INSTITUT DE FRANCE
Académie des sciences

Le retour de Fourier

Jean-Pierre Kahane, Membre de l'Académie des sciences

On peut s'étonner de ce titre : "le retour de Fourier". Le nom de Fourier n'est-il pas, depuis longtemps, l'un des plus familiers au public scientifique ? Séries de Fourier, intégrales de Fourier, transformations de Fourier sont en mathématiques les sujets les plus classiques qui soient. L'équation de la chaleur, qui gouverne en général les phénomènes de diffusion (et qui s'applique en particulier, comme Bachelier l'a établi en 1900 à la diffusion des probabilités liées au cours de la Bourse), est appelée par les physiciens, équation de Fourier. L'analyse de Fourier est, pour les ingénieurs, inséparable de la théorie du signal, de la transmission des sons et des images. Le problème majeur en astronomie et en astrophysique, où ce que l'on observe résulte de la transformation d'un signal par un appareil, est la déconvolution qui permet de remonter de l'observation au signal ; l'instrument de cette déconvolution est la transformation de Fourier et la transformation de Fourier rapide (fast Fourier transform, FFT) a été un facteur décisif du développement explosif de l'astrophysique depuis 1962. "FFT", maître mot de la déconvolution, est aujourd'hui un outil indispensable dans un grand nombre de sciences et de techniques.

Fourier est une sorte de nom commun, dans tous les sens du terme, pour tous les scientifiques et les ingénieurs, de la génomique structurale à la téléphonie.

Depuis longtemps, les mathématiciens de Grenoble ont créé l'Institut Fourier. Depuis 1978, l'université scientifique et médicale s'appelle Université Joseph Fourier. Les éditions Belin ont publié en 1998 un gros volume sur "Fourier, créateur de la physique mathématique" dans lequel le mathématicien Jean Dhombres et le physicien Jean-Bernard Robert décrivent de façon magistrale, dans leur contexte, la vie et l'œuvre de Joseph Fourier. On trouve aujourd'hui des articles et des études sur Fourier dans tous les dictionnaires et toutes les encyclopédies.

Oui, Fourier est bien présent et commence à être bien connu. Mais il n'en a pas été toujours ainsi. L'attitude à l'égard de Fourier, en France, est un bon test des mentalités en matière scientifique et en particulier des relations entre physique et mathématique.

Il y a cinquante ans, en France, Joseph Fourier était méconnu. Jusque dans sa sixième édition, en 1974, Encyclopaedia Universalis ne contenait pas d'article sur lui. C'était l'époque d'un certain divorce entre physique et mathématique ; Fourier, sans doute, était trop mathématicien pour être un vrai physicien, trop physicien pour être un vrai mathématicien. Aujourd'hui au contraire, Fourier est emblématique du rapprochement entre physique et mathématique.

Sur une période de deux siècles, Fourier a été, de manière étonnamment contrastée, mésestimé et célébré.

En 1805, âgé de 37 ans, il avait derrière lui une vie mouvementée et une excellente réputation scientifique. La notice rédigée par Arago relate de manière passionnante une existence liée aux grands événements de l'époque : orphelin pauvre, élève brillant à l'École royale militaire d'Auxerre, professeur dans cette école à l'âge de 16 ans ½, auteur à 18 ans d'un mémoire remarquable sur la localisation des racines des équations algébriques, candidat malheureux malgré l'appui du mathématicien Legendre à l'entrée dans l'artillerie (Arago cite la réponse cinglante du Ministre de la guerre "Fourier n'étant pas noble ne pourrait entrer dans l'artillerie, quand il serait un second Newton"), novice à l'abbaye de Saint-Benoît sur Loire, renonçant à prononcer ses vœux par respect des décrets de l'Assemblée nationale, engagé comme acteur efficace dans la Révolution, élève à l'École normale de l'An III où il est remarqué par Monge, "instituteur" à l'École polytechnique, puis participant à l'expédition d'Egypte au temps où Bonaparte signait ses ordres du jour comme "le membre de l'Institut commandant en chef l'armée d'Orient", secrétaire perpétuel de l'Institut du Caire dont le président est Monge, rédacteur en chef du Courrier d'Egypte, négociateur habile au moment du retrait de l'armée d'Orient, et choisi par Bonaparte comme préfet de l'Isère en février 1802. En 1805 donc, il mène de front de grands travaux d'intérêt public comme préfet, la mise au point de sa Préface à la Description de l'Egypte, et une recherche qu'il a entreprise sur la propagation de la chaleur.

