MESURE, INTEGRATION, PROBABILITES

Thierry Gallouët Raphaèle Herbin

February 19, 2009

Contents

1 Motivation et objectifs **5**
- 1.1 Intégrale des fonctions continues . . . 5
- 1.2 Insuffisance de l'intégrale des fonctions continues . . . 6
- 1.3 Les probabilités . . . 7
- 1.4 Objectifs . . . 7
- 1.5 Exercices . . . 9

2 Tribus et mesures **16**
- 2.1 Introduction... par les probabilités . . . 16
  - 2.1.1 Cas d'un problème "discret" . . . 16
  - 2.1.2 Exemple continu . . . 17
- 2.2 Tribu ou $\sigma-$algèbre . . . 17
- 2.3 Mesure, probabilité . . . 20
- 2.4 mesure signée . . . 26
- 2.5 La mesure de Lebesgue sur la tribu des boréliens . . . 28
- 2.6 Indépendance et probabilité conditionnelle . . . 36
  - 2.6.1 Probabilité conditionnelle . . . 36
  - 2.6.2 Evènements indépendants, tribus indépendantes . . . 37
  - 2.6.3 Probabilités sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ . . . 39
- 2.7 Exercices . . . 40
  - 2.7.1 Tribus . . . 40
  - 2.7.2 Mesures . . . 44
  - 2.7.3 Probabilités . . . 49

3 Fonctions mesurables, variables aléatoires **50**
- 3.1 Introduction, topologie sur $\overline{\mathbb{R}}_+$ . . . 50
- 3.2 Fonctions étagées . . . 51
- 3.3 Fonctions mesurables et variables aléatoires . . . 53
- 3.4 Mesure image, loi d'une v.a., v.a. indépendantes . . . 59
- 3.5 Convergence p.p., p.s., en mesure, en probabilité . . . 61
- 3.6 Exercices . . . 63

4 Fonctions intégrables **73**
- 4.1 Intégrale d'une fonction étagée positive . . . 73
- 4.2 Intégrale d'une fonction mesurable positive . . . 75
- 4.3 Théorème de convergence monotone et lemme de Fatou . . . 78

4.4 Mesures et probabilités de densité . . . 81
4.4.1 Définitions . . . 81
4.4.2 Exemples de probabilités de densité . . . 82
4.5 L'espace $\mathcal{L}^1$ des fonctions intégrables . . . 82
4.6 L'espace L^1 . . . 85
4.7 Théorèmes de convergence dans L^1 . . . 88
4.7.1 Convergence presque partout et convergence dans L^1 . . . 89
4.7.2 Convergence d'une série absolument convergente et conséquences . . . 90
4.8 Continuité et dérivabilité sous le signe $\int$ . . . 92
4.9 Espérance et moments des variables aléatoires . . . 93
4.10 Espace $L^1_{\mathbb{C}}(E,T,m)$ et espace $L^1_{\mathbb{R}^N}(E,T,m)$ . . . 96
4.11 Exercices . . . 98
4.11.1 Intégrale des fonctions mesurables positives et espace $\mathcal{L}^1$ . . . 98
4.11.2 L'espace L^1 . . . 103
4.11.3 Espérance et moments des variables aléatoires . . . 108

5 Mesures sur la tribu des boréliens **111**
5.1 L'intégrale de Lebesgue et l'intégrale des fonctions continues . . . 111
5.2 Mesures abstraites et mesures de Radon . . . 112
5.3 Changement de variables, densité et continuité . . . 118
5.4 Intégrales impropres des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ . . . 120
5.5 Exercices . . . 121

6 Les espaces L^p **129**
6.1 Définitions et premières propriétés . . . 129
6.1.1 Les espaces L^p, avec $1 \leq p < +\infty$ . . . 129
6.1.2 L'espace L^∞ . . . 134
6.1.3 Quelques propriétés des espaces $L^p, 1 \leq p \leq +\infty$ . . . 138
6.2 Analyse hilbertienne et espace L^2 . . . 140
6.2.1 Définitions et propriétés élémentaires . . . 140
6.2.2 Projection sur un convexe fermé non vide . . . 145
6.2.3 Théorème de Représentation de Riesz . . . 150
6.2.4 Bases hilbertiennes . . . 152
6.3 Dualité dans les espaces L^p, $1 \leq p \leq \infty$ . . . 159
6.3.1 Dualité pour $p = 2$ . . . 159
6.3.2 Dualité pour $1 \leq p \leq \infty$ . . . 159
6.3.3 Théorème de Radon-Nikodym . . . 163
6.4 Convergence faible, faible-$\star$, étroite, en loi. 166
6.4.1 Convergence faible et faible-$\star$ . . . 166
6.4.2 Convergence étroite et convergence en loi . . . 168
6.4.3 Lois des grands nombres, théorème central limite . . . 169
6.5 Exercices . . . 170
6.5.1 Espaces L^p, $1 \leq p \leq \infty$ . . . 170
6.5.2 Espaces de Hilbert, Espace L^2 . . . 176
6.5.3 Théorème de Radon-Nikodym et Dualité dans les espaces L^p . . . 179
6.5.4 Convergence faible, faible-$\star$, étroite, en loi. 184

7 Produits d'espaces mesurés **193**
7.1 Motivation . . . 193
7.2 Mesure produit . . . 194
7.3 Théorèmes de Fubini-Tonelli et Fubini . . . 198
7.4 Mesure de Lebesgue sur la tribu des boréliens de $\mathbb{R}^N$ . . . 202
7.5 Convolution . . . 205
7.6 Formules de changement de variables . . . 209
7.7 Exercices . . . 210
7.7.1 Mesure produit . . . 210
7.7.2 Fubini-Tonelli et Fubini . . . 211
7.7.3 Mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ . . . 212
7.7.4 Convolution . . . 215
7.7.5 Changement de variables . . . 216

8 Densité, séparabilité, et compacité dans les espaces $L^p(\Omega)$ **220**
8.1 Théorèmes de densité pour les espaces $L^p(\Omega)$ . . . 220
8.1.1 Densité des fonctions $C_c(\Omega,\mathbb{R})$ dans $L^p(\Omega)$ . . . 220
8.1.2 Régularisation par convolution . . . 221
8.1.3 Densité de $C_c^\infty(\Omega,\mathbb{R})$ dans $L^p(\Omega)$ . . . 223
8.2 Séparabilité de $L^p(\Omega)$ . . . 224
8.3 Compacité dans les espaces $L^p(\Omega)$ . . . 224
8.4 Propriété de compacité faible . . . 225
8.5 Exercices . . . 225

9 Vecteurs aléatoires **229**
9.1 Définition, propriétés élémentaires . . . 229
9.2 Indépendance . . . 233
9.3 Vecteurs gaussiens, théorème central limite . . . 235
9.4 Exercices . . . 237
9.4.1 Définition, propriétés élémentaires . . . 237
9.4.2 Indépendance . . . 238
9.4.3 Vecteurs gaussiens, théorème central limite . . . 239

10 Transformation de Fourier, fonction caractéristique **241**
10.1 Introduction et notations . . . 241
10.2 Transformation de Fourier dans L^1 . . . 241
10.2.1 Définitions et premières propriétés . . . 241
10.2.2 Théorème d'inversion . . . 243
10.2.3 Régularité et décroissance à l'infini . . . 244
10.3 Transformée de Fourier d'une mesure signée . . . 245
10.4 Transformation de Fourier dans L^2 . . . 246
10.5 Résolution d'une EDO ou d'une EDP . . . 248
10.6 Fonction caractéristique d'un vecteur aléatoire . . . 249
10.7 Exercices . . . 251
10.7.1 Transformation de Fourier dans L^1 . . . 251
10.7.2 Transformée de Fourier d'une mesure signée . . . 252
10.7.3 Transformation de Fourier dans L^2 . . . 253
10.7.4 Fonction Caractéristique d'une v.a.r. . . . 253

11 Espérance conditionnelle et martingales **255**
11.1 Espérance conditionnelle . . . 255
11.2 Martingales . . . 261
11.3 Exercices . . . 262
11.3.1 Espérance conditionnelle . . . 262
11.3.2 Martingales . . . 265

