bornées.

Supposons μ positive (on peut se ramener à cette situation, car si μ est une mesure réelle bornée, μ^+ et μ^- le sont aussi). Le prolongement de μ bornée à $\mathcal{CB}(\mathbb{R}^d)$ peut être obtenu de la façon suivante : Soit f une fonction continue bornée positive. Si (χ_n) est une suite croissante de fonctions "trapèzes" à support compact, convergeant vers 1 en croissant, la suite $(\mu(f\chi_n))$ est croissante et majorée. Sa limite définit l'intégrale $\mu(f)$. On montre qu'elle ne dépend pas de cette construction particulière.

En d'autres termes, les fonctions continues bornées sont μ-intégrables, pour toute mesure μ bornée.

On peut définir une norme sur l'espace des mesures bornées, en posant :

$$\|\mu\| = \sup_{\{f\in\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d), \|f\|_\infty\leq 1\}} |\mu(f)|.$$

La mesure mesure μ est bornée, si et seulement si cette quantité est finie.

Le cas le plus important est celui où μ est à la fois bornée et positive. Dans ce cas, on montre aisément (**exercice**) que la quantité $\|\mu\|$ est égale à la constante $\mu(1)$, qui est appelée masse de μ.

Il est clair que les mesures de Radon à support compact sont bornées.

Définition 5.4.2 Si μ est positive, bornée et telle que $\mu(1) = 1$, on dit que μ est une mesure de **probabilité**.

Exemple 5.4.3 Soit λ_ϕ une mesure ayant une densité localement intégrable (par exemple continue) ϕ. Alors la mesure λ_ϕ est bornée si ϕ est intégrable et on a, dans ce cas,

$$\|\mu\| = \int |\phi|\ dx = \|\phi\|_1. \tag{5.5}$$

On peut établir la réciproque et montrer (exercice) le résultat suivant :

Proposition 5.4.4 *Une mesure λ_ϕ ayant une densité ϕ est bornée si et seulement si ϕ est intégrable (au sens de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$: $\int |\phi(t)|\, dt < \infty$.*

On prendra garde au fait que λ_ϕ bornée **ne** signifie **pas** que ϕ est bornée.

Remarque 5.4.5 De la condition (5.4) on déduit la propriété importante suivante vérifiée par les mesures bornées.

Soit μ une mesure bornée (que nous pouvons supposer positive). Alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe L tel que, pour toute fonction f à support dans $[-L, L]^c$, on ait : $|\mu(f)| \leq \epsilon \|f\|_\infty$.

[Dans le cas contraire, on pourrait construire, pour un $\epsilon > 0$, une suite (f_n) de fonctions continues à supports disjoints, telles que $\|f_n\| \leq 1$ et $\mu(f_n) > \epsilon$. D'où $\|\sum_1^N f_n\|_\infty \leq 1$ et $\mu(\sum_1^N f_n) \geq N\epsilon$, pour tout N.]

5.5 Produit et convolution de mesures de Radon

Considérons deux mesures de Radon μ et ν sur $\mathbb{R}$. Soit f une fonction continue à support compact sur $\mathbb{R}^2$. Nous cherchons à définir l'intégrale de la fonction f par rapport à une mesure de Radon produit, notée $\mu \times \nu$. Le procédé est analogue à celui de la définition de l'intégrale de Riemann des fonctions continues à support compact sur $\mathbb{R}^2$.

Pour $y \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction $f_y : x \to f_y(x) = f(x, y)$ est continue à support compact sur $\mathbb{R}$. On peut donc l'intégrer par rapport à la mesure μ. On obtient ainsi une nouvelle fonction $y \to \mu(f_y) = \int_\mathbb{R} f(x, y)\, d\mu(x)$ qui est encore continue à support compact et que l'on peut intégrer par rapport à ν. La mesure produit $\mu \times \nu$ peut être ainsi définie par

$$(\mu \times \nu)(f) = \int_\mathbb{R} (\int_\mathbb{R} f(x, y) d\mu(x)) d\nu(y). \tag{5.6}$$

La construction précédente n'est pas a priori symétrique : on peut également intégrer d'abord en y, puis en x. On montre (exercice) que le résultat est le même. En d'autres termes, on a la forme élémentaire suivante du théorème de Fubini :

Lemme 5.5.1 *Pour toute fonction f dans $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^2)$, on a :*

$$\int_\mathbb{R} (\int_\mathbb{R} f(x, y) d\mu(x)) d\nu(y) = \int_\mathbb{R} (\int_\mathbb{R} f(x, y) d\nu(y)) d\mu(x).$$

On montrera en exercice que l'application $f \to (\mu \times \nu)(f)$ définit bien une mesure de Radon sur $\mathbb{R}^2$.

Il est clair que la construction se généralise au cas de deux mesures de Radon μ et ν définies respectivement sur $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$ et permet de définir la mesure produit $\mu \times \nu$ sur $\mathbb{R}^{p+q}$.

Plus généralement, étant donnés deux espaces localement compacts X et Y et deux mesures de Radon μ et ν, respectivement sur X et Y, on peut construire leur produit $\mu \times \nu$, qui est une mesure de Radon définie sur l'espace produit $X \times Y$.

On vérifiera en exercice le résultat suivant :

Lemme 5.5.2 *Si μ et ν sont deux mesures bornées, alors la mesure produit $\mu \times \nu$ est également bornée.*

• Convolution de mesures bornées sur $\mathbb{R}^d$

Considérons deux mesures de Radon sur $\mathbb{R}$ **bornées** μ et ν. Si f est une fonction continue à support compact sur $\mathbb{R}$, la fonction de deux variables $(x, y) \to f(x + y)$ est continue et bornée sur $\mathbb{R}^2$ (mais n'est plus à support compact si f n'est pas identiquement nulle). On peut donc l'intégrer par rapport à la mesure produit $\mu \times \nu$ construite au paragraphe précédent, puisque cette mesure est bornée si μ et ν le sont.

Définition 5.5.3 On appelle **convolée** de deux mesures de Radon bornées μ et ν la mesure de Radon définie par

$$f \to (\mu * \nu)(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x + y)\ d\mu(x)\ d\nu(y).$$

D'après la remarque précédant la définition, l'intégrale ci-dessus a un sens, et on vérifie facilement que la correspondance $f \to (\mu * \nu)(f)$ définit bien une mesure de Radon sur $\mathbb{R}$.

On voit que ceci revient à définir la mesure $\mu * \nu$ comme la mesure image de la mesure produit $\mu \times \nu$ sur $\mathbb{R}^2$ par l'application $(t, s) \to t + s$.

Si μ et ν sont des mesures bornées ayant des densités, ces densités sont des fonctions intégrables. Nous allons montrer que le produit de convolution de μ et ν a également une densité donnée par le produit de convolution de leur densité. La convolution des mesures de Radon, quand elle est possible, est donc l'extension de la notion de convolution définie sur les espaces de fonctions.

Proposition 5.5.4 *Si les mesures de Radon bornées μ et ν ont une densité, $\mu = \phi\ dx$, $\nu = \psi\ dx$, alors $\mu * \nu$ a une densité donnée par $\phi * \psi$.*

Preuve : Soit f une fonction arbitraire dans $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$. En posant $x = z - y$, et en appliquant le théorème de Fubini, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f(z)\ d(\mu * \nu)(z) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x + y)\ \phi(x)\ \psi(y)\ dxdy && (5.7)\\
&= \int_{\mathbb{R}} f(z)(\int_{\mathbb{R}} \phi(z - y)\ \psi(y)\ dy)\ dz && (5.8)\\
&= \int_{\mathbb{R}} f(z)\ (\phi * \psi)(z)\ dz. && (5.9)
\end{aligned}$$

□

La définition et les résultats précédents s'étendent immédiatement aux mesures de Radon sur $\mathbb{R}^d$.

On montre que l'espace vectoriel des mesures de Radon bornées, muni de la convolution, forme une algèbre commutative.

Dans le cas général de deux mesures de Radon (de même que pour deux fonctions localement intégrables), il n'est pas toujours possible de les convoler. Néanmoins, on vérifiera que cela est possible dans les cas particuliers suivants :

- si μ est à support compact et ν quelconque.

- si μ et ν sont toutes les deux à support dans la demi-droite $[0, \infty[$.

Vérifions la deuxième assertion. Considérons pour cela deux mesures μ et ν à support dans $\mathbb{R}^+$. La mesure $\mu * \nu$ peut être définie par :

$$f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}) \to \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(t+s)\ d\mu(t)\ d\nu(s).$$

En effet, si f est à support dans $[-L, L]$, alors la fonction $(t,s) \to f(t+s)$ est à support dans la bande parallèle à la deuxième bissectrice $\{(t,s), |t+s| \leq L\}$. Elle n'est pas à support compact et, sans hypothèse sur μ et ν, on ne peut pas l'intégrer, en général, par rapport à la mesure produit $\mu \times \nu$.

Mais ici, les supports de μ et de ν étant dans $\mathbb{R}^+$, le domaine d'intégration peut être restreint au quadrant positif $\{(t,s), t \geq 0, s \geq 0, \}$. L'intégrale précédente s'écrit :

$$\int_0^L (\int_0^{L-s} f(t+s)\ d\mu(t))\ d\nu(s).$$

On intègre donc en fait sur le triangle compact de sommets $(0,0), (L,0), (0,L)$ (Faire un dessin). Pour $t < 0$, l'intégrale est nulle. La mesure $\mu * \nu$ est bien définie et à support à son tour dans $\mathbb{R}^+$.

On a ainsi montré que les mesures de Radon à support dans $\mathbb{R}^+$ forment une algèbre de convolution. Ce résultat s'applique évidemment aux mesures ayant une densité nulle pour $t < 0$. Ainsi, considérons la fonction échelon $Y = 1_{[0,\infty[}$. Bien qu'elle ne soit pas intégrable, on peut la convoler par elle-même (voir *exercice*). On obtient, en faisant n-fois le produit de convolution de Y par elle-même :

$$Y * ... * Y(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} Y(t).$$

• **Dérivation de $\mu * \phi$**

Proposition 5.5.5 *Soit ϕ une fonction dérivable telle que ϕ' soit continue et bornée. Pour toute mesure bornée μ, la convolée $\mu * \phi$ est une fonction dérivable, et on a :*

$$(\mu * \phi)' = \mu * \phi'.$$

Preuve : Ecrivons $\mu * \phi$ sous la forme $(\mu * \phi)(t) = \mu(T_t \widetilde{\phi})$, où $\widetilde{\phi}(s) = \phi(-s)$ et $T_t \phi(s) = \phi(s-t)$. Quand h tend vers 0, $h^{-1}[T_{t+h}\widetilde{\phi} - T_t \widetilde{\phi}]$ converge vers $T_t \widetilde{\phi}'$, et le rapport des accroissements est majoré par $\|\phi'\|_\infty$. Comme μ est une mesure bornée, on a :

$$\lim_{h \to 0} \int h^{-1}[T_{t+h}\widetilde{\phi} - T_t \widetilde{\phi}]\ d\mu(t) = \int \phi'(t-s)\ d\mu(s) = (\mu * \phi')(t).$$

□

5.6 Transformée de Fourier d'une mesure bornée

Etant donnée une mesure de Radon bornée μ sur $\mathbb{R}$, pour tout réel u, on peut intégrer la fonction continue et bornée $e_u : t \to e^{2\pi iut}$ par rapport à μ.

Définition 5.6.1 On appelle **transformée de Fourier** de μ la fonction $\widehat{\mu}$ (notée aussi $\mathcal{F}\mu$) définie sur $\mathbb{R}$ par

$$u \to \widehat{\mu}(u) = \mu(e_u) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi itu}\ d\mu(t).$$

On vérifie immédiatement que si λ_ϕ est une mesure bornée ayant une densité f, alors $\widehat{\lambda_\phi}$ coïncide avec la transformée de Fourier de la densité. La notion de transformée de Fourier d'une mesure bornée est donc bien compatible avec la notion de transformée de Fourier d'une fonction intégrable. Comme pour la transformée de Fourier des fonctions intégrables, on a le résultat suivant :

Proposition 5.6.2 *La transformée de Fourier d'une mesure bornée est une fonction uniformément continue bornée, vérifiant* $\|\widehat{\mu}\|_\infty \leq \|\mu\|$.

Preuve : L'inégalité $\|\widehat{\mu}\|_\infty \leq \|\mu\|$ résulte du fait que les fonctions $e^{2\pi itu}$ sont de module 1.

On peut supposer μ positive. La continuité de $\widehat{\mu}$ résulte du théorème de convergence dominée de Lebesgue (exercice).

Donnons une autre méthode de démonstration.

Soit μ une mesure bornée positive. Soit $\epsilon > 0$. D'après la remarque (5.4.5), il existe un intervalle $[-L, L]$ tel que, pour toute fonction f continue bornée nulle sur $[-L, L]$, on ait $|\mu(f)| \leq \epsilon \|f\|_\infty$.

Soit ψ_L une fonction continue à support compact telle que $0 \leq \psi \leq 1$, avec $\psi_L(t) = 1$, pour t dans $[-L, L]$. Ecrivons $e_u = \psi_L e_u + (1 - \psi_L)e_u$. On a :

$$\widehat{\mu}(u) = \int_{\mathbb{R}} e_u(t)\ d\mu(t) = \int_{\mathbb{R}} \psi_L(t) e_u(t)\ d\mu(t) + \int_{\mathbb{R}} (1 - \psi_L(t)) e_u(t)\ d\mu(t).$$

D'où :

$$\begin{aligned} |\widehat{\mu}(u+h) - \widehat{\mu}(u)| &\leq \int_{\mathbb{R}} \psi_L(t) |e_{u+h}(t) - e_u(t)|\ d\mu(t) + 2\epsilon & (5.10) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \psi_L(t) |e^{-2\pi iht} - 1|\ d\mu(t) + 2\epsilon & (5.11) \\ &\leq 2\pi |h| \int_{\mathbb{R}} |t|\ \psi_L(t)\ d\mu(t) + 2\epsilon. & (5.12) \end{aligned}$$

Ceci montre la continuité uniforme de $\widehat{\mu}$.

□

On notera que la transformée de Fourier d'une mesure bornée peut ne pas tendre vers 0 à l'infini (exemple : $\widehat{\delta_0} = 1$), contrairement à la transformée de Fourier d'une fonction intégrable (lemme de Riemann-Lebesgue).

Comme dans le cas des fonctions, on peut également définir une transformée de Laplace pour les mesures. La transformée obtenue n'est définie a priori que sur une partie du plan complexe.

Définition 5.6.3 On appelle **transformée de Laplace** d'une mesure μ la fonction de la variable complexe z définie par

$$z \to \widetilde{\mu}(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{-zt}\ d\mu(t),$$

sur le domaine $D = \{z : \int_{\mathbb{R}} |e^{-zt}|\ d|\mu|(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-t\,\Re e(z)}\ d|\mu|(t) < \infty\}$.

Exemples 5.6.4

On note que le domaine de définition de $\widetilde{\mu}$ peut être vide (c'est le cas si on prend pour μ la mesure dt sur $\mathbb{R}$). Si la mesure μ est bornée, alors le domaine D contient l'axe imaginaire et on a, pour u réel, $\widetilde{\mu}(2\pi iu) = \widehat{\mu}(u)$: on retrouve, en restriction à l'axe réel, la transformée de Fourier.

Si μ est une mesure discrète, $\mu = \sum_k \alpha_k \delta_{a_k}$, la transformée de Laplace s'écrit comme une série :

$$\widetilde{\mu}(z) = \sum_k \alpha_k e^{-za_k}.$$

Si la mesure est portée par les entiers naturels, c'est-à-dire si μ est de la forme $\mu = \sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_k \delta_k$, la transformée de Laplace s'écrit comme une série entière :

$$\widetilde{\mu}(z) = \sum_0^\infty \alpha_k e^{-zk} = \sum_0^\infty \alpha_k u^k,$$

avec $u = e^{-z}$.

Si μ est une mesure à support compact, la transformée de Laplace de μ est une fonction analytique dans le plan complexe (exercice).

Si μ est une mesure à support contenu dans $\mathbb{R}^+$ et bornée, la transformée de Laplace est définie dans le demi-plan $\Re e(z) \leq 0$ et est une fonction analytique dans le demi-plan ouvert $\Re e(z) < 0$ (exercice).

• Injectivité de la transformée de Fourier

Montrons que la donnée de la transformée de Fourier d'une mesure μ bornée détermine μ. Ce résultat généralise la propriété d'injectivité de la transformation de Fourier pour l'espace $L^1(\mathbb{R})$.

Proposition 5.6.5 *Pour toute mesure bornée μ et toute fonction intégrable f, on a :*

$$\mu(\widehat{f}) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\ \widehat{\mu}(t)\ dt. \tag{5.13}$$

Si f et $\widehat{f}$ sont intégrables, on a :

$$\mu(f) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t)\ \widehat{\mu}(-t)\ dt. \tag{5.14}$$

Preuve : On obtient (5.13) en appliquant le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned} \mu(\widehat{f}) &= \int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-2\pi i u t} dt)\, d\mu(u)\, dt && (5.15) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(t) (\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i u t}\, d\mu(u))\, dt. && (5.16) \end{aligned}$$

La formule (5.14) résulte de (5.13) appliquée à $\widehat{f}$ et de la formule d'inversion qui permet, si $\widehat{f}$ est intégrable, d'écrire f comme la transformée de Fourier inverse de $\widehat{f}$.

□

Théorème 5.6.6 *L'application $\mu \to \widehat{\mu}$ est de $\mathcal{MB}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{CB}(\mathbb{R})$ injective : si μ et ν sont deux mesures bornées telles que $\widehat{\mu} = \widehat{\nu}$, alors $\mu = \nu$.*

Preuve : D'après (5.14), on a $\mu(f) = \nu(f)$, pour toute f telle que f et $\widehat{f}$ soit intégrable, donc en particulier pour f dans l'espace $\mathcal{S}$. Cette égalité subsiste pour toute f dans $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, car toute fonction continue à support compact est limite uniforme de fonctions de $\mathcal{S}$ (et même de fonctions C^∞ à support compact).

□

• Convolution et transformées de Fourier et de Laplace

On montrera en exercice que la transformée de Fourier du produit de convolution de deux mesures bornées est le produit de leur transformée de Fourier.

De même, on montrera en exercice que la transformée de Laplace du produit de convolution de deux mesures à support compact est le produit de leur transformée de Laplace.

5.7 Mesure spectrale d'un signal

Grâce à la notion de mesure de Radon, on peut englober dans un même formalisme l'analyse de Fourier des fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$ et celle des mesures bornées discrètes. Dans les deux cas, il s'agit de la transformée de Fourier de mesures bornées.

La terminologie introduite dans ce paragraphe (mesure spectrale, largeur de bande,...) est celle de la théorie du signal.

Considérons la classe des fonctions (des signaux) qui peuvent être représentés comme transformée de Fourier d'une mesure bornée sur l'espace des fréquences : ce sont les signaux f qui peuvent s'écrire sous la forme

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i t u} d\mu(u), \ t \in \mathbb{R}, \tag{5.17}$$

où μ est une mesure bornée.

Cette formule (5.17) est la représentation d'un signal comme une somme (au sens "intégrale de") de phénomènes périodiques. Elle s'applique à une classe assez générale de signaux (contenant par exemple les fonctions intégrables dont la transformée de Fourier est une fonction intégrable, mais aussi les fonctions périodiques dont la série de Fourier vérifie $\sum_n |c_n(f)| < +\infty$). On rapprochera cette représentation de celle que l'on rencontre en physique avec la répartition de masse d'un objet comportant des parties homogènes et des parties granulaires (analogues aux masses de Dirac).

Remarque 5.7.1 Cette représentation n'est pas toujours possible. En effet si μ est bornée, sa transformée de Fourier est nécessairement continue. Dans le même ordre de résultat, on montre que si μ possède un *moment d'ordre 1*, i.e. $\int_{\mathbb{R}} |t| d\mu(t) < \infty$, alors $\widehat{\mu}$ est dérivable. (voir exercices)

Définition 5.7.2 On dit qu'un signal $f : t \to f(t), t \in \mathbb{R}$ possède une **mesure spectrale** μ, si f peut être représenté sous la forme (5.17), où μ est une mesure de Radon bornée sur l'espace des fréquences.

Nous avons vu que la donnée de la transformée de Fourier $\widehat{\mu}$ d'une mesure μ bornée détermine μ. La mesure spectrale d'un signal f est donc définie de façon unique par la formule (5.17), puisque f donnée par (5.17) est la transformée de Fourier (inverse) de sa mesure spectrale.

• **Signaux à spectre discret**

Les signaux périodiques sont associés à une mesure discrète. Si le signal (la fonction) f est de période $\tau > 0$, sa mesure spectrale est portée par le réseau $\{n\tau^{-1}, n \in \mathbb{Z}\}$.

Supposons f intégrable sur $[-\frac{1}{2}\tau, \frac{1}{2}\tau]$. On peut associer à f sa série de Fourier (τ-périodique) :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{2\pi i n \frac{t}{\tau}}, \tag{5.18}$$

avec

$$c_n(f) = \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{1}{2}\tau}^{\frac{1}{2}\tau} f(t) e^{-2\pi i n \frac{t}{\tau}}\, dt.$$

Cette série représente f, en un sens plus ou moins fort, suivant les hypothèses faites sur f (convergence ponctuelle, convergence en moyenne, convergence en norme $\| \ \|_2$...).

La mesure spectrale de f est la mesure discrète μ de masse c_n aux points $n\tau^{-1}, n \in \mathbb{Z}$, $\mu = \sum_n c_n \delta_{n\tau^{-1}}$. Ici la représentation du signal dans la formule (5.17) est associée à une mesure discrète.

Les fonctions $t \to e^{2\pi i n \frac{t}{\tau}}$ sont des signaux périodiques "élémentaires" de fréquence τ^{-1} et de période τ, en lesquels on peut dans ce cas décomposer f.

Remarques 5.7.3

1) Si $\sum_n |c_n(f)| < \infty$, alors f est continue et peut être représentée par la série (5.18) avec convergence en tout point et même en norme uniforme.

2) Si f est de carré intégrable sur un intervalle de période, alors on a $\sum_n |c_n|^2 < \infty$. La représentation de f donnée par (5.18) est le développement de f dans la base orthonormée de $L^2[-\frac{1}{2}\tau, \frac{1}{2}\tau]$ formée des fonctions $\{e_n, n \in \mathbb{Z}\}$, avec $e_n(t) = \tau^{-\frac{1}{2}} e^{2\pi i n \frac{t}{\tau}}$. On a l'égalité de Parseval :

$$\sum_n |c_n|^2 = \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{1}{2}\tau}^{\frac{1}{2}\tau} |f(t)|^2\, dt.$$

3) Si les coefficients $c_n(f)$ vérifient des conditions de moments finis, alors le signal f est régulier : par exemple, la condition $\sum_n |n||c_n| < \infty$ implique que f est de classe C^1.

4) Un signal peut avoir une mesure spectrale discrète sans être périodique : par exemple $f(t) = \cos(2\pi t) + \cos(2\pi\sqrt{2}\, t)$ est non périodique (le montrer en exercice) et a pour mesure spectrale la mesure discrète $\frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_1) + \frac{1}{2}(\delta_{-\sqrt{2}} + \delta_{\sqrt{2}})$.

• Mesure spectrale des signaux à valeurs réelles

Soit f un signal à valeurs réelles, de mesure spectrale (bornée) μ_f :

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi itu} d\mu_f(u).$$

Ecrivons μ_f sous la forme

$$\mu_f = \mu_f^1 + i\mu_f^2,$$

avec μ_f^1 et μ_f^2 mesures réelles.

Dans le cas d'un signal intégrable à valeurs réelles, on voit facilement que la partie réelle de sa transformée de Fourier est paire et la partie imaginaire est impaire. En utilisant le fait que la transformée de Fourier détermine la mesure, on obtient de façon générale la caractérisation suivante des signaux à valeurs réelles en terme de mesure spectrale :

Proposition 5.7.4 *La partie réelle de la mesure spectrale d'un signal à valeurs réelles est paire et sa partie imaginaire est impaire :*

$$d\mu_f^1(-u) = d\mu_f^1(u), \quad d\mu_f^2(-u) = -d\mu_f^2(u).$$

On peut donc écrire un signal réel sous la forme

$$f(t) = 2\int_0^\infty \cos(2\pi ut)\ d\mu_f^1(u) + 2\int_0^\infty \sin(2\pi ut)\ d\mu_f^2(u).$$

Définition 5.7.5 Un signal f de mesure spectrale μ est dit à **spectre limité** ou à **largeur de bande finie**, si sa transformée de Fourier est à support compact.

Ces signaux sont importants car on peut les échantillonner sans perte d'information. Nous verrons également qu'on peut les prolonger en une fonction analytique dans tout le plan complexe. Nous reviendrons sur ce point au chapitre traitant de la discrétisation (théorème de Shannon). Notons que certains filtres naturels (par exemple l'oreille !), en éliminant les fréquences élevées, fournissent des signaux à largeur de bande finie.

5.8 Compléments : Fonction de répartition, Intégrale de Stieltjes

• Fonction de répartition d'une mesure de Radon positive

(C.1) La classe des fonctions que l'on peut intégrer à l'aide d'une mesure de Radon μ est a priori celle des fonctions continues à support compact. Il est souhaitable de pouvoir également intégrer des fonctions très simples, mais non continues telles que les fonctions en escalier, en particulier les fonctions indicatrices d'intervalle.

Dans la suite, nous travaillerons avec une mesure de Radon μ **positive**.

Considérons un intervalle $[a, b]$ et sa fonction indicatrice $1_{[a,b]}$. Il existe une suite $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues qui converge (ponctuellement) en décroissant vers $1_{[a,b]}$ (prendre des fonctions en trapèze). La suite $(\mu(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et positive. Elle est donc convergente. On montre que sa limite est indépendante du choix de la suite (f_n). On peut alors poser $\mu(1_{[a,b]}) = \lim_n \mu(f_n)$.

On peut également noter $\int_a^b d\mu(f) = \mu(1_{[a,b]})$. Il est facile de vérifier que $b' \geq b$ implique $\int_a^{b'} d\mu \geq \int_a^b d\mu$.

Fixons la borne inférieure a et faisons varier la borne supérieure b.

Définition 5.8.1 On appelle **fonction de répartition** de μ (pour un choix de la borne inférieure a) la fonction F_a définie par $F_a(x) = \mu(1_{]a,x]}) = \int_a^x d\mu(y)$, si $x \geq a$, et $= -\int_x^a d\mu(y)$, si $x < a$.

• Propriétés de la fonction de répartition

Proposition 5.8.2 *La fonction de répartition F_a est croissante et continue à droite. Deux fonctions de répartition diffèrent par une constante : $F_a - F_b = \int_a^b d\mu$, si $a \leq b$.*

Preuve : Exercice.

□

5.8.3 Si μ est bornée positive, on montre que la masse de μ est donnée par

$$\mu(1) = \lim_{a \to -\infty, b \to +\infty} \int_a^b d\mu(x).$$

Il est alors commode de prendre pour point a le point $-\infty$, c'est-à-dire de choisir la fonction de répartition F définie par $F(x) = \lim_{a \to -\infty} F_a(x) = \int_{-\infty}^x \, d\mu(y)$.