Ce n'est pas un sujet neuf. Déjà Newton s'en est occupé. Laplace et Lavoisier ont collaboré en 1780 pour la détermination de chaleurs spécifiques et ils ont exposé de façon très claire leur désaccord :

> *Les physiciens sont partagés sur la nature de la chaleur... fluide répandu dans toute la nature... (ou) résultat des mouvements insensibles des molécules de la matière.*

Lavoisier tient pour le fluide, Laplace pour l'agitation moléculaire.

Fourier ne va se préoccuper ni de la nature de la chaleur ni du mécanisme de sa propagation. Dans le mémoire qu'il dépose en 1807 à l'Institut national des sciences et des arts comme dans la version développée qu'il en donne en 1811, puis dans sa Théorie analytique de la chaleur en 1822, il indique son propos en le limitant ainsi :

> *Lorsque la chaleur est inégalement distribuée entre les différents points d'une masse solide, elle tend à se mettre en équilibre, et passe lentement des parties les plus échauffées dans celles qui le sont moins ; en même temps elle se dissipe par la surface, et se perd dans le milieu ou dans le vide. Cette tendance à une distribution uniforme, et cette émission spontanée qui s'opère à la surface des corps, changent continuellement la température des différents points. La question de la propagation de la chaleur consiste à déterminer quelle est la température de chaque point d'un corps à un instant donné, en supposant que les températures initiales sont connues.*

Dès 1807, Fourier a réalisé son programme pour l'essentiel. Il a étudié la façon dont se présente l'équilibre de la chaleur ou sa propagation au cours du temps dans des corps de formes diverses, et a établi les deux équations générales : à l'intérieur du solide,

$$\frac{\delta u}{\delta t} = \frac{K}{CD}\left(\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta z^2}\right)$$

où D est la densité, K la conductibilité interne et C la chaleur spécifique, et au bord,

$$m\frac{\delta u}{\delta x} + n\frac{\delta u}{\delta y} + p\frac{\delta u}{\delta z} + \frac{h}{K}qu = 0$$

m, n, p étant les coordonnées d'un vecteur normal à la surface et q sa longueur, et h représentant la conductibilité de surface.

L'outil principal pour la mise en évidence de ces équations est la notion de flux, qui est un apport conceptuel majeur de Fourier à la physique. Lui-même ne s'y trompe pas : à la fin de la Théorie analytique de la chaleur (n° 429), il déclare :

> *Cette notion de flux est fondamentale ; tant qu'on ne l'a point acquise, on ne peut se former une idée exacte du phénomène et de l'équation qui l'exprime.*

Il s'agissait ensuite pour Fourier de résoudre ces équations aux dérivées partielles dans une série de cas particuliers. C'est alors qu'il développe la méthode de décomposition en harmoniques que nous appelons aujourd'hui l'analyse de Fourier. Dès le premier exemple, le calcul de la température à l'intérieur d'un solide illimité dont la base est une bande horizontale et les côtés deux demi-plans verticaux appuyés sur la base, lorsque la base est maintenue à la température de l'eau bouillante (notée 1) et les côtés à celle de la glace fondante (notée 0), il introduit une série trigonométrique pour représenter une fonction donnée. Puis il consacre une série d'articles à la détermination de séries trigonométriques, sommes infinies de termes de la forme $a_n$sinnx ou $b_n$cosnx, que nous appelons aujourd'hui séries de Fourier, censées représenter des fonctions de formes diverses données sur un intervalle, pour illustrer le fait, paradoxal à l'époque, qu'une même fonction (somme d'une série trigonométrique) peut avoir des expressions différentes aux différents intervalles.