12 Corrigés d'exercices **267**
12.1 Exercices du chapitre 1 . . . 267
12.2 Exercices du chapitre 2 . . . 280
12.2.1 Tribus . . . 280
12.2.2 Mesures . . . 292
12.2.3 Probabilités . . . 309
12.3 Exercices du chapitre 3 . . . 310
12.3.1 Fonctions mesurables . . . 310
12.4 Exercices du chapitre 4 . . . 329
12.4.1 Intégrale sur $\mathcal{M}_+$ et sur $\mathcal{L}^1$ . . . 329
12.4.2 Espace L^1 . . . 344
12.4.3 Espérance et moments des variables aléatoires . . . 362
12.5 Exercices du chapitre 5 . . . 366
12.6 Exercices du chapitre 6 . . . 380
12.6.1 Espaces L^p, $1 \le p \le \infty$ . . . 380
12.6.2 Espaces de Hilberts, espace L^2 . . . 397
12.6.3 Théorème de Radon-Nikodym et Dualité dans les espaces L^p . . . 412
12.6.4 Convergence faible, faible-$\star$, étroite, en loi... . . . 421
12.7 Exercices du chapitre 7 . . . 441
12.7.1 Mesure produit . . . 441
12.7.2 Fubini-Tonelli et Fubini . . . 444
12.7.3 Mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ . . . 448
12.7.4 Convolution . . . 457
12.7.5 Changement de variables . . . 461
12.8 Exercices du chapitre 8 . . . 468
12.9 Exercices du chapitre 9 . . . 477
12.9.1 Définition, propriétés élémentaires . . . 477
12.9.2 Indépendance . . . 478
12.9.3 Vecteurs gaussiens, théorème central limite . . . 480
12.10 Exercices du chapitre 10 . . . 483
12.10.1 Transformée de Fourier dans L^1 . . . 483
12.10.2 Transformée de Fourier d'une mesure signée . . . 485
12.10.3 Fonction caractéristique d'un v.a. . . . 486
12.11 Exercices du chapitre 11 . . . 489
12.11.1 Espérance conditionnelle . . . 489
12.11.2 Martingales . . . 493

Chapter 1

Motivation et objectifs

Nous commençons par donner ici un aperçu des motivations de la théorie de l'intégration, en montrant d'abord les limitations de l'intégrale des fonctions continues (sur un intervalle compact de $\mathbb{R}$). L'intégrale de Riemann possède essentiellement les mêmes limitations.

1.1 Intégrale des fonctions continues

Nous présentons ici quelques rappels sur l'intégrale des fonctions continues sur un intervalle compact de $\mathbb{R}$. Nous montrons pourquoi cette théorie de l'intégrale des fonctions continues semble insuffisante.

Nous nous limitons à l'étude des fonctions définies sur l'intervalle $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Nous allons en fait définir l'intégrale des fonctions réglées (on appelle fonction réglée une fonction qui est limite uniforme d'une suite de fonctions "en escalier"). Ceci nous donnera l'intégrale des fonctions continues car toute fonction continue est réglée (voir l'exercice 1.2). La définition de l'intégrale des fonctions réglées (comme celle de l'intégrale de Riemann, qui sera rappelée dans l'exercice 5.3, et celle de l'intégrale de Lebesgue) peut être vue en 3 étapes, qui, ici, s'écrivent :

1. *Mesurer les intervalles de* $[0, 1]$. Pour $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$, on pose $m(]\alpha, \beta[) = \beta - \alpha$.

2. *Intégrer les fonctions en escalier.* Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, une fonction en escalier. Ceci signifie qu'il existe $p \in \mathbb{N}^\star$, une famille $(\alpha_i)_{i\in\{0,\ldots,p\}}$, avec : $\alpha_0 = 0$, $\alpha_i < \alpha_{i+1}$, pour tout $i \in \{0, \ldots, p-1\}$, $\alpha_p = 1$, et une famille $(a_i)_{i\in\{0,\ldots,p-1\}} \subset \mathbb{R}$ tels que :
$$f(x) = a_i, \quad \forall x \in]\alpha_i, \alpha_{i+1}[, \quad \forall i \in \{0, \ldots, p-1\}. \tag{1.1}$$
   On pose alors :
$$\int_0^1 f(x)dx = \sum_{i=0}^{p-1} a_i m(]\alpha_i, \alpha_{i+1}[). \tag{1.2}$$
   On montre que la définition précédente est bien cohérente, c'est-à-dire que l'intégrale de f ne dépend que du choix de f et non du choix des α_i (voir l'exercice 1.2).

3. *"Passer à la limite".* Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, une fonction réglée, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f. On pose :
$$I_n = \int_0^1 f_n(x)dx. \tag{1.3}$$

On peut montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy (dans $\mathbb{R}$). On pose :

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} I_n. \tag{1.4}$$

On montre que cette définition est cohérente car $\lim_{n\to\infty} I_n$ ne dépend que de f et non du choix de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (voir l'exercice 1.2).

Remarque 1.1 Un des intérêts de la méthode présentée ci dessus est qu'elle permet aussi de définir (sans travail supplémentaire) l'intégrale de fonctions continues de $[0,1]$ (ou d'un intervalle compact de $\mathbb{R}$) dans E, où E est un espace de Banach (c'est-à-dire un espace vectoriel normé complet sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Les méthodes de Riemann (voir l'exercice 5.3) et de Lebesgue (présentée dans ce cours) sont "limitées" à des fonctions prenant leurs valeurs dans $\mathbb{R}$ car elles utilisent fortement la relation d'ordre dans $\mathbb{R}$ (elles redonnent, dans le cas de fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, la même intégrale que ci-dessus). Pour l'intégrale de Lebesgue, il faut alors un travail supplémentaire pour développer une théorie de l'intégration pour des fonctions prenant leurs valeurs dans un espace de Banach (lorsque cet espace est de dimension infinie, le cas où l'espace est de dimension finie reste simple car on est alors amené à considérer un nombre fini d'intégrales à valeurs dans $\mathbb{R}$).

1.2 Insuffisance de l'intégrale des fonctions continues

On note E l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On a ainsi défini $\int_0^1 f(x)dx$ pour tout $f \in E$ (car l'ensemble des fonctions continues est contenu dans l'ensemble des fonctions réglées).

1. *Théorèmes de convergence* Un inconvénient important de la théorie de l'intégration exposée ci-dessus est que les théorèmes "naturels" de convergence pour cette théorie sont peu efficaces. A vrai dire, le seul théorème "simple" est le théorème suivant : Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ et $f \in E$. On a alors :

$$f_n \to f \text{ uniformément quand } n \to \infty \Rightarrow \int_0^1 f_n(x)dx \to \int_0^1 f(x)dx \text{ quand } n \to \infty. \tag{1.5}$$

   On rappelle que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f si :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in [0,1], \exists N(\varepsilon, x); n \geq N(\varepsilon, x) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

   et que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon); n \geq N(\varepsilon), x \in [0,1] \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

   Ce théorème est assez "faible". Une conséquence de la théorie de l'intégrale de Lebesgue est le théorème suivant (beaucoup plus fort que le précédent) : Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$, et $f \in E$. On a alors :

$$\begin{gathered} f_n \to f \text{ simplement quand } n \to \infty,\ |f_n(x)| \leq 1,\ \forall x \in [0,1],\ \forall n \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow \textstyle\int_0^1 f_n(x)dx \to \int_0^1 f(x)dx \text{ quand } n \to \infty. \end{gathered} \tag{1.6}$$

   Ce résultat est une conséquence immédiate du théorème de "convergence dominée", il peut être démontré sans utiliser la théorie de l'intégrale de Lebesgue, mais cela est difficile : c'est l'objet de l'exercice 1.11. (Noter aussi qu'il est facile de voir que l'on peut remplacer, dans (1.6), $|f_n(x)| \leq 1$ par $|f_n(x)| \leq M$ pourvu que M soit indépendant de n et x.)

2. *Espaces non complets.* Pour $f \in E$ on pose (en remarquant que $|f| \in E$ et $f^2 \in E$) :

$$N_1(f) = \int_0^1 |f(x)|dx, \tag{1.7}$$

$$N_2(f) = \Big(\int_0^1 (f(x))^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.8}$$

Les applications N_1 et N_2 sont des normes sur E (voir l'exercice 1.6). Malheureusement l'espace E, muni de la norme N_1 (ou de la norme N_2), n'est pas vraiment intéressant en pratique, en particulier parce que cet espace n'est pas complet (c'est-à-dire qu'une suite de Cauchy n'est pas nécessairement convergente). Ce n'est pas un espace de Banach (un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet). La norme N_2 sur E est induite par un produit scalaire mais, muni de cette norme, E n'est pas un espace de Hilbert (un espace de Hilbert est un espace de Banach dont la norme est induite par un produit scalaire, pour tous ces résultats, voir l'exercice 1.6). En fait L'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ est intéressant lorsqu'il est muni de la norme de la convergence uniforme, c'est-à-dire $\|f\|_u = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$, avec laquelle il est complet, c'est donc alors un espace de Banach.

Si l'on travaille avec l'ensemble des fonctions réglées plutôt que l'ensemble des fonctions continues, on n'échappe pas vraiment aux inconvénients cités précédemment (N_1 et N_2 sont d'ailleurs alors des semi-normes). On peut aussi généraliser la définition de l'intégrale ci-dessus en améliorant un peu l'étape 3 (passage à la limite), cette généralisation se fait en introduisant les "sommes de Darboux" (alors que l'intégrale des fonctions continues peut être définie en utilisant seulement les "sommes de Riemann"). On obtient ainsi la définition de l'intégrale des fonctions dites "Riemann-intégrables" (voir l'exercice 5.3). En fait cette généralisation est assez peu intéressante, et les inconvénients sont les mêmes que pour l'intégrale des fonctions continues (ou des fonctions réglées).