Ayant défini l'intégrale $\mu(1_{[a,b]})$, on peut étendre par linéarité cette intégrale aux fonctions en escalier, puis par passage à la limite aux fonctions réglées à support compact. Par restriction à l'espace des fonctions continues à support compact, on retrouve ainsi la forme linéaire de départ μ sur l'espace $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$. Nous allons faire cette construction plus en détail, dans le cadre de l'intégrale de Riemann-Stieltjes associée à une fonction croissante sur $\mathbb{R}$. Cette construction fera apparaître en particulier qu'une mesure de Radon positive sur $\mathbb{R}$ est entièrement déterminée par sa fonction de répartition et qu'inversement, à toute fonction croissante ϕ continue à droite, est associée une mesure de Radon dont ϕ est une fonction de répartition.

Exemples 5.8.4

1) Si μ a une densité continue ϕ, alors F_a est une primitive de ϕ. Autrement dit F_a est dérivable, de dérivée ϕ.

2) Si μ est une mesure discrète, de la forme $\mu = \sum_i c_i \delta_{a_i}$, alors F_a peut être explicitée, pour $x > a$, sous la forme $F_a(x) = \sum_{i: a \leq a_i \leq x} c_i$.

• Intégrale de Riemann-Stieltjes par rapport à une fonction croissante

Soit ϕ une fonction croissante sur $\mathbb{R}$ et continue à droite. Nous savons construire l'intégrale de Riemann $\int_{\mathbb{R}} f(t) \, dt$ pour les fonctions f continues ou plus généralement réglées à support compact. Nous allons de façon analogue construire l'intégrale associée à la fonction ϕ. Il s'agit de définir l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} f(t) \, d\phi(t)$, pour toute fonction f continue (ou plus généralement réglée) à support compact. Cette construction coïncide avec celle de l'*intégrale de Riemann* quand ϕ est la fonction $t \to t$ et procède du même principe.

Considérons un intervalle compact $[a, b]$. Soit d'abord $f = \sum_i \alpha_i 1_{]a_i, b_i]}$ une fonction de l'espace $\mathcal{E}sc([a, b])$ des fonctions en escalier sur $[a, b]$. Posons

$$\int_a^b f(t)\ d\phi(t) = \sum_i \alpha_i [\phi(b_i) - \phi(a_i)].$$

On montre que la valeur de l'intégrale définie par la relation précédente ne dépend pas de la représentation particulière de f et, comme dans le cas de l'*intégrale de Riemann*, on vérifie que la correspondance $f \to \int_a^b f(t)\ d\phi(t)$ définit une forme linéaire positive sur $\mathcal{E}sc([a, b])$.

Vérifions, par exemple, la positivité. Soit f une fonction en escalier positive ou nulle. On peut écrire f sous la forme $f = \sum_i \alpha_i 1_{]a_i, b_i]}$, avec des coefficients $\alpha_i \geq 0$. Comme ϕ est croissante, la quantité $\sum_i \alpha_i [\phi(b_i) - \phi(a_i)]$ est positive ou nulle.

On a également une majoration, comme pour l'intégrale de Riemann habituelle

$$|\int_a^b f(t)\ d\phi(t)| \leq \int_a^b |f(t)|\ d\phi(t) \leq \|f\|_\infty (\phi(b) - \phi(a)).$$

On peut alors étendre cette intégrale à l'espace des fonctions réglées sur $[a, b]$, qui est la fermeture uniforme de l'espace des fonctions en escalier sur $[a, b]$. En effet, si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions dans $\mathcal{E}sc([a, b])$ convergeant uniformément vers une fonction f réglée sur $[a, b]$, la suite des intégrales est une suite de Cauchy, donc convergente, d'après la majoration :

$$|\int_a^b (f_n - f_m)\ d\phi| \leq \int_a^b |f_n - f_m|\ d\phi \leq \|f_n - f_m\|_\infty (\phi(b) - \phi(a)).$$

On peut ainsi définir $\int_a^b f(t)\ d\phi(t)$ comme la limite : $\lim_n \int_a^b f_n(t)\ d\phi(t)$.

Si (g_n) est une autre suite de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f, on a alors

$$\int_a^b |f_n - g_n|\ d\phi \leq \|f_n - g_n\|_\infty (\phi(b) - \phi(a)),$$

et les suites des intégrales $\int_a^b f_n(t)\ d\phi(t)$ et $\int_a^b g_n(t)\ d\phi(t)$ ont la même limite. Ceci justifie la définition donnée plus haut de l'intégrale $\int_a^b f(t)\ d\phi(t)$.

Il en résulte facilement que la correspondance $f \to \int_a^b f(t)\ d\phi(t)$ reste linéaire positive sur l'espace des fonctions réglées sur $[a, b]$, comme elle l'est sur l'espace des fonctions en escalier sur $[a, b]$.

Considérons maintenant une fonction f réglée sur $\mathbb{R}$. On peut, par le procédé précédent, définir l'intégrale $\int_a^b f(t)\ d\phi(t)$, pour tout intervalle compact $[a, b]$. En particulier si f est une fonction continue à support compact contenu dans un intervalle compact $[a, b]$, l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} f(t)\ d\phi(t)$ est définie comme $\int_a^b f(t)\ d\phi(t)$.

Les propriétés de l'intégrale restreinte à l'espace $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ sont résumées dans l'énoncé suivant :

Proposition 5.8.5 *Pour toute fonction ϕ croissante sur $\mathbb{R}$, l'application $f \to \int_{\mathbb{R}} f(t)\ d\phi(t)$ définit sur $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ une forme linéaire positive sur cet espace (mesure de Radon positive), dont ϕ est la fonction de répartition.*

Exemples 5.8.6

1) L'exemple le plus simple est celui où $\phi(t) = t$. On retrouve alors l'intégrale de Riemann $\int_{\mathbb{R}} f(t)\ dt$ habituelle.

2) Plus généralement, soit ϕ une primitive d'une fonction continue positive ψ : $\phi(t) - \phi(a) = \int_a^t \psi(s) ds$.

On a dans ce cas : $\int_{\mathbb{R}} f(t)\ d\phi(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\psi(t)\ dt$.

En effet cette relation est vérifiée quand f est la fonction indicatrice d'un intervalle (dans ce cas, c'est la propriété de primitive). Elle reste vraie, par combinaisons linéaires, pour les fonctions en escalier, puis, par passage à la limite, pour les fonctions réglées.

On peut noter, symboliquement : $\psi\, dt = d\phi$.

3) Considérons maintenant le cas où ϕ est une fonction en escalier, ayant des sauts de hauteur c_i aux points a_i en nombre fini : $\phi = \sum_i \alpha_i 1_{]a_i,a_{i+1}]}$, avec $c_i = \alpha_i - \alpha_{i-1}$.

En raisonnant comme dans l'exemple précédent d'abord sur les fonctions en escalier, puis par passage à la limite sur les fonctions réglées, on montre que $\int_{\mathbb{R}} f\ d\phi = \sum_i c_i f(a_i) = \sum c_i \delta_{a_i}(f)$. Autrement dit, dans le cas où ϕ est en escalier, la valeur de l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} f\ d\phi$ est donnée par l'application à f de la mesure de Radon discrète $\mu = \sum c_i \delta_{a_i}$.

Nous avons donné deux exemples de mesures de Radon sur $\mathbb{R}$ qui s'écrivent comme des intégrales de Stieltjes. Nous allons montrer que cette situation est générale.

Théorème 5.8.7 *Pour toute mesure de Radon positive μ sur $\mathbb{R}$, il existe une fonction croissante ϕ sur $\mathbb{R}$ telle que $\mu(f) = \int f\ d\phi, \forall f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$.*

Preuve : Montrons que la fonction ϕ égale à la fonction de répartition F_a de μ (calculée à partir d'une borne inférieure a) satisfait à la condition du théorème.

Cette fonction est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$. Nous pouvons construire l'intégrale de Riemann-Stieltjes par rapport à F_a. Nous obtenons ainsi une mesure de Radon $\widetilde{\mu}$ définie par $\widetilde{\mu}(f) = \int f dF_a$. Les mesures μ et $\widetilde{\mu}$ peuvent être prolongées à l'espace des fonctions réglées à support compact.

Toute fonction réglée à support compact étant limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier, pour montrer que μ et $\widetilde{\mu}$ coïncident, il suffit d'observer qu'elles coïncident sur le sous-espace des fonctions en escalier : $\widetilde{\mu}(1_{]a,b]}) = F(b) - F(a) = \mu(1_{]a,b]})$.

□

Remarques 5.8.8

a) Les mesures positives bornées sont les mesures dont la fonction de répartition est bornée.

b) Les résultats développés dans le cadre des fonctions croissantes (correspondant à une mesure positive) s'étendent aux fonctions qui s'écrivent comme différence de deux fonctions croissantes (on sait que toute mesure de Radon est la différence de deux mesures de Radon positives). Ces fonctions sont les fonctions à variation bornée.

• **Fonctions à variation bornée**

Définition 5.8.9 Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle $[a,b]$. Pour toute subdivision $\sigma = (t_0 = a \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n = b)$ de l'intervalle $[a,b]$, on définit la variation $V_f(\sigma)$ de f associée à σ par

$$V_f(\sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)|.$$

On définit la variation de f sur $[a,b]$ par $V_f(a,b) = \sup_\sigma V_f(\sigma)$, où σ décrit les subdivisions de $[a,b]$. On dit que f est à **variation bornée** sur $[a,b]$ si $V_f(a,b) < \infty$.

Caractérisation des fonctions à variation bornée (Exercice)

1) Soit f à variation bornée sur $[a,b]$.

Montrer que, pour tout $x \in]a,b[$, f est à variation bornée sur $[a,x]$ et sur $[x,b]$.

Montrer la relation

$$V_f(a,x) + V_f(x,b) = V_f(a,b).$$

2) (Caractérisation des fonctions à variation bornée)

Montrer que les fonctions $x \to V_f(a,x)$ et $x \to V_f(a,x) - f(x)$ sont croissantes (au sens large).

En déduire qu'une fonction est à variation bornée sur un intervalle si, et seulement si, elle est la différence, sur cet intervalle, de deux fonctions croissantes.

3) On considère la fonction ϕ définie sur $[0,1]$ par

$$\phi(0) = 0, \text{ et } \phi(x) = x\sin(1/x), \text{ pour } x \neq 0.$$

a) Cette fonction est-elle à variation bornée sur $[0,1]$?

b) Montrer que $\phi_2 = \phi^2$ est à variation bornée sur $[0,1]$, et exprimer ϕ_2, à l'aide d'intégrales (dont on montrera la convergence), comme différence de deux fonctions croissantes.

d) Soient f une fonction à variation bornée et ϕ une fonction intégrable.

Etablir l'inégalité : $V_{\phi * f} \leq (\int |\phi|\, dx) V_f$.

5.9 Exercices

Exercice 5.9.1

a) Soit μ une forme linéaire sur $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$. On note $(f_n) \overset{\mathcal{C}_c(\mathbb{R})}{\to} f$ la condition, pour une suite (f_n) de fonctions continues à support compact, de converger uniformément vers une fonction f, en restant à support dans un compact fixe. Montrer l'équivalence entre les propriétés de continuité suivantes :

$$((f_n) \overset{\mathcal{C}_c(\mathbb{R})}{\to} f) \Rightarrow (\lim_n \mu(f_n) = \mu(f)) \tag{1}$$

$$\forall K \text{ compact}, \exists M_K \text{ tq } |\mu(f)| \leq M_K \|f\|_\infty, \forall f \text{ à support dans } K. \tag{2}$$

b) Si μ est une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$, montrer qu'elle vérifie les propriétés de continuité du a).

Exercice 5.9.2

Extension de la formule de dérivation de la transformée de Fourier d'une fonction intégrable aux mesures bornées μ ayant un "moment d'ordre 1".

(On supposera μ positive. Sinon, on s'y ramène en considérant la décomposition $\mu = \mu^+ - \mu^-$ de μ en deux mesures positives. La mesure $f \to \int t\, f(t)\, d\mu(t)$ est noté $M\mu$.)

Soit μ positive, bornée et telle que $\int |t| d\mu(t) < \infty$, montrer que sa transformée de Fourier $\mathcal{F}\mu$ vérifie :

$$\frac{d}{du}\mathcal{F}\mu(u) = -2\pi i \mathcal{F}(M\mu)(u). \qquad (*)$$

Exercice 5.9.3 *Mesures de Radon discrètes*

Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels. Pour $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, on pose $\mu(f) = \sum_n \alpha_n f(y_n)$.

1) Donner une condition portant sur les suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui assure la convergence, pour tout f dans $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, de la série précédente.

2) Montrer que, sous cette condition, μ est une mesure de Radon.

3) Dans quel cas cette mesure est-elle bornée ?

Exercice 5.9.4

On note $\mathcal{M}_d$ l'ensemble des mesures de Radon bornées discrètes sur $\mathbb{R}$, i.e. des mesures de la forme $\mu = \sum \alpha_i \delta_{a_i}$ (où la somme porte sur un ensemble au plus dénombrable d'indices et où l'on suppose que $a_i \neq a_j$, pour $i \neq j$). On désigne par $M(\mu)$ la quantité $\sum_i |\alpha_i| < \infty$.

Soient $\mu = \sum \alpha_i \delta_{a_i}$ une mesure discrète.

1) Montrer que, si μ possède une autre représentation : $\nu = \sum \beta_j \delta_{b_j}$, alors les ensembles $\{a_i,\ \text{pour}\ \alpha_i \neq 0\}$ et $\{b_i,\ \text{pour}\ \beta_i \neq 0\}$ coïncident et les masses correspondantes sont égales.

2) Montrer que l'addition donne à $\mathcal{M}_d$ une structure d'espace vectoriel.

3) Montrer que la mesure $\mu = \sum \alpha_i \delta_{a_i}$, est positive si, et seulement si, les masses α_i sont positives.

Exercice 5.9.5

Soit λ_ϕ une mesure de Radon ayant une densité ϕ. On suppose ϕ continue.

1) Montrer que la correspondance $\phi \to \lambda_\phi$ est linéaire et injective de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ dans l'espace des mesures de Radon.

2) Caractériser les fonctions ϕ dans $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ telles que λ_ϕ soit bornée.

Exercice 5.9.6 *Support d'une mesure*

On rappelle qu'une mesure de Radon a son support contenu dans un fermé F si, pour toute fonction f continue à support compact disjoint de F, on a $\mu(f) = 0$.

a) Montrer qu'une mesure λ_ϕ (ayant une densité ϕ supposée continue) a son support contenu dans $[-A, A]$ si, et seulement si, $\phi(x) = 0$ pour $|x| > A$.

b) Enoncer et prouver un résultat analogue pour une mesure discrète.

Exercice 5.9.7 *Convolution de mesures discrètes*

On note $\mathcal{M}_d$ l'ensemble des mesures de Radon bornées discrètes sur $\mathbb{R}$. On reprend les notations de l'exercice 4.

Soient $\mu = \sum \alpha_i \delta_{a_i}$ et $\nu = \sum \beta_j \delta_{b_j}$ deux mesures dans $\mathcal{M}_d$.

1) On définit la convolée, notée $\mu * \nu$, de μ et de ν par :

$$(\mu * \nu)(f) = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j f(a_i + b_j), f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}).$$

a) Montrer que $\mu * \nu$ ainsi définie est bien une mesure de Radon.

b) Montrer que la convolution définit sur l'espace $\mathcal{M}_d$ une structure d'algèbre commutative.

c) Montrer la relation $M(\mu * \nu) \leq M(\mu)M(\nu)$, avec égalité si μ et ν sont positives.

d) Montrer que l'on définit une norme sur $\mathcal{M}_d$ en posant $\|\mu\| = M(\mu)$ et que $\mathcal{M}_d$ devient ainsi une algèbre normée.

2) On note $B(p, n)$ la mesure de Radon associée à la loi binomiale de paramètres (p, n), $0 \leq p \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$, i.e. la mesure de Radon définie par

$$B(p, n) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \delta_k.$$

Montrer que $B(p, n) * B(p, l) = B(p, n + l)$. (On pourra utiliser la relation :

$$(1 + z)^(1 + z)^\ell = (1 + z)^{n+\ell} = \sum_{r=0}^{n+\ell} (\sum_{k+j=r} C_n^k C_\ell^j) z^r.$$

3) On note P_λ la mesure associée à la *loi de Poisson* de paramètre $\lambda > 0$, i.e. la mesure définie par

$$P_\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \delta_k.$$

Montrer que $P_\lambda * P_{\lambda'} = P_{\lambda+\lambda'}$.

Exercice 5.9.8 *Convolution de mesures de Radon*

a) Soient λ_ϕ et λ_ψ deux mesures de Radon sur $\mathbb{R}$ ayant une densité, de densité respectivement ϕ et ψ. On suppose ϕ et ψ intégrables sur $\mathbb{R}$.

Montrer que $\lambda_\phi * \lambda_\psi$ est une mesure de Radon de densité $\phi * \psi$.

b) On convole une mesure de Radon avec densité λ_ϕ avec une autre mesure de Radon μ. La mesure $\lambda_\phi * \mu$ a-t-elle une densité ?

Exercice 5.9.9 *Résolution d'une équation par convolution*

Soit f une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$. On cherche à construire une fonction $F(x, y)$ vérifiant les conditions suivantes :

(1) F est définie est continue sur le demi-plan fermé $\overline{D} = \{(x, y) : y \geq 0\}$,
(2) la restriction de F à l'axe réel coïncide avec f : $F(x, 0) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$,
(3) F est dérivable en y sur le demi-plan ouvert $D = \{(x, y) : y > 0\}$,
(4) $F'_y(x, y) = F(x + 1, y) - F(x, y), \forall (x, y) \in D$.

1) On note P_y la mesure de Poisson sur $\mathbb{R}$ de paramètre $y > 0$ (voir exercice 7) :

$$P_y = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-y} \frac{y^k}{k!} \delta_k$$

où δ_k est la mesure de Dirac au point k.

Expliciter la valeur de $(P_y * \delta_x)(f)$, pour $x \in \mathbb{R}$.

2) Montrer que F définie par $F(x, y) = (P_y * \delta_x)(f)$ vérifie les conditions (1) à (4).

Exercice 5.9.10 *Suites définies positives*

Soit $c = (c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite complexe telle que

$$\langle c * y, y \rangle = \sum_{k,\ell} c_{k-\ell} y_k \overline{y_\ell} \geq 0,$$

pour toute suite y à support fini.

Une telle suite sera dite **définie positive**. Nous allons montrer que cette propriété est équivalente à l'existence d'une mesure positive μ sur le cercle telle que :

$$c_n = \int_0^1 e^{2\pi int}\, d\mu(t),\ \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

1) Montrer que si μ est une mesure positive sur le cercle, la suite $c = (c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ définie par (1) est définie positive.

2) Soit $c = (c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite complexe définie positive.

a) Montrer les relations

$$c_k = \overline{c_{-k}},\ |c_k| \leq c_0,\ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

b) Montrer l'existence de μ vérifiant (1), sous l'hypothèse $\sum_n |c_n| < \infty$ (dans ce cas μ possède une densité).

3) a) On pose, pour $0 \leq r < 1$, $P_r(\theta) = \sum_k r^{|k|} e^{2\pi i k\theta}$. Montrer que

$$P_r(\theta) = \frac{1 - r^2}{|1 - re^{2\pi i\theta}|} > 0.$$

b) Montrer que si $c = (c_k)$ est une suite définie positive, la fonction $f_r(\theta) = \sum_k c_k r^{|k|} e^{2\pi i k\theta}$ est réelle ≥ 0.

c) Montrer l'existence d'une mesure μ vérifiant (1) par extraction d'une sous-suite convergente (au sens de la topologie faible) de la famille de mesures positives $(f_r(\theta)\ d\theta)_{0<r<1}$, pour r tendant vers 1 par valeurs inférieures.

Exercice 5.9.11 *valeur moyenne*

Une fonction f sur $\mathbb{R}$ est dite de *valeur moyenne finie*, si les limites

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f^+(t)\ dt, \quad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f^-(t)\ dt,$$

existent et sont finies, f^+ et f^- désignant respectivement les parties positives et négatives de la fonction f. La valeur moyenne de la fonction est alors définie par

$$m(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t)\ dt.$$

1) Calculer la valeur moyenne d'une fonction de la forme

$$t \to \sum_k a_k \cos^2(\alpha_k t),$$

où les a_k et α_k sont des constantes.

2) Montrer que la valeur moyenne d'une fonction f de période τ est donnée par

$$m(f) = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} f(t)\ dt.$$

3) Calculer la valeur moyenne d'une fonction somme de fonctions périodiques.

4) On opère sur l'espace des fonctions par les transformations (translations-dilatations) de la forme suivante. Etant donnés τ et a réels, $a > 0$, on pose :

$$T_{a,\tau} : f \to T_{a,\tau} f,\ \text{avec}\ (T_{a,\tau} f)(t) = f(\frac{t-\tau}{a}), t \in \mathbb{R}.$$

Montrer que la classe des fonctions de valeur moyenne finie est invariante sous l'action des translations-dilatations et que la moyenne est invariante sous ces transformations.

Exercice 5.9.12 *Valeur moyenne*

Soit f une fonction, transformée de Fourier d'une mesure bornée μ.

Montrer l'existence de la valeur moyenne $M(f)$ de f définie comme dans l'exercice précédent et établir une relation entre μ et la valeur moyenne de f.

[[*Indications* : On a

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)dt = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}(\int_{\mathbb{R}} e^{2\pi itu}d\mu(u))dt \tag{5.19}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin 2\pi Tu}{2\pi Tu}d\mu(u). \tag{5.20}$$

Les fonctions $u \to \dfrac{\sin 2\pi Tu}{2\pi Tu}$ sont majorées en valeur absolue par 1 et tendent vers $1_{\{u=0\}}$, quand T tend vers ∞. En appliquant le théorème de Lebesgue, on obtient :

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)dt = \mu(\{0\}).$$

Exemple : si f est associée à une mesure spectrale discrète et bornée, par exemple si f est périodique, avec une série de coefficients de Fourier absolument convergente, les coefficients c_n sont donnés par des valeurs moyennes. Le coefficient c_0 est la valeur moyenne de f. Le coefficient c_n correspondant à la période u_n est donné par la valeur moyenne de $t \to f(t)\ e^{-2\pi iu_nt}$. Si $f(t) = \sum_n c_n e^{2\pi iu_nt}$, avec $\sum_n |c_n| < \infty$ et $u_n \neq u_m$, pour $n \neq m$, alors

$$c_n = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)e^{-2\pi iu_nt}dt.]]$$

Exercice 5.9.13 *Calcul de transformées de Laplace*

On note Y la fonction indicatrice de $[0, +\infty[$ (fonction-échelon). Calculer (en précisant son domaine de définition) la transformée de Laplace des fonctions suivantes :
$f : t \to t^n$,
$f : t \to Y(t)t^n$,
$f : t \to e^{\alpha t}$,
$f : t \to Y(t)e^{\alpha t}$,
$f : t \to \displaystyle\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}\cos 2\pi nu_0t$.

Chapitre 6

Distributions

6.1 Notion de distribution, distribution tempérée

Nous avons défini l'espace $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ des mesures de Radon sur $\mathbb{R}$ comme espace dual de l'espace des fonctions continues à support compact. Pour définir des objets plus généraux que les mesures, nous devons choisir un espace de fonctions-tests plus régulières.

Nous considérons maintenant, comme espace de fonctions-tests, l'espace $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ des fonctions indéfiniment dérivables à support compact sur $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ ou simplement $\mathcal{D}$ cet espace.

On dit qu'une suite (f_n) de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ converge vers une fonction f au sens de la topologie de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, si les fonctions f_n restent à support dans un compact fixe et si $f^{(k)}$ est limite uniforme de la suite $(f_n^{(k)})_{n\geq 1}$, pour tout entier $k \geq 0$.

Ce mode de convergence implique donc la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ ainsi que des suites formées par les dérivées de f_n, mais il s'y ajoute une condition de support.

Définition 6.1.1 On appelle **distribution** toute forme linéaire sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui est continue pour la topologie de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. On note $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'espace des distributions. Une distribution μ est donc une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que

$$(f_n \stackrel{\mathcal{D}(\mathbb{R})}{\rightarrow} f) \ \Rightarrow (\mu(f_n) \rightarrow \mu(f)).$$

Exemples 6.1.2

1) Les mesures de Radon définissent des distributions :

Soit μ une mesure de Radon sur $\mathbb{R}$. Si (f_n) est une suite dans $\mathcal{D}$ qui converge vers une fonction f au sens de la topologie de $\mathcal{D}$, alors la suite (f_n) converge vers f uniformément en restant à support dans un compact fixe. On a donc d'après la continuité de μ en tant que forme linéaire sur l'espace $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, la convergence de la suite $(\mu(f_n))_{n\geq 1}$ vers $\mu(f)$.

La restriction de μ à $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ définit par conséquent une distribution. Ainsi les mesures de Radon, en particulier les mesures de Radon avec densité ou discrètes, sont des distributions particulières.

Nous avions plongé l'espace des fonctions localement intégrables dans l'espace des mesures de Radon, en identifiant une fonction ϕ localement intégrable à la mesure de Radon λ_ϕ dont ϕ est la densité. En considérant les mesures de Radon comme des distributions, on obtient un plongement de l'espace $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ des mesures de Radon dans l'espace $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ des distributions.

On peut donc considérer l'espace $\mathcal{D}$'($\mathbb{R}$) des distributions comme un "gros espace" contenant les mesures de Radon et en particulier les fonctions localement intégrables.

L'injectivité du plongement de l'espace $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ dans l'espace $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est justifiée par la propriété suivante : si μ est une mesure de Radon telle que $\mu(f) = 0$ pour toute fonction f dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors $\mu(f) = 0$ pour toute fonction f continue à support compact et donc μ est la mesure nulle.

On vérifie cette proposition, en utilisant le fait que toute fonction continue à support compact est limite uniforme d'une suite de fonctions C^∞ à support compact (avec support contenu dans un compact fixe). (Montrer ce résultat en exercice par une méthode d'identité approchée.)

L'exemple simple suivant montre que $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ contient d'autres éléments que les mesures de Radon.

2) La forme linéaire $f \to \mu(f) = f'(0)$ est une distribution.

Plus généralement, si l'on se donne un nombre fini de points $(a_1, ..., a_N)$, et de masses $(\alpha_1, ..., \alpha_N)$, on obtient une distribution en posant $\mu(f) = \sum_k \alpha_k f^{(k)}(a_k)$.

3) La distribution $vp(\frac{1}{t})$

Si f est à support compact et de classe C^1, on peut définir l'intégrale $\displaystyle\int \frac{f(t)}{t}\, dt$ *au sens de la valeur principale.* Cette "valeur principale" est définie comme la limite

$$\lim_{\epsilon \to 0, A \to +\infty} \int_{\epsilon \leq |t| \leq A} \frac{f(t)}{t}\, dt.$$

On vérifiera (voir exercices) que cette limite existe (ici, comme f est à support compact, le seul problème est en 0). La correspondance

$$f \to \lim_{\epsilon \to 0, A \to +\infty} \int_{\epsilon \leq |t| \leq A} \frac{f(t)}{t}\, dt$$

définit une distribution notée $vp(\frac{1}{t})$.