Fourier ne se borne pas à la théorie et aux calculs. Dans son appartement de préfet, il mène des expériences pour les vérifier et en dresse soigneusement les comptes rendus. Le livre de Dhombres et Robert en reproduit quelques uns, y compris sous la forme de photocopies de manuscrits inédits de Fourier (p. 330 et sq).
Il travaille dans le tourbillon de la vie publique et dans un isolement scientifique total. En 1807, il achève la rédaction d'un imposant manuscrit intitulé "Théorie de la propagation de la chaleur dans les solides", il le porte à Paris, en donne connaissance à ses collègues Biot et Poisson qu'il a connus à l'École polytechnique, et le présente à la première Classe de l'Institut national des sciences et des arts le 21 décembre. Lagrange, Laplace, Monge et Lacroix sont désignés comme rapporteurs. Silence. Un compte rendu sommaire de son travail paraît en mars 1808, signé P. (Poisson). Mésestimation, incompréhension, c'est un véritable échec pour Fourier.

Alors, commence pour Fourier une longue marche. Il entreprend une correspondance avec Lagrange, l'autorité la plus respectée du monde mathématique, et Laplace, le plus capable de juger son œuvre. Le rapport attendu ne vient toujours pas. Mais l'Institut national décide pour thème du Grand Prix qui doit être décerné en 1812, la propagation de la chaleur.
Fourier remanie son texte, le réorganise, l'enrichit, et l'adresse à la première Classe de l'Institut national sous forme anonyme selon l'usage, sous le bel épigraphe *Et ignem regunt numeri* (le feu aussi est régi par les nombres). Les commissaires sont Lagrange, Laplace, Malus, Haüy et Legendre. Leur verdict, favorable au mémoire de Fourier, est rendu le 16 décembre 1811, et le couronnement de l'ouvrage a lieu en séance publique le 6 janvier 1812.
C'est, enfin, la consécration. Mais déjà se dessinent des ombres. Le rapport n'est pas uniformément élogieux, comme le montre cet extrait :

> *Cette pièce renferme les véritables équations différentielles de transmission de la chaleur, soit à l'intérieur des corps, soit à leur surface ; et la nouveauté du sujet, jointe à son importance, a déterminé la Classe à couronner cet ouvrage, en observant cependant que la manière dont l'auteur parvient à ses équations n'est pas exempte de*

difficultés, et que son analyse, pour les intégrer, laisse encore quelque choses à désirer, soit relativement à la généralité, soit même du côté de la rigueur.

En bref, le travail est novateur, mais il n'est pas parfait. Il y a plus grave : l'Institut national ne décide pas sa publication. Nouvel échec pour Fourier.

Cependant, Fourier est pris dans la tourmente napoléonienne. Il a été fait baron par Napoléon. Il a enfin terminé la Description de l'Egypte et mis le jeune Champollion en face des hiéroglyphes à décrypter. En 1813, la Grande Armée est défaite, en 1814 la France est envahie, Napoléon abdique, les dignitaires de l'Empire se rallient aux Bourbons. C'est la première Restauration, au cours de laquelle Fourier reste préfet de l'Isère. En 1815, c'est le retour de l'Ile d'Elbe. Fourier s'oppose à Napoléon qui le destitue comme préfet de l'Isère et le nomme presque immédiatement préfet du Rhône. Napoléon exige que Fourier procède à des épurations, et, comme Fourier refuse, il le destitue à nouveau, définitivement cette fois, à la veille de la défaite de Waterloo et de la seconde Restauration.

Fourier, persona non grata auprès des Bourbons, accepte la charge de diriger un bureau de statistiques à la préfecture de la Seine. Arago parlera avec faveur des mémoires qu'il établit en cette qualité. Le milieu académique est en turbulence : Monge et Carnot sont exclus de l'Académie des sciences en même temps que Bonaparte. Biot et Poisson se mettent en lice sur la propagation de la chaleur cependant que le mémoire de 1811, qu'ils exploitent, n'est toujours pas publié. Fourier fait appel à Laplace, se porte candidat à l'Académie, est élu, mais récusé par Louis XVIII. Il est candidat de nouveau à une place vacante dans la section de physique générale, est réélu triomphalement, et enfin nommé en mai 1817.