1.3 Les probabilités

La théorie des probabilités s'est développée dans le but de "modéliser" les phénomènes aléatoires, c'est à dire de développer un formalisme mathématique pour exprimer les problèmes posés par ces phénomènes. En particulier, l'un des problèmes est de mesurer "la chance" d'un certain "évènement" de se réaliser. Une partie importante de ces phénomènes est de nature "discrète", c'est à dire qu'il existe une injection de l'ensemble des "cas possibles" dans $\mathbb{N}$. Lorsque de plus l'ensemble des "cas possibles" ou des "éventualités" est fini, le calcul des probabilités se ramène à des problèmes de dénombrement. Par contre, lorsque l'ensemble des "éventualités" est de nature infinie non-dénombrable, on aura besoin, pour définir une probabilité, de la théorie de la mesure. Les liens qui existent entre la théorie des probabilités et la théorie de la mesure et de l'intégration sont nombreux, mais malheureusement, le vocabulaire est souvent différent. Nous essaierons ici de montrer clairement les liens entre les deux théories et de donner un "dictionnaire" probabilités-intégration.

1.4 Objectifs

L'objectif est de construire une théorie de l'intégration donnant des théorèmes de convergence efficaces et de "bons" espaces fonctionnels, comme, par exemple, l'espace $L^2_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ qui est un espace de Hilbert. La démarche pour construire cette théorie va être très voisine de celle que l'on a utilisée pour l'intégrale des fonctions réglées (ou pour l'intégrale de Riemann, cf. Exercice 5.3). Elle va suivre 3 étapes, que nous pouvons (dans le cas, par exemple, des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) décrire ainsi :

1. Mesurer "presque toutes" les parties de $\mathbb{R}$ (et pas seulement les intervalles).
2. Définir l'intégrale des fonctions étagées, c'est-à-dire des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ne prenant qu'un nombre fini de valeurs (et pas seulement des fonctions en escalier).
3. Par un "passage à la limite", définir l'intégrale des fonctions limites (en un sens convenable) de fonctions étagées.

Pour être plus précis, dans l'étape 1 ci-dessus, on cherche une application $\lambda : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$, où $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$, t.q. :

$$\lambda(]\alpha,\beta[) = \beta - \alpha, \text{ pour tout } \alpha,\beta \in \mathbb{R}, \alpha \leq \beta. \tag{1.9}$$

$$\lambda(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(A_n), \text{ pour toute famille } (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}) \text{ t.q. } A_n \cap A_m = \emptyset \text{ si } n \neq m. \tag{1.10}$$

(Dans toute la suite de ce cours, la notation $\sum_{n\in N}$ est identique à $\sum_{n=0}^{\infty}$.)

Une telle application sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ n'existe pas (voir l'exercice 2.24), mais elle existe si on se limite à une partie "convenable" de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, par exemple, la tribu de Borel définie dans la suite.

Pour l'étape 2, on intégrera les fonctions prenant un nombre fini de valeurs et pour lesquelles chaque "étage" est dans la tribu de Borel. De telles fonctions seront dites "étagées".

Enfin, à l'étape 3, l'idée principale est de définir l'intégrale des fonctions positives qui sont "limites croissantes" d'une suite de fonctions étagées (on remplace donc la convergence uniforme utilisée pour la définition de l'intégrale des fonctions réglées par une convergence "simple, en croissant").

La théorie de l'intégration que nous allons ainsi obtenir contient (pour les fonctions d'un intervalle compact de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) la théorie de l'intégrale de Riemann (cf. Exercice 5.3) qui contient elle-même la théorie de l'intégrale des fonctions réglées (et la donc la théorie de l'intégrale des fonctions continues).

Ce cours est divisé en 10 chapitres :

- Le chapitre 2 est une introduction à la théorie de la mesure ; on y définit en particulier l'application λ nécessaire pour mesurer les parties de $\mathbb{R}$. On y introduit aussi les premières notions de probabilités.
- Dans le chapitre 3, on introduit le concept de fonction mesurable, et son synonyme "probabiliste", i.e. le concept de "variable aléatoire", qui est une notion fondamentale pour le calcul des probabilités. On y définit les notions de convergence "presque partout" et son synonyme probabiliste "presque sûre", et de convergence "en mesure" et son synonyme probabiliste convergence "stochastique".
- On définit au chapitre 4 l'intégrale sur un espace mesuré (suivant les étapes 1 à 3 définies plus haut), et l'espérance des variables aléatoires en théorie des probabilités. On définit également dans ce chapitre la notion de convergence en moyenne.
- On s'intéresse au chapitre 5 aux mesures définies sur les boréliens de $\mathbb{R}$ et aux propriétés particulières de l'intégrale définies sur $\mathbb{R}$. On y étudie les lois probabilités "de densité".

- On étudie au chapitre 6 les espaces "L^p", ensembles des (classes de) "fonctions mesurables de puissance p-ième intégrable, et plus particulièrement l'espace L^2, qui est un espace de Hilbert. On donne des résultats de dualité et on introduit les notions de convergence "faible" et de convergence "étroite" (pour les probabilités).
- Le chapitre 7 est consacré au produits d'espaces mesurés, à l'intégration de fonctions de plusieurs variables, au produit de convolution
- Dans le chapitre 8, on revient sur l'étude des espaces L^p dans le cas particulier de la mesure de Lebesgue sur les boréliens d'un ouvert de $\mathbb{R}^N$. On donne des résultats de densité, de séparabilité et de compacité.
- Le chapitre 9 est consacré aux vecteurs aléatoires. On y généralise des notions vues pour les variables aléatoires réelles.
- Le chapitre 10 est consacré à l'étude de la transformée de Fourier des fonctions de L^1 (classes de fonctions mesurables intégrables au sens de Lebesgue sur $\mathbb{R}^N$) et de L^2 (classes de fonctions mesurables "de carré intégrable" au sens de Lebesgue sur $\mathbb{R}^N$) et des mesures. On introduit la "fonction caractéristique" de la théorie des probabilités.
- Le chapitre 11 est conscré à l'espérance conditionnelle et aux martingales.
- Le chapitre 12 contient des corrigés d'exercices.

1.5 Exercices

Exercice 1.1 (Convergences simple et uniforme) *Corrigé 1 page 267*
Construire une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C([0,1],\mathbb{R})$ et $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ t.q. $f_n \to f$ simplement, quand n $\to \infty$, et $f_n \not\to f$ uniformément, quand n $\to \infty$.

Exercice 1.2 (Intégrale d'une fonction continue) *Corrigé 2 page 267*
Une fonction $g\ :\ [0,1] \to \mathbb{R}$ est dite "en escalier" s'il existe $n \geq 1$ et $x_0, \ldots, x_n$ t.q. $0 = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = 1$ et g constante sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$, $0 \leq i \leq n-1$.

Pour g en escalier et $x_0, \ldots, x_n$ comme dans la définition ci dessus, on pose $\displaystyle\int_0^1 g(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x_{i+1}-x_i)$, où a_i est la valeur prise par g sur $]x_i, x_{i+1}[$.

1. Montrer que la définition précédente est bien cohérente, c'est-à-dire que l'intégrale de g ne dépend que du choix de g et non du choix des x_i. Montrer que l'application qui à g associe l'intégrale de g est linéaire de l'ensemble des fonctions en escalier dans $\mathbb{R}$.
2. Soit $f \in C([0,1],\mathbb{R})$.
   (a) Construire une suite de fonctions en escalier $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.q. f soit limite uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $n \to +\infty$.
   (b) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions en escalier t.q. f soit limite uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $n \to +\infty$. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, où I_n est l'intégrale de la fonction en escalier f_n, converge. Enfin, montrer que la limite $I = \lim_{n\to\infty} I_n$ ne dépend que de f, et non de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On pose alors $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = I$.

3. Montrer que l'application qui à f associe l'intégrale de f est linéaire de $C([0,1],\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ et que, pour tout $f \in C([0,1],\mathbb{R})$, on a $|\int_0^1 f(x)dx| \leq \int_0^1 |f(x)|dx \leq \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

Exercice 1.3 (Propriétés de l'intégrale des fonctions continues) *Corrigé 3 page 270*
Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C([0,1],\mathbb{R})$ et $\varphi \in C([0,1],\mathbb{R})$. On suppose que $\varphi_n \to \varphi$ simplement quand $n \to \infty$.