• **Dérivation d'une distribution**

Si μ est une distribution, on vérifie que la forme linéaire μ' définie sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ par $f \to \mu'(f) = -\mu(f')$ est une distribution (utiliser le fait que pour la topologie mise sur $\mathcal{D}$ nous avons :

$$(f_n \overset{\mathcal{D}(\mathbb{R})}{\to} f) \Rightarrow (f_n' \overset{\mathcal{D}(\mathbb{R})}{\to} f').$$

Définition 6.1.3 On appelle **dérivée d'une distribution** μ la distribution μ' définie sur l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ des fonctions-tests par

$$f \to \mu'(f) = -\mu(f').$$

Si λ_ϕ est une mesure de Radon définie par une densité ϕ dérivable (avec dérivée continue), alors la formule d'intégration par partie

$$-\int f'\phi\, dt = -f\phi]_{-\infty}^{+\infty} + \int f\phi'\, dt = \int f\phi'\, dt$$

montre que la dérivée de λ_ϕ en tant que distribution s'identifie à la mesure de Radon de densité ϕ'. La dérivation au sens des distributions est donc compatible avec celle des fonctions de classe C^1.

Faisons maintenant un calcul de la dérivée au sens des distributions d'une fonction non continue. Le cas le plus simple est le suivant :

Exemple 6.1.4 *: dérivée de Y au sens des distributions*

Considérons la fonction échelon $Y = 1_{[0,\infty[}$. Soit λ_Y la mesure de Radon de densité Y. Pour calculer la dérivée de λ_Y au sens des distributions, considérons une fonction-test f quelconque. On a :

$$\lambda'_Y(f) = -\lambda(f') = -\int_0^\infty f'(t)\ dt = f(0) = \delta_0(f).$$

D'où $\lambda'_Y = \delta_0$.

La dérivée de Y au sens des distributions est la mesure de Dirac à l'origine. On remarque que la fonction Y possède, en tant que fonction, une dérivée en tout point autre que l'origine et que cette dérivée est nulle. Ainsi la fonction Y est dérivable en presque tout point (en fait en tout point $\neq 0$), avec une dérivée nulle, mais cette dérivée *ne se confond pas avec la dérivée de Y en tant que distribution.*

De façon générale l'existence de discontinuités (de première espèce) pour une fonction ϕ entraîne la présence de masses de Dirac dans l'expression de la dérivée de ϕ considérée comme une distribution.

On montrera en exercice que la dérivée au sens des distributions d'une fonction en escalier $\sum_j c_j 1_{[a_j,b_j]}$ (somme finie) est donnée par $\sum_j c_j(\delta_{a_j} - \delta_{b_j})$.

Définition 6.1.5 *(Support d'une distribution)* On dit qu'une distribution μ est à **support dans un fermé** F, si $\mu(f) = 0$ pour toute fonction f de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ à support disjoint de F. Le **support** de μ est l'intersection des fermés F tels que μ soit à support dans F.

En particulier une distribution μ est à support compact s'il existe un intervalle compact $[A, B]$ tel que $\mu(f) = 0$, pour toute fonction f de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ à support disjoint de $[A, B]$.

Par exemple la masse de Dirac à l'origine et ses dérivées ont pour support le fermé $\{0\}$.

• Un exemple élémentaire de calcul de distribution

Recherche des distributions μ telle que $\mu' = 0$.

On doit déterminer les distributions μ telles que l'on ait

$$\mu'(\phi) = -\mu(\phi') = 0, \forall\phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \tag{6.1}$$

On remarque que si ϕ est une fonction continue à support compact, alors sa primitive F définie par $F(t) = \int_{-\infty}^t \phi(s)\ ds$ est à support compact si, et seulement si, $\int \phi\ ds = 0$ (faire un dessin) : toute fonction $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ d'intégrale nulle est la dérivée d'une fonction ϕ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. La propriété (6.1), pour μ, est donc équivalente à $\mu(\psi) = 0$, pour toute fonction $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ d'intégrale nulle.

Fixons une fonction ϕ_0 dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\int \phi_0 \, ds = 1$. On peut écrire $\phi = \psi + (\int \phi \, ds)\phi_0$, avec ψ d'intégrale nulle, d'où

$$\mu(\phi) = \mu(\psi) + \mu(\phi_0)\,(\int \phi \, ds) = \mu(\phi_0)\,(\int \phi \, ds).$$

Donc μ est la distribution $C\,ds$, de densité constante C égale à $\mu(\phi_0)$.

Remarque 6.1.6 On peut démontrer (cf. le résultat analogue pour les mesures) l'injectivité des “plongements”

$$\mathcal{L}_{loc}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Ainsi, si l'on regarde une fonction localement intégrable comme une distribution, la donnée de cette distribution détermine complètement la fonction.

• Convolution par une distribution

Définition 6.1.7 Si μ est une distribution et ϕ une fonction dans $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, on définit la convolée $\mu * \phi$ par $(\mu * \phi)(t) = \mu * T_t\widetilde{\phi}$, où $\widetilde{\phi}(s) = \phi(-s)$ et $T_t\phi(s) = \phi(s-t)$.

Quand h tend vers 0, $h^{-1}[T_{t+h}\widetilde{\phi} - T_t\widetilde{\phi}]$ converge vers $-T_t\widetilde{\phi}'$, la convergence ayant lieu au sens de la topologie de l'espace $\mathcal{D}$. On en déduit la relation :

$$(\mu * \phi)' = \mu' * \phi = \mu * \phi'.$$

• Distributions tempérées

On choisit maintenant comme espace de fonctions-tests l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ formé des fonctions indéfiniment dérivables qui sont à décroissance rapide ainsi que leurs dérivées.

Rappelons qu'une fonction f est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ si f est C^∞ et si, pour tout indice de dérivation α et tout entier p, il existe une constante $C_{\alpha,p}$ telle que

$$|f^{(\alpha)}(t)| \leq \frac{C_{\alpha,p}}{(1+|t|^p)}.$$

Autrement dit, les semi-normes $\|P.f^{(\alpha)}\|_\infty$ sont finies, pour tout indice de dérivation α et tout polynôme P.

On met sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ la topologie “naturelle” définie par : (f_n) *converge au sens de* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ *vers une fonction* f *de* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ *si toutes les semi-normes* $\|P.(f_n^{(\alpha)} - f^{(\alpha)})\|_\infty$ *tendent vers 0, quand* n *tend vers l'infini.*

Définition 6.1.8 *On appelle* **distribution tempérée** toute forme linéaire sur l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, qui est continue pour la topologie de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Si μ est une distribution tempérée, la restriction de μ à $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ définit une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, et l'examen des topologies montre que cette forme linéaire est continue pour la topologie de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. C'est donc une distribution : les distributions tempérées sont des distributions particulières. On peut montrer que le plongement de l'espace des distributions tempérées dans l'espace des distributions est injectif.

Exemples 6.1.9

1) Nous avons vu que toute fonction localement intégrable f peut être considérée comme la densité d'une mesure de Radon λ_f et donc comme une distribution. Si f est à croissance au plus polynomiale, c'est-à-dire s'il existe une constante C et un entier m tels que $|f(t)| \leq C|t|^m, \forall t$, alors la distribution associée est tempérée.

En effet, si ϕ est dans $\mathcal{S}$, alors ϕf est intégrable, et on montre facilement que la convergence de la suite (ϕ_n) dans $\mathcal{S}$ entraîne la convergence de la suite des intégrales $(\int \phi_n f \; dt)$ vers $(\int \phi f \; dt)$.

2) Toute mesure bornée définit une distribution tempérée. En effet, si une suite (ϕ_n) dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ converge au sens de la topologie de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ vers ϕ, alors elle converge vers ϕ au sens de la convergence uniforme et on a bien, si μ est une mesure bornée, $\lim_n \mu(\phi_n) = \mu(\phi)$.

De même, pour toute mesure μ bornée, pour tout entier $p \geq 0$, la mesure $f \to \int f(t) \; t^p \; d\mu(t)$, qui a une densité t^p par rapport à μ, définit une distribution tempérée.

Plus généralement, on peut multiplier une distribution tempérée par un polynôme : le résultat est encore une distribution tempérée.

6.2 Extension de l'analyse de Fourier aux distributions

Nous avons vu que, suivant la nature des signaux considérés, la définition de la transformée de Fourier à l'aide d'une intégrale est possible ou non. Elle l'est dans le cas d'un signal intégrable et peut être étendue, par prolongement, aux signaux non intégrables mais de carré intégrable, grâce à la formule d'isométrie.

Pour certaines fonctions périodiques, il est encore possible, en effectuant une décomposition en série de Fourier, de définir une transformée de Fourier qui est une mesure discrète, mais pour des fonctions telles que la fonction échelon, la question se pose de réaliser une analyse de Fourier sur ce type de signaux. Nous allons montrer que cela est possible, en traitant ces signaux comme des distributions tempérées et en définissant leur transformée de Fourier, au sens faible.

• **Transformée de Fourier d'une distribution tempérée**

Exemple 6.2.1

Considérons le signal échelon Y, défini par $Y(t) = 1$, si $t \geq 0$, $= 0$, sinon. On peut chercher à associer à cette fonction très simple une mesure spectrale. Comme Y a une discontinuité, une telle mesure, si elle existait, ne pourrait être bornée. Nous allons voir qu'en fait il faut associer à Y une distribution.

Rappelons que Y a pour dérivée (au sens des distributions) la mesure δ_0, la mesure de Dirac à l'origine, qui a pour transformée de Fourier la fonction constante égale à 1. Un calcul basé sur la relation formelle $(\mathcal{F}f')(u) = 2\pi iu\mathcal{F}f(u)$ suggère que la transformée de Fourier de Y est reliée à la fonction $u \to \frac{1}{u}$. Comme cette fonction n'est pas localement intégrable (problème en 0), la transformée de Fourier de Y ne peut pas être définie comme étant la fonction $u \to \frac{1}{u}$, mais comme étant la distribution $vp(\frac{1}{t})$ (voir exercice).

Nous considérons maintenant les distributions tempérées. La définition directe de la transformée de Fourier d'une distribution tempérée n'est pas possible, contrairement au cas des mesures bornées. Pour définir la transformée de Fourier d'une distribution tempérée, nous utilisons la **dualité** et le fait que l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est stable par la transformation de Fourier : la transformation $\mathcal{F}$ en restriction à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ définit une isométrie (en norme $\| \|_2$) surjective de cet espace sur lui-même.

Définition 6.2.2 Soit μ une distribution tempérée. La transformée de Fourier $\mathcal{F}\mu$ de μ est définie par :

$$(\mathcal{F}\mu)(\phi) = \mu(\mathcal{F}\phi), \ \forall \phi \in \mathcal{S}. \tag{6.2}$$

Cette formule définie bien la valeur de $\mathcal{F}\mu$ sur l'espace des fonctions-tests : en effet, on vérifiera en exercice, en utilisant les résultats obtenus au chapitre *Transformation de Fourier* sur l'espace $\mathcal{S}$, que la formule précédente définit effectivement une distribution tempérée, ce qui montre que la définition est bien fondée.

Nous avons vu que toute mesure bornée définit une distribution tempérée. On doit donc montrer la compatibilité de la définition (6.2.2) avec celle de la transformée de Fourier définie directement à l'aide d'une intégrale.

Théorème 6.2.3 *Si μ est une mesure bornée, sa transformée de Fourier en tant que distribution tempérée et sa transformée de Fourier en tant que mesure bornée coïncident.*

Preuve : En appliquant le théorème de Fubini, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\mu(\phi) = \mu(\mathcal{F}\phi) &= \int (\int \phi(u) e^{-2\pi i u t} du) \ d\mu(t) \\ &= \int (\int e^{-2\pi i u t} d\mu(t)) \ \phi(u) \ du = \int \phi(u) \ \widehat{\mu}(u) \ du. \end{aligned}$$

La transformée de Fourier au sens faible de μ est donc la distribution (qui est ici une mesure avec densité) de densité $\widehat{\mu}(u)$, la transformée de Fourier au sens fort.

□

Quand la transformée de Fourier d'une fonction ou d'une mesure peut être définie directement, ce qui est le cas pour une fonction intégrable, ou plus généralement pour une mesure bornée, on dira que la transformée ainsi définie est la transformée de Fourier au sens fort. Si la transformée de Fourier est définie en considérant la fonction ou la mesure comme une distribution tempérée, on dira que la transformée est définie au sens faible. Nous venons de voir que la transformée au sens fort, quand elle existe, coïncide avec la transformée au sens faible. Les fonctions qui sont trop grandes pour être intégrables, mais dont la croissance est "raisonnable" fournissent des exemples pour lesquels la transformée de Fourier ne peut pas être définie au sens fort, mais l'est au sens faible.

Exemples 6.2.4

(certains de ces exemples sont développés en exercice) :

1) Considérons d'abord la fonction constante : $t \to 1$. En revenant à la définition, on obtient immédiatement que sa transformée de Fourier est la masse de Dirac à l'origine. En effet, soit λ_1 la distribution associée à la fonction constante égale à 1. Pour $\phi \in \mathcal{S}$, on a :

$$\mathcal{F}\lambda_1(\phi) = \int \widehat{\phi}(u) \ du = \phi(0).$$

La dernière égalité provient de l'application de la formule d'inversion.

On pourra écrire, en utilisant une notation simplifiée :

$$\mathcal{F}1 = \delta_0.$$

Notons que la mesure δ_0 possède une transformée de Fourier au sens fort, puisqu'elle est bornée, et que cette transformée (ou sa transformée inverse qui lui est égale) redonne bien la fonction constante égale à 1.

2) Considérons maintenant la fonction $M : t \to t$. Cette fonction n'est pas intégrable. Elle définit une mesure de Radon (qui n'est pas bornée), mais aussi une distribution tempérée λ_M. On ne peut pas définir directement la transformée de Fourier $\mathcal{F}M$ de M, mais on peut la définir au sens faible, en tant que distribution tempérée : si $\phi \in \mathcal{S}$ est une fonction-test, on doit avoir :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\lambda_M(\phi) &= \int \mathcal{F}(\phi)(t)\, M(t)\; dt = \int t\, \mathcal{F}(\phi)(t)\; dt \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int \mathcal{F}(\phi')(t)\; dt = \frac{1}{2\pi i}\phi'(0) = \frac{-1}{2\pi i}\delta_0'(\phi).
\end{aligned}$$

Le calcul utilise le fait que les fonctions de $\mathcal{S}$ ainsi que leurs dérivées sont intégrables et ont une transformée de Fourier intégrable. On a donc :

$$\mathcal{F}M = \frac{-1}{2\pi i}\delta_0'.$$

3) Soit f donnée par une série de la forme

$$f(t) = \sum_k \alpha_k e^{2\pi i a_k t},$$

avec $\sum_k |a_k| < \infty$. Pour calculer sa transformée de Fourier au sens faible, calculons, pour une fonction-test ϕ, la quantité $\mathcal{F}f(\phi)$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}f(\phi) &= \int f\widehat{\phi}\; dt = \int \widehat{\phi}(u) \sum_k \alpha_k e^{2\pi i a_k u}\; du \\
&= \sum_k \alpha_k \int \widehat{\phi}(u) e^{2\pi i a_k u}\; du \\
&= \sum_k \alpha_k \phi(a_k) = \sum_k \alpha_k \delta_{a_k}(\phi).
\end{aligned}$$

D'où $\mathcal{F}(f) = \sum_k \alpha_k \delta_{a_k}$.

4) La transformée de Fourier de la fonction échelon, $Y = 1_{[0,\infty[}$ est donnée par (cf. exercice) :

$$\mathcal{F}(Y)(u) = \frac{1}{2}\delta_0(u) + \frac{1}{2i\pi} vp(\frac{1}{u}).$$

5) Le "peigne de Dirac" : il est défini par $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n$. C'est une mesure non bornée, mais tempérée. On montrera en exercice, à l'aide de formule de Poisson, qu'il est sa propre transformée de Fourier.

6.3 Transformée de Hilbert et signal analytique

• Signaux analytiques

Soit x un signal de mesure spectrale bornée μ_x. Si x est à valeurs réelles, on a $d\mu_x(-u) = \overline{d\mu_x(u)}$.

Notons que, dans le cas où la mesure spectrale μ_x a une densité ϕ, ceci revient à $\phi(-u) = \overline{\phi(u)}$. Dans le cas général, la formule précédente s'interprète en appliquant les mesures à des fonctions tests.

Définition 6.3.1 On appelle signal **analytique** associé à un signal à valeurs réelles x de mesure spectrale μ_x, le signal z_x dont la mesure spectrale est la restriction à $\mathbb{R}^+$ de $2\mu_x$. On a donc :

$$z_x(t) = 2\int_0^\infty e^{2\pi itu} d\mu_x(u),$$

pour un signal réel x donné par

$$x(t) = \int_{-\infty}^\infty e^{2\pi itu} d\mu_x(u).$$

Par construction, le spectre du signal analytique est contenu dans $\mathbb{R}^+$, autrement dit, sa transformée de Fourier est nulle pour les valeurs de $u < 0$.

Comme x est réel, d'après le résultat sur les signaux à valeurs réelles, la mesure spectrale μ_x est entièrement déterminée par sa restriction à $\mathbb{R}^+$, et donc x et z_x sont en correspondance biunivoque.

On note que le signal analytique est nécessairement complexe, puisque le spectre d'un signal réel contient des fréquences positives et des fréquences négatives. Décomposons le signal analytique z_x en sa partie réelle x et sa partie imaginaire y_x :

$$z_x = x + iy_x.$$

Nous allons préciser la relation existant entre x et y_x.

Proposition 6.3.2 *La mesure spectrale de la partie imaginaire y_x du signal analytique z_x associé à x est donnée par $d\mu_y(u) = -i\,\mathrm{sgn}(u)d\mu_x(u)$, μ_x étant la mesure spectrale de x.*

Preuve : Notons $d\nu(u) = -i\,\mathrm{sgn}(u)d\mu_x(u)$. Soit y de mesure spectrale ν. Nous avons : $\mu_x + i\nu = 2Y\mu_x$. Les signaux z_x et $x + iy_x$, qui ont même la mesure spectrale, sont donc égaux.

Il reste à voir que y_x ainsi défini est réel. Comme x est réel, on a $\overline{d\mu_x(-u)} = d\mu_x(u)$, et on vérifie que cette propriété également satisfaite par ν. Donc y_x est réel et est bien la partie imaginaire de z_x.

□

La construction de y_x à partir de x est implicite, puisqu'elle passe par l'utilisation des mesures spectrales. Nous donnerons plus loin une construction directe de y_x à partir de x (convolution par la distribution $vp(\frac{1}{t})$).

• **Analyticité du signal analytique**

Nous avons vu qu'un signal z ayant une mesure spectrale à support compact est prolongeable en une fonction analytique dans tout le plan complexe. Si la mesure spectrale de z est à support dans $[0, \infty[$ et **bornée**, alors le signal z est prolongeable en une fonction analytique dans tout le demi-plan complexe supérieur.

En effet, soit z un signal analytique de mesure spectrale μ à support dans $[0, \infty[$. On peut l'écrire formellement

$$z(t) = \int_0^\infty e^{2\pi iut}\ d\mu(u).$$

Si l'on suppose la mesure μ bornée, on définit le prolongement de z au demi-plan fermé $\{t + is, s \geq 0\}$, fonction dont la restriction au demi-plan ouvert $\{t + is, s > 0\}$ est analytique, par :

$$z(t + is) = \int_0^\infty e^{2\pi iu(t+is)}\ d\mu(u).$$

Cette intégrale existe pour $s \geq 0$, car $|e^{2\pi iu(t+is)}| = e^{-2\pi us} \leq 1$, pour $s \geq 0$. On vérifie que la fonction ainsi obtenue est bien un prolongement analytique de z au demi-plan supérieur $\{t + is, s > 0\}$:

Posons $v = t + is$. La dérivée de $z(v)$ existe et est donnée par

$$z'(v) = 2\pi i \int_0^\infty ue^{2\pi iuv}\ d\mu(u).$$

La dérivation sous le signe $\int$ et l'existence de l'intégrale précédente sont justifiées par les majorations

$$|u\exp(2\pi iuv)| \leq |u|\exp(-2\pi us) \leq |u|\exp(-2\pi us_0),\ \text{pour } s \geq s_0,$$

avec $u \to |u|\exp(-2\pi us_0)$ μ-intégrable, si μ est bornée et $s_0 > 0$.

Définition 6.3.3 La **transformée de Hilbert** d'une fonction f est la fonction Hf définie formellement comme convolée de f par la distribution $vp(\frac{1}{\pi s})$:

$$Hf(t) = (f * vp(\frac{1}{\pi s}))(t) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \to 0, A \to +\infty} \int_{\epsilon \leq |t| \leq A} f(s) \frac{1}{t - s} ds.$$

L'intégrale précédente est à prendre au sens de la valeur principale. Elle est bien définie pour une classe assez vaste de fonctions sur $\mathbb{R}$, par exemple pour toute fonction f de classe C^1 et à support compact.

On vérifie (exercice) que l'application $f \to Hf$ définit un opérateur isométrique pour la norme $\|\|_2$, qui donc, à partir d'un sous-espace dense, se prolonge à $L^2(\mathbb{R})$ tout entier. La transformation de Fourier échange cet opérateur de *convolution* par la distribution $vp(\frac{1}{\pi s})$ et l'opérateur de *multiplication* par la fonction $-i\ \text{sgn}(u)$ (noter que cette fonction étant de module 1, l'opérateur de multiplication par $-i\ \text{sgn}(u)$ est bien une isométrie de L^2).

Remarque 6.3.4

On peut démontrer que, si $f(t)$ est une fonction intégrable, sa transformée de Hilbert Hf peut être définie pour presque tout t. Si $\widehat{f}$ est intégrable, f est la restriction au bord du demi-plan (c'est-à-dire l'axe réel) d'une fonction analytique dans le demi-plan, continue dans le demi-plan fermé. Dans ce cas Hf est définie pour toute valeur de t.

Mentionnons au passage, la définition des espaces $H^p(\mathbb{R})$, pour $p > 1$: ce sont les sous-espaces de fonctions dans $L^p(\mathbb{R})$ dont la transformée de Fourier est à support dans $[0, \infty[$.

Proposition 6.3.5 *La partie imaginaire d'un signal analytique z (de mesure sepctrale à support dans $[0, +\infty[$) est la transformée de Hilbert de sa partie réelle.*

Preuve : Soit z un signal analytique, de partie réelle x et de partie imaginaire y. Soit μ la mesure spectrale de z, qui est à support dans $[0, \infty[$ et $d\mu_x$, $d\mu_y$ respectivement les mesures spectrales de x et de y. On peut écrire :

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2}[\int_0^\infty e^{2\pi iut} d\mu(u) + \int_0^\infty e^{-2\pi iut} d\overline{\mu}(u)] \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi iut}\ \frac{1}{2}[d\mu(u) + d\overline{\mu}(-u)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2i}[\int_0^\infty e^{2\pi iut} d\mu(u) - \int_0^\infty e^{-2\pi iut} d\overline{\mu}(u)] \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi iut}\ \frac{1}{2i}[d\mu(u) - d\overline{\mu}(-u)]. \end{aligned}$$

D'où

$$d\mu_x(u) = \frac{1}{2}[d\mu(u)1_{[0,\infty[}(u) + d\overline{\mu}(-u)1_{]-\infty,0]}(u)],$$

et

$$d\mu_y(u) = \frac{1}{2i}[d\mu(u)1_{[0,\infty[}(u) - d\overline{\mu}(-u)1_{]-\infty,0]}(u)],$$

soit

$$d\mu_y(u) = -i\ \operatorname{sgn}(u) d\mu_x(u).$$

La mesure spectrale de y se déduit de celle de x par multiplication par $-i\, sgn(u)$. Le signal y est donc la transformée de Hilbert de x.

□

On dit que x et y sont conjugués : ce sont les restrictions à l'axe réel de la partie réelle et de la partie imaginaire d'une fonction holomorphe dans le demi-plan supérieur.

6.4 Exercices

Exercice 6.4.1

Déterminer les distributions μ telles que $\mu' = \delta_0$.

Solution : $Y + Cte$, où Y est la fonction-échelon.

Exercice 6.4.2

Soit $f(t) = \frac{T^2}{4} - t^2$, pour $|t| < \frac{T}{2}$, $= 0$ sinon.

a) Calculer la transformée de Fourier de f par un calcul direct.

b) Dériver deux fois f au sens des distributions et vérifier sur cet exemple la relation entre dérivation et transformation de Fourier.

Exercice 6.4.3

Calculer la transformée de Fourier, au sens faible, d'un polynôme.

Exercice 6.4.4

Calculer les transformées de Fourier (au sens des distributions) des signaux f suivants :
$f : t \to t^n$,
$f : t \to Y(t)t^n$,
$f : t \to e^{\alpha t}$,
$f : t \to Y(t)e^{\alpha t}$,
$f : t \to \displaystyle\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} \cos 2\pi n u_0 t$.

Exercice 6.4.5 *Le "peigne de Dirac"*

Dans la suite, on désigne par δ_a la masse de Dirac en un point a.

1) On considère la mesure définie par $\mu = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n$.

a) Montrer que μ est une mesure non bornée, mais tempérée.

b) Montrer la formule de Poisson, pour $f \in \mathcal{S}$:

$$\sum_k f(t+k) = \sum_n \widehat{f}(n) e^{2\pi i n t}.$$

c) A l'aide de formule de Poissson, calculer la transformée de Fourier de μ.

2) Soit $T > 0$.

a) Montrer la formule de Poisson générale

$$\sum_k f(kT) = \frac{1}{T} \sum_n \widehat{f}(\frac{n}{T}).$$

b) On définit la mesure μ_T par $\mu = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{nT}$.

Montrer que la transformée de Fourier de μ_T est donnée par

$$\frac{1}{T} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{n/T}.$$

Exercice 6.4.6

Soit ϕ une fonction C^1 par morceaux, avec limite à gauche et à droite aux points de discontinuié.

Calculer la dérivée de la distribution de densité ϕ.

En particulier, quelle est la dérivée au sens des distributions d'une fonction en escalier ?

Exercice 6.4.7 *La distribution* $vp\frac{1}{t}$

a) Montrer que la distribution $vp\frac{1}{t}$ est bien définie et est une distribution tempérée.

b) Définir la convolution par la distribution $vp\frac{1}{t}$.

[[⇒ *Indications :* Montrons que la "valeur principale"

$$vp(\frac{1}{t})(\phi) = \lim_{\epsilon \to 0, A \to \infty} \int_{\epsilon \le |t| \le A} \frac{\phi(t)}{t}\ dt,$$

est bien définie si ϕ est dans C_c^1.

Comme ϕ est à support compact, il n'y a pas de problème à l'infini (pour la borne A). Pour examiner le comportement de l'intégrale en 0, on peut écrire sur le support $[-L, L]$ de ϕ, $\phi(t) = \phi(0) + t\psi(t)$, avec ψ continue.