Il s'agit maintenant d'une consécration qui ne fait que s'affirmer jusqu'à sa mort en 1830. Il publie au Bulletin de la Société philomatique des exposés sur les applications de ses travaux, au chauffage des maisons comme à l'origine de la chaleur terrestre, il exige la publication ne varietur de son mémoire de 1811, qui va s'étaler de 1819 à 1826, et pendant ce temps il met au point une nouvelle présentation de ses travaux "La théorie analytique de la chaleur", publiée en livre en 1822.

Il travaille également à un autre sujet qu'il appelle l'analyse indéterminée, à savoir l'étude des solutions d'un système d'inégalités algébriques. Une petite partie est publiée, une grande reste inédite.

En 1822 il est élu secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences pour les sciences mathématiques. En 1826, il devient membre de l'Académie française. Son œuvre s'est imposée. Il a triomphé de ses compétiteurs, et les questions qu'il laisse en suspens inspirent de jeunes et brillants mathématiciens, comme l'Allemand Lejeune-Dirichlet, le Suisse Sturm et le Français Navier. Le jeune Auguste Comte le célèbre comme un précurseur du positivisme, et en 1830, après sa mort, comme l'égal de Newton :

> *...je ne crains pas de prononcer, comme si j'étais à dix siècles d'aujourd'hui que, depuis la théorie de la gravitation, aucune création mathématique n'a eu plus de valeur que celle-ci, quant aux progrès généraux de la philosophie naturelle ; peut-être même, en scrutant de près l'histoire de ces deux grandes pensées, trouverait-on que la fondation de la thermologie mathématique par Fourier était moins préparée que celle de la mécanique céleste par Newton.*

Et pourtant après la mort de Fourier, une ombre épaisse commence à envelopper sa mémoire.

Avant de trouver une explication, lisons ce qu'écrit Victor Hugo. En 1862, il publie Les Misérables. Ce roman, écrit en exil, est un monument d'érudition historique en même temps qu'une grande œuvre populaire. Le livre troisième débute par une évocation de l'année 1817.

C'est une avalanche à la Hugo de faits et d'anecdotes, d'où j'extrais une petite phrase, une phrase qui dit tout sur mon sujet :

> *Il y avait à l'Académie des sciences un Fourier célèbre que la postérité a oublié, et dans je ne sais quel grenier un Fourier obscur dont la postérité se souviendra*.

Le "Fourier obscur" est Charles Fourier (1772-1837), le phalanstérien. Le "Fourier célèbre" est le baron Joseph Fourier, celui qui nous occupe.

Pourquoi Victor Hugo croit-il que la postérité a oublié ce célèbre Fourier, et en quoi avait-il raison ? Victor Hugo avait pour ami Arago qui, très jeune, en 1809, avait été élu dans la première Classe de l'Institut national des sciences et des arts, et qui a succédé à Fourier comme secrétaire perpétuel en 1830. Arago connaissait les remous que l'usage fait par Fourier des séries trigonométriques avaient provoqués. Lagrange, le mathématicien le plus respecté de l'époque, avait depuis longtemps condamné toutes les tentatives de ce genre, et le rapport pour le Grand Prix remporté par Fourier déclarait, nous l'avons vu, que :

> *son analyse...laisse encore quelque chose à désirer, soit relativement à la généralité, soit même du côté de la rigueur.*

Parmi les jeunes, Fourier avait des concurrents influents : Poisson et Cauchy. Dans son éloge funèbre de Fourier, Arago est bien informé et éloquent pour tout ce qui concerne la vie de Fourier, mais il est quasiment muet sur son œuvre de mathématicien. À cet égard, la nécrologie fait figure d'enterrement.

