De l'analyse de Fourier aux ondelettes

Georges KOEPFLER

Mastère : Traitement de l'Information et Complexité du Vivant (TICV)
Co-diplomation : Université Paris Descartes - ENIT-Tunis - Université Tunis El Manar

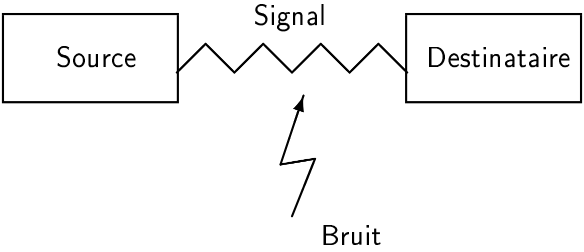
UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES
UFR DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

2008-09

Plan :

Définitions

- Un *signal* est la représentation physique de l'information qu'il convoie de la source vers la destination.
- Les *signaux analogiques* représentent l'information par une grandeur « continue » ; ils sont définis sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$.
- Les *signaux discrets* représentent l'information par des suites de nombres ; ils sont définis sur les entiers $\mathbb{Z}$.



Introduction

Un signal mono-dimensionnel est une fonction d'une variable, notée t, qui prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définitions

Le *support* d'un signal f défini sur $\mathbb{R}$ est l'adhérence de l'ensemble des points sur lesquels la fonction ne s'annule pas :

$$\mathrm{supp(f)} = \overline{\{t \in \mathbb{R} / f(t) \neq 0\}}.$$

Un signal est *stable* s'il est intégrable :

$$f \in L^1(\mathbb{R}) \iff \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\, dt < \infty\,.$$

Un signal est *d'énergie finie* s'il est de carré intégrable :

$$f \in L^2(\mathbb{R}) \iff E_f = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2\, dt < \infty\,.$$

Introduction : Fourier

Transformée de Fourier de f :

$$\forall \nu \in \mathbb{R},\ \hat{f}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\nu t}\, dt.$$

Transformée de Fourier de inverse :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\nu) e^{+i\nu t}\, d\nu.$$

Remarque : Si l'on note $\mathcal{F}_{cl}$ la transformée de Fourier usuelle (*i.e.* avec $e^{\pm 2i\pi\nu t}$), on a la relation $\hat{f}(\nu) = \mathcal{F}_{cl}(f)(\nu/2\pi)$.
Cette relation permet d'obtenir immédiatement tout le formulaire pour la transformée de Fourier réduite.

Introduction : Fourier

Formule de Plancherel

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{g(t)}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\nu)\overline{\hat{g}(\nu)}\,d\nu$$

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\nu)|^2\,d\nu$$

Remarque : $E_{\hat{f}} = 2\pi\, E_f$.

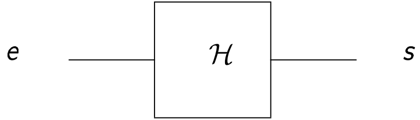
Convolution

$$(f*g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(s)g(t-s)\,ds = \int_{\mathbb{R}} f(t-u)g(u)\,du = (g*f)(t)$$

$$\widehat{f*g} = \hat{f}\hat{g} \quad \text{et} \quad \widehat{fg} = \frac{1}{2\pi}\hat{f}*\hat{g}$$

Introduction : Fourier

Un *filtre linéaire* $\mathcal{H}$ est un opérateur qui associe à un signal en entrée e, un signal en sortie s : $s = \mathcal{H}[e]$.



Si $\mathcal{H}$ est *linéaire* : $\mathcal{H}[\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2] = \lambda_1 \mathcal{H}[e_1] + \lambda_2 \mathcal{H}[e_2]$
et *stationnaire* : $s = \mathcal{H}[e] \Rightarrow \tau_d s = \mathcal{H}[\tau_d e]$, où $\tau_d e(t) = e(t - d)$.
Alors $\mathcal{H}$ est caractérisé par sa *réponse implusionnelle* h :

$$s = h * e \quad \Longleftrightarrow \quad \hat{s} = \hat{h}\hat{e}\,.$$

$\hat{h}$ est appelée *réponse fréquentielle* du filtre $\mathcal{H}$.

Introduction : Fourier, interprétation

On peut écrire

$$\hat{f}(\nu) = A_f(\nu)e^{i\Phi_f(\nu)}, \text{ où } A_f(\nu) \geq 0 \text{ et } \Phi_f(\nu) \in]-\pi, +\pi], (mod.2\pi)$$

Donc

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} A_f(\nu)e^{+i(\Phi_f+\nu t)}\, d\nu\,.$$

f s'écrit comme « somme infinie » des fonctions trigonométriques de toutes les fréquences qui forment son *spectre*.
Si $\hat{h}(\nu) = A_h(\nu)e^{i\Phi_h(\nu)}$,

$$g = h * f \quad \text{vérifie} \quad A_g(\nu) = A_h(\nu)A_f(\nu) \text{ et } \Phi_g = \Phi_h + \Phi_f\,.$$

Ceci permet de *filtrer* (enlever ou amplifier) certaines des fréquences qui composent f !
Note : $\hat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, dt$ =composante basse fréquence de f.

Introduction : Transformée de Fourier rapide (FFT)

On pose $x(n) = f(t_0 + n\Delta t)$, $0 \leq n \leq N-1$, *signal discret de durée finie.*

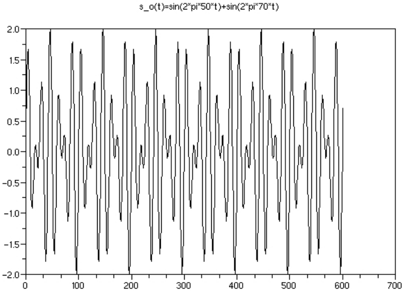
Transformée de Fourier discrète

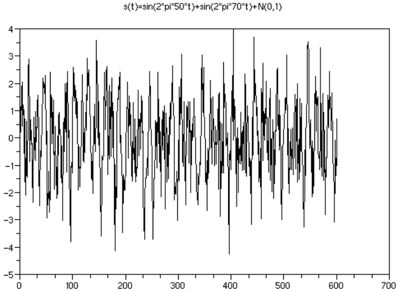
$$\begin{aligned}
\text{analyse :} \quad \hat{x}(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-i2\pi kn/N}\,, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1\ ; \\
\text{synthèse :} \quad x(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}(k)\, e^{i2\pi kn/N}\,, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1\ .
\end{aligned}$$

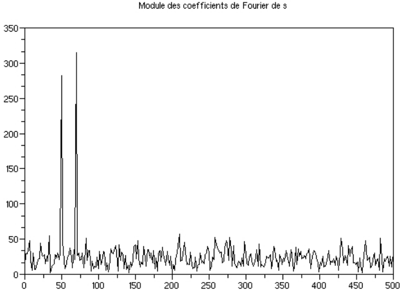
L'implémentation directe des ces formules nécessite N^2 opérations $(+, *)$.