On a alors

$$\lim_{\epsilon \to 0, A \to \infty} \int_{\epsilon \le |t| \le A} \frac{\phi(t)}{t}\ dt = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon \le |t| \le L} \frac{\phi(t)}{t}\ dt = \int_{-L}^{L} \psi(t)\ dt.$$

La convolution par $vp\frac{1}{t}$ est donnée (sur les fonctions C^1 à support compact) par

$$vp(\frac{1}{\pi s}) * \phi(t) = \lim_{\epsilon \to 0, A \to \infty} \int_{\epsilon \le |s| \le A} \phi(t-s) \frac{1}{s} ds.]]$$

Exercice 6.4.8 *Transformée de Fourier de la fonction échelon*

Calculer la transformée de Fourier (au sens faible) de la fonction échelon

[[$\Rightarrow$ *Indications :* On pourra admettre que

$$\lim_{T\to+\infty}\int_0^T \frac{\sin u}{u}du = \frac{\pi}{2}.$$

On note $Y = 1_{[0,\infty[}$ la fonction échelon. Pour calculer sa transformée de Fourier, on doit calculer cette transformée de Fourier appliquée à une fonction-test.

Soit ϕ une fonction-test, à support dans l'intervalle compact $[-L, L]$. On a :

$$\mathcal{F}Y(\phi) = \int Y\widehat{\phi}du = \int_0^\infty \widehat{\phi}(u)\,du.$$

Pour calculer cette intégrale, on intègre entre 0 et A et on fait tendre A vers $+\infty$. La fonction-test étant de classe C^1, on peut l'écrire sur son support $[-L, L]$ sous la forme $\phi(t) = \phi(0) + t\psi(t)$, la fonction ψ étant continue.

On a donc, en permutant l'ordre d'intégration :

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \widehat{\phi}(u)du &= \lim_{A\to+\infty}\int_0^A (\int_{-L}^L \phi(t)\; e^{-2\pi itu}\; dt)\; du \\ &= \lim_A \int_{-L}^L \frac{1-e^{-2\pi itA}}{2\pi it}(\phi(0)+t\psi(t))\; dt = (1)+(2)+(3),\end{aligned}$$

où l'on a posé :

$$\begin{aligned}(1) &= \lim_{\epsilon\to 0, A\to\infty}\phi(0)\int_{\epsilon\le|t|\le L}\frac{1-e^{-2\pi iAt}}{2\pi it}\; dt,\\ (2) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-L}^L \psi(t)\; dt,\\ (3) &= \frac{-1}{2\pi i}\int_{-L}^L e^{-2\pi itA}\psi(t)\; dt = \frac{-1}{2\pi i}\mathcal{F}(1_{[-L,L]}\psi)(A).\end{aligned}$$

La limite pour A tendant vers $+\infty$ dans (3) est nulle, d'après le théorème de Riemann-Lebesgue appliqué à la fonction $1_{[-L,L]}\psi$.

L'expression (2) ne dépend pas de A et est égale à

$$\frac{1}{2\pi i}vp(\frac{1}{t})(\phi).$$

Il reste à calculer (1). Par parité, (1) s'écrit

$$\begin{aligned}(1) &= \lim_A\lim_\epsilon \phi(0)\int_{\epsilon\le|t|\le L}\frac{1-\cos(2\pi At)}{2\pi it}\; dt + \phi(0)\int_{\epsilon\le|t|\le L}\frac{\sin(2\pi At)}{2\pi t}\; dt\\ &= 0+\lim_A \frac{1}{\pi}\phi(0)\int_0^L \frac{\sin(2\pi At)}{t}\; dt\\ &= \lim_A \frac{1}{\pi}\phi(0)\int_0^{2\pi AL}\frac{\sin s}{s}\; ds \to \frac{1}{2}\phi(0).\end{aligned}$$

Au total, on a donc :

$$\mathcal{F}(Y)(\phi) = \frac{1}{2}\phi(0) + \frac{1}{2\pi i} vp(\frac{1}{t})(\phi),$$

soit

$$\mathcal{F}(Y) = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2\pi i} vp(\frac{1}{t}).$$

Notons que (au sens des distributions) $Y' = \delta_0$ et que la relation générale $\mathcal{F}(\mu') = 2\pi i u \mathcal{F}\mu$, pour une distribution tempérée, s'écrit ici :

$$\mathcal{F}(Y') = 2\pi i u \mathcal{F} Y.$$

Ceci se vérifie directement, puisque l'on a d'une part :

$$2\pi i[\frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2\pi i} vp(\frac{1}{u})][u\phi] = vp(\frac{1}{u})(u\phi) = \int \phi(u)\ du,$$

et d'autre part :

$$\mathcal{F}(Y')(\phi) = \mathcal{F}(\delta_0)(\phi) = \widehat{\phi}(0) = \int \phi(u)\ du.]]$$

Exercice 6.4.9 *Transformée de Fourier de $vp(\frac{1}{t})$ et de $sgn(u)$*

1) a) Calculer la transformée de Fourier au sens faible de la fonction $sgn(u)$.

b) Comparer avec la transformée de Fourier de la fonction échelon.

2) Calculer la transformée de Fourier de $vp(\frac{1}{t})$.

[[⇒ *Indications :* On vérifie qu'il suffit de considérer des fonctions-tests à support compact. Soit ϕ une fonction C^∞ à support dans $[-L, L]$. On doit calculer

$$\begin{aligned}\int sgn(u)\widehat{\phi}(u)du &= \lim_{A\to\infty}\int_A^A sgn(u)(\int_{-L}^L \phi(t)\ e^{-2\pi i u t}\, dt)du \\ &= \frac{1}{2i\pi}\lim_A \int_{-L}^L \frac{1-\cos 2\pi t A}{t}\phi(t)\, dt.\end{aligned}$$

On peut alors faire un calcul analogue à celui de l'exercice précédent.

On peut également utiliser la relation $sgn(t) = 2Y(t) - 1$ et le calcul de la transformée de Fourier au sens des distributions de la fonction échelon. On obtient :

$$\mathcal{F}(sgn) = 2\mathcal{F}(Y) - \delta_0 = \frac{1}{\pi i} vp(\frac{1}{t}).$$

La transformée de Fourier de $vp(\frac{1}{t})$ est $-i\pi\ sgnu$, résultat qui peut s'obtenir par transformée de Fourier inverse à partir de la formule précédente (noter que $vp(\frac{1}{t})$ et $sgn(t)$ sont impaires), ou par la méthode directe suivante :

Soit ϕ une fonction-test à support dans $[-L, L]$. On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(vp(\frac{1}{t})(\phi) &= vp(\frac{1}{t})(\widehat{\phi}) \\
&= \lim_{\epsilon\to 0, A\to\infty} \int_{\epsilon\leq|t|\leq A} \widehat{\phi}(t)\frac{1}{t}\ dt \\
&= \int_{-L}^{L} \phi(u)\ [\lim_{\epsilon\to 0, A\to\infty} \int_{\epsilon\leq|t|\leq A} \frac{e^{-2\pi iut}}{t}\ dt]\ du.
\end{aligned}$$

Par un changement de variable, on obtient

$$\lim_{\epsilon\to 0, A\to\infty} \int_{\epsilon\leq|t|\leq A} \frac{e^{-2\pi iut}}{t}\ dt = Csgn(u),$$

où C est la constante

$$C = -2i\int_0^\infty \frac{\sin s}{s}\ ds = -i\pi.]]$$

Chapitre 7

Echantillonnage

Dans ce chapitre nous examinons sous quelles conditions un signal échantillonné (c'est-à-dire observé aux temps $n\tau$, $n \in \mathbb{Z}$, multiples d'un pas d'échantillonnage $\Delta > 0$) peut être reconstruit. Le théorème d'échantillonnage de Shannon relie le choix du pas Δ à la taille du support $[-F, F]$ de la mesure spectrale du signal supposé à "spectre limité".

7.1 Signaux à spectre limité

Définition 7.1.1 Un signal f de mesure spectrale μ est dit à **spectre limité** ou à **largeur de bande finie**, si sa transformée de Fourier est à support compact.

Théorème 7.1.2 *Si la mesure spectrale μ d'un signal f est contenue dans un intervalle compact $[-F, F]$, (on dit aussi dans la bande de fréquences $[-F, F]$), alors le signal (la fonction)*

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi iut}\ d\mu(u) = \int_{-F}^{F} e^{2\pi iut}\ d\mu(u)$$

peut être prolongée en une fonction analytique dans tout le plan complexe.

Preuve : On définit le prolongement par :

$$f(t+is) = \int_{-F}^{F} e^{2\pi iu(t+is)}\ d\mu(u) = \sum_{0}^{\infty} \frac{(2\pi i)^n}{n!}(t+is)^n \int_{-F}^{F} u^n\ d\mu(u).$$

Pour vérifier la convergence de la série à l'aide du théorème de Lebesgue, on utilise la majoration, vérifiée pour tout $N \geq 0$ et pour $|t + is| \leq \rho$,

$$|\sum_{n=0}^{N} \frac{(2\pi i)^n}{n!}(t+is)^n u^n| \leq \sum_{0}^{\infty} \frac{(2\pi)^n}{n!}|t+is|^n |u|^n = e^{2\pi|u||t+is|} \leq e^{2\pi\rho|u|}$$

et le fait que la fonction $u \to e^{2\pi\rho|u|}$ est μ-intégrable, si μ est à support compact.

□

Nous venons de voir qu'un signal à spectre limité est analytique et donc en particulier C^∞. Nous allons montrer que l'on peut majorer ses dérivées successives en fonction de la taille du support de sa mesure spectrale.

Théorème 7.1.3 *(Bernstein) Soit f un signal à spectre limité contenu dans l'intervalle compact $[-F, F]$. Aors f est indéfiniment dérivable et on a, pour tout entier $k \geq 0$:*

$$\sup_t |f^{(k)}(t)| \leq (2\pi F)^k \|f\|_\infty. \tag{7.1}$$

Preuve : Nous avons vu que f a des dérivées à tous les ordres. Montrons la majoration sur les dérivées. Il suffit d'établir la formule (7.1) pour $k = 1$, le cas général s'obtenant par récurrence (en effet, si μ_f est la mesure spectrale (supposée bornée) de f, les dérivées $f^{(k)}$ ont pour mesure spectrale $(2\pi iu)^k \mu_f$, qui est encore à support dans $[-F, F]$).

Considérons la fonction ϕ obtenue en périodisant la fonction égale à $u\,\exp(\dfrac{-2\pi iu}{4F})$ sur $[-F, F[$ en une fonction $2F$-périodique.

Les coefficients de Fourier de ϕ sont donnés par :

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2F}\int_{-F}^{F} \exp(-2\pi ik\frac{u}{2F})\ \phi(u)\ du \\ &= \frac{1}{2F}\int_{-F}^{F} u\ \exp(-2\pi i\frac{u}{2F}(k+\frac{1}{2}))\ du \\ &= \frac{F}{\pi^2}\frac{(-1)^{k+1}i}{(k+\frac{1}{2})^2}. \end{aligned}$$

Les coefficients de sa série de Fourier décroissent en k^{-2} (noter que ce n'est pas le cas de la fonction de période $2F$ égale à $2i\pi u$ sur $[-F, F[$; c'est la raison pour laquelle on effectue une translation sur la phase, de façon à obtenir une fonction périodique continue).

En écrivant ϕ comme la somme de sa série de Fourier (ϕ est continue et sa série de Fourier est uniformément convergente), on obtient en restriction à l'intervalle $[-F, F]$:

$$2\pi iu\exp(-2\pi i\frac{u}{4F}) = 2\pi i\sum_k c_k\exp(2\pi i\frac{uk}{2F}).$$

Ceci permet d'écrire $f'(t)$ sous la forme :

$$\begin{aligned} f'(t) &= 2\pi i\int_{-F}^{F} ue^{2\pi iut}\ d\mu_f(u) = 2\pi i\int_{-F}^{F} ue^{-2\pi i\frac{u}{4F}}\ e^{2\pi iu(t+\frac{1}{4F})}\ d\mu_f(u) \\ &= \frac{2F}{\pi}\int_{-F}^{F}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+\frac{1}{2})^2}\ e^{2\pi i\frac{uk}{2F}}\ e^{2\pi iu(t+\frac{1}{4F})}\ d\mu_f(u), \end{aligned}$$

d'où, en intégrant sur le compact $[-F, F]$ la série uniformément convergente figurant à l'intérieur de l'intégrale :

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{2F}{\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+\frac{1}{2})^2}\int_{-F}^{F} e^{2\pi i(t+\frac{1}{4F}+\frac{k}{2F})}\ d\mu_f(u) \\ &= \frac{2F}{\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+\frac{1}{2})^2}\ f(t+\frac{1}{4F}+\frac{k}{2F}). \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\|f'\|_\infty &\leq \frac{2F}{\pi}\|f\|_\infty \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(k+\frac{1}{2})^2} \\ &= \frac{2F}{\pi}\|f\|_\infty \pi^2 = 2\pi F \|f\|_\infty .\end{aligned}$$

En appliquant cette formule successivement aux dérivées de f, on obtient la majoration annoncée. □

7.2 Théorèmes d'échantillonnage

7.2.1 Etant donné un réel $F > 0$, soit U_F le sous-espace de $L^2(\mathbb{R})$ formé des fonctions de carré intégrable, à support dans l'intervalle $[-F, F]$.

Les fonctions dans U_F sont dans $L^1(\mathbb{R})$ et leur transformée de Fourier est analytique, bornée et de carré intégrable (d'après la formule de Plancherel).

Par transformation de Fourier inverse, l'espace U_F est transformé isométriquement en le sous-espace

$$V_F = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \text{support}(\widehat{f}) \subset [-F, F]\}.$$

On note que $\widehat{f}$ qui est dans L^2 et à support compact est intégrable.

Pour $f \in V_F$, on a :

$$\begin{aligned} f(t) &= \int \widehat{f}(u) e^{2\pi i u t}\, du \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{-F}^{F} \widehat{f}(u) u^n\, du\right) \frac{(2\pi i)^n}{n!} t^n, \end{aligned}$$

et on peut appliquer le théorème de convergence dominée, car

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{-F}^{F} |\widehat{f}(u)| e^{2\pi |u||t|}\, du < \infty.$$

Ce sous-espace V_F est donc formé de fonctions analytiques (ou du moins chaque fonction dans V_F est égale presque partout à une fonction analytique : la transformée de Fourier inverse de sa transformée de Fourier). Dans ce qui suit, pour $f \in V_F$, nous pouvons choisir la **version de f analytique**.

On construit une base orthonormée de U_F à partir des exponentielles $2F$-périodiques. La famille $(e_{n,F}, n \in \mathbb{Z})$ définie par

$$e_{n,F}(u) = (2F)^{-\frac{1}{2}} 1_{[-F,F]}(u)\ e^{2\pi i n \frac{u}{2F}},$$

est une base orthonormée de V_F.

Notons $sc_{n,F}$ les transformées de Fourier (inverses) de ces fonctions. Elle sont données par

$$sc_{n,F}(t) = \frac{1}{\sqrt{2F}} \int_{-F}^{F} e^{2\pi i n \frac{u}{2F}}\ e^{2\pi i u t}\, du = \frac{1}{\sqrt{2F}} \frac{\sin 2\pi F(t + \frac{n}{2F})}{\pi(t + \frac{n}{2F})}, n \in \mathbb{Z}.$$

Elles peuvent s'écrire également :

$$\sqrt{2F}\frac{\sin(2\pi Ft + n\pi)}{2\pi Ft + \pi n},$$

ou encore

$$(-1)^n\sqrt{2F}\frac{\sin 2\pi Ft}{2\pi Ft + \pi n}.$$

On note que $sc_{n,F}(\frac{k}{2F}) = 0$ pour k entier $\neq -n$, et $sc_{n,F}(\frac{-n}{2F})$, défini par continuité, vaut $\sqrt{2F}$.

Définition 7.2.2 On appelle *sinus cardinal* la fonction, que nous noterons sc, définie par $sc(t) = \dfrac{\sin\pi t}{\pi t}$. La fonction sc et la fonction $1_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}$ sont transformées de Fourier l'une de l'autre.

Les fonctions $sc_{n,F}$ s'écrivent (au facteur de normalisation $\sqrt{2F}$ près) comme des translatées de $sc(2Ft)$ par $\frac{n}{2F}$:

$$sc_{n,F}(t) = \sqrt{2F}sc(2Ft + n).$$

La transformée de Fourier étant une **isométrie** pour la norme $\| \|_2$, les transformées de Fourier des fonctions $sc_{n,F}, n \in \mathbb{Z}$, forment une base orthonormée de V_F.

En particulier, pour $F = \frac{1}{2}$, les fonctions $\{\frac{\sin\pi(t+n)}{\pi(t+n)},\ n \in \mathbb{Z}\}$ forment une base orthonormée de l'espace des fonctions de carré intégrable dont la transformée de Fourier est nulle en dehors de l'intervalle $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Etant donné un signal f dans V_F, nous pouvons le représenter par son développement dans la base orthonormée $(sc_{n,F})_{n\in\mathbb{Z}}$:

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\sqrt{2F}\frac{\sin(2\pi Ft + n\pi)}{2\pi Ft + \pi n}.$$

Il reste à identifier les coefficients a_n. Par la propriété d'isométrie de la transformée de Fourier, on a, en appliquant la formule d'inversion :

$$a_n = \langle f, sc_{n,F}\rangle = \langle \widehat{f}, \widehat{sc}_{n,F}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2F}}\int_{-F}^{F} \widehat{f}(u)e^{-2\pi in\frac{u}{2F}}\ du = \frac{1}{\sqrt{2F}}f(\frac{-n}{2F}).$$

On a donc le développement en série orthogonale (rappelons que les fonctions $sc(2\pi F. + \pi n)$ sont orthogonales entre elles) :

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(\frac{n}{2F})\frac{\sin(2\pi Ft - n\pi)}{2\pi Ft - \pi n},$$

avec convergence de la série des carrés des coefficients :

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(\frac{n}{2F})|^2 < \infty.$$

Notons que, quand le signal f est dans V_F, le signal échantillonné (à temps discret, pour le pas $\Delta = \frac{1}{2F}$) et le signal à temps continu ont la même énergie à un facteur de normalisation près. En effet, en appliquant les égalités de Parseval et de Plancherel, nous avons :

$$\int |\widehat{f}(u)|^2\ du = \int |f(t)|^2\ dt = \frac{1}{2F}\sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(\frac{n}{2F})|^2.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\sum_{|n|>N} |a_n \frac{\sin(2\pi Ft - n\pi)}{2Ft - n}| \leq (\sum_{|n|>N} |a_n|^2)^{\frac{1}{2}} \ (\sum_{|n|>N} (\frac{\sin(2\pi Ft - n\pi)}{2Ft - n})^2)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

montre la convergence de la série, uniformément sur tout compact. La somme de la série de ce développement orthogonal est donc continue. et elle est égale en tout point à la "version analytique" du signal f.

Finalement, on a obtenu le résultat suivant (théorème d'échantillonnage de Shannon) :

Théorème 7.2.3 *Si le signal f est dans V_F (i.e. f est de carré intégrable et sa transformée de Fourier est à support dans $[-F,F]$), on a :*

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n f(\frac{n}{2F}) \frac{\sin 2\pi Ft}{2\pi Ft - \pi n}. \tag{7.2}$$

On note qu'en particulier, le signal f est déterminé par son échantillonnage $(f(n\Delta), n \in \mathbb{Z})$, dès que $\Delta \leq \frac{1}{2F}$. On rapprochera le théorème de Bernstein et la formule précédente.

Dans le cas où le signal n'est pas dans V_F, l'expression à droite dans la formule (7.2) donne une approximation par interpolation de f. Pour pouvoir affirmer que f est exactement donné par la formule (7.2), il faut savoir a priori que $\widehat{f}$ est à support dans l'intervalle $[-F,F]$.

• **Cas général**

7.2.4

Considérons plus généralement un signal $f = (f(t)_{t\in\mathbb{R}})$ dont la mesure spectrale μ_f est à support dans l'intervalle $[-F,F]$.

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi iut} \ d\mu_f(u) = \int_{-F}^{F} e^{2\pi iut} \ d\mu_f(u).$$

Un tel signal est analytique. Il est dans $L^2(\mathbb{R})$ si, et seulement si, la mesure spectrale a une densité, elle-même de carré intégrable.

Supposons que μ_f ne charge pas les extrémités de l'intervalle (ce qui est évidemment le cas si μ_f a une densité). On peut considérer μ_f comme une mesure $2F$-périodique dont les coefficients de Fourier sont donnés au facteur $\frac{1}{2F}$ et au changement de n en $-n$ près par :

$$\widehat{\mu}_f(n) = \frac{1}{2F} \int_{-F}^{F} e^{-2\pi i \frac{un}{2F}} \ d\mu_f(u) = f(\frac{-n}{2F}).$$

On voit que, dans ce cas encore, la donnée de l'échantillonnage $(f(\frac{n}{2F})_{n\in\mathbb{Z}})$ détermine complètement μ_f et donc aussi le signal f (cf. 7.2.7).

Si la mesure μ_f est à support dans $[-F,F]$, elle est évidemment aussi à support dans un intervalle $[-F',F']$ plus grand. Tout échantillonnage du signal f avec un pas d'échantillonnage $\frac{1}{2F'}$ plus petit que $\frac{1}{2F}$ détermine donc aussi f. En particulier, si μ_f charge les extrémités de l'intervalle $[-F,F]$, on évite le problème des extrémités en considérant un intervalle strictement plus grand que $[-F,F]$. Tout échantillonnage de pas Δ tel que $\Delta < \frac{1}{2F}$ détermine donc le signal f.

On a ainsi obtenu la forme générale du théorème d'échantillonnage de Shannon :

Théorème 7.2.5 *Si le signal f a une mesure spectrale μ_f à support dans un intervalle $[-F, F]$, il est déterminé par son échantillonnage $(f(n\Delta), n \in \mathbb{Z})$, pourvu que le pas d'échantillonnage Δ vérifie*

$$\Delta < \frac{1}{2F}.$$

Si la mesure ne charge pas les extrémités, on peut prendre $\Delta = \frac{1}{2F}$.

Exemple 7.2.6 Soit $f(t) = \cos(2\pi t)$. La mesure spectrale de f est $\mu_f = \frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_1)$. Ici $F = 1$ et la mesure spectrale charge les extrémités de l'intervalle $[-F, F]$.

Si l'on choisit comme pas d'échantillonnage $\Delta = \frac{1}{2F} = \frac{1}{2}$, on a $f(n\Delta) = \cos(\pi n) = (-1)^n$. Le signal $f : t \to \cos(2\pi t)$ et le signal $t \to \exp(2\pi i t)$ ont le même échantillonnage, la fonction $\sin(2\pi t)$ s'annulant aux temps d'échantillonage $\frac{n}{2}, n \in \mathbb{Z}$ (phénomène d'"aliasing"). Il faut donc prendre un pas d'échantillonnage plus petit que $\frac{1}{2F}$, par exemple $\Delta = \frac{1}{4}$, correspondant à $F = 2$. On obtient alors, en écrivant formellement la formule d'échantillonnage (voir exercice 8 pour une justification) :

$$\begin{aligned} \cos 2\pi t &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \cos(\pi n/2) \frac{\sin 4\pi t}{4\pi t + \pi n} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{p \in \mathbb{Z}} (-1)^p \frac{\sin 4\pi t}{2t + p}, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin 2\pi t} - \frac{1}{2\pi t} &= \frac{1}{2\pi} \sum_{p \neq 0} \frac{(-1)^p}{t + p/2} \\ &= \frac{4t}{\pi} \sum_{p \geq 1} \frac{(-1)^p}{4t^2 - p^2}. \end{aligned}$$

• **Echantillonnage et mesure spectrale**

7.2.7

En terme de mesure spectrale, la mesure spectrale $\mu_{\Delta,f}$ du signal échantillonné f_Δ est la mesure périodique obtenue en périodisant (pour la période $T = \frac{1}{\Delta}$) la mesure spectrale μ_f de f.

Si la mesure spectrale de f a une densité ϕ_f intégrable, la mesure spectrale de f_Δ a une densité $\widetilde{\phi}_f$ qui est la périodisée de ϕ_f. (Rappelons que, par le théorème des séries, on montre que $\widetilde{\phi}_f(u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \phi_f(u + kT)$ est définie (convergence absolue de la série pour presque tout u) et que

$$\int_0^T |\widetilde{\phi}_f| \, du \leq \int_{\mathbb{R}} |\phi_f| \, du.$$

7.3 Exercices

Exercice 7.3.1

Montrer directement les relations d'orthogonalité (Cas $F = \frac{1}{2}$) :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin\pi(t-n)}{\pi(t-n)} \frac{\sin\pi(t-n')}{\pi(t-n')}\, dt = \frac{(-1)^{n+n'}}{\pi^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{(\sin\pi t)^2}{(t-n)(t-n')}\, dt = \delta_{n,n'}.$$

Exercice 7.3.2 *Echantillonnage du signal périodique $e_r(t) = \cos(2\pi r t)$ et aliasing*

Soit Δ le pas d'échantillonnage. Montrer que les signaux e_r et $e_{r'}$ ont le même échantillonnage, si $r\Delta - r'\Delta \in \mathbb{Z}$ (phénomène d'aliasing).

Exemple : $\cos(2\pi t)$ et $\cos(2\pi 5t)$, pour $\Delta = \frac{1}{6}$.

Exercice 7.3.3

1) a) Calculer la transformée de Fourier de la fonction ϕ définie par $\phi(u) = 1 - |u|$, pour $|u| \leq 1, = 0$ sinon.

b) En déduire, sans calcul la transformée de Fourier de la fonction f définie par

$$f(t) = (\frac{\sin\pi t}{\pi t})^2.$$

2) a) Montrer que le théorème d'échantillonnage de Shannon s'applique à la fonction f.

b) On note h le pas d'échantillonnage. Quelle inégalité doit vérifier h pour que la formule de reconstruction de f à partir des valeurs discrétisées $(f(nh))_{n\in\mathbb{Z}}$ soit exacte.

c) Ecrire cette formule dans le cas $h = \frac{1}{2}$.

3) En déduire une représentation de la fonction $t \to \dfrac{tg(\pi t)}{\pi t^2}$ comme la somme d'une série de la forme

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{c_n}{t-n}.$$

Exercice 7.3.4

Notations : Etant donné un réel τ, on note T_τ l'opérateur de translation par τ défini sur l'espace des fonctions sur $\mathbb{R}$ par $(T_\tau f)(t) = f(t+\tau)$. On note D l'opérateur de changement d'échelle défini par $(Df)(t) = f(2t)$.

Dans la suite on fixe un entier $p \geq 1$, et on considère l'espace V_0 formé par les fonctions f de classe C^{p-1}, appartenant à $L^2(\mathbb{R})$, dont la restriction à l'intervalle $[k, k+1]$ est un polynôme de degré p, pour tout $k \in \mathbb{Z}$. (On convient que les fonctions de classe C^0 sont les fonctions continues.)

1) a) Montrer que V_0 est stable par les translations entières $T_n, n \in \mathbb{Z}$.

b) Montrer que $f \in V_0 \Rightarrow D^{-1}f \in V_0$.

Pour $j \in \mathbb{Z}$, on pose $V_j = D^j V_0$. Montrer que la famille $\{V_j, j \in \mathbb{Z}\}$ forme une suite croissante (au sens de l'inclusion).

c) Caractériser les éléments f de V_j.