Victor Hugo traduit un sentiment répandu en France depuis 1830 : Joseph Fourier est dépassé. La suite a confirmé son jugement. Il y a bien à Paris une rue Charles Fourier, mais pas de rue Joseph Fourier. Il n'a jamais été question d'éditer les œuvres complètes de Fourier, et Darboux qui en a publié et commenté avec soin une sélection, comprenant naturellement La théorie analytique de la chaleur, en 1880-1890, a laissé tomber toute "l'analyse indéterminée", c'est-à-dire l'étude des systèmes d'inégalités, à laquelle il jugeait que Fourier avait attribué une importance excessive. Si les méthodes introduites à cet effet par Fourier avaient été publiées, elles apparaîtraient aujourd'hui comme l'une des sources de la programmation linéaire et plus généralement des mathématiques de l'économie.

Bien plus tard, dans les années 1950, alors même que le nom de Fourier apparaissait dans les manuels de mathématiques et de physique, ses Œuvres publiées par Darboux avaient peu de lecteurs. Darboux lui-même avait multiplié les mises en garde à l'égard des formulations hasardeuses, et on pouvait en faire une moisson, sur le seul sujet des séries trigonométriques. Selon Fourier, toute fonction donnée sur un intervalle est développable en une telle série ; les coefficients en sont donnés par une formule intégrale, et la série converge en tout point vers la fonction. Or, dans cet énoncé, tout est faux. Pour appliquer la méthode de Fourier, il est nécessaire que la fonction soit intégrable, et Fourier n'en a cure. Même quand la fonction est continue, la série peut très bien diverger en certains points. Fourier ne donne de démonstration que sur un exemple, et s'avance imprudemment en disant qu'il a valeur générale. De plus, il résume son propos en écrivant des formules qui n'ont aucun sens, comme la convolution d'une fonction avec la série ½+cosx+cos2x+cos3x..., qui diverge en tout point comme le remarque Darboux. Il aggrave son cas lorsqu'il passe aux intégrales au lieu des séries, en dérivant sous le signe d'intégration des expressions qui déjà ne sont pas intégrables. Selon les standards de rigueur mathématique en vigueur depuis les années 1830, il outrepasse sans cesse ce qu'il aurait légitimement le droit d'écrire.

Il n'est pas un mathématicien fiable selon la norme en vigueur. C'est peut-être une gloire passée. En 1970, ce n'est pas une gloire nationale. Son absence dans Encyclopaedia

Universalis traduit bien ce que Victor Hugo exprimait un siècle plus tôt : Joseph Fourier est un Fourier autrefois célèbre que la postérité a oublié.

Cette mésestimation de Fourier a des racines plus profondes : c'est la conception même des mathématiques qui est en cause. 1830 est une année charnière. J'ai cité le commentaire d'Auguste Comte, enthousiaste sur Fourier et son approche de la science, daté de cette année. En 1830, paraît également un article de Lejeune-Dirichlet, qui contient le premier théorème général sur la convergence des séries de Fourier, et que l'on considère souvent comme le premier texte d'analyse mathématique rigoureusement impeccable. La remise en cause des conceptions de Fourier apparaît de façon formelle avec un autre jeune Allemand, Jacobi, ami de Dirichlet.

En 1830, Jacobi avait 26 ans. Il échangeait une importante correspondance scientifique, en français, avec le très respecté Legendre. Comme beaucoup de jeunes mathématiciens allemands de l'époque, il était attentif à ce qui se passait en France. Voici ce qu'il écrit dans une lettre à Legendre, quelques semaines après la mort de Fourier, le 4 juillet 1830 :

> *M. Poisson n'aurait pas dû reproduire dans son rapport une phrase peu adroite de feu M. Fourier, où ce dernier nous reproche, à Abel et à moi, de ne pas nous être occupés de préférence du mouvement de la chaleur. Il est vrai que M. Fourier avait l'opinion que le but principal des mathématiques était l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels ; mais un philosophe comme lui aurait dû saisir que le but unique de la science, c'est l'honneur de l'esprit humain, et que, sous ce titre, une question de nombres vaut autant qu'une question de système du monde.*