1. Montrer que si $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |\varphi_n(x) - \varphi(x)|\, dx \to 0$, alors $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \varphi_n(x)\, dx = \int_0^1 \varphi(x)\, dx$.
2. Montrer que si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers φ, alors $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \varphi_n(x)\, dx = \int_0^1 \varphi(x)\, dx$.
3. Donner un exemple de suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers φ simplement, mais non uniformément, t.q. $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \varphi_n(x)\, dx = \int_0^1 \varphi(x)\, dx$.
4. Donner un exemple de suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge simplement vers φ t.q. $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \varphi_n(x)\, dx \neq \int_0^1 \varphi(x)\, dx$.
5. Si la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait les deux conditions :
   (a) Pour tout ε, $0 < \varepsilon < 1$, $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers φ sur $[\varepsilon, 1]$,
   (b) Les φ_n sont à valeurs dans $[-1,+1]$,

   montrer que $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \varphi_n(x)\, dx = \int_0^1 \varphi(x)\, dx$.
6. Vérifier que la suite de fonctions définies par $\varphi_n(x) = \dfrac{x\sqrt{n}}{1+nx^2}$ satisfait les conditions énoncées à la question 5. Donner l'allure générale du graphe de ces fonctions pour des petites valeurs de n; que devient le graphe lorsque $n \to \infty$?
7. On suppose maintenant que la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie l'hypothèse suivante:
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^2 dx = 0. \tag{1.11}$$
   A-t-on $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |\varphi_n(x) - \varphi(x)| dx\, dx = 0$? [On pourra par exemple utiliser (après l'avoir démontrée) l'inégalité suivante: pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $c_\varepsilon \geq 0$, ne dépendant que de ε, t. q. $a \leq \varepsilon + c_\varepsilon a^2$.]
8. Même question que ci dessus en remplaçant l'hypothèse (1.11) par : $\exists p > 1; \lim_{n\to\infty} \int_0^1 |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p dx = 0$.

9. On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\int_0^1 |\varphi_n(x)|^2 dx \leq C, \forall n \in \mathbb{N}, \tag{1.12}$$

   et que la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[\varepsilon, 1]$, pour tout $\varepsilon > 0$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |\varphi_n(x) - \varphi(x)| dx = 0$.

10. Construire un exemple de suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui satisfasse aux hypothèses de la question précédente et qui ne soit pas bornée (donc qui ne satisfasse pas aux hypothèses de la question 5).

11. Peut-on remplacer l'hypothèse (1.12) par : il existe $p > 1$ et $C > 0$ t.q. $\int_0^1 |\varphi_n(x)|^p dx \leq C$, pour tout $n \in \mathbb{N}$?

12. Peut-on remplacer l'hypothèse (1.12) par : il existe $C > 0$ t.q. $\int_0^1 |\varphi_n(x)| dx \leq C$, pour tout $n \in \mathbb{N}$?

Exercice 1.4 (Discontinuités d'une fonction croissante)
Soit f une fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que f a une limite à droite et une limite à gauche en tout point. On note $f(x^+)$ et $f(x^-)$ ces limites au point x.

2. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable. [On pourra considérer, pour $n \in \mathbb{N}$, les ensembles $A_n = \{x \in [0, 1], f(x^+) - f(x^-) \geq (f(1^+) - f(0^-))/n\}$.]

Exercice 1.5 (Fonctions réglées)
Une fonction réelle définie sur $[a, b]$ $(-\infty < a < b < +\infty)$ est dite réglée si elle est la limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier sur $[a, b]$.

1. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction réglée est au plus dénombrable.

2. Montrer qu'une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est réglée sur $[a, b]$ si et seulement si elle admet des limites à droite et à gauche en tout point de $]a, b[$, à droite en a, à gauche en b.

Exercice 1.6 (Normes définies par l'intégrale) *Corrigé 4 page 273*
Soit $E = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[-1, +1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $\varphi \in E$, on pose $\|\varphi\|_1 = \int_{-1}^{+1} |\varphi(t)|\, dt$ et $\|\varphi\|_2 = \left(\int_{-1}^{+1} |\varphi(t)|^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}}$.

1. Montrer que $(E, \|\cdot\|_1)$ est un espace normé.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $\varphi_n \in E$ par

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 0 & si \quad -1 \leq x \leq 0 \\ nx & si \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 & si \quad \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

(a) Montrer que si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers φ dans $(E, \|\cdot\|_1)$, alors $\varphi(x) = 0$ si $x < 0$ et $\varphi(x) = 1$ si $x > 0$.

(b) En déduire que $(E, \|\cdot\|_1)$ n'est pas complet.

3. Montrer que $(E, \|\cdot\|_2)$ est un espace préhilbertien (c'est-à-dire que sa norme est induite par un produit scalaire) mais n'est pas complet (ce n'est donc pas un espace de Hilbert).

Exercice 1.7 (Rappels sur la convergence des suites réelles) *Corrigé 5 page 275*

1. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. On rappelle que $\limsup_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{p\geq n} u_p$. Montrer que $\limsup_{n\to\infty} u_n$ est la plus grande valeur d'adhérence de u.

2. Si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, on sait (conséquence du résultat de la question précédente) qu'il existe une suite extraite de u qui converge vers $\limsup_{n\to\infty} u_n$. Donner un exemple d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ t.q. aucune sous suite ne converge simplement vers $\limsup_{n\to\infty} f_n$ (qui est définie par $(\limsup_{n\to\infty} f_n)(x) = \limsup_{n\to\infty}(f_n(x))$ pour tout $x \in \mathbb{R}$).

3. Trouver l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.q.:

   $\liminf_{n\to\infty} u_n = 0$, $\limsup_{n\to\infty} u_n = 1$ et $\lim_{n\to\infty} |u_{n+1} - u_n| = 0$.

   Donner un exemple d'une telle suite.

Exercice 1.8 (Fonctions caractéristiques d'ensembles) *Corrigé 6 page 276*
Soit E un ensemble. Lorsque A est une partie de E, on définit $\mathbf{1}_A : E \to \mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_A(x) = 1, \text{ si } x \in A, \\ \mathbf{1}_A(x) = 0, \text{ si } x \notin A. \end{aligned} \tag{1.13}$$

$\mathbf{1}_A$ est appelée "fonction caractéristique de A" (elle est souvent aussi notée χ_A).

1. Montrer que si A et B sont deux sous-ensembles disjoints de E, alors $\mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B$. En déduire que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de sous-ensembles de E deux à deux disjoints, on a $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{1}_{A_n} = \mathbf{1}_{\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n}$ (on précisera aussi le sens donné à "$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{1}_{A_n}$").

2. Montrer que si $B \subset A \subset E$, on a $\mathbf{1}_{A\setminus B} = \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B$.

3. Montrer que, pour A et B sous-ensembles de E, on a $\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$.

4. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction ne prenant qu'un nombre fini de valeurs. Montrer que f s'écrit comme combinaison linéaire de fonctions caractéristiques.

Exercice 1.9 (Intégrale "impropre" de fonctions continues)
Soit $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ (fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$). On suppose que $\lim_{a\to+\infty} \int_0^a f(x)\,dx$ existe dans $\mathbb{R}$ (on a utilisé l'intégrale des fonctions continues sur $[0, a]$ pour définir $\int_0^a f(x)\,dx$).

1. A-t-on $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$?

2. Montrer que si f admet une limite en $+\infty$, alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

3. Montrer que si f est uniformément continue, alors f admet une limite en $+\infty$ et donc que :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

4. Donner un exemple de fonction f t.q. $f(x) \not\to 0$ qand $x \to \infty$ (et qui vérifie les hypothèses de l'exercice !).

5. On suppose, dans cette question, que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et que $\lim_{a\to+\infty} \int_0^a f'(t)\, dt$ existe dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

6. Montrer que pour tout $h > 0$, $\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x+h} f(t)\, dt = 0$.

Exercice 1.10 (Limite uniforme dans $\mathbb{R}$) *Corrigé 7 page 277*
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f (de sorte que $f \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$).

1. On suppose que, pour $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{a\to+\infty} \int_0^a f_n(x)\, dx$ existe dans $\mathbb{R}$. On note $\int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx$ cette limite.

   Montrer, en donnant un exemple, que $\lim_{a\to+\infty} \int_0^a f(x)\, dx$ peut ne pas exister dans $\mathbb{R}$.