2) On prend $p = 1$.

a) Montrer que les fonctions f dans V_0 peuvent s'écrire comme une combinaison

$$f(t) = \sum_n c_n \phi_1(t-n),$$

où ϕ_1 est une fonction paire, à support dans $[-1, 1]$, dont on donnera l'expression en restriction à $[0, 1]$.

b) Montrer que ϕ_1 vérifie une équation fonctionnelle de la forme

$$\phi_1(t) = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi_1(2t-k),$$

dont on explicitera les coefficients h_k.

c) Résoudre cette équation fonctionnelle par transformation de Fourier.

3) On prend maintenant $p = 2$.

a) Par analogie avec le cas de l'interpolation linéaire, montrer que les fonctions f dans V_0 peuvent s'écrire comme une combinaison $f(t) = \sum_n c_n \phi_2(t-n)$, où ϕ_2 est une fonction paire, à support dans $[-2, 2]$ dont on donnera l'expression (polynôme du second degré) en restriction à chaque intervalle $[k, k+1]$, $k = 0, 1$.

b) Montrer que ϕ_2 vérifie une équation fonctionnelle de la forme

$$\phi_2(t) = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi_2(2t-k),$$

et expliciter les coefficients h_k.

c) Résoudre cette équation fonctionnelle par transformation de Fourier.

4) Dans le cas d'un entier p quelconque, calculer la transformée de Fourier de la fonction ϕ_p dont les translatées entières engendrent le sous-espace V_0 des fonctions de classe C^{p-1} et de carré intégrable, dont la restriction à l'intervalle $[k, k+1]$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, est un polynôme de degré p.

Exercice 7.3.5

1) Montrer la relation :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(\sin \pi t)^2}{\pi^2(t+n)^2} = 1. \qquad (1)$$

(On pourra appliquer le raisonnement utilisé dans la preuve de la formule de Poisson).

2) Soit F un réel > 0. A l'aide de la formule (1) et de la formule d'échantillonnage (cf. *théorème de Shannon*), montrer que, si f est une fonction (que l'on peut supposer continue) dans $L^2(\mathbb{R})$, dont la transformée de Fourier est à support dans l'intervalle $[-F, F]$, on a la majoration :

$$|f(t)| \leq \sqrt{2F}\|f\|_2, \forall t \in \mathbb{R}.$$

3) Donner une autre preuve de cette majoration, à l'aide de la formule de Plancherel.

Exercice 7.3.6

Soient λ et T deux nombres réels, avec $T > 0$. On note ϕ la fonction $t \to \phi(t) = e^{2\pi i\lambda t}$ et g la fonction périodique, de période T, qui coïncide avec ϕ sur l'intervalle $[\frac{-T}{2}, \frac{T}{2}[$.

a) Calculer le développement en série de Fourier, $\sum_n c_n(g)e^{2\pi in\frac{t}{T}}$, de la fonction T-périodique g.

b) Justifier la convergence, en tout point de l'intervalle ouvert $]\frac{-T}{2}, \frac{T}{2}[$, de ce développement :

$$\lim_N \sum_{-N}^{N} c_n(g)e^{2\pi in\frac{t}{T}} = g(t)$$

c) En permutant les rôles de t et de λ, en déduire la validité d'une formule analogue à la formule d'échantillonnage de Shannon, pour toute fonction de la forme $f(t) = \sum_{k=1}^{L} \alpha_k e^{2\pi i\lambda_k t}$, où $(\lambda_k, k = 1, \cdots, L)$ est une famille finie de réels et les α_k, $k = 1, \cdots, L$, sont des coefficients complexes.

e) Ce résultat est-il conforme à la règle du choix du pas d'échantillonnage ? (On précisera la mesure spectrale de f.)

Exercice 7.3.7

1) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, vérifiant les conditions notées (S) :

$$f \text{ est positive, intégrable et } \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+n) = 1, \ \forall t \in \mathbb{R}. \qquad (S)$$

a) Montrer que $\int_{\mathbb{R}} f(t)\, dt = 1$.

b) Montrer que, pour toute fonction g intégrable sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (g * f)(t+n) = \int g(s)\, ds, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

2) a) Montrer que, si f vérifie (S), il en est de même des fonctions obtenues en convolant f p-fois par elle-même.

b) Donner des exemples de fonctions vérifiant (S).

3) Caractériser à l'aide de leur transformée de Fourier, les fonctions f intégrables telles que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+n) = 1, \text{ pour presque tout } t \in \mathbb{R}.$$

Chapitre 8

Filtrage des signaux à temps continu

8.1 Introduction

Des opérations du type "filtrage" apparaissent dans certains dispositifs naturels et dans les méthodes de traitement algorithmique des signaux. Par exemple, dans les études géologiques, en particulier dans les recherches pétrolières, on observe, après émission d'un signal $(x(t))_{t>0}$, une "sortie" $(y(t))_{t>0}$ résultant de la superposition des valeurs de x réfléchies par les couches géologiques internes. Si, pour simplifier le modèle, on ne considère qu'un nombre fini de couches réfléchissant une fraction α_k du signal et si l'on tient compte des retards de transmission τ_k, on obtient pour y une expression de la forme

$$y(t) = \sum_k \alpha_k x(t - \tau_k).$$

Si, au contraire, un "continuum" de couches géologiques contribuent à l'écho du signal émis, l'expression de y est plutôt donnée par une intégrale de la forme :

$$y(t) = \int x(t - \tau)\phi(\tau)\ d\tau.$$

Ces expressions suggèrent que des procédés de **convolution** sont mis en oeuvre, soit de façon naturelle, soit par des moyens matériels ou algorithmiques, dans les opérations de filtrage. Ces dispositifs peuvent être modélisés et nous verrons que leur étude mathématique conduit à la notion de convolution. Avant de faire cette étude, donnons deux autres exemples physiques simples de filtres.

Exemple 1 : circuit RC

On considère un circuit électrique comportant une résistance R et un condensateur C. Soit $x = (x(t)_{t\in\mathbb{R}})$ la tension en entrée et $y = (y(t)_{t\in\mathbb{R}})$ la tension aux bornes du condensateur. Exprimons la correspondance $x \to y$.

Soit $i(t)$ l'intensité. D'après la loi d'Ohm, on a

$$Ri(t) + y(t) = x(t).$$

D'autre part, la différence de potentiel aux bornes d'un condensateur de charge Q est $y(t) = \frac{1}{C}Q(t)$ et $i(t) = Q'(t)$. On en tire une équation différentielle qui relie l'entrée x à la sortie y :

$$RCy'(t) + y(t) = x(t).$$

Exemple 2 : système mécanique

Considérons maintenant un système mécanique formé de deux mobiles A et B reliés par un ressort de coefficient k. Leur position respective est repérée au temps t par leur abscisse $x(t)$ et $y(t)$. Ces abscisses sont mesurées à partir des origines respectivement a_0 et b_0 pour lesquelles le ressort est en équilibre (si A est en a_0 et B en b_0, le ressort n'exerce aucune force de détente ou de compression).

Le mouvement du mobile A est imposé ; c'est l'entrée, $x(t)$, du système. Il en résulte pour B un mouvement $y(t)$ (la sortie du système) dû à la force du ressort et au frottement de coefficient α. On note m la masse de B.

La force exercée par le ressort est $-k(y(t) - x(t))$. Le frottement crée une force $-\alpha y'(t)$ proportionnelle à la vitesse. L'équation de la mécanique s'écrit : $my'' = -k(y - x) - \alpha y'$. Soit

$$my'' + \alpha y' + ky = kx.$$

S'il n'y a pas de frottement, on obtient l'équation :

$$y'' + \frac{k}{m}y = \frac{k}{m}x.$$

Bien entendu, ce modèle linéaire n'est valable qu'au voisinage de la position d'équilibre.

Dans les deux exemples, apparaît une équation différentielle à coefficients constants. On note que la solution y n'est pas entièrement définie par la donnée du second membre x, puisque nous n'avons pas spécifié de *conditions initiales*. Le problème que nous résoudrons plus loin est d'exprimer y à l'aide de x comme le résultat d'un **filtrage** (la convolution par une mesure) appliqué à x.

8.2 filtre et convolution

Un filtre peut être envisagé comme une boîte noire, à l'entrée de laquelle on applique un signal $(x(t))_{t\in\mathbb{R}}$ et à la sortie de laquelle on obtient, après traitement dans la boîte, un signal $(y(t))_{t\in\mathbb{R}}$. La correspondance $x \to y$ définit une transformation F :

$$y(t) = (Fx)(t).$$

Pour préciser la nature mathématique de cette transformation, on doit définir l'espace $\mathcal{V}$ des signaux auxquels peut être appliquée la transformation F et l'espace d'arrivée $\mathcal{W}$. En fait, il y a une certaine liberté de choix pour $\mathcal{V}$ comme pour $\mathcal{W}$. Il est raisonnable de supposer que, pour tout t, la valeur au temps t du signal de sortie $(Fx)(t)$ est bien définie et que $\mathcal{V}$ est un espace vectoriel de fonctions sur $\mathbb{R}$, invariant par translation dans le temps. On peut alors faire opérer sur $\mathcal{V}$ le groupe à un paramètre des opérateurs de translation :

$$T_\tau x(t) = x(t + \tau), \forall t, \tau \in \mathbb{R}.$$

On dira alors que la transformation F définit un **filtrage** de l'espace $\mathcal{V}$ si F est une *application linéaire* définie sur $\mathcal{V}$ vérifiant la condition de *stationnarité* suivante :

$$FT_\tau = T_\tau F, \forall \tau \in \mathbb{R}.$$

Cette condition exprime que le dispositif (matériel ou algorithme) effectuant le filtrage est indépendant du temps.

Pour déterminer plus complètement ce qu'est un filtrage du point de vue mathématique, il convient d'imposer à F une condition de *continuité*. Cette condition dépend de la topologie considérée sur l'espace $\mathcal{V}$.

• **Condition de continuité**

Pour fixer les idées, nous prendrons pour $\mathcal{V}$ l'espace $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ des fonctions continues à support compact sur $\mathbb{R}$. Rappelons que cet espace est muni de façon naturelle de la topologie définie ainsi :

une suite de fonctions (x_n) dans $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ converge vers $x \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, si les supports des x_n restent inclus dans un compact fixe et si (x_n) converge uniformément vers x. Le filtre F est continu s'il vérifie la condition :

$$(x_n \overset{\mathcal{C}_c(\mathbb{R})}{\to} x) \Rightarrow (Fx_n \to Fx).$$

Théorème 8.2.1 *Les filtres (linéaires, stationnaires et continus) sur $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ s'identifient à des opérateurs de convolution par des mesures de Radon.*

Preuve : Soit F un filtre vérifiant les conditions de linéarité et de continuité. Pour t fixé, l'application $x \to (Fx)(t)$ définit une mesure de Radon, que nous notons ν_t. On peut écrire le résultat de l'application du filtre F à l'entrée x sous la forme intégrale : $(Fx)(t) = \int x(s)\, d\nu_t(s)$.

La commutation avec les translations dans le temps s'exprime par la condition :

$$\int x(s)\, d\nu_{t+\tau}(s) = (Fx)(t+\tau) = (T_\tau Fx)(t) = (FT_\tau x)(t) = \int x(s+\tau)\, d\nu_t(s).$$

Soit μ la mesure définie par $d\mu(s) = d\nu_0(-s)$. On obtient, en faisant $t = 0$:

$$(Fx)(\tau) = \int x(s+\tau)\, d\nu_0(s) = \int x(\tau - s)\, d\mu(s) = (\mu * x)(\tau),\ \forall \tau \in \mathbb{R}.$$

Inversement, on vérifie facilement que les opérateurs de convolution par des mesures de Radon vérifient les conditions imposées aux filtres.

□

L'application d'un filtre à un signal $x \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ peut ainsi être vue comme l'application à x de la convolution par une mesure μ : la donnée d'un filtre revient donc à la donnée d'une mesure.

On note que, si μ n'est pas à support compact, le résultat $\mu * x$ de l'application du filtre n'est plus une fonction à support compact (voir l'étude de la convolution). Par exemple, si μ est la mesure de densité constante égale à 1, on a $(\mu * x)(t) = \int x(s)\, ds$. Dans ce cas, pour toute entrée x, la sortie y est une constante.

Si $\mu = \lambda_\phi$ a une mesure avec densité ϕ, la convolée $\mu * x$ est la convolée de x par cette densité ϕ et la correspondance entre l'entrée x et la sortie y est donnée par :

$$y(t) = \int x(t-s)\ \phi(s)\, ds = \int x(s)\ \phi(t-s)\, ds.$$

Remarquons qu'en l'absence d'invariance du filtre, au lieu d'un noyau de la forme $\phi(t-s)$, il faudrait considérer un noyau plus général $K(t,s)$, y étant alors donné par $y(t) = \int x(s)K(t,s)\ ds$.

Si μ est une mesure discrète, $\mu = \sum_k \alpha_k \delta_{\tau_k}$, la sortie y est donnée par

$$y(t) = \sum_k \alpha_k x(t - \tau_k).$$

Dans tous les cas, nous obtenons le signal de sortie y comme la superposition des valeurs de l'entrée x pondérées et retardées.

Remarque 8.2.2 Nous avons envisagé le cas d'un filtre défini par convolution par une mesure. D'autres choix sont possibles pour l'espace de signaux tests $\mathcal{V}$. Ceci permet d'élargir la notion de filtre. Par exemple, si on prend comme espace $\mathcal{V}$ l'espace $\mathcal{D} = \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, muni de sa topologie naturelle, on obtient que les filtres sur $\mathcal{D}$ sont définis par convolution par une distribution. Un exemple simple est celui du **dérivateur** qui est le filtre défini par $x \to y = Fx = x'$. Dans le formalisme de la convolution, il s'agit du filtre défini par convolution par la distribution δ_0'. Ce filtre peut naturellement être étendu aux signaux de classe $C^1(\mathbb{R})$.

On note aussi qu'un filtre peut être défini a priori sur un espace $\mathcal{V}$, mais **prolongeable** à un espace plus grand. Par exemple une mesure bornée opère par convolution sur $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, mais peut être prolongée à l'espace des fonctions continues bornées. Cette situation correspond à la notion de filtre *stable.*

• Entrée bornée, sortie bornée

Une condition physiquement importante est qu'à une entrée bornée corresponde une sortie bornée (on dit parfois qu'on a un filtre "BIBO", c'est-à-dire *"entrée bornée, sortie bornée"*, ou encore filtre **stable**). . Il suffit, pour cela que la mesure μ soit bornée. En effet, si μ est une mesure bornée de masse M, on a, pour tout x :

$$\|\mu * x\|_\infty \le M\|x\|_\infty.$$

On peut montrer (exercice) que cette condition est également nécessaire.

Rappelons que, si μ a une densité ϕ, la mesure μ est bornée si et seulement si ϕ est intégrable, $\int |\phi(s)|\ ds < \infty$. Si μ est discrète, $\mu = \sum_k \alpha_k \delta_{a_k}$, avec $a_k \neq a_{k'}$, pour $k \neq k'$, la mesure μ est bornée si et seulement si $\sum_k |\alpha_k| < \infty$.

• Effet du filtrage sur le spectre du signal

Supposons μ bornée. Soit $\widehat{\mu}$ sa transformée de Fourier. En appliquant les résultats obtenus dans les chapitres précédents sur la convolution et la transformée de Fourier, nous obtenons le

Théorème 8.2.3 *La mesure spectrale ν_y du signal y filtré de x par convolution par une mesure bornée μ se déduit de la mesure spectrale ν_x (supposée bornée) de x par multiplication par $\widehat{\mu}$:*

$$d\nu_y(u) = \widehat{\mu}(u)\ d\nu_x(u).$$

Preuve : Nous avons, en appliquant le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} y(t) &= \int x(t-s)\ d\mu(s) = \int\int e^{2\pi iu(t-s)}\ d\nu_x(u)\ d\mu(s) \\ &= \int e^{2\pi iut}(\int e^{-2\pi ius}\ d\mu(s))\ d\nu_x(u) = \int e^{2\pi iut}\widehat{\mu}(u)\ d\nu_x(u). \end{aligned}$$

□

• **Causalité**

Une condition naturelle à imposer au filtre est celle de causalité : si deux signaux x_0 et x_1 coïncident jusqu'au temps t_0, les sorties y_0 et y_1 correspondantes doivent coïncider jusqu'au temps t_0. En effet, dans le cas contraire, le calcul de la sortie nécessiterait la connaissance des valeurs de l'entrée dans le futur, c'est-à-dire à des temps postérieurs à l'instant où est effectué le calcul.

Un filtre vérifiant la condition de causalité est dit **causal** ou encore **réalisable**.

Si l'on tient compte de la linéarité, la causalité est équivalente à la condition : $x(t) = 0$, pour $t \leq t_0 \Rightarrow y(t) = 0$, pour $t \leq t_0$. Si l'on ajoute la condition d'invariance par translation dans le temps (stationnarité), il faut et il suffit que cette condition soit vérifiée pour $t_0 = 0$.

Si l'on qualifie de "causal" un signal nul jusqu'au temps 0, on obtient qu'un filtre stationnaire est causal si et seulement s'il transforme un signal causal en signal causal.

On montre facilement (voir exercice) le résultat suivant :

Théorème 8.2.4 *Un filtre F associé à une mesure μ est causal si, et seulement si, le support de μ est contenu dans* $[0, \infty[$.

Si μ est à support dans $[0, \infty[$, on a, pour toute fonction f μ-intégrable :

$$(\mu * f)(t) = \int_0^\infty f(t-s)\ d\mu(s) = \int_{-\infty}^t f(s)\ d\mu(t-s).$$

Si l'on suppose, de plus, que f est également à support dans $[0, \infty[$ (nul pour $t < 0$), l'expression de la convolution par μ (expression du filtrage) est :

$$(\mu * f)(t) = \begin{cases} \int_0^t f(t-s)\ d\mu(s), & \text{pour } t > 0, \\ 0, & \text{pour } t \leq 0. \end{cases}$$

• **Application d'un filtre à des entrées particulières**

Supposons le filtre défini comme la convolution par une fonction ϕ continue. Le terme **réponse impulsionnelle** du filtre (dans le vocabulaire du traitement du signal), désigne le résultat de l'application du filtre au signal défini par δ_0. Soit :

$$(F\delta_0)(t) = (\delta_0 * \phi)(t) = \phi(t).$$

La réponse impulsionnelle **s'identifie donc avec la fonction ϕ elle-même**. Dans le cas général d'un filtre défini par convolution par une mesure μ, nous identifierons également la réponse impulsionnelle à la mesure μ.

Prenons maintenant pour entrée le signal $e_{2\pi iu}(t) = e^{2\pi iut}$. Si le filtre est défini comme la convolution par une mesure **bornée** μ, on peut l'appliquer aux fonctions continues bornées, donc en particulier aux $e_{2\pi iu}$. On obtient alors :

$$Fe_{2\pi iu} = \widehat{\mu}(u)e_{2\pi iu},$$

la valeur en u de la **transformée de Fourier** de μ.

Pour z paramètre dans $\mathbb{C}$, notons e_z la fonction $e_z(t) = e^{zt}$. Calculons l'application du filtre F (associé à μ) au signal e_z. Sous réserve d'intégrabilité, on a :

$$Fe_z(t) = \int e^{z(t-s)}\ d\mu(s) = e^{zt} \int e^{-zs}\ d\mu(s).$$

Les fonctions e_z sont (du moins formellement, car nous ne sommes pas assurés de la convergence de l'intégrale) **les fonctions propres du filtre**, de valeur propre

$$H_F(z) = \int e^{-zs}\ d\mu(s). \tag{8.1}$$

Il faut toutefois noter que ces signaux ne sont pas nécessairement dans le domaine de définition du filtre.

Définition 8.2.5 On appelle **fonction de transfert** d'un filtre F, la fonction H_F définie (sur une partie du plan complexe) par

$$Fe_z = H_F(z)e_z. \tag{8.2}$$

Cette définition est formelle : il faut se restreindre au domaine de définition de la **transformée de Laplace** de μ : c'est-à-dire aux valeurs de $z \in \mathbb{C}$ tel que e_z soit $|\mu|$-intégrable. On peut alors définir Fe_z et la formule (8.2) a un sens et d'après (8.1) on obtient la valeur en z de la transformée de Laplace de μ.

Dans le cas où μ est "causale" (i.e. à support dans $[0, +\infty[$), la transformée de Laplace de μ s'écrit :

$$\int_0^\infty e^{z(t-s)}\ d\mu(s).$$

Le domaine de définition D de cette transformée (i.e. le sous-ensemble du plan complexe $\{z \in \mathbb{C} : \int_0^\infty e^{-\Re e(z)s}\ d|\mu|(s) < \infty\}$) est une bande verticale du plan complexe, qui peut être un demi-plan ou le plan complexe tout entier, ou vide. On montrera en exercice que

– si μ est causale (i.e. à support dans $\mathbb{R}^+$) et bornée (par exemple avec une densité intégrable), alors D contient le demi-plan fermé $\{\Re e(z) \geq 0\}$.

– si μ est à support compact, le domaine D est le plan complexe tout entier et la transformée de Laplace est analytique.

– si μ est bornée, alors D contient l'axe imaginaire et la restriction de H à cet axe redonne la **transformée de Fourier**.

– si μ a une densité ϕ avec ϕ à support dans $\mathbb{R}^+$ et **bornée**, alors D contient le demi-plan ouvert $\{\Re e(z) > 0\}$.

8.3 Décomposition en filtres élémentaires

• Correspondance entre filtres et fonctions de transfert

8.3.1 Considérons deux filtres F_1 et F_2 appliqués successivement à un signal x :

$$x \to F_1 x \to F_2 F_1 x.$$

Formellement, pour calculer la fonction de transfert du filtre composé $F_2 F_1$, nous appliquons ce filtre au signaux e_z définis par $e_z(t) = e^{zt}$. On obtient :

$$F_1 e_z = H_{F_1}(z) e_z; \; F_2 F_1 e_z = H_{F_1}(z) F_2 e_z = H_{F_1}(z) H_{F_2}(z) e_z.$$

On a donc que la fonction de transfert du filtre composé $F_2 F_1$ est le produit des fonctions de transfert des filtres F_1 et F_2. Ce résultat est évidemment l'analogue du fait que la transformée de Fourier d'un produit de convolution est le produit des transformés de Fourier.

A la composition des filtres correspond la convolution des mesures et le produit des fonctions de transfert

La fonction de transfert de deux filtres mis en série (autrement dit composés) est le produit des fonctions de transfert des deux filtres.

Souligons le fait que l'opération de composition, pour des filtres linéaires et invariants (stationnaires), est commutative. L'opération de composition correspond à celle de convolution qui est une opération commutative. Ceci serait faux si l'invariance ou la linéarité n'étaient pas vérifiées.

Pour une classe raisonnable de filtres, deux filtres ayant la même fonction de transfert sont identiques. C'est par exemple le cas pour des filtres associés à une mesure bornée μ. En effet, dans ce cas, le domaine de définition de la fonction de transfert contient le cercle unité et la restriction de la fonction de transfert au cercle unité redonne la transformée de Fourier de μ. Comme nous avons vu que la donnée de la transformée de Fourier détermine μ, il en résulte qu'un filtre associé à une mesure bornée est bien déterminé par sa fonction de transfert.

Soit donnée une fonction de transfert H d'un filtre F. Supposons que cette fonction se décompose en produit de deux fonctions H_1 et H_2 qui sont les fonctions de transfert de deux filtres F_1 et F_2. Si l'on peut appliquer le principe d'unicité précédent, on est assuré que le filtre composé $F_2 F_1$, ou $F_1 F_2$, est une réalisation du filtre F. On peut ainsi décomposer le filtre F en filtres plus simples à réaliser.

En combinant cette propriété de composition (c'est-à-dire $x \to F_1 x \to F_2 F_1 x$) avec l'addition des sorties de filtres en parallèles ($x \to F_1 x + F_2 x$), on peut espérer réaliser une large classe de filtres à partir de filtres élémentaires et de ces opérations de composition et d'addition.

Au paragraphe suivant, nous allons appliquer cette méthode aux filtres dynamiques, c'est-à-dire aux filtres à fonction de transfert rationnelle.

• Filtres à fonction de transfert rationnelles

Nous dirons qu'un filtre F est à fonction de transfert H **rationnelle**, si la fonction de transfert H de F est une fraction rationnelle, i.e. s'il existe des coefficients $a_0, a_1, ..., a_p, b_0, b_1, ..., b_q$, avec $a_0 = 1$ tels que :

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z + ... + b_q z^q}{a_0 + a_1 z + ... + a_p z^p} = \frac{B(z)}{A(z)}. \tag{8.3}$$

On fera dans la suite l'hypothèse que la fraction H est écrite sous forme irréductible, i.e. que A et B sont des polynomes premiers entre eux.

Supposons que le filtre (appelé filtre dynamique), $x \to y = Fx$, soit tel que y vérifie l'équation différentielle à coefficients constants :

$$a_0 y + a_1 y' + \ldots + a_p y^{(p)} = b_0 x + \ldots + b_q x^{(q)}. \tag{8.4}$$

Un calcul formel immédiat, en prenant x de la forme e_z, montre que la fonction de transfert de ce filtre est donnée par (8.3).

La relation (8.4) ne détermine pas μ, mais nous allons voir qu'il y a unicité si μ est causale.

• **Calcul d'un filtre causal dynamique**

8.3.2 Pour simplifier les notations, nous faisons le calcul pour un filtre d'ordre 2. Soient α, β, γ des coefficients constants, réels ou complexes, avec $\alpha \neq 0$. Partons de l'équation différentielle

$$\alpha y'' + \beta y' + \gamma y = x. \tag{8.5}$$

Nous allons déterminer une mesure **causale** μ telle que, pour tout signal x qui est C^∞ à support compact, $y = \mu * x$ soit solution de (2). Cette mesure μ aura une densité. Comme de plus elle doit être à support dans $[0, \infty[$ (causalité), nous cherchons une mesure μ de densité $Y\phi$, où Y est la fonction échelon et ϕ une fonction au moins de classe C^2. (Nous verrons a posteriori que cette fonction est une combinaison d'exponentielles et donc en fait C^∞.)

Si μ est de densité $Y\phi$, $y = \mu * x$ est de la forme

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} \phi(t-s)\, x(s)\; ds.$$

Pour dériver cette expression en t, on rappelle la formule, facile à justifier, pour une fonction f continue de deux variables :

$$\frac{d}{dt} \int_a^t f(t,s)\; ds = f(t,t) + \int_a^t f'_t(t,s)\; ds.$$

En dérivant deux fois et en reportant dans (8.5), nous obtenons :

$$\int_{-\infty}^{t} (\alpha\phi'' + \beta\phi' + \gamma\phi)(t-s)\, x(s)\; ds + \alpha[\phi(0)x'(t) + \phi'(0)x(t)] + \beta\phi(0)x(t) = x(t).$$

Il s'agit d'une relation qui doit être vérifiée quel que soit x C^∞ à support compact. Des conditions suffisantes (on peut montrer qu'elles sont aussi nécessaires) pour que cette relation soit vérifiée sont :

$$\alpha\phi'' + \beta\phi' + \gamma\phi = 0, \tag{8.6}$$
$$\alpha\phi(0) = 0,\ \alpha\phi'(0) + \beta\phi(0) = 1 \tag{8.7}$$

Les dernières conditions se réduisent à $\phi(0) = 0$ et $\phi'(0) = \alpha^{-1}$.