À la suite de Jacobi, l'honneur de l'esprit humain est devenu une sorte de mot d'ordre de la science pure. "Pour l'honneur de l'esprit humain" est devenu, par la plume de Dieudonné, l'emblème de la mathématique pure et plus spécialement de Bourbaki. L'immense effort fait au 19^{e} siècle par les mathématiciens, surtout en Allemagne, de clarification, de rigueur, de mise en forme et de mise en ordre des notions mathématiques, qui a abouti avec Bourbaki à prendre les mathématiques à leur début et à donner des démonstrations complètes, rompt en effet avec la philosophie de Fourier, même si les séries de Fourier, avec Dirichlet, Riemann et Cantor, l'ont puissamment alimenté.

Jacobi avait raison. Pour Fourier, le but principal des mathématiques est l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels. Il s'en explique avec éloquence dans le "Discours préliminaire à la théorie analytique de la chaleur, dont voici deux passages significatifs :

> *Les équations du mouvement de la chaleur, comme celles qui expriment les vibrations des corps sonores, ou les dernières oscillations des liquides, appartiennent à une des branches de la science du calcul les plus récemment découvertes... Après avoir établi ces équations différentielles, il fallait en obtenir les intégrales ; ce qui consiste à passer d'une expression commune à une solution propre assujettie à toutes les conditions données. Cette recherche difficile exigeait une analyse spéciale, fondée sur des théorèmes nouveaux... La méthode qui en dérive ne laisse rien de vague, ni d'indéterminé dans les solutions. Elle les conduit jusqu'aux dernières applications numériques, condition nécessaire de toute recherche, et sans lesquelles on n'arriverait qu'à des transformations inutiles...*
>
> *L'étude approfondie de la nature est la source la plus féconde des découvertes mathématiques... Les équations analytiques... s'étendent à tous les phénomènes généraux. Il ne peut y avoir de langage plus universel et plus simple, plus exempt d'erreurs et d'obscurités, c'est-à-dire plus digne d'exprimer les rapports invariables des êtres naturels. Considérée de ce point de vue, l'analyse mathématique est aussi étendue*

que la nature elle-même... Son attribut principal est la clarté. Elle n'a point de signes pour exprimer les notions confuses. Elle rapproche les phénomènes les plus divers et découvre les analogies secrètes qui les unissent... Elle nous les rend présents et mesurables, et semble être une faculté de la raison humaine, destinée à suppléer à la brièveté de la vie et à l'imperfection des sens.

Le premier passage indique la démarche : mettre en équation (ici une équation aux dérivées partielles) un phénomène naturel (ici les mouvements de la chaleur) ; trouver la solution particulière correspondant à des conditions données (conditions aux limites, conditions initiales) qui conduit à bien définir les solutions "jusqu'aux dernières applications numériques".

Le second passage exprime la philosophie de Fourier et c'est un hymne à l'analyse mathématique. À côté de "l'étude approfondie de la nature", Fourier tient aussi compte, et il s'en explique ailleurs, de ce que Jacobi appelle "l'utilité publique" (le chauffage des maisons, l'usage de l'énergie solaire et de la géothermie).

Partir de phénomènes naturels ou d'enjeux sociaux, dégager des méthodes générales, et conclure en donnant des méthodes de calcul numérique, cela sonne plus moderne aujourd'hui qu'il y a 50 ans, parce que les ordinateurs et la modélisation sont passés par là. C'est une raison de fond du retour de Fourier.

Cependant le retour de Fourier s'annonçait aussi d'autre façon, au sein même du développement des mathématiques pures. Les problèmes liés aux séries de Fourier, au cours du 19^e et du 20^e siècles, n'ont cessé de servir de motivation, de stimulant ou de test pour un grand nombre de théories mathématiques, de la théorie des nombres à l'analyse fonctionnelle et aux probabilités en passant par les définitions de l'intégrale et la théorie des ensembles. Les premiers acteurs de ce mouvement ont été Lejeune-Dirichlet et Riemann. C'est grâce à la thèse de Riemann sur les séries trigonométriques que l'on parle aujourd'hui de séries de Fourier. En effet, les séries trigonométriques avaient été introduites, bien avant Fourier, par Daniel Bernoulli dans l'étude des cordes vibrantes. Des formules analogues à celles de Fourier, mais portant sur un nombre fini de données et de coefficients, se trouvent déjà chez Lagrange, qui contestait la possibilité de leur extension. Riemann étudie soigneusement l'histoire du sujet, et conclut par un jugement sans appel :

C'est Fourier qui, le premier, a compris d'une manière exacte et complète la nature des séries trigonométriques.