En réorganisant les calculs, on obtient l'algorithme de la transformée de Fourier rapide qui est en $O(N \ln(N))$.

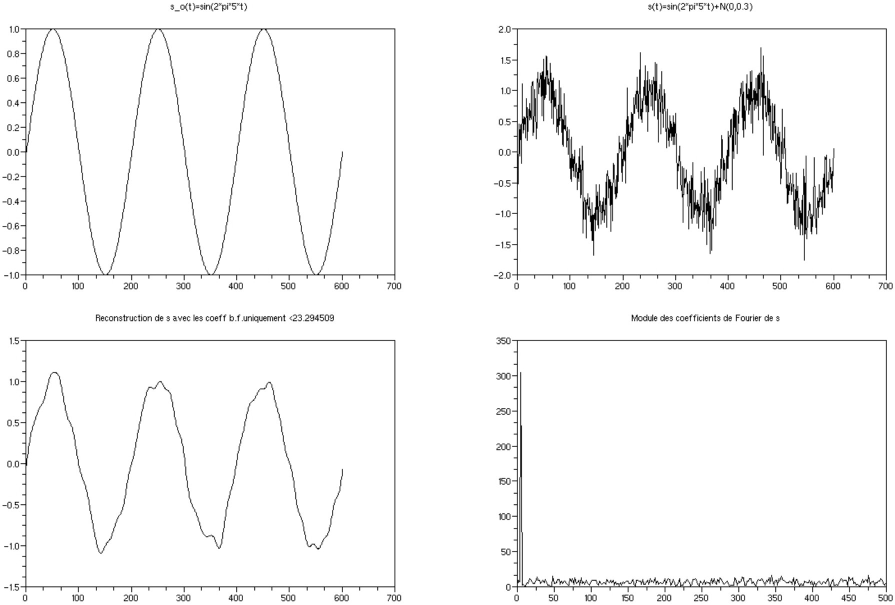
Analyse des fréquences d'un signal $s(t)$



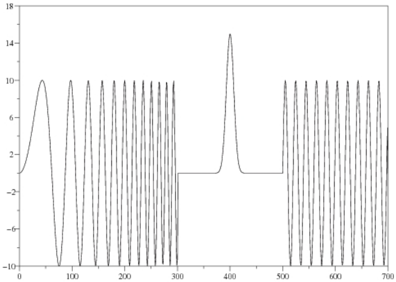




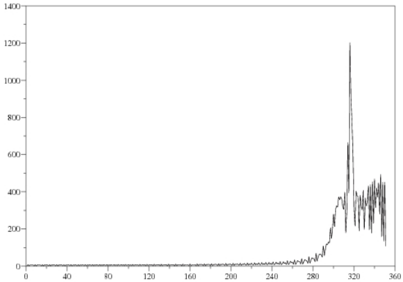
Débruitage d'un signal $s(t)$



L'analyse de Fourier est **globale** !

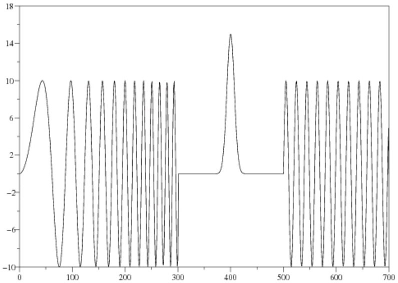


Signal $s(t)$
$\sin(\alpha t^2) \mid e^{\beta t} \mid \sin(t)$

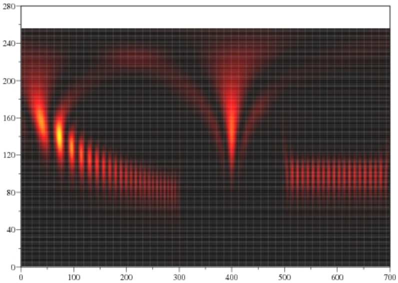


Module de $\hat{s}(\nu)$

L'analyse de Fourier est **globale** !



Signal $s(t)$
$\sin(\alpha t^2) \mid e^{\beta t} \mid \sin(t)$



Analyse temps-échelle

(échelle=1/fréquence)

Besoin de « localiser » les fréquences !

Analyse temps-fréquence

Buts :

1. Localiser les variations du signal.
2. Traiter un signal au fur et à mesure.

D'où l'introduction de représentations temps-fréquences, par exemple la transformée de Fourier à fenêtre glissante.

Comment « localiser » un signal en temps et en fréquence ?

Quelle précision peut-on espérer pour (t, ν) ?

Fenêtre temps-fréquence

Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$, on rappelle que $E_f = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 \, dt = E_{\hat{f}}/2\pi$.

On définit :

le **temps moyen** de f : $$t_f = \frac{1}{E_f} \int_{\mathbb{R}} t|f(t)|^2 \, dt \;;$$

la **fréquence moyenne** de f : $$\nu_f = \frac{1}{E_{\hat{f}}} \int_{\mathbb{R}} \nu|\hat{f}(\nu)|^2 \, d\nu \;;$$

la **durée utile** de f : $$\Delta_t^2(f) = \frac{1}{E_f} \int_{\mathbb{R}} (t - t_f)^2|f(t)|^2 \, dt \;;$$

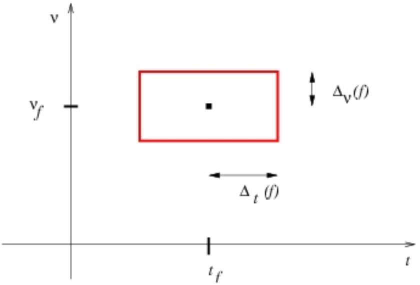
la **bande utile** de f : $$\Delta_\nu^2(f) = \frac{1}{E_{\hat{f}}} \int_{\mathbb{R}} (\nu - \nu_f)^2|\hat{f}(\nu)|^2 \, d\nu \;.$$

Fenêtre temps-fréquence

Le couple $(f, \hat{f})$ se concentre sur la **fenêtre temps-fréquence** :

$$[t_f - \Delta_t(f), t_f + \Delta_t(f)] \times [\nu_f - \Delta_\nu(f), \nu_f + \Delta_\nu(f)]$$

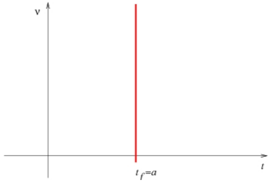
d'aire $4\Delta_t(f)\Delta_\nu(f)$.