La fonction ϕ doit donc être solution de l'équation différentielle à coefficients constants 8.6 et vérifier les conditions initiales : $\phi(0) = 0$, $\phi'(0) = \alpha^{-1}$.

Comme on le sait, cet ensemble de conditions détermine ϕ. Une méthode classique pour expliciter ϕ est celle de l'équation caractéristique : on recherche des solutions particulières de 8.6 de la forme $e^{\lambda t}$. (Noter qu'il s'agit du même principe que pour la fonction de transfert : les fonctions exponentielles sont les fonctions propres des opérateurs linéaires invariants ; ici on cherche les valeurs λ qui annulent la fonction de transfert). Ceci conduit à l'équation **caractéristique** :

$$\alpha\lambda^2 + \beta\lambda + \gamma = 0.$$

Plaçons nous, pour fixer les idées, dans le cas où l'équation caractéristique possède deux solutions λ_1 et λ_2 distinctes. La fonction ϕ est une combinaison linéaire des solutions particulières $t \to e^{\lambda_1 t}$ et $t \to e^{\lambda_2 t}$. Compte-tenu des conditions initiales, on obtient :

$$\phi(t) = \frac{1}{\alpha} \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Dans le cas d'une racine double, $\lambda_1 = \lambda_2$, en utilisant les deux solutions particulières de 8.6, $t \to e^{\lambda_1 t}$ et $t \to te^{\lambda_1 t}$, on montre que la fonction ϕ est la forme

$$\phi(t) = \frac{1}{\alpha} te^{\lambda_1 t}.$$

Le filtre défini par la mesure μ de densité $Y\phi$ peut être appliqué à différents espaces de fonctions, par exemple : fonctions continues à support compact, fonctions continues nulles pour $t \leq 0$. Dans le cas où x est nulle pour $t \leq 0$, il suffit de supposer x localement intégrable (par exemple la fonction échelon Y est de ce type).

Le résultat y de l'application du filtre à une entrée x nulle pour $t \leq 0$ est :

$$y(t) = (\mu * x)(t) = \begin{cases} \int_0^t x(s)\ \phi(t-s)\ ds, & \text{pour } t > 0, \\ 0, & \text{pour } t \leq 0. \end{cases}$$

Cherchons sous quelle condition la mesure μ est **bornée**. Les exponentielles $e^{\lambda t}$ sont intégrables sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si leur module vérifie $\int_0^\infty e^{\Re e(\lambda) t}\, dt < \infty$, ce qui est réalisé si et seulement si $\Re e(\lambda) < 0$. On peut montrer que, pour la fonction ϕ qui est une combinaison de ces fonctions exponentielles (ou d'exponentielles multipliées par un polynome), les exponentielles ne peuvent pas se compenser.

Naturellement, les raisonnements précédents peuvent être appliqués à une équation de la forme (8.4) générale.

On a ainsi obtenu :

Proposition 8.3.3 *La condition nécessaire et suffisante pour que le filtre dynamique causal associé à (8.5) soit borné est que les racines λ_k de l'équation caractéristique vérifient $\Re e(\lambda_k) < 0$.*

Remarque 8.3.4 On peut également dans ce qui précède utiliser le calcul des dérivées de la fonction $Y\varphi$ au sens des distributions.

En considérant la mesure de densité $Y\varphi$ comme une distribution, nous avons :

$$\begin{aligned} (Y\varphi)' &= \varphi(0)\delta_0 + Y\varphi', \\ (Y\varphi)'' &= \varphi(0)\delta_0' + \varphi'(0)\delta_0 + Y\varphi'' \end{aligned}$$

Rappelons que, si φ est dans C_c^∞, on peut convoler φ par une distribution μ et on a la formule de dérivation :

$$(\mu * \varphi)' = \mu' * \varphi = \mu * \varphi'.$$

Nous avons d'autre part : $\delta_0 * \varphi = \varphi$ et $\delta_0' * \varphi = \varphi'$. Pour que $y = (Y * \varphi) * x$ soit solution de l'équation (8.5) il faut donc que l'on ait :

$$[Y(\alpha\varphi'' + \beta\varphi' + \gamma\varphi)] * x + (\alpha\varphi'(0) + \beta\varphi(0))x + \gamma\varphi(0)x' = x.$$

Cette relation devant être vérifiée quel que soit $x \in C_c^\infty$, on retrouve ainsi les conditions initiales 8.7 et l'équation 8.6 auxquelles doit satisfaire φ.

• **Phénomène de résonance**

8.3.5 Reprenons l'équation (8.5) dans le cas particulier

$$\frac{1}{\omega^2}y'' + y = x, \tag{8.8}$$

où ω est un paramètre réel > 0. La mesure causale μ est ici la mesure de densité $\omega Y(t)\sin(\omega t)$. C'est une mesure non bornée. Pour une entrée x, la sortie y est donnée par

$$y(t) = \omega \int_{-\infty}^{t} \sin\omega(t-s)\ x(s)\ ds = \omega \int_0^\infty \sin\omega s\ x(t-s)\ ds.$$

Calculons cette sortie pour différente entrées.

Pour $x = Y$, on a, pour $t \geq 0$,

$$y(t) = \omega \int_0^t \sin\omega s\ ds = 1 - \cos\omega t.$$

La sortie reste bornée pour cette entrée. Prenons maintenant $x(t) = Y(t)\sin\omega_0 t$.

En utilisant les formules $\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$, nous obtenons, pour $\omega_0 \neq \pm\omega$,

$$\begin{aligned} y(t) &= \omega \int_0^t \sin\omega(t-s)\sin\omega_0 s\ ds \\ &= \frac{\omega}{2}\int_0^t [\cos((\omega_0+\omega)s - \omega t) - \cos((\omega_0-\omega)s + \omega t)]\ ds \\ &= \frac{\omega}{2}\frac{1}{\omega_0+\omega}(\sin\omega_0 t + \sin\omega t) + \frac{\omega}{2}\frac{1}{\omega_0-\omega}(\sin\omega_0 t - \sin\omega t) \\ &= \frac{\omega}{\omega_0^2-\omega^2}(\omega_0\sin\omega t - \omega\sin\omega_0 t). \end{aligned}$$

On voit que la sortie est encore bornée. Par contre, si $\omega_0 = \omega$, la sortie est non bornée, donnée pour $t > 0$ par :

$$y(t) = \frac{1}{2}(\sin\omega t - \omega t\cos\omega t).$$

Il s'agit là du phénomène de **résonance** qui a des conséquences pratiques très importantes. (Résonance, du verbe résonner ; au participe présent, les deux formes "résonnant" ou "résonant" s'écrivent !).

• **Décomposition en filtres simples**

Nous allons décomposer la fraction donnée par (8.3) en éléments simples de la forme

$$\frac{1}{(z-c)^\ell},$$

où c est un pôle de la fraction H. Il s'agit donc de déterminer les filtres élémentaires associés à un tel élément simple.

8.3.6 *Filtres associés à un élément simple*

Considérons d'abord le cas $\ell = 1$, c'est-à-dire le cas d'un pôle simple. Un calcul direct montre que le filtre causal, dont la mesure associée a une densité de la forme $t \to Y(t)\, e^{ct}$, Y étant la fonction échelon, a pour fonction de transfert la fraction rationnelle élementaire $1/(z-c)$. En d'autres termes, la sortie y pour une entrée x est donnée par

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{c(t-s)} x(s) ds. \tag{8.9}$$

Le domaine de définition de la transformée de Laplace est ici : $\Re e\, z > \Re e\, c$.

Ce filtre correspond à l'équation différentielle

$$y' - cy = x,$$

puisqu'une solution de cette équation est donnée par (8.9), quand on cherche à la réaliser, à partir d'une entrée x par un filtre causal de densité $Y(t)\, e^{ct}$.

Cette mesure est bornée (i.e. ici de densité intégrable), si et seulement si

$$\int_0^\infty |e^{ct}| dt = \int_0^\infty e^{\Re e(c)t} dt < \infty, \quad \text{i.e. } \Re e(c) < 0.$$

8.3.7 *Cas d'un pôle multiple :* $1/(z-c)^\ell$

Déterminons la mesure μ_p correspondante. L'opération puissance sur la fonction de transfert correspond à la convolution (ℓ fois) de la mesure μ par elle-même (élévation à la puissance ℓ pour le produit de convolution) . Un calcul simple par récurrence montre que, si μ est la mesure de densité $e^{ct} Y(t)$, alors $\mu_\ell = \mu * ... * \mu$ (avec ℓ facteurs de convolution) a pour densité :

$$e^{ct} \frac{t^{\ell-1}}{(\ell-1)!} Y(t).$$

On note que, pour $c \geq 0$ la mesure μ n'est pas bornée, mais que son produit de convolution par elle-même est bien défini. Ceci est valable, de façon générale, pour les mesures à support dans $[0, \infty[$, c'est-à-dire dans le cas causal.

Dans le cas d'un pôle multiple, la condition nécessaire et suffisante pour que la mesure μ_ℓ soit bornée est encore $\Re e(c) < 0$.

Cas d'une fraction rationnelle générale

Revenons au cas où la fonction de transfert est une fraction rationnelle H donnée par (8.3). Ecrivons la décomposition de H en éléments simples. Elle est de la forme :

$$H(z) = S(z) + \sum_k \sum_{0<j\leq \ell_k} \frac{\alpha_{k,j}}{(z-c_k)^j},$$

où :
– S est le polynome quotient de B par A, ce terme ne figurant dans la décomposition de H que si $\deg(B) \geq \deg(A)$,
– les c_k sont les pôles de H, leur multiplicité étant notée ℓ_k,
– les $\alpha_{k,j}$ sont des constantes.

La partie correspondant aux pôles est associée à un filtre qui peut être réalisé par somme des filtres (causaux) élémentaires décrits ci-dessus. En particulier le filtre somme est donné par la convolution par une mesure de masse finie si et seulement si les pôles ont une partie réelle < 0.

La partie polynomiale n'est associée à une mesure que si elle se réduit à une constante (elle correspond alors à un multiple de la masse de Dirac à l'origine). Si le degré du polynôme S est ≥ 1, alors S n'est pas la fonction de transfert d'une mesure (mais en fait d'une distribution qui est simplement ici un opérateur différentiel linéaire à coefficients constants). L'exemple le plus simple est donné par $S(z) = z$ qui correspond au filtre défini par $y = x'$.

8.4 Fenêtres

Une "fenêtre" est une fonction à support compact ou du moins à décroissance rapide. Une fenêtre peut être appliquée à un signal dans l'espace temporel ou dans l'espace des fréquences.

Dans l'espace direct (en temporel), l'application d'une fenêtre consiste à multiplier le signal par la fonction définissant la fenêtre. En choisissant des fenêtres à support compact, on peut ainsi étudier un signal sur une durée finie : par exemple, dans les signaux de parole, on isole des signaux ayant des caractéristiques bien définies et une durée de vie finie.

L'échange, par transformation de Fourier, entre la multiplication ordinaire et la convolution montre que, si l'on applique une fenêtre w (multiplication par w d'un signal x ($x \to w.x$), le résultat est un signal dont la mesure spectrale est la convolée de la mesure spectrale de x par la transformée de Fourier de w : la mesure spectrale μ_x est remplacée par $\widehat{w} * \mu_x$.

On peut également appliquer une fenêtre dans l'espace des fréquences : les fenêtres permettent de régulariser, ou d'isoler une composante d'un signal, d'effectuer une décomposition. Cette opération revient à une convolution sur le signal dans l'espace temporel, puisque :

à l'opération de "fenêtrage" dans l'un des espaces (temporel ou fréquentiel) correspond l'opération de convolution par la transformée de Fourier de la fenêtre dans l'autre espace.

La régularité de la fenêtre correspond à la décroissance à l'infini de sa transformée de Fourier. Les fenêtres les plus simples, les fenêtres rectangulaires $R_{a,b}$ définies par la fonction $1_{[a,b]}$ sont peu régulières et introduisent des discontinuités artificielles dans le signal traité. On lui préfèrera donc des fenêtres plus régulières, telles que celles que l'on obtient par convolution successive d'une fenêtre rectangulaire avec elle-même. Par exemple, la fenêtre triangulaire est définie à partir de

$R = R_{[-\frac{1}{2}T,\frac{1}{2}T]}$ par :

$$\frac{1}{T}(R*R)(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T}, & \text{pour } |t| \leq T, \\ 0, & \text{pour } |t| > T. \end{cases}$$

Notion de filtre passe-bas, passe-haut, passe-bande

Considérons d'abord l'exemple très simple suivant. Soient F_0 et F_1 les filtres définis respectivement, pour une constante $a > 0$, par

$$F_0x(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(t-a)]$$

$$F_1x(t) = \frac{1}{2}[x(t) - x(t-a)]$$

En un sens, on peut dire que le premier est un filtre passe-haut et le deuxième un filtre passe-bas. Le premier régularise, lisse le signal, le deuxième extrait les détails. A partir des deux signaux filtrés, on peut reconstituer le signal d'entrée x : $x = F_0x + F_1x$.

La transformée de Fourier de μ_0 est $e^{\pi iau}\cos\pi au$. Elle vaut 1 pour $u = 0$.

La transformée de Fourier de μ_1 est $-ie^{\pi iau}\sin\pi au$. Elle s'annule en 0.

Du point de vue fréquentiel, le premier atténue les fréquences plus élevées et laisse passer les fréquences proches de 0, sans atténuation. Un tel filtre est dit *passe-bas*.

Un *filtre idéal passe-bande* correspond à une fenêtre rectangulaire (en fréquence) ne laissant passer que les fréquences appartenant à une bande de fréquences donnée. Un tel filtre est dit idéal, car il n'est pas exactement réalisable physiquement et, du point de vue algorithmique, il nécessiterait une quantité infinie de calculs !

Exemple 8.4.1 Considérons le filtre (RC) (cf. exemple de l'introduction) défini, pour $\alpha = RC$ par

$$\alpha y' + y = x.$$

Il est associé à la convolution par la mesure $1_{[0,\infty[}\frac{1}{\alpha}e^{-\frac{1}{\alpha}t}$. C'est une mesure bornée, de masse 1, de transformée de Fourier $\frac{1}{1+\alpha 2\pi iu}$.

Le module de la transformée de Fourier (appelé **gain complexe** ou **réponse en fréquence**) est

$$\frac{1}{|1 + \alpha 2\pi iu|} = \frac{1}{|1 + 4\pi^2\alpha u^2|^{\frac{1}{2}}}.$$

Le module est maximum et vaut 1 pour $u = 0$. Il s'agit d'un filtre passe-bas : l'application du filtre a pour effet de multiplier la mesure spectrale du signal d'entrée par $\frac{1}{1+\alpha^{-1}2\pi iu}$: les fréquences hautes sont atténuées.

8.5 Exercices

Exercice 8.5.1 *Filtre causal*

1) Montrer qu'un filtre F associé à une mesure μ est causal si le support de μ est contenu dans $[0, \infty[$.

2) Montrer que cette condition est nécessaire.

[[*indications* : 1) Si μ est à support dans $[0, \infty[$, on a

$$Fx(t) = \int_0^\infty x(t-s)\ d\mu(s).$$

Si x est un signal nul pour les temps négatifs, on a alors :

$$(Fx)(t) = \begin{cases} \int_{-\infty}^t x(t-s)\ d\mu(s), & \text{pour } t > 0, \\ 0, & \text{pour } t \leq 0. \end{cases}$$

On a donc $Fx(t) = 0$, pour $t < 0$, si le signal x est nul pour $t < 0$.

2) Pour montrer la réciproque, supposons que l'on ait $\mu\{t < 0\} > 0$. Il existe alors une fonction z continue à support dans $]-\infty, 0]$, telle que

$$\int z(s)\ d\mu(s) \neq 0.$$

Par continuité, on a encore

$$\int z(s+t)\ d\mu(s) \neq 0,$$

pour t dans un voisinage $]-\epsilon, \epsilon[$ de 0. Posons $x(t) = z(-t)$. Le signal x est nul pour $t < 0$, et on a

$$\int x(t-s)\ d\mu(s) = \int z(s-t)\ d\mu(s) \neq 0,$$

pour $t \in]-\epsilon, 0[$. Donc le filtre F n'est pas causal.]]

Exercice 8.5.2

a) Soient a et b des constantes réelles. Calculer la fonction ϕ à support dans $[0, \infty[$ dont la transformée de Laplace est :

$$F(z) = \frac{1}{z^4 + z^2(a^2 - b^2) - a^2 b^2}, \text{ pour } \Re e(z) > |b|.$$

[[Décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{2b(a^2+b^2)}\left[\frac{1}{z-b} + \frac{-1}{z+b} + \frac{-2b}{z^2+a^2}\right]]$$

b) Calculer la fonction ϕ, à support dans $[0, \infty[$, dont la transformée de Laplace est :

$$F(z) = \frac{1}{(z-1)(z+2)^2}.$$

Exercice 8.5.3

1) a) Soit α un paramètre réel ou complexe. On note Y la fonction échelon, définie par $Y(t) = 1$, pour $t \geq 0$, $= 0$, pour $t < 0$.

On considère l'équation différentielle

$$\alpha y(t) + y'(t) = x(t). \tag{$*$}$$

Calculer la fonction φ telle que $y = \mu * x$ soit solution de $(*)$, μ étant la mesure de densité $Y\varphi$,

[On pourra faire le calcul par une méthode de dérivation sous le signe $\int$, ou utiliser le calcul des dérivées de la fonction $Y\varphi$ au sens des distributions (cf. remarque 8.3.4).]

b) Exprimer, sous forme d'une intégrale, la sortie y du filtre $x \to y = \mu * x$ pour une entrée x causale.

c) Calculer la sortie y de ce filtre, quand l'entrée est égale à la fonction échelon Y.

d) Pour quelles valeurs de α, le filtre causal $x \to \mu * x$ est-il borné (i.e. transforme un signal x borné, $\|x\|_\infty < \infty$, en un signal y borné, $\|y\|_\infty < \infty$) ?

2) On considère maintenant l'équation différentielle

$$\alpha^2 y(t) + 2\alpha y'(t) + y''(t) = x'(t) + \beta x(t), \tag{$**$}$$

α et β étant des paramètres réels ou complexes.

a) Quelle est la fonction de transfert correspondant à cette équation différentielle ?

b) Calculer la densité, de la forme $Y\psi$, de la mesure ν causale telle que $y = \nu * x$ soit solution de $(**)$.

c) Calculer la sortie du filtre $y \to \nu * x$, quand l'entrée est égale à la fonction échelon Y.

Exercice 8.5.4 *Résonance*

1) On considère l'équation différentielle

$$\alpha y''(t) + y(t) = x(t), \tag{1}$$

où α est un constante réelle non nulle.

a) Calculer un filtre causal $F : x \to y$, dont la sortie y est reliée à x par (1). On déterminera :
- la fonction de transfert de F,
- la densité de la mesure μ_F associée au filtre F.

b) Cette mesure est-elle bornée ?

c) On suppose $\alpha > 0$. Expliquer le phénomène de résonance, en calculant un signal borné x tel que la sortie y soit non bornée.

2) On considère le cas général d'un filtre défini par la convolution par une mesure μ. Le phénomène de résonance est-il possible quand la mesure μ est bornée ?

Exercice 8.5.5

Notations et rappels :

On note Y la fonction échelon définie par $Y = 1_{[0,\infty[}$.

Etant donnée une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, on définit, pour les valeurs de $z \in \mathbb{C}$ pour lesquelles l'intégrale a un sens, la transformée de Laplace de f par

$$Lf(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{-zt} f(t)\, dt.$$

Dans la suite, λ est un paramètre réel.

I) Calculer la transformée de Laplace des fonctions
$f_1 : t \to Y(t)e^{-\lambda t}\text{sin}t$
$f_2 : t \to Y(t)e^{-\lambda t}\text{cos}t$.

On précisera le domaine de définition de ces transformées.

II) On considère le filtre causal défini par l'équation différentielle

$$(\lambda^2 + 1)y + 2\lambda y' + y'' = x. \qquad (*)$$

1) Quelle est la fonction de transfert de ce filtre ?

2) Calculer la densité, à support dans $\mathbb{R}^+$, de la forme $Y\varphi$, de la mesure μ telle que $y = \mu * x$ soit solution de $(*)$.

On fera le calcul par trois méthodes :
a) dérivation sous le signe somme,
b) dérivation de la fonction $Y\varphi$ au sens des distributions,
c) méthode de la fonction de transfert.

III 1) Expliciter, sous forme d'une intégrale, la sortie y du filtre pour une entrée x causale.

2) On prend pour entrée x la fonction échelon Y.

a) Calculer la sortie y correspondante.

b) Pour quelles valeurs de λ cette sortie y est-elle bornée ?

3) a) Pour quelles valeurs de λ le filtre transforme-t-il un signal borné en signal borné ?

b) Que peut-on dire du domaine de définition de la transformée de Laplace dans ce cas ?

Peut-on avoir un phénomène de résonance pour certaines valeurs de λ ?

IV) 1) Déterminer tous les filtres $\mathcal{F}$ tels que $y = \mathcal{F}x$ soit solution de $(*)$.

2) Parmi ces filtres quels sont ceux qui transforment un signal borné en signal borné ?

V) Mêmes questions pour l'équation différentielle

$$(\lambda^2 + 1)y + 2\lambda y' + y'' = \beta x' + x. \qquad (*)$$

Exercice 8.5.6

1) Pour des entrées x 1-périodiques, calculer la sortie du filtre dynamique correspondant à l'équation :

$$y' - \lambda y = x. \tag{1}$$

2) Même question pour l'équation :

$$y'' + y' + y = x. \tag{2}$$

[[*indications* : Si $x(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{2\pi int}$ est le développement de x en série de Fourier, le développement de y solution de $(*)$ est donné par

$$y(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{a_n}{2\pi in - \lambda} e^{2\pi int}.$$

En considérant l'équation homogène $y' - \lambda y = 0$, on voit qu'il existe au plus une solution périodique. Si x est continue bornée et si $\Re e\, \lambda < 0$, on peut calculer

$$y(t) = e^{\lambda t} \int_{-\infty}^{t} x(s)\ e^{-\lambda s}\ ds = \int_0^{\infty} x(t-s) e^{\lambda s}\ ds,$$

qui est une solution de (1) bien définie et 1-périodique, si x est 1-périodique.

De même, si $\Re e\, \lambda > 0$, la solution s'exprime sous la forme

$$y(t) = e^{\lambda t} \int_{t}^{\infty} x(s)\ e^{\lambda s}\ ds = \int_{-\infty}^{0} x(t-s) e^{\lambda s}\ ds.$$

Le filtre est régularisant (passe-bas). Le signal y en sortie est plus régulier que le signal d'entrée x. Si l'on fait opérer le filtre sur les fonctions continues, la sortie est dérivable, de dérivée continue. On a ici également un opérateur de $L^2(\mathbb{T})$ dans lui-même.

Pour $\lambda = 0$, il s'agit de l'équation $y' = x$. L'application $x \to y$ s'écrit en terme de séries de Fourier :

$$\sum_n c_n e^{2\pi int} \to \frac{1}{2\pi i} \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n} c_n e^{2\pi int}.$$

On voit que, pour $x \in L^2(\mathbb{T})$ d'intégrale nulle, y est une fonction continue dont la dérivée existe au sens des distributions et est un élément de $L^2(\mathbb{T})$ égal à x.]]

Complément : étude de l'exemple 2 (cf. introduction)

Considérons d'abord le modèle avec ressort, dans le cas où il n'y a pas de frottement. L'équation est dans ce cas : $my'' + ky = kx$, soit, en posant $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$,

$$\frac{1}{\omega^2} y'' + y = x.$$

La période "propre" du système est $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$.

Si l'entrée $x(t) = Y(t)\text{sin}\omega t$ est imposée, la sortie est $y(t) = \frac{1}{2}Y(t)[\text{sin}\omega t - \omega t\text{cos}\omega t]$. L'énergie potentielle est $\frac{1}{2}k(y-x)^2$ (l'intégrale du travail de la force qu'il faut exercer pour comprimer le ressort, qui est proportionnelle à $|y-x|$), l'énergie cinétique due au mouvement de B est $\frac{1}{2}my'^2$, l'énergie du système est la somme des deux.

On a, pour $t > 0$, $y'(t) = \frac{1}{2}\omega^2 t\text{sin}\omega t$, et $y - x = -\frac{1}{2}[\text{sin}\omega t + \omega t\text{cos}\omega t]$. D'où l'énergie du système à l'instant $t > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}k(y-x)^2 + \frac{1}{2}my'^2 &= \frac{1}{8}k(\text{sin}\omega t - \omega t\text{cos}\omega t)^2 + \frac{1}{8}m(\omega^2 t\text{sin}\omega t)^2 \\ &= \frac{m}{8}(\omega^4 t^2 - \omega^3 t\text{sin}2\omega t + \omega^2\text{sin}^2\omega t). \end{aligned}$$

L'énergie du système croît en t^2. Pour obtenir l'énergie apportée au système par unité de temps, dérivons l'énergie totale. On obtient, au facteur constant $\frac{m}{8}$ près : $(\omega^4 t^2 - \omega^3 t\text{sin}2\omega t + \omega^2\text{sin}^2\omega t)' = 4\omega^4 t\text{sin}^2\omega t$.

On voit que l'énergie apportée par unité de temps n'est pas constante, mais a une amplitude qui croît linéairement. Pour entretenir le mouvement, il faut exercer sur F une force dont l'amplitude $k|y-x|$ tend vers l'infini.

Les phénomènes de résonance peuvent provoquer des nuisances graves. Un exemple célèbre est celui du pont qui au 19ème siècle s'est effondré sur le passage d'une troupe marchant au pas. Le mouvement imposé au pont par les pas des marcheurs est entré en résonance avec une fréquence propre du pont, qui, compte-tenu de la flexibilité de la structure métallique, s'est comporté comme le modèle du ressort décrit dans l'exemple. Par contre, si la troupe “rompt le pas”, chacun marche à sa fréquence personnelle et la fraction d'énergie apportée au pont par l'effet de résonance est réduite.

Cas général, avec frottement

$$my'' + \alpha y' + ky = kx.$$

Les racines sont données par :

$$-\frac{\alpha}{2m} \pm \sqrt{(\frac{\alpha}{2m})^2 - \frac{k}{m}}.$$

Le coefficient α est > 0. Le discriminant est $\alpha^2 - 4km$. Si le coefficient de frottement est assez grand, les racines sont réelles < 0. Dans tous les cas, la partie réelle des racines est < 0. Le système est stable : *entrée bornée* $\Rightarrow$ *sortie bornée*. Il n'y a pas de phénomène de résonance. L'énergie est dissipée par frottement.