Riemann explique les réticences de Lagrange devant l'audace de Fourier et il met en valeur l'immense portée du couplage des deux formules

$$f(x) = \begin{cases} \quad a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \dots \\ + \frac{1}{2} b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \end{cases}$$

Ce couplage, étendu à des situations plus générales, s'appelle la transformation de Fourier, et il en traduit les deux aspects : l'analyse harmonique, qui détermine dans une fonction f(x) le poids des différentes harmoniques au moyen du calcul des coefficients a_n et b_n, et la synthèse harmonique, qui consiste à reconstituer la fonction f(x) à l'aide de la première formule.

En fait, au cours du 19^e siècle et au-delà, les notions les plus fondamentales de l'analyse ont été élaborées à partir de ces formules ou en liaison avec elles : celle de fonction avec

Dirichlet, celle d'intégrale avec Riemann (l'intégrale de Riemann), puis Lebesgue (l'intégrale de Lebesgue), puis Denjoy (la totalisation de Denjoy), puis Laurent Schwartz (les distributions de Schwartz), celle d'ensemble de points avec George Cantor. En particulier, les distributions de Schwartz légitiment complètement ce que j'appelais plus haut, suivant Darboux, "les formules qui n'ont aucun sens". La convergence des séries de Fourier a donné beaucoup de travail aux mathématiciens, et les a menés à modifier le problème : en face d'une série, qu'en faire ? S'il s'agit d'une série numérique, il faut rechercher les procédés de sommation qui lui sont adaptés. S'il s'agit d'une série de fonctions, on peut songer à un traitement au moyen d'une nouvelle géométrie dans un espace où les points figurent des fonctions : c'est la naissance de l'analyse fonctionnelle. En particulier, les séries trigonométriques sont des séries "orthogonales". Le dernier avatar de séries de Fourier est la théorie des ondelettes, due à Yves Meyer pour sa partie mathématique, et qui au départ est la création et l'étude d'une nouvelle classe de séries orthogonales.

La portée réelle des formules de Fourier apparaît aujourd'hui mieux que naguère : elles constituent un programme. On peut varier le sens que l'on donne aux fonctions, aux séries et aux intégrales. Il s'agit dans tous les cas d'analyse et de synthèse harmonique. C'est le travail des mathématiciens que d'introduire les concepts et les outils qui valident les formules.

Les physiciens ne sont pas en reste. Le titre complet du livre de Dhombres et Robert est : "Fourier, créateur de la physique mathématique". La notion de flux, éclairée par la notation vectorielle, est d'usage si constant qu'on peut en oublier l'origine, le flux de chaleur. L'équation de la chaleur figure avec l'équation des cordes vibrantes et l'équation du potentiel dans la trinité des équations dérivées partielles fondamentales de la physique. La théorie du mouvement brownien et tous les phénomènes de diffusion en ont renouvelé l'intérêt.
Les séries de Fourier et les intégrales de Fourier s'imposent dans la théorie du signal et dans toutes ses variantes. La transformation de Fourier est le paradigme de la recherche des valeurs propres des opérateurs en physique.
Les physiciens ont été sensibles avant les mathématiciens au caractère effectif des procédures de calcul mises en œuvre par Fourier. Pour Fourier, l'intérêt des séries trigonométriques était de permettre un calcul rapide lorsqu'elles étaient "très convergentes" ou "extrêmement convergentes". Ces termes n'ont pas de définition mathématique, et pourtant ils ont un sens clair. Il s'agit de permettre des calculs effectifs, là où l'on en a besoin (en l'occurrence pour Fourier, le calcul de la température en un point d'un solide dont on fixe la distribution des températures au bord). En ce sens, la rapidité de la convergence est plus importante que le fait même de la convergence. Une série "extrêmement convergente" a une valeur pratique : il suffit de quelques termes pour une bonne approximation de la somme.