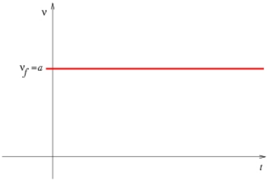
Fenêtre temps-fréquence

Même si les quantités t_f, ν_f, $\Delta_t(f)$ ou $\Delta_\nu(f)$ ne sont pas définies, il peut être intéressant d'utiliser la fenêtre temps-fréquence pour illustrer le comportement de $(f, \hat{f})$.

1. La fonction $f(t) = \begin{cases} 1 & t = a \\ 0 & t \neq a \end{cases}$ est localisée en temps ($t_f = a$), mais pas en fréquence.



2. La fonction $f(t) = e^{iat} = \cos(at) + i\sin(at)$ n'est pas localisée en temps, mais en fréquence ($\nu_f = a$).



Fenêtre temps-fréquence de la gaussienne

On pose $g(t) = c\, e^{-\frac{\alpha}{2}t^2}$, où $\alpha > 0$ et $c = (\alpha/\pi)^{\frac{1}{4}}$.
La constante c est choisie de façon à avoir $E_g = 1$.

On montre que $\hat{g}(\nu) = \dfrac{\sqrt{2}}{c}\, e^{-\frac{1}{2\alpha}\nu^2}$.

On a $t_f = \nu_f = 0$, $\Delta_t(f) = \dfrac{1}{\sqrt{2\alpha}}$ et $\Delta_\nu(f) = \sqrt{\dfrac{\alpha}{2}}$.

La gaussienne se concentre sur $\left[-\dfrac{1}{\sqrt{2\alpha}}, \dfrac{1}{\sqrt{2\alpha}}\right] \times \left[-\sqrt{\dfrac{\alpha}{2}}, \sqrt{\dfrac{\alpha}{2}}\right]$

fenêtre temps-fréquence d'aire $4\Delta_t(f)\Delta_\nu(f) = 2$.

Exercice : Exprimer $g(t)$ et $\hat{g}(\nu)$ grâce à $\Delta_t(f)$ et $\Delta_\nu(f)$.
Que constatez vous ?

Inégalité de Heisenberg

Théorème :

Soit $f \in L^2$ admettant une fenêtre temps-fréquence bornée, alors

$$\Delta_t(f)\Delta_\nu(f) \geq \frac{1}{2}.$$

1. On ne peut pas avoir de temps-fréquences petites par rapport à chaque variable t et ν.
2. La fonction gaussienne atteint la borne inférieure dans l'inégalité de Heisenberg.
   C'est la fonction la plus « concentrée » en temps et en fréquences.

Exercice : Soit f un signal de fenêtre temps-fréquence bornée.
Pour $t_0 \in \mathbb{R}$, déterminer la fenêtre temps-fréquence de $f_{t_0}(t) = f(t - t_0)$.
Pour $\nu_0 \in \mathbb{R}$, déterminer la fenêtre temps-fréquence de $f_{\nu_0}(t) = f(t)e^{i\nu_0 t}$.

Transformée de Fourier à fenêtre glissante

Soit $w \in L^2(\mathbb{R})$ de fenêtre temps-fréquence bornée et centrée en $(0, 0)$.

Définition :

On appelle **transformée de Fourier à fenêtre glissante** d'un signal $f \in L^2(\mathbb{R})$ la fonction

$$\begin{array}{rcccl} W_f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & (b, \nu) & \longmapsto & W_f(b, \nu) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{w(t-b)}e^{-i\nu t}\,dt \end{array}$$

Remarques :

1. En pratique, on prend w réelle et paire.
2. L'information du signal $f(t)$ à l'instant $t = b$ est contenue dans $t \mapsto f(t)\overline{w(t-b)}$:
   on « restreint » f à la fenêtre $\overline{w(t-b)}$
   et on calcule sa transformée de Fourier.

On pose $w_{b,\nu}(t) = w(t-b)e^{i\nu t}$, alors

$$W_f(b,\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{w_{b,\nu}(t)}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega)\overline{\widehat{w_{b,\nu}}(\omega)}\,d\omega$$

Donc $W_f(b,\nu)$ contient l'information (énergie) :

de f au voisinage de b et de $\hat{f}$ au voisinage de ν .

Le **spectrogramme** $|W_f(b,\nu)|^2 = \left|\int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{w_{b,\nu}(t)}\,dt\right|^2$

mesure l'énergie de f dans le voisinage temps-fréquence de (b,ν).

En 1946, Gabor a montré que la transformée de Fourier à fenêtre glissante est stable et permet de reconstruire le signal f.

Transformée de Fourier à fenêtre glissante

Théorème (Gabor)

Soit $w \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, réelle avec $E_w = 1$. Alors pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} W_f(b,\nu) w_{b,\nu}(t)\, d\nu db, \quad \text{formule de reconstruction ;}$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |W_f(b,\nu)|^2\, d\nu db = 2\pi\, E_f = E_{\hat{f}}, \quad \text{conservation d'énergie.}$$

La TFàFG est une application non surjective de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R}^2)$:

$$f \in L^2(\mathbb{R}) \longleftrightarrow W_f \in L^2(\mathbb{R}^2)\ .$$

On représente un signal 1D grâce à une fonction de deux variables.
Un élément $\Phi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ doit vérifier des propriétés de **redondance** pour pouvoir être la TFàFG d'un élément f de $L^2(\mathbb{R})$.

Exemples de transformée de Fourier à fenêtre glissante

Pour les applications pratiques, différentes fenêtres w sont utilisées :

- $w(t) = g(t) = (\alpha/\pi)^{\frac{1}{4}}\, e^{-\frac{\alpha}{2}t^2}$,
  c'est la **transformée de Gabor** ;
- $w(t) = \Big(1 - |t|/a\Big)\mathbb{I}_{[-a,+a]}(t)$, $a > 0$, fenêtre triangulaire ;
- $w(t) = \Big(\alpha + (1-\alpha)\cos(\pi t/a)\Big)\mathbb{I}_{[-a,+a]}(t)$, $a > 0$, $\alpha \in [0,1]$;
  pour $\alpha = 0$, on a un cosinus tronqué sur $[-a,+a]$;
  pour $\alpha = 1$, on a une fenêtre rectangulaire, ν_w pas définie ;
  pour $\alpha = 0.54$, on a la fenêtre de Hamming.

Calculs

On pose $x(n) = f(t_0 + n\Delta t)$, $0 \leq n \leq N-1$, *signal discret de durée finie*, et $w(n)$, $-N+1 \leq n \leq N-1$, les coefficients discrets de la fenêtre réelle et symétrique, *i.e.* $w(-n) = w(n)$ pour $1 \leq n \leq N-1$, et $\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} w(n)^2 = 1$.