2. On suppose de plus que $\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx$ existe dans $\mathbb{R}$ et que $\lim_{a\to+\infty} \int_0^a f(x)\, dx$ existe dans $\mathbb{R}$. On note alors $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ cette dernière limite. A-t-on

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx = \int_0^{+\infty} f(x)\, dx \quad ?$$

Exercice 1.11 (Convergence dominée et intégrale des fonctions continues)
(Cet exercice est extrait de l'examen d'analyse du concours d'entrée à l'ENSL, 1993)
On note $E = C([0,1], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles. Pour $f \in E$, on pose $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Noter que l'application $f \mapsto \|f\|_\infty$ est bien une norme.
Pour $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, on définit f^+ par $f^+(x) = \max(f(x), 0)$ (pour tout $x \in [0,1]$), et $f^- = (-f)^+$ (de sorte que $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ et $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$). Soient f et g deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (ou dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$), On dit que $f \geq g$ si $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in [0,1]$. On désigne par 0 la fonction (définie sur $\mathbb{R}$) identiquement nulle. On pose $E^+ = \{f \in E, f \geq 0\}$. Soit $T : E \to \mathbb{R}$ une application linéaire. On dit que T est positive si :

$$f \in E,\ f \geq 0 \Rightarrow T(f) \geq 0.$$

Soit $T : E \to \mathbb{R}$ une application linéaire positive.

1. Montrer que T est continue de $(E, \|.\|_\infty)$ dans $\mathbb{R}$. [Indication : On pourra remarquer que, pour tout $f \in E$, $T(f) \leq T(\mathbf{1})\|f\|_\infty$, où $\mathbf{1}$ désigne la fonction constante et égale à 1 sur $[0,1]$.]

2. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ et $f \in E$ telles que $f_{n+1} \geq f_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$, pour tout $x \in [0,1]$. Montrer que f_n tend vers f uniformément sur $\mathbb{R}$.

   [Indication : Soit $\varepsilon > 0$, on pourra introduire, pour $n \in \mathbb{N}$, $O_n = \{x \in [0,1]\,;\, f(x) - f_n(x) < \varepsilon\}$ et utiliser la compacité de $[0,1]$.]

   En déduire que $T(f_n) \to T(f)$, quand $n \to +\infty$.

3. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ et $g \in E$ telles que $f_{n+1} \geq f_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $g(x) \leq \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ ($\in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$), pour tout $x \in [0,1]$.

   Montrer que $T(g) \leq \lim\limits_{n\to+\infty} T(f_n)$.

4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, on dit que $f \in A^+$ si il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ t.q. $f_{n+1} \geq f_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$, pour tout $x \in [0,1]$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} T(f_n) < +\infty$.

5. Soit $f \in A^+$, montrer que $\sup\limits_{g\in E,\, g\leq f}(T(g)) < +\infty$.

   On définit T sur A^+ par $T(f) = \sup\limits_{g\in E,\, g\leq f}(T(g))$ (noter que ceci est compatible avec la définition de T sur E.) Noter aussi que si $f, g \in A^+$, alors : $f \geq g \Rightarrow T(f) \geq T(g)$.

6. ("Convergence croissante.") Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A^+$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ telles que $f_{n+1} \geq f_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$, pour tout $x \in [0,1]$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} T(f_n) < +\infty$. Montrer que $f \in A^+$ et $T(f) = \lim\limits_{n\to+\infty} T(f_n)$.

   [Indication : Considérer $g_p = \sup\limits_{0\leq n\leq p}(f_{p,n})$, avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(f_{p,n})_{p\in\mathbb{N}} \subset E$ t.q. $f_{p+1,n} \geq f_{p,n}$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{p\to+\infty} f_{p,n}(x) = f_n(x)$, pour tout $x \in [0,1]$.]

7. ("Convergence décroissante.") Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A^+$ et $f \in E$ telles que $f_{n+1} \leq f_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$, pour tout $x \in [0,1]$. Montrer que $T(f) = \lim\limits_{n\to+\infty} T(f_n)$.

   [Indication : On pourra montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $h_n \in A^+$ t.q. $h_n \geq f_n - f_{n+1}$ et $T(h_n) \leq T(f_n) - T(f_{n+1}) + \frac{\varepsilon}{2^n}$. Puis, en remarquant que $\sum_{n\in\mathbb{N}} h_n(x) \geq f_0(x) - f(x)$, pour tout $x \in [0,1]$, et en utilisant la question III 4, montrer que $T(f) \geq \lim\limits_{n\to+\infty} T(f_n)$.]

8. ("Convergence dominée.") Soient $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ et $g \in E$ telles que :

   1. $g_n(x) \to g(x)$, quand $n \to +\infty$, pour tout $x \in [0,1]$.
   2. $|g_n(x)| \leq 1$, pour tout $x \in [0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Montrer que $T(g) = \lim\limits_{n\to+\infty} T(g_n)$.

   [Indication : On pourra utiliser la question III 5 avec $f_n = \sup\limits_{p\geq n} g_p - \inf\limits_{p\geq n} g_p$ et remarquer que $g - g_n \leq f_n$ et $g_n - g \leq f_n$.]

9. (Exemple.) En choisissant convenablement T, montrer le résultat suivant :

   Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ et $f \in E$ telles que :

   1. $f_n(x) \to f(x)$, quand $n \to +\infty$, pour tout $x \in [0,1]$.
   2. $|f_n(x)| \leq 1$, pour tout $x \in [0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   alors $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx \to \int_0^1 f(x)dx$, quand $n \to +\infty$.

   Donner un contre exemple à ce résultat si la deuxième hypothèse n'est pas vérifiée.

Exercice 1.12 (Théorème de Bernstein)
On veut démontrer ici le théorème suivant :

Théorème 1.1 (Bernstein) *Soient E et F des ensembles quelconques, alors il existe une bijection de E dans F si et seulement si il existe une injection de E dans F et une injection de F dans E.*

Le sens $(i) \Rightarrow (ii)$ est évident, on va donc supposer qu'il existe une injection f de E dans F et une injection g de F dans E, et on veut construire une bijection de E dans F. Soit $x \in E$ donné. On pose $x_0 = x$, et on construit par récurrence une suite $C_x = (x_k)_{k=\underline{k}(x),+\infty} \subset E \cup F$, avec $\underline{k}(x) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ de la manière suivante :
pour $k \geq 0$, on pose $x_{2k+1} = f(x_{2k})$, et $x_{2k+2} = f(x_{2k+1})$; si x_{-k} n'a pas d'antécédant par g ou par f (selon que $x_k \in E$ ou $\in F$, on pose $\underline{k}(x) = k$, sinon, on pose $x_{-k-1} = g^{-1}(x_{-k})$ si $x_k \in E$ et $x_{-k-1} = f^{-1}(x_{-k})$ si $x_k \in F$.
On définit ainsi $C_x = \{x_k, k = \underline{k}(x), +\infty\}$. On définit l'application φ de E dans F par : $\varphi(x) = f(x)$ si $\underline{k}(x)$ est pair et $\varphi(x) = g^{-1}(x)$ si $\underline{k}(x)$ est impair. Montrer que φ ainsi définie est une bijection de E dans F.

Exercice 1.13 (Limites sup et inf d'ensembles) *Corrigé 8 page 278*
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties d'un ensemble E. On note

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{p\geq n} A_p \quad \text{et} \quad \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{p\geq n} A_p.$$

1. On suppose la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monotone, c'est-à-dire que $A_n \subset A_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, ou que $A_{n+1} \subset A_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Que sont $\liminf_{n\to\infty} A_n$ et $\limsup_{n\to\infty} A_n$?
2. Même question que précédemment si la suite est définie par : $A_{2p} = A$ et $A_{2p+1} = B$, $p \in \mathbb{N}$, A et B étant deux parties données de E.
3. Montrer que:
$$1_{\limsup_{n\to\infty} A_n} = \limsup_{n\to\infty} 1_{A_n} \ ,$$
$$\liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n \ ,$$
$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \{x \in E; \sum_{n=0}^{+\infty} 1_{A_n^c}(x) < \infty\} \ ,$$
$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \{x \in E; \sum_{n=0}^{+\infty} 1_{A_n}(x) = \infty\} \ .$$

Exercice 1.14 (Caractérisation des ouverts de $\mathbb{R}$) $(\star)$
On va montrer ici que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est une union au plus dénombrable (c'est-à-dire finie ou dénombrable) d'intervalles ouverts disjoints deux à deux (la démonstration de ce résultat est donnée dans la démonstration du lemme 2.4 page 34). Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$. On définit, pour x et $y \in \mathbb{R}$, la relation: $x \asymp y$ si $\{tx + (1-t)y, t \in [0,1]\} \subset O$. Vérifier que $\asymp$ est une relation d'équivalence. Pour $x \in O$, on pose: $A(x) = \{y \in O; x \asymp y\}$.

1. Montrer que si $A(x) \cap A(y) \neq \emptyset$, alors $A(x) = A(y)$.
2. Montrer que, pour tout $x \in O$, $A(x)$ est un intervalle ouvert.
3. Montrer qu'il existe $I \subset O$ dénombrable tel que $O = \bigcup_{x\in I} A(x)$, avec $A(x) \cap A(y) = \emptyset$ si $x, y \in I$ et $x \neq y$.