Revenons pour finir aux mathématiciens d'aujourd'hui.
Aujourd'hui bien plus que naguère, les mathématiciens apprécient la portée des grands programmes visionnaires, qui ne sont jamais complètement formalisés. Ils apprécient également les procédés de calcul effectifs, auxquels l'informatique et les ordinateurs ont donné une portée nouvelle. Fourier entre en résonance avec la façon actuelle ce concevoir le travail mathématique.
Si j'en juge par moi-même, je ne lis plus Fourier comme autrefois. Autrefois, avec l'impertinence de la jeunesse et la caution de mes aînés, je le traitais de haut. Aujourd'hui, je cherche ce qu'il veut dire et comment il a pu y arriver si bien.
L'une des clés est fournie par Fourier, c'est "l'étude approfondie de la nature". Là-dessus encore, les mathématiciens d'aujourd'hui n'ont pas la même optique que naguère. L'unité des mathématiques se traduit moins par les fondements et les structures que par les interactions en

leur sein, nourries des interactions avec la physique et les autres sciences. On parlait en 1960 de la mathématique, en 1980 des mathématiques pures et appliquées, et l'on voit en 2000 les sciences mathématiques brassant des idées et des méthodes venues de toutes les sciences, les malaxant, les distillant, en tirant une substance générale et puissante susceptible de s'investir bien ailleurs, bien au-delà de ce qui lui a donné naissance. En cela, les mathématiques rejoignent une bonne part de leur histoire, et Fourier en particulier.
Un exemple emblématique du retour de Fourier est la théorie des ondelettes dont j'ai déjà dit un mot. Mais c'est surtout, dès l'origine et aujourd'hui plus que jamais, un point de rencontre de physiciens, d'ingénieurs et de mathématiciens. C'est à un physicien, Alex Grossman, et à un ingénieur, Jean Morlet, qu'Yves Meyer a dû en 1985 son initiation au sujet. Aujourd'hui les ondelettes apportent, en même temps qu'un moyen puissant pour la modélisation et le calcul, un langage et un point de vue commun à des spécialistes de nombreuses disciplines. À la suite et avec l'aide parfois de la FFT que je mentionnais dans l'introduction, les ondelettes contribuent à donner un socle mathématique commun à toute la science de notre temps. Cependant le retour de Fourier qu'elles manifestent s'étend bien au-delà de l'analyse de Fourier. Les parties les plus vivantes des mathématiques se trouvent aujourd'hui en interaction avec la physique, l'économie, l'industrie, la biologie. Le retour de Fourier dont il s'agit ici, par delà les indications un peu sommaires que j'ai données sur l'analyse de Fourier, c'est le retour à sa manière de voir, à la philosophie du "Discours préliminaire".

Les mathématiques évoluent et progressent, trop peu de gens le savent. De grandes tendances s'y manifestent, comme dans toutes les sciences, avec des changements de points de vue parfois rapides. Mais, à la différence d'autres disciplines, les mathématiques ne se détournent pas de leur passé. Au contraire, l'essor contemporain en revalorise des pans entiers, on pourrait en donner de multiples exemples. Il est donc imprudent de croire mort le passé. Pour moi, la résurrection de Fourier ne signifie en rien l'enterrement de Jacobi ou Bourbaki, qui me paraissent avoir toute leur place dans la culture et dans l'imaginaire des mathématiciens, par leur philosophie comme par leur œuvre. Le Panthéon mathématique est peuplé d'ombres bien vivantes qui changent de place au cours du temps, certaines bien visibles et d'autres en retrait. Mon propos était de souligner le retour au premier plan, parmi elles, de Joseph Fourier.

Août 2005