Chapitre 9

Filtrage des signaux à temps discret

Introduction

Le développement technologique a donné une importance considérable au traitement numérique des signaux. Alors que les méthodes analogiques permettent de traiter des signaux à temps réel, les méthodes numériques ne peuvent être appliquées qu'à des signaux préalablement échantillonnés. Cet inconvénient est compensé par la puissance des méthodes algorithmiques paramétrisables et leur souplesse d'utilisation.

9.1 Espaces de signaux à temps discret

Un signal à temps discret est une fonction définie sur $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$:

$$x : n \to x(n).$$

A partir d'un signal à temps continu, on obtient par échantillonnage un signal à temps discret. Si Δ est la période d'échantillonnage, le signal numérique échantillonné à partir d'un signal à temps continu $x : t \in \mathbb{R} \to x(t)$ est donc la suite x_Δ définie par $x_\Delta : n \in \mathbb{Z} \to x_\Delta(n) = x(n\Delta)$.

Notons au passage quelques signaux échantillonnés de signaux usuels : *signal échelon* ($x(n) = 1$, si $n \geq 0$, $= 0$, sinon), *sinusoïde discrète*, *exponentielle discrète...*

Le passage du temps continu au temps discret est une première réduction permettant le traitement numérique. Notons que d'autres contraintes sont imposées : plages de temps limitées, quantification des valeurs numériques du signal. Ces contraintes liées aux problèmes de la mémoire de stockage, de la précision des calculs, de leur vitesse d'exécution, conditionnent fortement les méthodes algorithmiques mises en oeuvre.

Dans ce qui suit, nous allons reprendre l'étude faite pour les signaux à temps continu (mesure spectrale, filtrage, filtres dynamiques) en l'adaptant au cas discret.

9.1.1 *Quelques espaces de signaux à temps discret*

De même que dans le cas continu, on peut classer les signaux à temps discret suivant des conditions de grandeur, i.e. de localisation. Il est clair qu'il n'y a pas ici de problème de continuité ou de mesurabilité.

Un signal à temps discret x est dit *sommable* si $\sum_n |x(n)| < \infty$. La classe des signaux sommables s'identifie donc à l'espace $\ell^1(\mathbb{Z})$.

Un signal à temps discret x est d'*énergie finie*, notée $E(x)$, s'il vérifie $E(x) = \sum_n |x(n)|^2 < \infty$. La classe des signaux d'énergie finie s'identifie à l'espace $\ell^2(\mathbb{Z})$.

On note qu'en l'absence de propriétés de régularité d'un signal continu, il n'y a pas de relation entre les valeurs de l'énergie calculées pour le signal à temps continu et pour le signal échantillonné.

Un signal est *périodique*, de période $T > 0$, s'il vérifie $x(n+T) = x(n), \forall n \in \mathbb{Z}$. Le signaux périodiques non identiquement nuls ne sont évidemment pas sommables, mais ils ont une valeur moyenne finie.

Plus généralement, un signal est de *valeur moyenne finie*, s'il vérifie les conditions

$$\lim_N \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^{N} x_n^+, \quad \lim_N \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^{N} x_n^-,$$

existent et sont finies, x^+ et x^- désignant les parties positives et négatives du signal x. On peut alors définir la valeur moyenne du signal x par

$$m(x) = \lim_N \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^{N} x_n.$$

Il est clair que la valeur moyenne d'un signal périodique est égale à sa moyenne sur un intervalle de période.

• Convolution de suites

Pour la convolution entre signaux à temps discret (i.e. entre suites indexées par $\mathbb{Z}$), voir le chapitre sur les algèbres de convolution.

Rappelons que l'on dispose de plusieurs algèbres de convolution formées de suites indexées par $\mathbb{Z}$:
- l'algèbre de convolution $(\ell^1(\mathbb{Z}), *)$;
- les algèbres de convolution $(\ell(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}), *)$, des suites périodiques, de période p (p étant un entier > 0 fixé) qui peuvent être vues comme une version discrétisée et de taille finie des algèbres de convolution $L^1(\mathbb{R})$ ou $L^1(\mathbb{T}^1)$;
- l'algèbre de convolution des suites à support dans $\mathbb{Z}^+$.

9.1.2 *Les mesures dans le cas discret*

Examinons ce que donne, dans le cas discret, le formalisme développé dans le cas de $\mathbb{R}$ pour définir les mesures et les distributions. Nous devons d'abord choisir un espace de fonctions tests. Aucune condition de régularité n'étant imposée dans le cas discret, les espaces $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ et $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ sont remplacés par l'espace, que l'on pourrait noter $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$, des suites à support compact (i.e. ici fini), espace des suites $x = (x(n))$ telles qu'il existe A, avec $x(n) = 0$, pour $|n| > A$.

Montrons que toute forme linéaire sur cet espace correspond (et de façon unique) à la donnée d'une suite. Notons δ_n les suites "Dirac" ou "Kronecker" à l'instant n, définies par $\delta_n(k) = 1$, si

$k = n$, $= 0$, si $k \neq n$. Si $a = (a_n)$ est une suite numérique, on lui associe une forme linéaire μ_a sur l'espace des suites à support fini, en posant $\mu_a(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n x(n)$.

Inversement, toute forme linéaire sur $\mathcal{D}$ s'obtient de cette façon. Si x est une suite à support fini, on peut l'écrire sous la forme $x = \sum_n x(n)\delta_n$, la somme se réduisant à un nombre **fini** de termes. Si μ est une forme linéaire sur l'espace des suites, on a alors :

$$\mu(x) = \sum_n x(n)\mu(\delta_n).$$

La forme linéaire μ est donc définie par la suite des coefficients $(\mu(\delta_n)_{n\in\mathbb{Z}})$.

La continuité de la forme linéaire est réalisée automatiquement, si l'on met sur l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ des suites à support fini la topologie suivante : une suite $(x^{(j)})$ de suites converge, si ces suites $x^{(j)}$ restent nulles en dehors d'un ensemble fini fixé et si elles convergent terme à terme.

"Mesures bornées"

Etudions maintenant l'analogue des mesures bornées, c'est-à-dire ici les formes linéaires continues sur l'espace $(\ell^\infty(\mathbb{Z}), \|\ \|_\infty)$ des suites bornées, muni de la norme uniforme.

Soit $\mu = (\mu_n)$ une suite sommable, $\sum_n |\mu_n| < \infty$. On lui associe une forme linéaire continue sur $(\ell^\infty(\mathbb{Z}), \|\ \|_\infty)$ en posant $\mu(x) = \sum_n \mu_n x(n)$, pour toute suite bornée x. La majoration

$$|\mu(x)| \leq (\sum_n |\mu_n|)\ \|x\|_\infty$$

montre que la norme de la forme linéaire définie par μ sur $(\ell^\infty(\mathbb{Z}), \|\ \|_\infty)$ est majorée par $\sum_n |\mu_n|$. Il n'est pas difficile (exercice) de montrer que la norme de μ est égale à ce nombre.

Inversement, soit (μ_n) une suite de coefficients. Cette suite définit, comme on l'a vu, une forme linéaire μ sur l'espace des suites à support fini : $x \to \mu(x) = \sum_n \mu_n x(n)$. On montre facilement, en utilisant des suites de la forme $x(n) = \mathrm{sgn}(\mu_n)$, que la condition $\sum_n |\mu_n| < \infty$ est nécessaire, pour que cette forme linéaire se prolonge en une forme linéaire continue sur $(\ell^\infty(\mathbb{Z}), \|\ \|_\infty)$.

On prendra garde qu'il existe sur $(\ell^\infty(\mathbb{Z}), \|\ \|_\infty)$ des formes linéaires continues (limites de Banach) qui ne sont pas associées à une suite de coefficients, et qui en restriction à l'espace des suites à support fini sont nulles. Nous n'aurons pas à considérer ici de telles formes linéaires.

En résumé, dans le cas discret, on peut dire que l'espaces des "mesures" s'identifie à celui des suites, l'espace des "mesures bornées" à celui des suites sommables.

9.1.3 *Analyse de Fourier des signaux à temps discret*

Si le signal x est sommable, autrement dit si la suite $x = (x(n))$ est dans $\ell^1(\mathbb{Z})$, $(\sum |x(n)| < \infty)$, on peut définir sa "transformée de Fourier" discrète comme l'analogue discret de la transformée de Fourier d'une fonction intégrable :

$$(\mathcal{F}x)(u) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(n)e^{-2\pi i n u}. \tag{9.1}$$

Dans ce cas, cette transformée est une fonction continue périodique, que l'on peut donc considérer comme un élément de l'espace $\mathcal{C}(\mathbb{T}^1)$ des fonctions continues sur le cercle.

Une situation plus générale est celle où le signal est d'"énergie" finie : x est alors une suite dans $\ell^2(\mathbb{Z})$ et la série définie par (9.1) est convergente au sens de la norme $\| \|_2$ sur $L^2(\mathbb{T}^1)$. La fonction 1-périodique $\mathcal{F}x$ est alors dans $L^2(\mathbb{T}^1)$.

Rappelons l'égalité de Parseval, qui est l'analogue discret de la formule de Plancherel et qui exprime l'égalité de l'énergie du signal calculée en temps ou en fréquence :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |x(n)|^2 = \int_0^1 |\mathcal{F}x(u)|^2 \, du.$$

Si nous partons inversement d'une fonction sur le cercle, c'est-à-dire d'une fonction périodique, nous pouvons lui associer, pourvu qu'elle soit intégrable sur un intervalle de période, la suite de ses coefficients de Fourier. Supposons la fonction f 1-périodique. Cette transformée s'écrit :

$$f \to (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}, \text{ avec } c_n(f) = \int_0^1 f(u) \; e^{2\pi inu} \, du.$$

Rappelons que la série de Fourier n'est pas nécessairement convergente ponctuellement, mais converge au sens de la norme $\| \|_2$ si f est dans $L^2(\mathbb{T}^1)$ et converge ponctuellemment pour des fonctions régulières.

La convergence ponctuelle est une propriétés qui peut être difficile à établir, mais ici, ce problème de convergence a assez peu d'importance, puisque le "sens" le plus intéressant est celui de la transformation qui à une fonction, ou à une mesure, associe la suite de ses coefficients de Fourier.

Dans le cas de $\mathbb{R}$, nous disposons, sous certaines hypothèses, d'une formule d'inversion. L'analogue discret de la formule d'inversion de Fourier s'énonce ici de la façon suivante : si x est une suite sommable, les coefficients de Fourier de la transformée $\mathcal{F}x$ (qui est une fonction continue) sont les valeurs $x(n), n \in \mathbb{Z}$ de la suite x :

$$\int_0^1 \mathcal{F}x(u) \; e^{2\pi inu} \, du = x(n).$$

On établit sans difficulté que l'application $x \to \mathcal{F}x$ définit un homomorphisme continu de l'algèbre $(\ell^1(\mathbb{Z}), *, \| \|_1)$, dans l'algèbre $(\mathcal{C}(\mathbb{T}^1), ., \| \|_\infty)$.

En particulier, notons l'inégalité

$$\|\mathcal{F}x\|_\infty = \sup_u |\mathcal{F}x(u)| \le \sum_n |x(n)| = \|x\|_1.$$

Définitions 9.1.4 La fonction d'**auto-corrélation** de x est définie par

$$R_{xx}(k) = \sum_n x(n)\overline{x(n-k)}.$$

La fonction d'inter-corrélation de deux signaux x et y d'énergie finie est définie par

$$R_{xy}(k) = \sum_n x(n)\overline{y(n-k)}.$$

C'est le produit scalaire dans $\ell^2(\mathbb{Z})$ de x et du signal y translaté de $-k$.

La **densité spectrale d'énergie** d'un signal x est le carré du module de la transformée Fourier $\mathcal{F}x$ du signal (pour un signal dans $\ell^2(\mathbb{Z})$).

Proposition 9.1.5 *La fonction d'auto-corrélation est la suite des coefficients de Fourier de la densité spectrale d'énergie.*

Preuve : Supposons d'abord qu'il existe N tel que $x(n) = 0$, pour $|n| > N$. On a par un calcul élémentaire portant uniquement sur des sommes finies : $|\mathcal{F}x(u)|^2 = |\sum_{|n|\leq N} x(n)e^{-2\pi inu}|^2 = \sum_k(\sum_n x_n\overline{x_{n-k}})e^{-2\pi iku}$.
D'où :

$$R_{xx}(k) = \sum_n x(n)\overline{x}(n-k) = \int e^{2\pi iku}|\mathcal{F}x(u)|^2 du.$$

Dans le cas général, on approche x par la suite x_N obtenue en remplaçant $x(n)$ par 0 pour $|n| > N$. Le résultat s'obtient par passage à la limite, en notant que $\|x - x_N\|_2 = \|\mathcal{F}x - \mathcal{F}x_N\|_2 \to 0$, pour $N \to \infty$.

□

Remarques 9.1.6 Pour une suite $x = (x(n))$ quelconque, la formule (9.1) ne définit pas toujours une fonction, la série trigonométrique ne convergeant pas en général (tout au moins presque partout ou en norme) vers une fonction.

Les cas particuliers envisagés jusqu'ici ne permettent pas de couvrir tous les cas intéressants. Par exemple, comment définir la transformée de Fourier de la suite constante identiquement égale à 1 ? Il faut pour cela considérer que la transformée de Fourier d'une suite peut être non pas une fonction, mais une mesure (ici la mesure de Dirac δ_0 sur le cercle).

Soit $\mathcal{M}(\mathbb{T}^1)$ l'espace des mesures sur le cercle, c'est-à-dire des formes linéaires continues sur $\mathcal{C}(\mathbb{T}^1)$ (noter qu'ici il n'y a pas de problème de support compact pour les fonctions). L'espace des fonctions intégrables sur le cercle s'identifie à un sous-espace de $\mathcal{M}(\mathbb{T}^1)$, le sous-espace des mesures sur le cercle ayant une densité.

• Notion de mesure spectrale

Comme dans le cas du “temps continu”, on peut définir la mesure spectrale μ_x d'un signal $(x = (x(n), n \in \mathbb{Z})$ à temps discret. C'est la mesure sur le cercle (i.e. un élément de $\mathcal{M}(\mathbb{T}^1)$) dont $(x(n))$ est la suite des coefficients de Fourier. La relation entre x et μ_x est donc :

$$x(n) = \int_0^1 e^{2\pi inu}\, d\mu_x(u). \tag{9.2}$$

La mesure μ_x est appelée **mesure spectrale** du signal x.

Naturellement la formule (9.2) n'a de sens que si μ_x est une mesure bornée. Dans le cas où μ_x a une densité, notée ϕ_x, la suite $x = (x(n))$ est la suite des coefficients de Fourier de cette densité (au changement près de n en $-n$).

On note que si x est sommable, ou de carré sommable, ou plus généralement si x est la suite des coefficients de Fourier d'une fonction $f_x \in L^1(\mathbb{T}^1)$, alors x a une mesure spectrale avec densité, cette densité étant la fonction f_x. Notons également que la correspondance $x \to \mu_x$ est injective, puisque, d'après la définition même, la donnée de μ_x détermine x. Réciproquement, on a le résultat suivant :

Proposition 9.1.7 *Si deux mesures sur le cercle ont la même suite de coefficients de Fourier, elles sont égales.*

Preuve : Si deux mesures ont les mêmes coefficients de Fourier, d'après la densité en norme uniforme des polynômes trigonométriques, ces mesures coïncident sur les fonctions continues périodiques.

□

9.2 Filtrage des signaux à temps discret

De même que dans le cas du temps continu, un filtre peut être considéré comme une boîte noire (ici un algorithme), à l'entrée de laquelle on applique un signal $n \to x(n)$ et à la sortie de laquelle on obtient un signal $n \to y(n)$. La correspondance $x \to y$ définit une transformation F :

$$y(n) = (Fx)(n).$$

Pour préciser mathématiquement cette transformation, on doit définir l'espace $\mathcal{V}$ des signaux auxquels est applicable la transformation F et l'espace d'arrivée $\mathcal{W}$. Comme en continu, il y a une certaine liberté de choix pour $\mathcal{V}$ comme pour $\mathcal{W}$. On supposera qu'au minimum $\mathcal{V}$ est un espace vectoriel de suites, invariant par translation dans le temps. On peut donc faire opérer sur $\mathcal{V}$ le groupe à un paramètre des opérateurs de translation T_τ, $\tau \in \mathbb{Z}$, définis par :

$$T_\tau x(n) = x(n+\tau), \forall n \in \mathbb{Z}.$$

L'espace $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ des suites à support fini est un choix naturel "minimal" pour un tel espace $\mathcal{V}$.

On dira que la transformation F définit un filtrage de l'espace $\mathcal{V}$ si F est une *application linéaire* définie sur $\mathcal{V}$ vérifiant la condition de *stationnarité* suivante :

$$FT_\tau = T_\tau F, \forall \tau \in \mathbb{Z}.$$

Cette condition exprime que le dispositif (matériel ou algorithme) effectuant le filtrage est indépendant du temps.

Un filtre est donc un opérateur invariant par translations, opérant sur un espace vectoriel de suites stable par translations. Pour définir complètement un filtre, on doit préciser son **domaine de définition**. Ce domaine contient au moins $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$. A partir du domaine de définition initial, on peut chercher à l'étendre à un espace plus large.

Montrons que les contraintes imposées au filtre F permettent de l'identifier à un opérateur de convolution.

Théorème 9.2.1 *Dans le cas discret, un filtre F s'identifie à la convolution par une suite de coefficients $h = (h_n, n \in \mathbb{Z})$.*

Preuve : Pour $x \in \mathcal{D}(\mathbb{Z})$, on peut exprimer x sous la forme $x = \sum x_n \delta_n$. Par linéarité du filtre, on a $Fx = \sum x_n F\delta_n$; soit, en introduisant la matrice de coefficients $a_{k,n} = (F\delta_n)(k)$, $(Fx)(k) = \sum_n a_{k,n} x_n$.

Nous avons $T_\tau\ \delta_n = \delta_{n-\tau}$. La stationnarité (commutation avec les translations) implique :

$$(F\delta_n)(k) = (F\delta_{n+1})(k+1).$$

Les coefficients $a_{k,n}$ doivent donc vérifier : $a_{k,n} = a_{k+1,n+1}$; d'où $a_{k,n} = a_{k-n,0}$. Ils sont de la forme $a_{k,n} = h_{k-n}$, où h est une suite de coefficients.

□

On dit que F est un filtre de **réponse impulsionnelle** h. Cette terminologie exprime que le filtre fournit en sortie la "réponse" (h_n), lorsqu'il reçoit en entrée l'impulsion δ_0 et ceci traduit simplement le fait que δ_0 est l'unité pour la convolution dans l'espace des suites.

Ici, il n'y a pas de condition de continuité à imposer. Par contre ces conditions apparaissent si l'on impose des conditions de majoration en norme.

• **Filtre borné**

Un filtre est dit **borné ou stable** s'il transforme une entrée bornée en une sortie bornée.

On montre qu'un tel filtre doit être défini par la convolution par une mesure bornée, c'est-à-dire (nous sommes dans le cas discret) par convolution par une suite (μ_n) **sommable**, $\sum_n |\mu_n| < \infty$.

• **Filtre causal**

Comme pour les signaux à temps continu, la causalité est une condition naturelle pour qu'un filtre soit physiquement réalisable ou soit calculable par un algorithme efficace.

Définition 9.2.2

un filtre de coefficients $h = (h_k, k \in \mathbb{Z})$ est dit **causal** s'il transforme les signaux causaux en signaux causaux, autrement dit si :

$$(x(n) = 0,\ \forall n < 0) \Rightarrow ((h * x)(n) = 0,\ \forall n < 0).$$

Proposition 9.2.3 *Un filtre est causal si, et seulement si, ses coefficients d'indice négatif sont nuls.*

Preuve : On vérifie que la condition est nécessaire en appliquant la propriété de causalité au signal δ_0.

Inversement, si h est tel que $h_k = 0$, pour $k < 0$, le signal de sortie $y = (y(n), n \in \mathbb{Z})$ s'écrit, pour un signal d'entrée $x = (x(n))$:

$$\sum_k h_k x(n-k) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{n} h_{n-k} x(k).$$

On a donc, pour un signal d'entrée x **causal** (i.e. nul pour $k < 0$) :

$$y(n) = (h * x)(n) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{n} h_k x(n-k) = \sum_{k=0}^{n} h_{n-k} x(k), & \text{pour } n \geq 0, \\ 0, & \text{pour } n < 0. \end{cases}$$

□

• **Transformée en** z

Soit un filtre F associé à la suite de coefficients $h = (h_k)$. Considérons les signaux de la forme :

$$e_z : n \in \mathbb{Z} \to e_z(n) = z^n,$$

où z est un nombre complexe fixé. Ces signaux sont les fonctions propres du filtre (fonctions propres de la convolution par h), pour tous les z tels que l'on puisse appliquer F à e_z. Un calcul formel (si l'on ne se préoccupe pas du problème de la convergence) montre en effet que e_z est transformé en $H(z)e_z$, le scalaire $H(z)$ étant la valeur propre associée au vecteur propre e_z :

$$\begin{aligned}(Fe_z)(n) &= \sum_k e_z(n-k)h_k = \sum_k z^{n-k}h_k \\ &= z^n \sum_k h_k z^{-k} = H(z)e_z(n),\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$H(z) = \sum_k h_k z^{-k}.$$

Définition 9.2.4 On appelle **transformée en** z du filtre F, autrement dit de la suite $h = (h_k)$, la fonction formellement définie par

$$H(z) = \sum_k h_k z^{-k}. \tag{9.3}$$

Cette "transformée en z" est appelée également **fonction de transfert** du filtre.

Soit F un filtre de coefficients (h_n). Si $z \in \mathbb{C}$ est tel que $\sum_n |h_n||z|^{-n} < \infty$, alors e_z est dans le domaine de définition du filtre et la fonction de transfert $H(z)$ du filtre est bien définie pour cette valeur de z.

Si l'on se donne a priori la fonction de transfert H du filtre, on doit donc avoir la relation (9.3) sur le domaine $\{z \in \mathbb{C} : \sum_n |h_n||z|^{-n} < \infty\}$.

La transformation $h \to H$, qui à une suite associe sa transformée en z, a des propriétés analogues à celles de la transformée de Laplace dans le cas continu. Elle transforme le produit de convolution en produit au sens ordinaire.

La fonction de transfert de deux filtres mis en **série** est le produit de leur fonction de transfert. La fonction de transfert de deux filtres mis en **parallèle** est la somme de leur fonction de transfert. (Faire un schéma)

La série définissant H peut être vue comme une série formelle, mais si l'on veut lui donner un sens ponctuel, il faut se préocupper du domaine de convergence de cette série, qui donnera le domaine de définition de la transformée en z.

La fonction $H(z)$ s'écrit formellement comme une série de Laurent, c'est-à-dire la somme d'une série entière en z et d'une série entière en z^{-1}. Soit R_1 le rayon de convergence de la série $\sum_{k\geq 0} z^k h_{-k}$ et R_2 celui de la série $\sum_{k\geq 0} z^k h_k$.

Le domaine de définition de $H(z)$ (domaine de convergence de la série bilatère) est l'intersection du disque de centre 0 de rayon R_1 et de l'image du disque de centre 0 de rayon R_2 par la transformation $z \to z^{-1}$ (complémentaire d'un disque de centre 0). C'est donc un anneau circulaire centré à l'origine, dont le bord extérieur est de rayon R_1 et le bord intérieur est de rayon R_2^{-1}. Ce domaine est vide si $R_1 < R_2^{-1}$.

Si la mesure h est bornée ($\sum |h_k| < \infty$), alors on retrouve la série de Fourier définissant la "transformée de Fourier" de la suite h en remplaçant z par $e^{2\pi iu}$. Notons que la fonction

$$u \to H(\exp(2\pi iu)) = \mathcal{F}h(u) = \sum_k h_k e^{-2\pi iku}$$

est aussi appelée souvent en traitement du signal, comme la fonction $H(z)$, **fonction de transfert** du filtre.

On notera les relations suivantes conséquences des définitions :

$$\mathcal{F}h(0) = \sum_n h_n,$$

$$h_0 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \mathcal{F}h(u)\ du,$$

et le fait que, pour un filtre *symétrique*, la fonction de transfert est *réelle*.

Mentionnons encore une terminologie courante :
– La fonction $|\mathcal{F}h(u)|^2$ est appelée "*fonction de réponse du filtre*" (ou encore, en anglais, "power transfert function").
– Le *gain complexe*, ou *réponse en fréquence*, est le module $|\mathcal{F}h(u)|$ de la transformée de Fourier (ou fonction de transfert).
– Le *filtre retard* correspond à l'opération de décalage d'une unité dans le temps : c'est la convolution par le filtre δ_1. Sa fonction de transfert est $H(z) = z^{-1}$. Il est symbolisé dans les schémas par z^{-1}.

D'après les résultats déja établis pour la convolution, on a le résultat suivant, dans lequel l'hypothèse $\sum_k |h_k| < \infty$ assure que $H(2\pi iu)$ est bien définie est continue :

Théorème 9.2.5 *L'action en fréquence d'un filtre F de coefficients $h = (h_k)$ (tels que $\sum_k |h_k| < \infty$) est la multiplication de la mesure spectrale de l'entrée par $\mathcal{F}h(u) = H(2\pi iu)$. (Si μ est la mesure spectrale de l'entrée, la mesure spectrale de la sortie est $H\mu$).*

Preuve : Soit $x_n =$ l'entrée. La sortie y est donnée par

$$\begin{aligned} y_n &= \sum_n h_k x_{n-k} = \sum_k h_k \int_0^1 e^{2\pi i(n-k)u}\ d\mu(u) = \int_0^1 \sum_k h_k e^{2\pi i(n-k)u}\ d\mu(u) \\ &= \int_0^1 e^{-2\pi inu} \sum_k h_k e^{-2\pi iku}\ d\mu(u) = \int_0^1 e^{-2\pi inu}\ H(-2\pi iu)\ d\mu(u) \end{aligned}$$

La permutation de $\sum$ et de $\int$ est permise sous les hypothèses du théorème.
□

• Les filtres dynamiques

Un filtre **dynamique** ou **récursif** (en anglais FIR, abréviation de "*finite impulse response*") est un filtre $x \to y = Fx$, pour lequel la sortie y est reliée à l'entrée x par une relation de récurrence de la forme :

$$a_0 y(n) + a_1 y(n-1) + \ldots + a_p y(n-p) = b_0 x(n) + \ldots + b_q x(n-q). \tag{9.4}$$

Les coefficients a_k et b_k sont des constantes réelles ou complexes et p et q sont des entiers ≥ 0. On peut, en prenant p minimal, supposer que a_0 est non nul.

La relation (9.4) donne une définition implicite du filtre. En fait, il y a plusieurs solutions de (9.4) et l'ambiguité n'est levée que sous des conditions supplémentaires, par exemple la causalité.

Il est clair que, moyennant des conditions initiales (initialisation), la relation (9.4) permet de calculer **récursivement** les valeurs de y à partir de celles de x ; d'où l'efficacité des algorithmes implémentant ces filtres au point de vue numérique.