Chapter 2

Tribus et mesures

2.1 Introduction... par les probabilités

2.1.1 Cas d'un problème "discret"

Pour introduire la série de définitions qui suivent, commençons par quelques exemples, tirés du calcul des probabilités. Le calcul des probabilités s'intéresse à mesurer la "chance" qu'un certain "événement", résultat d'une expérience, a de se produire. Considérons par exemple "l'expérience" qui consiste à lancer un dé. On appelle "éventualité" associée à cette expérience un des résultats possibles de cette expérience, et "univers des possibles" l'ensemble E de ces éventualités. Dans notre exemple, les éventualités peuvent être $1, 2, 3, 4, 5$ ou 6; on pourrait choisir aussi comme éventualités les résultats correspondant au "dé cassé". On peut donc tout de suite remarquer que l'ensemble E des univers du possible dépend de la modélisation, c'est à dire de la formalisation mathématique que l'on fait du problème. Notons qu'il est parfois difficile de définir l'ensemble E.

A partir des éventualités, qui sont, par définition, les éléments de l'univers des possibles E, on définit les "événements", qui forment un ensemble de parties de E. Dans notre exemple du lancer de dé, l'ensemble des événements est l'ensemble des parties de E, noté $\mathcal{P}(E)$. Dans l'exemple du dé, la partie $\{2, 4, 6\}$ de E est l'événement : "le résultat du lancer est pair". On appelle événement élémentaire un singleton, par exemple $\{6\}$ dans notre exemple du lancer de dé, événement certain l'ensemble E tout entier, et l'événement "vide" l'ensemble vide $\emptyset$ (qui a donc une "chance" nulle de se réaliser). Pour mesurer "la chance" qu'a un événement de se réaliser, on va définir une application p de l'ensemble des événements (donc de $\mathcal{P}(E)$ dans notre exemple du lancer de dé) dans $[0, 1]$ avec certaines propriétés (qui semblent naturelles...). La "chance" (ou probabilité) pour un événement $A \subset E$ de se réaliser sera donc le nombre $p(A)$, appartenant à $[0, 1]$.
L'exemple du lancer de dé, que nous venons de considérer, est un problème discret fini, au sens ou l'ensemble E est fini. On peut aussi envisager des problèmes discrets infinis, l'ensemble E est alors infini dénombrable (on rappelle qu'un ensemble I est "dénombrable" s'il existe une bijection de I dans $\mathbb{N}$, il est "au plus dénombrable" s'il existe une injection de I dans $\mathbb{N}$), ou des problèmes (parfois appelés "continus") où E est infini non dénombrable.

2.1.2 Exemple continu

Considérons maintenant "l'expérience" qui consiste à lancer une balle de ping-pong sur une table de ping-pong. Soit E l'ensemble des points de la table de ping-pong, on peut voir E comme un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$, un événement élémentaire est alors un point $(x, y) \in E$ (le point d'impact de la balle), et un événement semble être une partie quelconque A de $\mathcal{P}(E)$. On suppose qu'on a effectué le lancer "sans viser", c'est à dire en supposant que "n'importe quel point de la table a une chance égale d'être atteint" (les événements élémentaires sont "équiprobables"), et que la balle tombe forcément sur la table (on est très optimiste...). On se rend compte facilement que la probabilité pour chacun des points de E d'être atteint doit être nulle, puisque le nombre des points est infini. On peut aussi facilement "intuiter" que la probabilité pour une partie A d'être atteinte (dans le modèle "équiprobable") est le rapport entre la "surface de A" et la surface de E. La notion intuitive de "surface" correspond en fait à la notion mathématique de "mesure" que nous allons définir dans le prochain paragraphe. Malheureusement, comme on l'a dit dans le chapitre introductif, il ne nous sera pas mathématiquement possible de définir une application convenable, i.e. qui vérifie les propriétés (1.9)-(1.10) et qui "mesure" toutes les parties de $\mathbb{R}$, ou $\mathbb{R}^2$, ou même du sous-ensemble E de $\mathbb{R}^2$ (voir à ce sujet l'exercice 2.23). On va donc définir un sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$ (qu'on appelle "tribu") sur lequel on pourra définir une telle application. Dans le cas d'un ensemble fini, la tribu sera, en général, $\mathcal{P}(E)$ tout entier. Mais, dans le cas de la balle de ping-pong que vous venons de décrire, l'ensemble des événements sera une tribu strictement incluse dans $\mathcal{P}(E)$.

2.2 Tribu ou $\sigma-$algèbre

Définition 2.1 (Tribu ou $\sigma-$algèbre) *Soient E un ensemble, T une famille de parties de E (i.e. $T \subset \mathcal{P}(E)$). La famille T est une tribu (on dit aussi une $\sigma-$algèbre) sur E si T vérifie :*

1. $\emptyset \in T, E \in T$,
2. *T est stable par union dénombrable, c'est-à-dire que pour toute famille dénombrable $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$, on a $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T$.*
3. *T est stable par intersection dénombrable, c'est-à-dire que pour toute famille dénombrable $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$, on a $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T$.*
4. *T est stable par passage au complémentaire, c'est-à-dire que pour tout $A \in T$, on a $A^c \in T$ (On rappelle que $A^c = E \setminus A$).*

Il est clair que, pour montrer qu'une partie T de $\mathcal{P}(E)$ est une tribu, il est inutile de vérifier les propriétés 1-4 de la proposition précédente. Il suffit de vérifier par exemple $\emptyset \in T$ (ou $E \in T$), 2 (ou 3) et 4.

Exemples de tribus sur E :

- $T = \{\emptyset, E\}$,
- $\mathcal{P}(E)$.

Définition 2.2 (Langage probabiliste) *Soient E un ensemble quelconque ("l'univers des possibles") et T une tribu ; on appelle "éventualité" les éléments de E et "événements" les éléments de T. On appelle "événement élémentaire" un singleton de T.*
On dit que deux événements $A, B \in T$ sont incompatibles si $A \cap B = \emptyset$.

Proposition 2.1 (Stabilité par intersection des tribus) *Soient E et I deux ensembles. Pour tout $i \in I$, on se donne une tribu, T_i, sur E. Alors, la famille (de parties de E) $\cap_{i \in I} T_i = \{A \subset E;\ A \in T_i, \forall i \in I\}$ est encore une tribu sur E.*

Démonstration : La démonstration de cette proposition fait l'objet de la première question de l'exercice 2.2. ∎

Cette proposition nous permet de définir ci-après la notion de tribu engendrée.

Définition 2.3 (Tribu engendrée) *Soient E un ensemble et $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$. On appelle tribu engendrée par $\mathcal{C}$ la plus petite tribu contenant $\mathcal{C}$, c'est-à-dire la tribu $T(\mathcal{C})$ intersection de toutes les tribus sur E contenant $\mathcal{C}$ (cette intersection est non vide car $\mathcal{P}(E)$ est une tribu contenant $\mathcal{C}$).*

Il est parfois utile d'utiliser la notion d'algèbre, qui est indentique à celle de tribu en remplaçant "dénombrable" par "finie".

Définition 2.4 (Algèbre) *Soient E un ensemble, $\mathcal{A}$ une famille de parties de E (i.e. $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$). La famille $\mathcal{A}$ est une algèbre sur E si $\mathcal{A}$ vérifie :*

1. *$\emptyset \in \mathcal{A}, E \in \mathcal{A}$,*
2. *$\mathcal{A}$ est stable par union finie, c'est-à-dire que pour tout $A, B \in \mathcal{A}$ on a $A \cup B \in \mathcal{A}$.*
3. *$\mathcal{A}$ est stable par intersection finie, c'est-à-dire que pour tout $A, B \in \mathcal{A}$ on a $A \cap B \in \mathcal{A}$.*
4. *$\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire, c'est-à-dire que pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a $A^c \in \mathcal{A}$.*

Remarque 2.1 *Soit E un ensemble et $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\mathcal{E})$. Comme pour les tribus, on peut définir l'algèbre engendrée par $\mathcal{C}$. C'est la plus petite algèbre contenant $\mathcal{C}$, c'est-à-dire l'intersection de toutes les algèbres contenant $\mathcal{C}$ (voir l'exercice 2.8).*

Soit E un ensemble, $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\mathcal{E})$ et $T(\mathcal{C})$ la tribu engendrée par $\mathcal{C}$ (voir la définition 2.3 et l'exercice 2.2). Il est important de remarquer que, contrairement à ce que l'on pourrait être tenté de croire, les éléments de la tribu engendrée par $\mathcal{C}$ ne sont pas tous obtenus, à partir des éléments de $\mathcal{C}$, en utilisant les opérations : "intersection dénombrable", "union dénombrable" et "passage au complémentaire". Plus précisément, on pose :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}^1(\mathcal{C}) &= \{A \subset E \text{ t.q. } A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n, A_n \in \mathcal{C} \text{ ou } A_n^c \in \mathcal{C}\}, \\
\mathcal{R}^2(\mathcal{C}) &= \{A \subset E \text{ t.q. } A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n, A_n \in \mathcal{C} \text{ ou } A_n^c \in \mathcal{C}\}, \\
\mathcal{R}(\mathcal{C}) &= \mathcal{R}^1(\mathcal{C}) \cup \mathcal{R}^2(\mathcal{C}).
\end{aligned}
$$

Prenons $E = \mathbb{R}$ et $\mathcal{C}$ l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$ (donc $T(\mathcal{C})$ est la tribu borélienne de $\mathbb{R}$, voir définition ci-après). Il est facile de voir que $\mathcal{R}(\mathcal{C}) \subset T(\mathcal{C})$, mais que, par contre (et cela est moins facile à voir), $\mathcal{R}(\mathcal{C})$ n'est pas une tribu. En posant : $\mathcal{S}_0 = \mathcal{C}$, et $\mathcal{S}_n = \mathcal{R}(\mathcal{S}_{n-1})$, pour $n \geq 1$, on peut aussi montrer que $\overline{\mathcal{S}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{S}_n$ n'est pas une tribu (et que $\overline{\mathcal{S}} \subset T(\mathcal{C})$).