Transformée de Fourier à fenêtre glissante discrète :

$$W_x(k,l) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, w(n-k)\, e^{-i2\pi ln/N}, \qquad k,l = 0,1,\ldots,N-1;$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} w(n-k) \sum_{l=0}^{N-1} W_x(k,l)\, e^{i2\pi ln/N}, \quad n = 0,1,\ldots,N-1.$$

Pour tout $0 \leq k < N$, $W_x(k,l)$ s'obtient par la FFT de $x(n)w(n-k)$, la décomposition est donc en $O(N^2 \ln(N))$. De même pour la reconstruction.

Conclusions

La transformée de Fourier à fenêtre glissante permet d'analyser un signal dans une fenêtre temps-fréquence

$$[b - \Delta_t(w), b + \Delta_t(w)] \times [\nu - \Delta_\nu(w), \nu + \Delta_\nu(w)].$$

Ces fenêtres sont fixes :

on a toujours la même résolution en temps et en fréquences.

Certains signaux sont une succession de *phases stationnaires*, où la fréquence est stable sur une longue durée, et de *phases transitoires*, où il y a de fortes variations de fréquences sur une courte durée.

D'où l'idée d'adapter les dimensions des fenêtres temps-fréquence.

Exercice : Réfléchir à l'implémentation de la TFàFG discrète en utilisant la fonction `fft()` de `Matlab` ou `Scilab`.

Étudions l'influence d'un changement d'échelle sur les fenêtres temps-fréquence.

Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$, pour $a > 0$, on pose $f_a(t) = f\left(\frac{t}{a}\right)$.

$$E_{f_a} = \int_{\mathbb{R}} \left| f\left(\frac{t}{a}\right)\right|^2 dt = a\, E_f\ .$$

$$\hat{f}_a(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{t}{a}\right) e^{-i\nu t}\, dt = a\hat{f}(a\nu)\,.$$

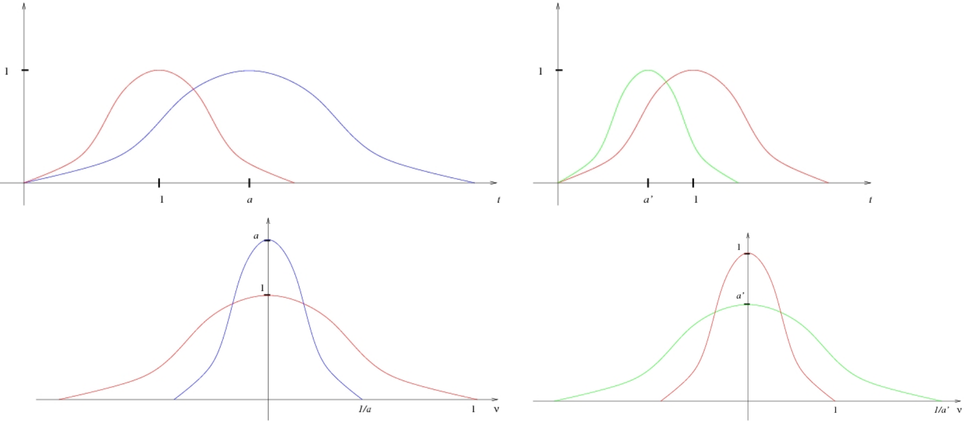
On calcule facilement :

$$t_{f_a} = a\, t_f \qquad \text{et} \qquad \Delta_t(f_a) = a\,\Delta_t(f)$$

$$\nu_{f_a} = \frac{1}{a}\,\nu_f \qquad \text{et} \qquad \Delta_\nu(f_a) = \frac{1}{a}\,\Delta_\nu(f)$$

Analyse temps-échelle

Action d'un changement d'échelle sur $f(t)$,
avec $f_a(t) = f(t/a)$ et $0 < a' < 1 < a$:

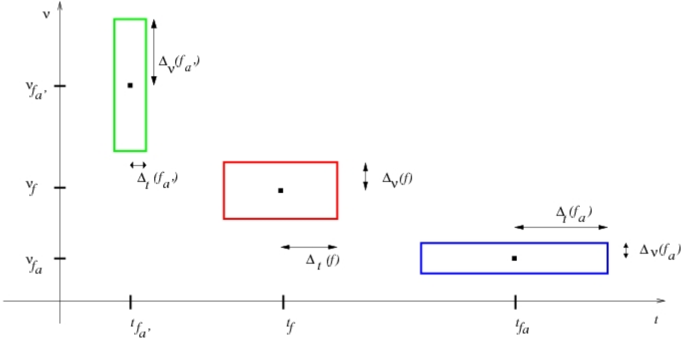


De même pour $\hat{f}(\nu)$ et $\hat{f}_a(\nu) = a\hat{f}(a\nu)$.

On a $\Delta_t(f_a)\Delta_\nu(f_a) = \Delta_t(f)\Delta_\nu(f)$, de plus

$$\frac{t_{f_a}}{t_f} = \frac{\Delta_t(f_a)}{\Delta_t(f)} = a \quad \text{et} \quad \frac{\nu_{f_a}}{\nu_f} = \frac{\Delta_\nu(f_a)}{\Delta_\nu(f)} = \frac{1}{a}$$

Soit $0 < a' < 1 < a$, on construit les fenêtres t.-f. de f, $f_{a'}$ et f_a :



Définition :

On appelle *ondelette analysante* réelle, une fonction $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, qui est dans $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, $E_\Psi = 1$, définissant une fenêtre temps-fréquence bornée et vérifiant la condition d'admissibilité

$$K_\Psi = \int_0^{+\infty} \frac{|\hat{\Psi}(\nu)|}{\nu} \, d\nu < \infty$$

Remarque : On montre qu'alors $\hat{\Psi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \Psi(t) \, dt = 0$,

Donc Ψ est une fonction *oscillante*, amortie à l'infini.

À la fonction Ψ on applique une translation de $b \in \mathbb{R}$ et un changement d'échelle $a \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\Psi_{b,a}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\,\Psi\left(\frac{t-b}{a}\right).$$

On a alors conservation d'énergie : $E_{\Psi_{b,a}} = E_\Psi = 1$ et

$$\hat{\Psi}_{b,a}(\nu) = \sqrt{a}\,\hat{\Psi}(a\nu)\,e^{-i\nu b}.$$

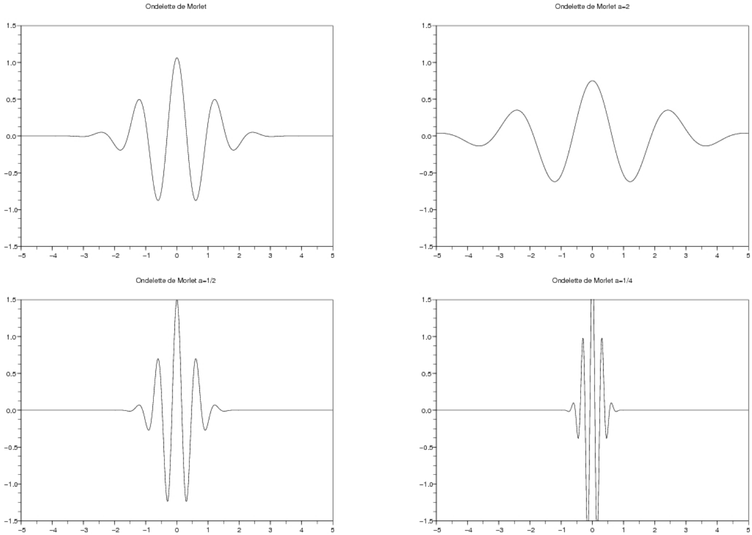
Pour Ψ paire, on a $t_\Psi = 0$ et comme Ψ est réelle $\nu_\Psi = 0$.