Pour un filtre dynamique associé à la relation de récurrence (9.4), la fonction de transfert, écrite comme fonction de z^{-1}, est la fraction rationnelle en z (supposée écrite sous forme *irréductible*) :

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_q z^{-q}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_p z^{-p}}.$$

On fera dans la suite l'hypothèse que la fraction est irréductible. L'intérêt pratique de la classe des filtres dynamiques est que :
- elle est assez large, puisque leurs fonctions de transfert, fractions rationnelles, permettent d'approcher en un sens convenable des fonctions de transfert relativement arbitraires ;
- elle met en oeuvre des calculs récursifs simples (d'après la relation (9.4), si l'on suppose $a_0 = 1$, le calcul de $y(n)$ ne nécessite que $p + q - 1$ multiplications, moyennant la mise en mémoire des q valeurs $x(n), \cdots, x(n-q)$ et des $p - 1$ valeurs déjà calculées de $y(k)$).

On applique les mêmes méthodes de décomposition que dans le cas du temps continu. Par linéarité, on peut se ramener aux cas particuliers suivants :

$$H(z) = z^{-r},\ \frac{1}{z^{-1} - c},\ \frac{1}{(z^{-1} - c)^s},\ \text{avec } s \text{ entier } > 1.$$

Le premier cas se traite immédiatement : pour $r = 0$, il s'agit de l'identité, $x_n \to y_n$. Pour $r > 0$, on applique l'opérateur de retard : $x_n \to y_n = x_{n-r}$.

Nous allons maintenant identifier les filtres associés aux élements simples.

Pôle simple

Dans le cas d'un pôle simple c (de la fraction en z^{-1}), la fraction $\frac{1}{z^{-1} - c}$ correspond à l'équation de récurrence $-cy(n) + y(n-1) = x(n)$, soit

$$y(n) = -c^{-1} x(n) + c^{-1} y(n-1).$$

En itérant la relation, on obtient :

$$y(n) = -c^{-1} \sum_0^p c^{-k} x(n-k) + c^{-(p+1)} y(n-p).$$

Si x est causal, on a donc :

$$y(n) = -c^{-1}\sum_{0}^{n} c^{-k}x(n-k) + c^{-(p+1)}y(n-p), \ \forall p > n. \tag{9.5}$$

Cette relation de récurrence ne définit pas complètement le filtre. Cherchons un filtre causal : on sait que si l'entrée x est causale, la sortie y l'est aussi. On a donc $y(n-p) = 0$, pour $p > n$.

Dans le cas d'un filtre causal, on obtient d'après (9.5) l'expression de y causal, pour une entrée x causale :

$$y(n) = \begin{cases} -c^{-1}\sum_0^n c^{-k}x(n-k), & \text{pour } n \geq 0, \\ 0, & \text{pour } n < 0. \end{cases}$$

Le tableau des coefficients définissant le filtre est donc :

$$h = (h_k), \text{ avec } h_k = -c^{-n-1}, \text{ pour } n \geq 0, = 0 \text{ pour } n < 0.$$

La mesure ainsi définie est **bornée** si, et seulement si, $|c| > 1$.

Pôle multiple

Si h a pour transformée en z la fraction $\dfrac{1}{z^{-1}-c}$, le produit de convolution s-fois par lui-même de h admet la fraction $\dfrac{1}{(z^{-1}-c)^s}$ pour transformée en z. Cette convolution est bien définie si h est causal.

Pour un élément de la forme $\dfrac{1}{(1-cz^{-1})^s}$, on obtient donc un filtre causal solution en convolant s fois le filtre précédent.

Cas général

Rappelons la forme générale de la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle $H(z)$:

$$H(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = S(z) + \frac{P_0(z)}{Q(z)},$$

S, P_0, Q_0 étant des polynomes, avec $\deg P_0 < \deg Q_0$. Le polynome S s'obtient par division euclidienne de P par Q : $P = QS + P_0$. Ce terme ne figure dans la décomposition de H que si $\deg(P) \geq \deg(Q)$.

La décomposition en éléments simples du quotient P_0/Q_0 est de la forme :

$$\frac{P_0(z)}{Q_0(z)} = \sum_k \sum_{j:0<j<\ell_k} \frac{\alpha_{k,j}}{(z-c_k)^j},$$

où les c_k sont les pôles de H, leur multiplicité étant notée ℓ_k, et les $\alpha_{k,j}$ des constantes réelles ou complexes.

La partie correspondant aux pôles est associée à un filtre qui peut être réalisé par somme des filtres (causaux) élémentaires décrits ci-dessus.

Filtres causaux bornés

On en déduit que, dans le cas général, il existe toujours un filtre causal dont la fonction de transfert est une fraction rationnelle H donnée. Il y a correspondance entre l'algèbre des fractions rationnelles (pour le produit et l'addition) et l'algèbre des filtres dynamiques causaux pour la composition et l'addition.

Le filtre dynamique causal de fraction rationnelle H est associé à une mesure bornée si, et seulement si, les pôles c_k de la fraction en z^{-1} vérifient : $|c_k| > 1$. Dans ce cas, les signaux propres e_z, $e_z(n) = z^n$, sont dans le domaine de définition du filtre, pour $|z| \leq 1$. En particulier, pour $|z| = 1$, la restriction au cercle unité de la transformée en z donne la fonction de transfert du filtre ("transformée de Fourier").

En résumé :

Théorème 9.2.6 *Le filtre causal solution de (9.4) est stable (ou bornée) si, et seulement si, les pôles c_k de la fonction de transfert (en z^{-1}) sont situés à l'extérieur du disque unité ($|c_k| > 1$).*

• Calculs matriciels

Les opérations réalisées par les filtres sont des opérations linéaires sur l'espace vectoriel des suites. En utilisant la base "canonique" (δ_n), on peut, comme on l'a vu, représenter ces opérations comme l'application de matrices. Rappelons également que la stationnarité impose à ces matrices une forme particulière, puisqu'elles sont définies à partir d'un tableau de coefficients $h = (h_n)$, par $a_{k,n} = h_{k-n}$. La composition des filtres peut être vue soit comme une opération de convolution, soit comme un produit de matrices.

La difficulté vient ici du fait qu'il s'agit de matrices infinies. Il n'est pas assuré que le produit de deux telles matrices soit bien défini. Notons que le produit est toujours défini entre matrices "causales", c'est-à-dire pour des matrices de coefficients $a_{k,n}$ tels que $a_{k,n} = 0$, pour $k > n$, ce qui est le cas des matrices associées aux filtres $h = (h_n)$ causaux (on a alors $a_{k,n} = h_{k-n} = 0$, pour $k > n$). En effet le calcul de chacun des coefficients du produit ne fait intervenir qu'un nombre fini de termes.

En adoptant ce point de vue, on peut effectuer des calculs dans l'algèbre de composition des matrices causales.

On peut par ce procédé inverser l'opérateur de convolution défini par la convolution par une mesure causale, et résoudre l'équation $\mu * \nu = \lambda$, où μ, ν, λ sont des mesures causales, μ et λ étant données et ν inconnue.

Exercices : 1) Montrer qu'on peut toujours résoudre, et de façon unique, par récurrence l'équation $\mu * \nu = \delta_0$, où μ est une "mesure causale" donnée telle que $\mu(0) \neq 0$ et ν est une mesure sur $\mathbb{Z}$ causale inconnue.

2) Montrer que toutes les solutions de

$$(c\delta_1 - \delta_0) * \nu = \delta_0$$

sont de la forme : $a_j = b_0 c^{-j}$, pour $j \geq 0$, $= (1 + b_0)c^{-j}$, pour $j < 0$, où b_0 est une constante.

Parmi ces solutions, il y a une solution causale ($b_0 = -1$) et une solution "anti-causale" ($b_0 = 0$). Si $|c| > 1$ la solution causale est bornée. Si $|c| < 1$, c'est la solution anti-causale qui est bornée.

9.3 Fenêtres

Une fenêtre est la donnée d'une fonction à support compact ou à décroissance rapide. On peut appliquer une fenêtre à un signal dans l'espace *temporel* discrétisé : une fenêtre est alors une suite fixe par laquelle on multiplie le signal pour en isoler un segment dans le temps. A cette opération correspond *en fréquence* la convolution des transformées de Fourier de la fenêtre et du signal.

On peut également envisager une fenêtre dans l'espace des *fréquences*, qui est alors une fonction par laquelle on multiplie la transformée de Fourier du signal. Cette opération correspond à une convolution dans l'espace des suites et donc à un filtrage.

• Exemples de fenêtres

Les formules suivantes sont utiles pour le calcul des transformées de Fourier des fenêtres usuelles :

$$\sum_{-[N/2]}^{[N/2]} e^{2\pi inu} = \begin{cases} \frac{\sin(N+1)\pi u}{\sin\pi u}, & \text{si } N \text{ est pair,} \\ \frac{\sin N\pi u}{\sin\pi u}, & \text{si } N \text{ est impair.} \end{cases}$$

Fenêtre rectangulaire

L'exemple le plus simple est celui d'une fenêtre rectangulaire R_N définie, pour un entier $N \geq 1$, par

$$R_N(n) = \begin{cases} 1, & \text{si } |k| \leq N, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'application de cette fenêtre à un signal $x = (x(n))$ consiste donc à remplacer x par x_N défini par

$$x_N(k) = \begin{cases} x(k), & \text{si } |k| \leq N, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

La "transformée de Fourier" de R_N est le noyau de Dirichlet D_N d'ordre N défini par

$$\mathcal{F}R_N(u) = \sum_{k=-N}^{N} e^{2\pi iku} = \frac{\sin(2N+1)\pi u}{\sin\pi u}.$$

Fenêtre triangulaire

Pour atténuer les phénomènes d'oscillation (phénomène de Gibbs), on doit rechercher des fenêtres plus régulières dans l'espace temporel. Un procédé, pour en construire, consiste à convoler une fenêtre rectangulaire par elle-même. On obtient ainsi une fenêtre triangulaire. Par exemple, la fenêtre triangulaire est égale (à un facteur de normalisation près) au produit de convolution d'une fenêtre rectangulaire $R_{N/2}$ de durée $N+1$ par elle-même (on suppose N pair). Elle correspond au noyau de Fejer d'ordre $N+1$ et est donnée par :

$$T_N(k) = \begin{cases} 1 - \frac{|k|}{N+1}, & \text{pour } |k| \leq N, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Sa transformée de Fourier est

$$W_N(u) = \mathcal{F}T_N(u) = \frac{1}{N+1}(\frac{\sin(N+1)\pi u}{\sin\pi u})^2$$

(faire un dessin)

On pourra en exercice calculer la transformée de Fourier de T_N, soit directement, soit en utilisant le fait que T_N est défini par une convolution. On vérifiera que $\sum_k T_N(k) = N+1 = \mathcal{F}T_N(0)$ et que $\int \mathcal{F}T_N \; du = 1$.

Paramètres d'une fenêtre

Les paramètres importants d'une fenêtre sont notamment, pour sa transformée de Fourier W, la largeur du pic (ou lobe) central et le rapport de l'amplitude du premier lobe secondaire et de l'amplitude du lobe central (faire un dessin).

Le rapport $\frac{|W(f_s)|}{W(0)}$ donne l'atténuation minimale des fréquences en dehors de la bande de fréquences correspondant à la base du pic central. Il est mesuré logarithmiquement par

$$\lambda = 20 \; log_{10} \frac{|W(f_s)|}{W(0)},$$

f_s étant la fréquence correspondant au milieu du premier lobe secondaire. La quantité λ est exprimée en **décibels**.

Exercice 9.3.1 Montrer que, pour la fenêtre rectangulaire, on a, pour $N = 9$, $\lambda = 20 \; log_{10} \frac{1}{4.5} = -13 \; dB$.

On constate que, par rapport à la fenêtre rectangulaire, la fenêtre triangulaire, présente un élargissement du pic central et une atténuation des lobes secondaires.

Plus généralement, si p est un entier ≥ 1, pour N divisible par p, on construit la fenêtre polynomiale d'ordre p obtenue en convolant successivement (p facteurs) avec elle-même une fenêtre rectangulaire de durée $\frac{2N}{p} + 1$. Sa transformée de Fourier W est de la forme

$$\mathcal{F}P_{N,p}(u) = \frac{1}{a}\left(\frac{\sin(2\frac{N}{p}+1)\pi u}{\sin \pi u}\right)^p,$$

où a est tel que l'intégrale sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ soit égale à 1.

On note une propriété d'identité approchée, pour N tendant vers l'infini, pour p fixé. Quand p augmente, il y a atténuation des lobes secondaires, mais la largeur à la base du lobe principal est en $\frac{2p}{N}$. Des valeurs usuelles de p sont $p = 2, 3, 4$.

Exemples 9.3.2 *Autres exemples de fenêtres*

Fenêtre de Hamming :

On introduit un paramètre α et on pose :

$$H_\alpha(k) = \begin{cases} \alpha + (1-\alpha)\cos(2\pi\frac{k}{N}), & \text{pour } |k| \leq N/2, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fenêtre de Hamming correspond au choix : $\alpha = 0.54$

Pour $\alpha = 0.5$, on obtient la fenêtre de Hanning, nulle pour $|k| > N/2$ et définie, pour $|k| \leq N/2$, par

$$\begin{aligned} h(k) &= \frac{1}{4}[e^{2\pi i\frac{k}{N}} + 2 + e^{-2\pi i\frac{k}{N}}] \\ &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2\pi\frac{k}{N}) = (\cos\frac{\pi k}{N})^2. \end{aligned}$$

La fonction de transfert (ou transformée de Fourier W) de la fenêtre H_α est, pour N impair :

$$\mathcal{F}h(u) = \alpha\frac{\sin N\pi u}{\sin\pi u} + \frac{1-\alpha}{2}\frac{\sin N\pi(u-\frac{1}{N})}{\sin\pi(u-\frac{1}{N})} + \frac{1-\alpha}{2}\frac{\sin N\pi(u+\frac{1}{N})}{\sin\pi(u+\frac{1}{N})}.$$

Fenêtre cosinusoïdale :

On forme la moyenne de deux fenêtres rectangulaires décalées entre elles de la largeur d'un lobe secondaire $1/N$. Ses coefficients dans l'espace direct sont, pour N impair :

$$C(k) = \begin{cases} \cos\pi k/N, & \text{pour } |k| \leq N/2, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction de transfert (ou transformée de Fourier W) est

$$F_C(u) = \frac{1}{2}\frac{\sin N\pi(u-\frac{1}{2N})}{\sin\pi(u-\frac{1}{2N})} + \frac{1}{2}\frac{\sin N\pi(u+\frac{1}{2N})}{\sin\pi(u+\frac{1}{2N})}.$$

La largeur du lobe central est $3/N$, au lieu de $4/N$ pour la fenêtre triangulaire. Il y a atténuation des lobes secondaires. Pour la fenêtre cosinusoïdale, on a : $\lambda = -24\ dB$, pour $N = 9$.

• Exemple d'application : le multiplexage

Considérons plusieurs signaux indexés par un ensemble d'indices J, $x_j = (x_j(n)_{n\in\mathbb{Z}}, j \in J)$, à transmettre simultanément sur un canal "large bande", de largeur de bande $2F$.

Si les signaux x_j ont un spectre limité à un intervalle de fréquence $[-u_c, u_c]$, en les multipliant par une fenêtre cosinusoïdale de la forme $\cos 2\pi\theta_j n$, on décale leur spectre de façon à les rendre disjoints. Soient y_j les signaux obtenus. On transmet la somme des y_j. Le signal transmis est donc

$$Z(n) = \sum_{j\in J} y_j(n) = \sum_{j\in J}\cos(2\pi\theta_j n)\ x_j(n),\ n \in \mathbb{Z}.$$

Le spectre de y_j est contenu dans $[-u_c - \theta_j, u_c - \theta_j] \cup [-u_c + \theta_j, u_c + \theta_j]$.

Supposons par exemple que les signaux x_j aient une densité spectrale ϕ_j. Alors, la densité spectrale de Z est $\sum_{j\in J}\frac{1}{2}[\phi_j(u+\theta_j) + \phi_j(u-\theta_j)]$. Les fonctions $[\phi_j(.+\theta_j) + \phi_j(.-\theta_j)]$ sont à supports disjoints, si l'on choisit $\theta_j > j \cdot u_c$.

Pour transmettre Card J signaux, il est nécessaire que $u_c \cdot$ Card J $< F$.

Pour "retrouver" chacun des signaux x_j, il suffit, théoriquement, de multiplier en fréquence le signal Z transmis par des fenêtres passe-bande adaptées, c'est-à-dire de bande passante (fréquence) contenue respectivement dans $[-u_c - \theta_j, u_c - \theta_j] \cup [-u_c + \theta_j, u_c + \theta_j]$.

Lissage d'un signal

Considérons un signal $x = y + z$ formé de la somme d'un signal "utile" y et d'un bruit z que l'on cherche à éliminer ou tout au moins à atténuer.

Si le signal x est suffisamment régulier, son spectre est concentré dans les basses fréquences, alors que le bruit a un spectre couvrant une large bande de fréquences. On peut modéliser les bruits comme des processus stochastiques et effectuer une analyse spectrale précise de ces processus. Si l'on considère que le bruit est dû, pour une fraction importante, à la contribution des fréquences hautes, un filtre passe-bas appliqué au signal x a donc pour effet d'éliminer une partie du bruit (ce qui a pour effet de réduire une caractéristique importante : le rapport signal sur bruit).

• Calcul de fenêtres spectrales

Le problème : On cherche à calculer la meilleure approximation (en un sens à préciser) d'une fonction f par un polynôme trigonométrique pour un degré donné.

La fonction f peut être par exemple une fenêtre passe-bas idéale. Pour pouvoir effectuer dans le domaine temporel des convolutions ne portant que sur un nombre limité de coefficients, on cherche une approximation de f par un polynôme trigonométrique de degré n en $\cos\pi u$, ce qui correspond au calcul d'un filtre fini.

Ce problème est un cas particulier du problème suivant : soit $\mathcal{V}$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur $E = [0, 1]$, engendrées par r fonctions données sur E, $g_1, \cdots, g_r$. Soit par ailleurs un "poids" défini par une fonction w continue > 0 sur E.

On définit une norme, notée $\| \ \|_W$, (norme uniforme avec poids) en posant :

$$\|u\|_w = \sup_{t\in[0,1]} |w(t)u(t)|.$$

On cherche des coefficients $a_1, \cdots, a_r$ tels que $\| \sum_1^r a_j g_j - f\|_w$ soit minimum, autrement dit tels que l'on ait, pour tous coefficients $b_1, \cdots, b_r$:

$$\| \sum_1^r a_j g_j - f\|_w \leq \| \sum_1^r b_j g_j - f\|_w.$$

Le théorème "d'alternance" de Tchebyschev permet de caractériser les valeurs $a_1, \cdots, a_r$ solutions de ce problème :

Théorème 9.3.3 *La condition nécesssaire et suffisante pour qu'une combinaison linéaire $\sum_1^r a_j g_j(x)$ soit l'unique meilleure approximation pondérée d'une fonction f sur un sous-ensemble E est que l'erreur pondérée (la différence $N(x) = w(x)(\sum_1^r a_j g_j(x) - f(x))$) présente au moins $r + 1$ valeurs extrémales dans E. En d'autres termes, il faut et il suffit qu'il existe $r + 1$ points $x_1 < x_2 < \cdots < x_{r+1}$ dans E tel que*

$$N(x_i) = -N(x_{i+1}), \ \textit{et} \ |N(x_i)| = \| \sum_1^r a_j g_j - f\|_w.$$

Cette caractérisation permet de mettre en oeuvre des algorithmes de calcul de la meilleure approximation. Un exemple de tel algorithme est l'algorithme de Remez.

9.4 Exercices

Exercice 9.4.1

Discuter la résolution de l'équation $\nu * \mu = \delta_0$, où ν est donnée, ou plus généralement de l'équation $\nu * \mu = \lambda$, ν et λ étant données.

Exercice 9.4.2 *Calcul d'un filtre causal*

Calculer un filtre causal de transformée en z égale à

$$H(z) = \exp(z^{-1})(1 + z^{-1}).$$

Exercice 9.4.3

Soit λ un paramètre complexe. On considère la relation de récurrence

$$y_n - \lambda y_{n-1} = x_n, \ n \in \mathbb{Z}. \qquad (*)$$

(On note que (y_n) est bien défini si (x_n) est causal).

a) Pour un filtre causal associé à $(*)$, calculer le signal en sortie, si l'entrée est la fonction échelon discrète $x_n = 1$, pour $n \geq 0$, $= 0$, pour $n < 0$.

b) Pour quelles valeurs de λ, cette sortie est-elle bornée ?

[[Solution : $y_n = 1 + \lambda + ... + \lambda^n$ pour $n \geq 0$, $= 0$ pour $n < 0$.

La sortie y_n est bornée pour $|\lambda| \leq 1$ et $\lambda \neq 1$.]]

Exercice 9.4.4

Soient x et y deux suites définies sur $\mathbb{Z}$.

Vérifier que le produit de convolution $x * y$ est bien défini dans les cas suivants :
- $x, y \in \ell^1$,
- $x, y \in \ell^2$,
- $x \in \ell^\infty$, $y \in \ell^1$,
- x, y à support dans l'ensemble des entiers ≥ 0,
- x quelconque et y à support fini.

Exercice 9.4.5

a) Montrer que, sur l'espace des suites sur $\mathbb{Z}$, il n'existe pas d'opérateur linéaire A qui inverse l'opérateur $S_1 - Id$ (opérateur de convolution par $\delta_{-}1 - \delta_0$).

[[Observer que l'opérateur $S_1 - Id$ a un noyau : le sous-espace formé des suites constantes.]]

b) Par contre, montrer que l'on peut inverser cet opérateur $S_1 - Id$ quand on le restreint à l'espace des suites à support dans $\mathbb{Z}^+$, ou encore à l'espace des suites sommables.

[[L'opérateur aux différences $D = S_1 - Id$ est l'analogue discret de l'opérateur de dérivation. La fonction échelon discrète Y est la solution de $Dy = \delta_0$.

Noter que $D(x * y) = Dx * y = x * Dy$, si x et y sont deux suites sommables indexées par $\mathbb{Z}$.]]

Exercice 9.4.6

Décomposer en éléments simples

$$H(z) = \frac{1}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}}.$$

[[solution :

$$H(z) = \frac{2}{1 - 2z^{-1}} - \frac{1}{1 - z^{-1}}.]]$$

Exercice 9.4.7

Analogue de la distribution $vp(\frac{1}{t})$

Déterminer la fonction θ dont les coefficients de Fourier sont $c_n(\theta) = \frac{1}{n}$, pour $n \neq 0$, et $c_0(\theta) = 0$.

[[solution :

$$\theta(u) = \begin{cases} \frac{1}{2} - u, & \text{pour } 0 \leq u < \frac{1}{2}, \\ -\frac{1}{2} - u, & \text{pour } -\frac{1}{2} \leq u < 0. \end{cases}]]$$

Exercice 9.4.8

Sur l'espace $\mathcal{E}$ des signaux $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ à temps discret, on considère une fenêtre définie par une fonction $\phi = (\phi_n)$. (L'application de la fenêtre à un signal x est l'application de l'opérateur de multiplication Φ_ϕ défini par $\Phi_\phi : x \to y = (y_n)$, où $y_n = \phi_n\, x_n, n \in \mathbb{Z}$.)

On note Fx la transformée de Fourier discrète d'un signal x définie formellement sur l'espace des fréquences par $Fx(u) = \sum_n x_n e^{2\pi i n u}$.

1) Montrer que l'application à un signal x d'une fenêtre ϕ équivaut à la convolution de Fx par la transformée de la fenêtre $F\phi$. (On donnera des conditions suffisantes pour que la convolution soit bien définie.)

2) a) Calculer $F\phi$ quand ϕ est donnée par :

$\phi = R_N$, où $R_N(n) = 1$, pour $|n| \leq N/2$, $= 0$ sinon, N entier pair,

$\phi = T_N$, où $T_N(n) = 1 - 2|n|/N$, pour $|n| \leq N/2$, $= 0$ sinon, N entier pair.

b) Montrer que la fenêtre triangulaire peut être obtenue par convolution d'une fenêtre rectangulaire par elle-même.

c) Esquisser le graphe de FT_N et calculer la largeur du lobe central.

3) On fait tendre N vers $+\infty$. Quel est le comportement de l'opérateur Φ_{T_N} associé à la fenêtre T_N, dans l'espace direct des signaux et dans l'espace des fréquences.

Exercice 9.4.9

Notations : Etant donné un tableau de coefficients $h = (h_k, k \in \mathbb{Z})$, on note F_h le filtre associé, défini par

$$F_h(x_n) \to (y_n), \text{ où } y_n = \sum_k h_{n-k} x_k, n \in \mathbb{Z},$$

et H sa fonctions de transfert : $H(u) = \sum_k h_k e^{2i\pi ku}$.

On supposera que les filtres considérés vérifient la relation $\sum_n |h_n| < \infty$.

1) On considère deux filtres F_h et F_g de coefficients resp. $h = (h_k)$ et $g = (g_k)$.

a) Calculer les coefficients du filtre composé $F_g F_h$ à partir des coefficients (h_k) et (g_k).

b) Quelle est la fonction de transfert de $F_g F_h$.

2) Etant donné un filtre F_h, on cherche un filtre F_g qui inverse F_h, c'est-à-dire tel que $F_g F_h$ soit l'identité.

a) Calculer formellement la fonction de transfert de F_g à partir de celle de F_h.

b) Donner des conditions sur h qui assurent que les coefficients (g_k) du filtre inverse vérifient $\sum_k |g_k| < \infty$.

c) Peut-on inverser un filtre ayant un nombre fini de coefficients non nuls par un filtre ayant la même propriété ?

Exercice 9.4.10

On considère la relation de récurrence

$$y_n - a y_{n-1} - b y_{n-2} = x_n, \ \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

où a et b sont deux constantes réelles. Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On définit deux suites de vecteurs $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ en posant, pour $n \in \mathbb{Z}$:

$$Y_n = \begin{bmatrix} y_n \\ y_{n-1} \end{bmatrix},$$

$$X_n = \begin{bmatrix} x_n \\ 0 \end{bmatrix}.$$

1) a) Exprimer la relation de récurrence (1) sous la forme d'une relation de récurrence vectorielle. (Par la suite, on notera (2) cette relation.)

b) Soit F un filtre **causal** qui transforme une entrée (x_n) en une sortie (y_n) vérifiant (1).

Montrer, en itérant (2), que, si (x_n) est une entrée causale, la sortie (y_n) est donnée par la relation :

$$Y_n = \sum_{k=0}^{n} A^k X_{n-k}, \ n \geq 0.$$

2) a) Quelle est la transformée en z, notée H, de F et la relation entre les pôles de H et les valeurs propres de A ?

b) Sous quelle condition sur A, le filtre F est-il borné (i.e. (x_n) borné $\Rightarrow$ (y_n) borné) ? On raisonnera de deux façons :
- à l'aide de décomposition de H en éléments simples,
- en utilisant les vecteurs propres de A.

3) Soit G un filtre dont les coefficients g_k, $k \in \mathbb{Z}$, vérifient $g_k = 0$, pour tout $k > 0$, et qui transforme une entrée (x_n) en une sortie (y_n) vérifiant (1).

a) Ecrire la relation de récurrence vectorielle reliant Y_n à Y_{n+1} et X_{n+1}.

b) Sous quelle condition sur A, le filtre G est-il borné ?

Index