Remarque 2.2 *Soit E un ensemble et $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2 \subset \mathcal{P}(E)$. Il est alors facile de voir que $T(\mathcal{C}_1) \subset T(\mathcal{C}_2)$ (cf. Exercice 2.2).*

Soit E un ensemble. On rappelle qu'une "topologie" sur E est donnée par une famille de parties de E, appelées "ouverts de E", contenant $\emptyset$ et E, stable par union (quelconque) et stable par intersection finie. L'ensemble E, muni de cette famile de parties, est alors un "espace topologique".

Définition 2.5 (Tribu borélienne) *Soit E un ensemble muni d'une topologie (un espace métrique, par exemple). On appelle tribu borélienne (ou tribu de Borel) la tribu engendrée par l'ensemble des ouverts de E, cette tribu sera notée $\mathcal{B}(E)$. Dans le cas $E = \mathbb{R}$, cette tribu est donc notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

Remarque 2.3

1. L'objectif de la section 2.5 est de construire une application $\lambda \ : \ \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ t.q. :
   (a) $\lambda(]\alpha, \beta[) = \beta - \alpha$, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\alpha < \beta$,
   (b) $\lambda(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(A_n)$, pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $A_n \cap B_n = \emptyset$ si $n \neq m$. (Noter que $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ grâce à la stabilité d'une tribu par union dénombrable.)
2. On peut se demander si $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{P}(\mathbb{R})$. La réponse est non (voir les exercices 2.23 et 2.24). On peut même démontrer que $\mathrm{card}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) = \mathrm{card}(\mathbb{R})$ (alors que $\mathrm{card}(\mathcal{P}(\mathbb{R})) > \mathrm{card}(\mathbb{R})$). On donne ci-après un rappel rapide sur les cardinaux (sans entrer dans les aspects difficiles de la théorie des ensembles, et donc de manière peut-être un peu imprécise).
3. Rappel sur les cardinaux. Soit A et B deux ensembles.
   (a) On dit que $\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(B)$ si il existe une application $\varphi \ : \ A \to B$, bijective.

   Pour montrer que deux ensembles ont même cardinaux, il est souvent très utile d'utiliser le théorème de Bernstein (voir l'exercice 1.12) qui montre que s'il existe une injection de A dans B et une injection de B dans A, alors il existe $\varphi \ : \ A \to B$, bijective (et donc $\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(B)$). Le théorème de Bernstein motive également la définition suivante.
   (b) On dit que $\mathrm{card}(A) \leq \mathrm{card}(B)$ s'il existe $\varphi \ : \ A \to B$, injective.
   (c) Un autre théorème intéressant, dû à Cantor, donne que, pour tout ensemble X, on a $\mathrm{card}(X) < \mathrm{card}(\mathcal{P}(X))$ (c'est-à-dire $\mathrm{card}(X) \leq \mathrm{card}(\mathcal{P}(X))$ et $\mathrm{card}(X) \neq \mathrm{card}(\mathcal{P}(X))$). On a donc, en particulier, $\mathrm{card}(\mathcal{P}(\mathbb{R})) > \mathrm{card}(\mathbb{R})$. La démonstration du théorème de Cantor est très simple. Soit $\varphi \ : \ X \to \mathcal{P}(X)$. On va montrer que φ ne peut pas être surjective. On pose $A = \{x \in X;\ x \notin \varphi(x)\}$ (A peut être l'ensemble vide). Supposons que $A \in \mathrm{Im}(\varphi)$. Soit alors $a \in X$ t.q. $A = \varphi(a)$.

   Si $a \in A = \varphi(a)$, alors $a \notin A$ par définition de A.

   Si $a \notin A = \varphi(a)$, alors $a \in A$ par définition de A.

   On a donc montré que A ne peut pas avoir d'antécédent (par φ) et donc φ n'est pas surjective.

Proposition 2.2 *On note $\mathcal{C}_1$ l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}_2 = \{]a, b[,\ a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$ et $\mathcal{C}_3 = \{]a, \infty[,\ a \in \mathbb{R}\}$. Alors $T(\mathcal{C}_1) = T(\mathcal{C}_2) = T(\mathcal{C}_3) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. (Noter que d'autres caractérisations de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, semblables, sont possibles.)*

DÉMONSTRATION : On a, par définition de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, $T(\mathcal{C}_1) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On va démontrer ci-après que $T(\mathcal{C}_1) = T(\mathcal{C}_2)$ (le fait que $T(\mathcal{C}_2) = T(\mathcal{C}_3)$ est laissé au lecteur).

Comme $\mathcal{C}_2 \subset \mathcal{C}_1$, on a $T(\mathcal{C}_2) \subset T(\mathcal{C}_1)$. Il suffit donc de démontrer l'inclusion inverse. On va montrer que $\mathcal{C}_1 \subset T(\mathcal{C}_2)$, on aura alors que $T(\mathcal{C}_1) \subset T(\mathcal{C}_2)$.

Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$. On suppose $O \neq \emptyset$ (on sait déjà que $\emptyset \in T(\mathcal{C}_2)$). Le lemme 2.1 (plus simple que le lemme 2.4 page 34) ci-après nous donne l'existence d'une famille $(I_n)_{n\in A}$ d'intervalles ouverts t.q. $A \subset \mathbb{N}$ et $O = \cup_{n\in A} I_n$. Noter qu'on a aussi $O = \cup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ en posant $I_n = \emptyset$ si $n \in \mathbb{N} \setminus A$. Comme $I_n \in \mathcal{C}_2 \subset T(\mathcal{C}_2)$ pour tout $n \in A$ et $\emptyset \in T(\mathcal{C}_2)$, on en déduit, par stabilité dénombrable d'une tribu, que $O \in T(\mathcal{C}_2)$. Donc, $\mathcal{C}_1 \subset T(\mathcal{C}_2)$ et donc $T(\mathcal{C}_1) \subset T(\mathcal{C}_2)$. On a bien montré que $T(\mathcal{C}_1) = T(\mathcal{C}_2)$.

■

Lemme 2.1 *Tout ouvert non vide de $\mathbb{R}$ est réunion au plus dénombrable d'intervalles ouverts bornés.*

DÉMONSTRATION : Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$, $O \neq \emptyset$. On pose $A = \{(\beta,\gamma) \in \mathbb{Q}^2;\ \beta < \gamma,\ ]\beta,\gamma[\subset O\}$. On a donc $\cup_{(\beta,\gamma)\in A}]\beta,\gamma[\subset O$. On va montrer que $O \subset \cup_{(\beta,\gamma)\in A}]\beta,\gamma[$ (et donc que $O = \cup_{(\beta,\gamma)\in A}]\beta,\gamma[$).