Finalement, $t_{\Psi_{b,a}} = b$, $\nu_{\Psi_{b,a}} = 0$,

$$\Delta_t(\Psi_{b,a}) = a\,\Delta_t(\Psi) \text{ et } \Delta_\nu(\Psi_{b,a}) = \frac{1}{a}\,\Delta_\nu(\Psi).$$

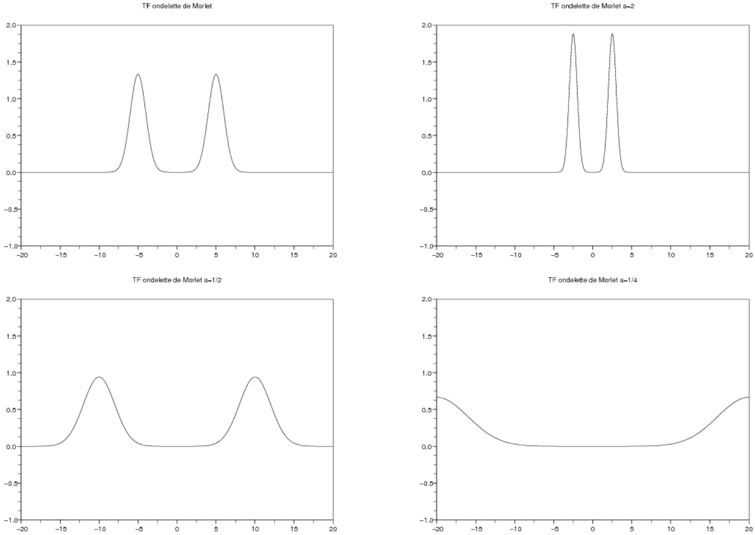
Exemple : ondelette de Morlet

$$\Psi(t) = c\, e^{-\frac{t^2}{2}} \cos(5t)\,, \qquad \text{avec } c \text{ telle que } E_\psi = 1$$



Exemple : ondelette de Morlet (suite)

$$\hat{\Psi}(\nu) = c\,\sqrt{\pi/2}\left(e^{-(t+5)^2/2} + e^{-(t-5)^2/2}\right), \qquad \hat{\Psi}(0) \neq 0\,.$$



1. Ondelette de Haar : $\Psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 \leq t < 1/2; \\ -1 & \text{pour } -1/2 \leq t < 0; \\ 0 & \text{ailleurs .} \end{cases}$

   On montre que $\hat{\Psi}(\nu) = i\,\dfrac{\sin^2(\nu/4)}{\nu/4}\, e^{-i\frac{\nu}{2}}$.

   Exercice : tracer $\Psi_{b,a}$ et $\hat{\Psi}_{b,a}$ pour $a = 1, 2, 1/2$ et $b = 0, 2, -2$.

2. Le chapeau mexicain : $\Psi(t) = c_1\,(1 - t^2)\, e^{-\frac{t^2}{2}}$,
   c_1 est telle que $E_\Psi = 1$.
   C'est la dérivée seconde de la gaussienne (au signe près),
   et $\hat{\Psi}(\nu) = c_2\,\nu^2\, e^{-\frac{t^2}{2}}$.

   Exercice : tracer $\Psi_{b,a}$ et $\hat{\Psi}_{b,a}$ pour $a = 1, 2, 1/2$ et $b = 0$.

Transformé en ondelettes

Définition :

On appelle **transformée en ondelettes** (réelle) d'une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$, associée à une ondelette analysante Ψ, la fonction

$$\begin{array}{rcccl} C_f & : & \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (b,a) & \longmapsto & C_f(b,a) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\Psi_{b,a}(t)\,dt \end{array}$$

Le coefficient d'ondelette

$$C_f(b,a) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\Psi_{b,a}(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\sqrt{a}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\nu)\hat{\Psi}(a\nu)\,e^{+i\nu b}\,d\nu$$

mesure les variations à l'échelle a au voisinage de $t = b$.

Exercice :

Pour $d \in \mathbb{R}$, on pose $f_d(t) = f(t-d)$, calculer $C_{f_d}(b,a)$.

Pour $\alpha > 0$, on pose $f_\alpha(t) = f(t/\alpha)/\sqrt{\alpha}$, calculer $C_{f_\alpha}(b,a)$.

Transformé en ondelettes

Théorème (Morlet-Grossmann, 1984) :

Soit Ψ une ondelette analysante réelle, alors pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$:

$$f(t) = \frac{1}{K_\Psi} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} C_f(b,a) \Psi_{b,a}(t) \, \frac{dbda}{a^2}, \quad \text{formule de reconstruction ;}$$

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} |C_f(b,a)|^2 \, \frac{dbda}{a^2} = K_\Psi \, E_f, \quad \text{conservation d'énergie.}$$

La TO est une application de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*; dbda/a^2)$:
elle représente un signal 1D grâce à une fonction de deux variables (b, a).
Comme pour la TFàFG, un élément $\Phi \in L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*; dbda/a^2)$ doit vérifier des propriétés de **redondance** pour pouvoir être la TO d'un élément f de $L^2(\mathbb{R})$.

Calculs TO :

On pose $x(n) = f(t_0 + n)$, $0 \leq n \leq N-1$, *signal discret de durée finie*, $(\Delta t = 1)$.

Ψ ondelette réelle, paire, avec :

$\mathrm{supp}(\Psi) = [-1/2, 1/2]$ donc $\mathrm{supp}(\Psi(t/a)) = [-a/2, +a/2]$.

Discrétisation : $t \to n$ et $a \to 2^j$, mais pour quels $j \in \mathbb{Z}$?
Il suffit d'avoir

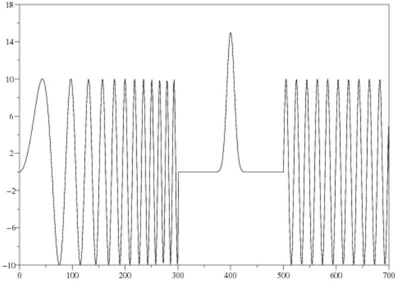
$\mathit{longueur}[\mathrm{supp}(\Psi(t/a))] = a \leq N = \mathit{longueur}(x)$: $2^j \leq N$
et $\mathit{longueur}[\mathrm{supp}(\Psi(t/a))] = a \geq 2 = 2\Delta t$: $2^j \geq 2$.

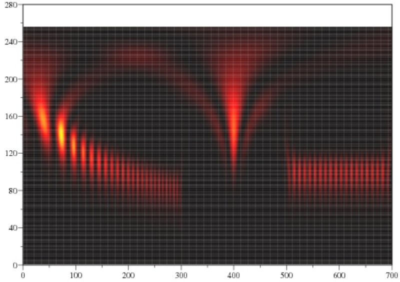
Finalement $1 \leq j \leq \ln_2(N) = p$ si $N = 2^p$.

On pose $\psi(n,j) = 2^{-j/2}\,\Psi(2^{-j}n)$ et alors

$$C_x(n,j) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\,\psi(k-n,j)\,, \quad 0 \leq n < N, 1 \leq j \leq J \leq p\,.$$

Calculs TO (suite) :





s est composée de : $\sin(\alpha t^2) \mid e^{\beta t} \mid \sin(t)$

à droite on a affiché $|C_s(n,j)|$ $(a = 2^j \nearrow = \nu \searrow)$.

On a toujours une représentation redondante de s par les coefficients $C_s(b,a)$.

Dans la suite on va construire une base de $L^2(\mathbb{R})$ permettant de représenter s en temps et échelle.

On a vu dans ce qui précède que l'analyse temps-échelle, permet d'analyser certains signaux plus finement que l'analyse de Fourier.

Il reste néanmoins la complexité des calculs et le problème de la redondance de la TO continue.

Dans la suite, on veux construire une représentation de f dans une base dont les éléments peuvent être interprétés en termes de temps-échelle :

$$f(t) = \sum_{n,j \in \mathbb{Z}} c_{n,j} \, \Psi_{n,j}(t) \, .$$

Analyse multi-résolution (AMR)

Rappel : l'espace vectoriel $L^2(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire

$$< f, g >= \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t)\, dt\,, \text{ ainsi } E_f =< f, f >.$$

Définition :

Une **analyse multi-résolution** est une suite $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ de sous-espaces vectoriels fermés de $L^2(\mathbb{R})$ vérifiant :

1. Il existe $\varphi \in V_0$ telle que $\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ soit une base de V_0.
2. Pour tout $j \in \mathbb{Z}$: $\quad f(t) \in V_j \Leftrightarrow f\left(\frac{t}{2}\right) \in V_{j+1}$.
3. Pour tout $(j,k) \in \mathbb{Z}$: $f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(t-2^j k) \in V_j$.
4. Pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $V_{j+1} \subset V_j$:
$$\{O\} \subset \ldots \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \subset \ldots \subset L^2(\mathbb{R})$$
où $\lim\limits_{j\to-\infty} V_j = L^2(\mathbb{R})$ et $\lim\limits_{j\to+\infty} V_j = \{O\}$.

Analyse multi-résolution : interprétation

- Pour tout $f \in V_0$ on a $f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a[n]\,\varphi(t-n)$.
  On peut échantillonner les éléments de V_0.
- V_j est un **espace d'approximation à l'échelle** 2^j (**résolution** 2^{-j}) :

$$f \in V_0 \Leftrightarrow f\left(\frac{t}{2^j}\right) = f(2^{-j}t) \in V_j\,.$$

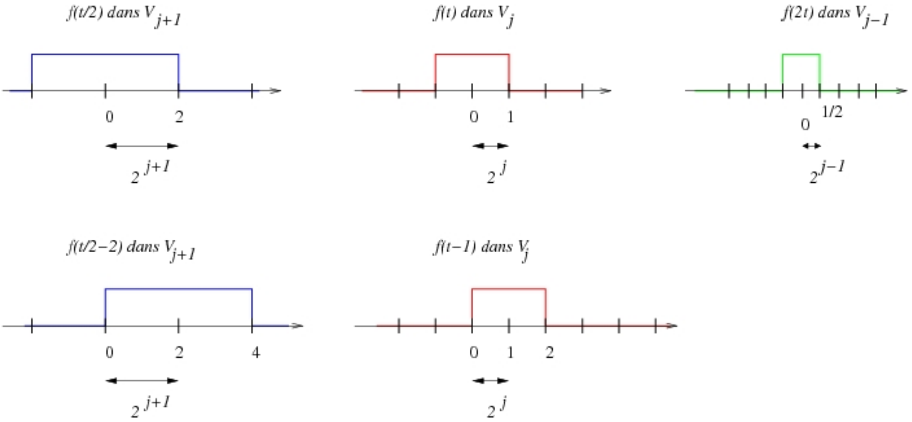
- $f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(2^{-1}t) \in V_{j+1}$ affirme qu'une dilatation de 2 (=chgt d'échelle avec $a=2$) de $f \in V_j$,
  donne une approximation dans V_{j+1}, *i.e.* à l'échelle 2^{j+1}.

  Comme $V_{j+1} \subset V_j$, une approximation à l'échelle 2^{j+1} s'obtient aussi comme approximation à l'échelle (plus petite/fine) 2^j.

  Note : petite échelle = grande résolution !

Analyse multi-résolution (AMR)

La figure suivante permet d'illustrer les hypothèses :



Définition :

La fonction $\varphi \in V_0$ est appelée **fonction échelle**.

On note : $\varphi_{n,j}(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2^j}}\,\varphi\left(\dfrac{t-2^j n}{2^j}\right) = 2^{-j/2}\varphi(2^{-j}t-n) \in V_j$

Pour tout $j \in \mathbb{Z}$,
les fonctions $\{\varphi_{n,j}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ forment une base orthonormée du s.e.v. V_j.

On a $\varphi_{0,1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\varphi\left(\dfrac{t}{2}\right) \in V_1 \subset V_0$,

d'où **l'équation d'échelle** : $\quad \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\varphi\left(\dfrac{t}{2}\right) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]\,\varphi(t-n)\,.$

Les coefficients $(h[n])_{n\in\mathbb{Z}}$ sont uniques.

Base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$

Soit $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ une AMR de $L^2(\mathbb{R})$, $f \in L^2(\mathbb{R})$.
On note $P_{V_j}f$ la projection orthogonale de f sur V_j,

$P_{V_j}f$ est l'approximation de f à l'échelle 2^j.

$P_{V_{j-1}}f$ est l'approximation de f à l'échelle (plus fine) $2^j/2 = 2^{j-1}$.

Or, $V_j \subset V_{j-1}$, on note alors W_j le s.e.v. orthogonal à V_j dans V_{j-1} :

$$V_{j-1} = V_j \oplus W_j.$$

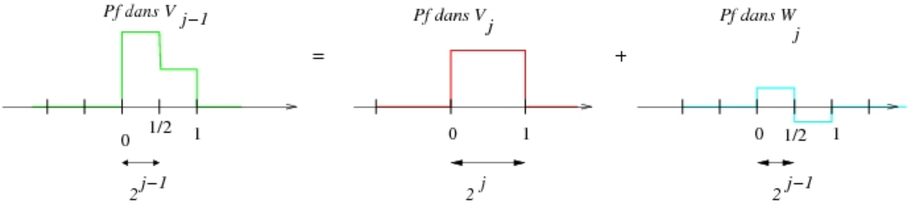
W_j est appelé **espace des détails** à l'échelle 2^{j-1} et on a

$$P_{V_{j-1}}f = P_{V_j}f + P_{W_j}f.$$

Donc l'approximation à l'échelle fine 2^{j-1} est la somme de l'approximation à l'échelle grossière 2^j et des détails à l'échelle 2^{j-1}.

Base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$

La figure suivante montre la décomposition de $P_{V_{j-1}}f$ sur $P_{V_j}f$ et $P_{W_j}f$:



Propriétés :

$$\forall i \neq j : \quad W_i \perp W_j;$$

$$\forall j : \quad V_{j-1} = W_j \oplus W_{j+1} \oplus W_{j+2} \oplus \ldots \oplus W_i \oplus \ldots;$$

$$L^2(\mathbb{R}) = \ldots \oplus W_{i-1} \oplus W_i \oplus W_{i+1} \oplus \ldots$$

Construction d'une orthonormée d'ondelettes de $L^2(\mathbb{R})$ (Meyer, Mallat, 1989)

Soit $\varphi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ une **fonction échelle** et $(h[n])_{n\in\mathbb{Z}}$ définie par :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,\varphi\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]\,\varphi(t-n)\,.$$

On pose alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\quad g[n] = (-1)^{1-n}\,h[1-n]$

et on considère **l'ondelette** $\Psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ telle que :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,\Psi\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g[n]\,\varphi(t-n)\,,$$

i.e. telle que $\Psi(t/2)/\sqrt{2} \in V_0$, où encore $\Psi(t) \in V_{-1} = V_0 \oplus W_0$.

On montre que $\Psi(t) \in W_0$

et que $\{\Psi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de W_0.

Construction d'une orthonormée d'ondelettes de $L^2(\mathbb{R})$ (Meyer, Mallat, 1989)

On pose

$$\Psi_{n,j}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}}\,\Psi\left(\frac{t-2^j n}{2^j}\right) = 2^{-j/2}\,\Psi(2^{-j}t-n)\,.$$

Alors, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $\{\Psi_{n,j}(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de W_j.

Finalement,

$\{\Psi_{n,j}(t-n)\}_{n,j\in\mathbb{Z}}$ est une base orthonormée d'ondelettes de $L^2(\mathbb{R})$.

Exemple : Ondelettes de Haar. $\varphi(t) = \mathbb{I}_{[0,1[}(t)$ et

$$V_j = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) / f \text{ est constante sur } [n2^j, (n+1)2^j[, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

On montre que $h[0] = h[1] = 1/\sqrt{2}$ et $h[n] = 0$ pour $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0,1\}$.
On en déduit $(g[n])_{n\in\mathbb{Z}}$ et l'on obtient l'ondelette de Haar :

$$\Psi(t) = \mathbb{I}_{[1/2,1[}(t) - \mathbb{I}_{[0,1/2[}(t)\,.$$

Algorithme fwt

Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$, on suppose f connue à l'échelle 2^j, *i.e.* $P_{V_j} f$ donnée.
Comme $V_j = V_{j+1} \oplus W_{j+1}$ on a la relation :

$$P_{V_j} f = P_{V_{j+1}} f + P_{W_{j+1}} f \,,$$

et comme

$$P_{V_j} f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_j[n]\, \varphi_{n,j}(t),$$

$$P_{V_{j+1}} f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{j+1}[n]\, \varphi_{n,j+1}(t) \;\text{ et }\; P_{W_{j+1}} f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_{j+1}[n]\, \Psi_{n,j+1}(t).$$

But : exprimer $(a_{j+1}[n])_{n \in \mathbb{Z}}$ et $(d_{j+1}[n])_{n \in \mathbb{Z}}$ en fonction de $(a_j[n])_{n \in \mathbb{Z}}$

Algorithme `fwt`

Théorème (Mallat 1989) :

Décomposition de $P_{V_j} f$ sur $V_{j+1} \oplus W_{j+1}$:

$$\text{pour tout } k \in \mathbb{Z} : \quad a_{j+1}[k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n-2k] a_j[n],$$

$$d_{j+1}[k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g[n-2k] a_j[n].$$

Reconstruction de $P_{V_j} f$ à partir de $P_{V_{j+1}} f$ et $P_{W_{j+1}} f$:

pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$a_j[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[n-2k] a_{j+1}[k] + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g[n-2k] d_{j+1}[k].$$

Algorithme `fwt`, interprétation :

• Posons, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $h^s[n] = h[-n]$, *i.e.* on inverse la suite $(h[n])_{n\in\mathbb{Z}}$.
La convolution discrète de $(a_j[n])_{n\in\mathbb{Z}}$ par $(h^s[n])_{n\in\mathbb{Z}}$ est donnée par :

$$s[m] = (h^s * a_j)[m] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h^s[m-n]g[n] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h[n-m]g[n]\,,$$

$$a_{j+1}[k] = s[2k] = (h^s * a_j)[2k]\,.$$

On obtient $(a_{j+1}[n])_{n\in\mathbb{Z}}$ par une **convolution** et une **décimation** par 2.

• Posons, $n \in \mathbb{Z}$, $a^i_{j+1}[l] = \begin{cases} a_{j+1}[k] & \text{si } l = 2k \\ 0 & \text{si } l = 2k+1 \end{cases}$

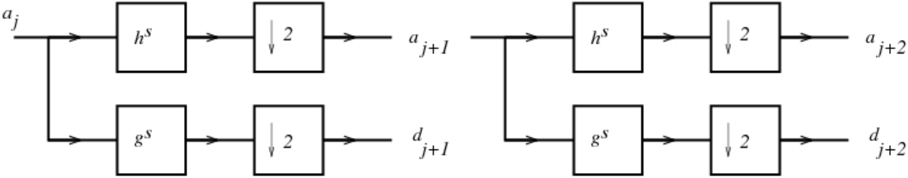
i.e. on insère des 0 dans la suite $(a_{j+1}[n])_{n\in\mathbb{Z}}$.Alors

$$(h * a^i_{j+1})(n) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} h[n-l]a^i_{j+1}[l] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h[n-2k]a_{j+1}[k]\,.$$

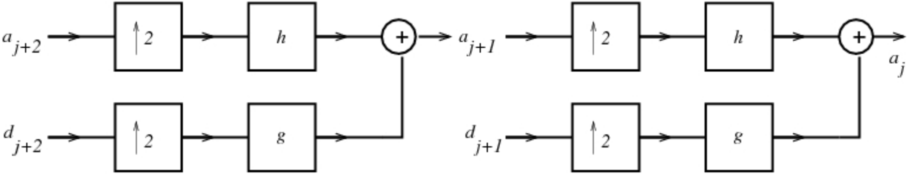
On obtient $(a_j[n])_{n\in\mathbb{Z}}$ par **insertion de zéros** tous les 2 et **convolution**.

Algorithme fwt, schéma fonctionnel

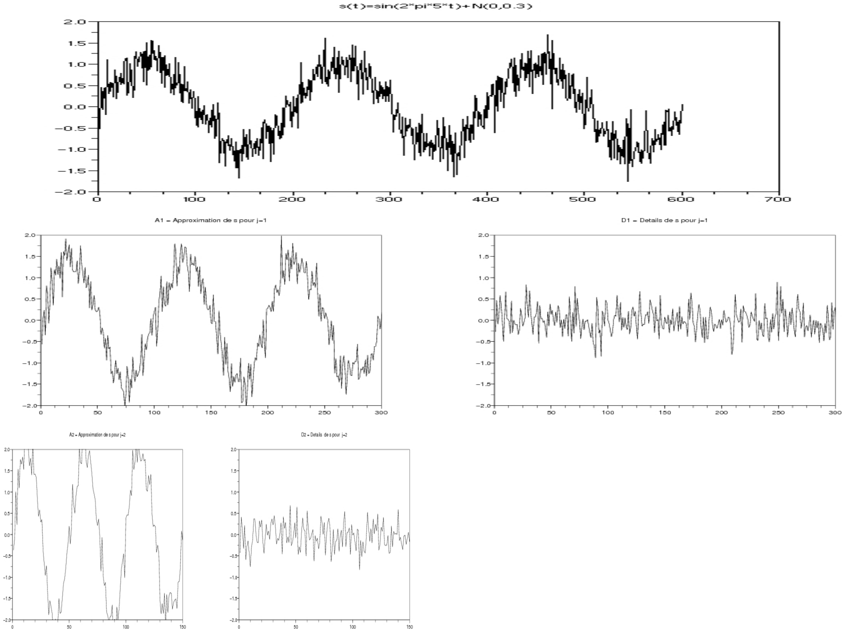
Pour la décomposition / analyse :



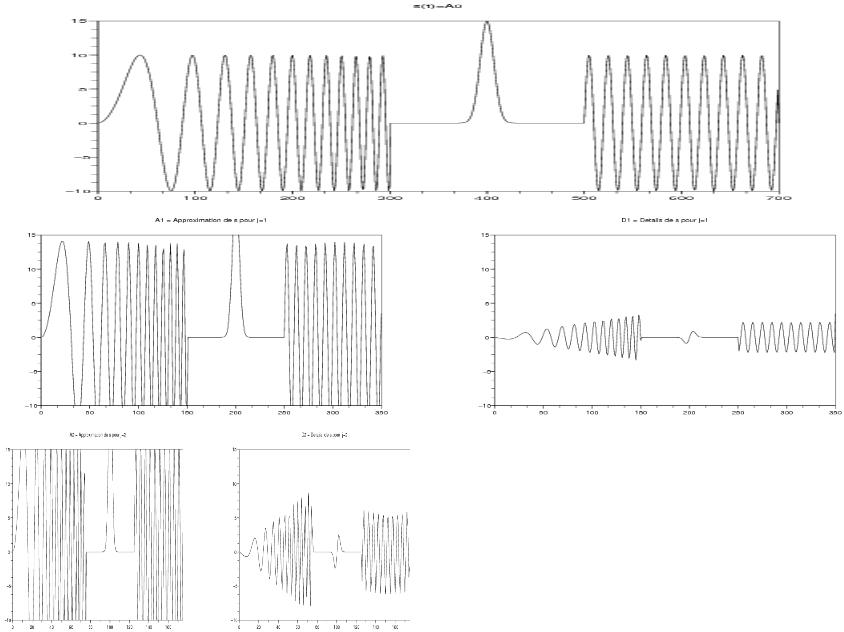
Pour la reconstruction / synthèse :



Décomposition d'un signal



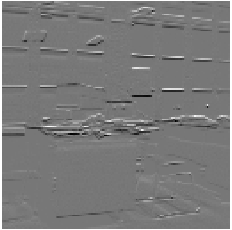
Décomposition d'un autre signal



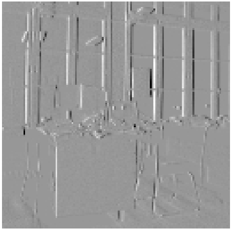
Décomposition d'une image

$A_0(f)$, taille $2^8 \times 2^8$

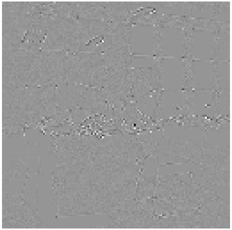
$A_1(f)$, taille $2^7 \times 2^7$



$D_1^1(f)$, taille $2^7 \times 2^7$



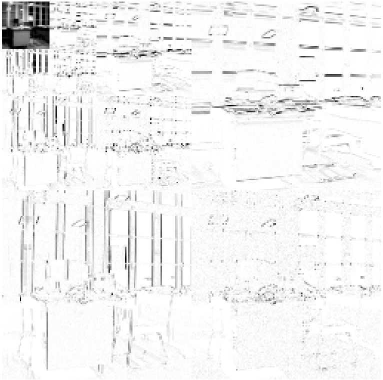
$D_1^2(f)$, taille $2^7 \times 2^7$



$D_1^3(f)$, taille $2^7 \times 2^7$

Décomposition d'une image

Décomposition à l'ordre $J = 3$: $D^i_j(f)$, $1 \leq i, j \leq 3$, et $A_3(f)$.



Pour les détails $D^i_j(f)$, $1 \leq i, j \leq 3$, *on représente la valeur absolue avec affichage en inversion vidéo,*

i.e. $|D^i_j(f)[l, c]| = 0 \rightarrow \text{blanc}$ *et* $|D^i_j(f)[l, c]| = \text{“grand''} \rightarrow \text{noir}$.