Soit $x \in O$, il existe $\alpha_x > 0$ t.q. $]x-\alpha_x, x+\alpha_x[\subset O$. En prenant $\beta_x \in \mathbb{Q} \cap]x-\alpha_x, x[$ et $\gamma_x \in \mathbb{Q} \cap]x, x+\alpha_x[$ (de tels β_x et γ_x existent) on a donc $x \in]\beta_x,\gamma_x[\subset O$ et donc $(\beta_x,\gamma_x) \in A$. D'où $x \in]\beta_x,\gamma_x[\subset \cup_{(\beta,\gamma)\in A}]\beta,\gamma[$. On a bien montré que $O \subset \cup_{(\beta,\gamma)\in A}]\beta,\gamma[$ et donc que $O = \cup_{(\beta,\gamma)\in A}]\beta,\gamma[$. Comme $\mathbb{Q}^2$ est dénombrable, A est au plus dénombrable et le lemme est démontré. ■

Définition 2.6 (Espace mesurable ou probabilisable, partie mesurable ou probabilisable) *Soient E un ensemble, et T une tribu sur E. Le couple (E,T) est appelé "espace mesurable" ou (en langage probabiliste !) "espace probabilisable". Les parties de E qui sont (resp. ne sont pas) des éléments de T sont dites mesurables ou probabilisables (resp. non mesurables, non probabilisables).*

2.3 Mesure, probabilité

Définition 2.7 (Mesure) *Soit (E,T) un espace mesurable. On appelle mesure une application $m : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ (avec $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup (+\infty)$) vérifiant :*

1. *$m(\emptyset) = 0$*
2. *m est σ-additive, c'est-à-dire que pour toute famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ de parties disjointes deux à deux, (i.e. t.q. $A_n \cap A_m = \emptyset$, si $n \neq m$), on a :*

$$m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n). \tag{2.1}$$

Remarque 2.4

1. Dans la définition précédente on a étendu à $\overline{\mathbb{R}}_+$ l'addition dans $\mathbb{R}_+$. On a simplement posé $x + \infty = \infty$, pour tout $x \in \overline{\mathbb{R}}_+$. Noter également que la somme de la série dans la définition précédente est à prendre dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ et que, bien sûr, $a = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ signifie simplement que $\sum_{p=0}^{n} a_p \to a$ (dans $\overline{\mathbb{R}}_+$) quand $n \to \infty$.
2. Soient $x, y, z \in \overline{\mathbb{R}}_+$. Remarquer que $x + y = x + z$ implique $y = z$ si $x \neq \infty$.

3. Dans la définition précédente, la condition 1. peut être remplacée par la condition : $\exists\ A \in T, m(A) < \infty$. La vérification de cette affirmation est laissée au lecteur attentif.
4. Il est intéressant de remarquer que, pour une série à termes positifs, l'ordre de sommation est sans importance. Plus précisément, si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ et si φ est une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, on a $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{\varphi(n)}$. C'est l'objet du lemme 2.2.
5. Une conséquence immédiate de la $\sigma-$additivité est l'additivité, c'est-à-dire que
$$m(\cup_{p=0}^{n} A_p) = \sum_{p=0}^{n} m(A_p)$$
pour toute famille finie $(A_p)_{p=0,\ldots,n}$ d'éléments de T, disjoints 2 à 2. L'additivité se démontre avec la $\sigma-$additivité en prenant $A_p = \emptyset$ pour $p > n$ dans (2.1).
6. Dans le cas $E = \mathbb{R}$ et $T = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, il est facile de construire des mesures sur T, mais il n'existe pas de mesure sur T, notée m, telle que $m(]a, b[) = b - a$ pour tout a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$ (voir les exercices 2.24 et 2.23). Une telle mesure existe si on prend pour T la tribu borélenne de $\mathbb{R}$, c'est l'objet de la section 2.5.

Lemme 2.2 *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ et soit $\varphi\ :\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijective. Alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{\varphi(n)}$.*

DÉMONSTRATION :
On pose $A = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n (= \lim_{n\to\infty} \sum_{p=0}^{n} a_p) \in \overline{\mathbb{R}}_+$ et $B = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{\varphi(n)} (= \lim_{n\to\infty} \sum_{p=0}^{n} a_{\varphi(p)}) \in \overline{\mathbb{R}}_+$. On veut montrer que $A = B$.

On montre d'abord que $B \le A$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $N = \max\{\varphi(0), \ldots, \varphi(n)\}$. Comme $a_q \ge 0$ pour tout $q \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{p=0}^{n} a_{\varphi(p)} \le \sum_{p=0}^{N} a_p \le A$. On en déduit, faisant tendre n vers ∞ que $B \le A$.

En raisonnant avec l'inverse de φ on a aussi $A \le B$ et finalement $A = B$.

■

Définition 2.8 (Mesure finie) *Soient E un ensemble et T une tribu sur E. On appelle mesure finie une mesure m sur T telle que $m(E) < \infty$.*

Définition 2.9 (Probabilité) *Soient E un ensemble et T une tribu sur E. On appelle probabilité une mesure p sur T t.q. $p(E) = 1$.*

Définition 2.10 (Espace mesuré, espace probabilisé) *Soient E un ensemble, T une tribu sur E et m une mesure (resp. une probabilité) sur T. Le triplet (E, T, m) est appelé "espace mesuré" (resp. "espace probabilisé").*

Définition 2.11 (Mesure σ-finie) *Soit (E, T, m) un espace mesuré, on dit que m est σ-finie (ou que (E, T, m) est σ-fini) si :*
$$\exists\, (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T, \quad m(A_n) < \infty, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \ \textit{et} \quad E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n. \tag{2.2}$$

Remarque 2.5 (Langage probabiliste) En langage probabiliste, la propriété de σ-additivité (2.1) que l'on requiert dans la définition d'une mesure (et donc d'une probabilité) est souvent appelé "axiome complet des probabilités totales".

Exemple 2.1 (Mesure de Dirac) Soient E un ensemble, T une tribu sur E et $a \in E$. On définit sur T la mesure δ_a par (pour $A \in T$) :

$$\delta_a(A) = 0, \quad \text{si } a \notin A, \tag{2.3}$$

$$\delta_a(A) = 1, \quad \text{si } a \in A. \tag{2.4}$$

On peut remarquer que la mesure de Dirac est une probabilité.

Remarque 2.6 (Comment choisir la probabilité) Soit (E, T) un espace probabilisable, on peut évidemment définir plusieurs probabilités sur T. C'est tout l'art de la modélisation que de choisir une probabilité qui rende compte du phénomène aléatoire que l'on veut observer. On se base pour cela souvent sur la notion de fréquence, qui est une notion expérimentale à l'origine. Soit $A \in T$ un événement, dont on cherche à évaluer la probabilité $p(A)$. On effectue pour cela N fois l'expérience dont l'univers des possibles est E, et on note N_A le nombre de fois où l'événement A est réalisé. A N fixé, on définit alors la *fréquence* $f_A(N)$ de l'événement A par :

$$f_A(N) = \frac{N_A}{N}.$$

Expérimentalement, il s'avère que $f_N(A)$ admet une limite lorsque $N \to +\infty$. C'est ce qu'on appelle la "loi empirique des grands nombres". On peut donc définir "expérimentalement" $p(A) = \lim_{N \to +\infty} f_N(A)$. Cependant, on n'a pas ainsi démontré que p est une probabilité: il ne s'agit pour l'instant que d'une approche intuitive. On démontrera plus loin la loi forte des grands nombres, qui permettra de justifier mathématiquement la loi empirique. On peut remarquer que $f_N(E) = \frac{N}{N} = 1\ldots$

Exemple 2.2 (Le cas "équiprobable") Soit (E, T, p) un espace probabilisé .On suppose que tous les singletons de E appartiennent à la tribu et que les événements élémentaires sont équiprobables. . On a alors: $p(\{x\}) = \frac{1}{\text{card}E}$ pour tout $x \in E$.

Définition 2.12 (mesure atomique) *Soit (E, T, m) un espace mesuré tel que : $\{x\} \in T$ pour tout x de E. On dit que m est portée par $S \in T$ si $m(S^c) = 0$. Soit $x \in E$, on dit que x est un atome ponctuel de m si $m(\{x\}) \neq 0$. On dit que m est purement atomique si elle est portée par la partie de E formée par l'ensemble de ses atomes ponctuels.*

Définition 2.13 (Mesure diffuse) *Soient (E, T) un espace mesurable et m une mesure sur T . On dit que m est diffuse si $\{x\} \in T$ et $m(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in E$. (Cette définition est aussi valable pour une mesure signée sur T, définie dans la section 2.4.)*

Définition 2.14 (Partie négligeable) *Soient (E, T, m) un espace mesuré et $A \subset E$. On dit que A est négligeable s'il existe un ensemble $B \in T$ tel que $A \subset B$ et $m(B) = 0$.*

Définition 2.15 (Mesure complète) *Soit (E, T, m) un espace mesuré, on dit que m est complète (ou que (E, T, m) est complet) si toutes les parties négligeables sont mesurables, c'est-à-dire appartiennent à T.*

La proposition suivante donne les principales propriétés d'une mesure.

Proposition 2.3 (Propriétés des mesures) *Soit (E, T, m) un espace mesuré. La mesure m vérifie les quatre propriétés suivantes :*

1. *Monotonie : Soit A, $B \in T$, $A \subset B$, alors*

$$m(A) \leq m(B) \tag{2.5}$$

2. *σ-sous-additivité : Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$, alors*

$$m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n). \tag{2.6}$$

3. *Continuité croissante : Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$, t.q. $A_n \subset A_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors*

$$m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to\infty}(m(A_n)) = \sup_{n\in\mathbb{N}}(m(A_n)) \tag{2.7}$$

4. *Continuité décroissante : Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$, t.q. $A_{n+1} \subset A_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et t.q. il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $m(A_{n_0}) < \infty$, alors*

$$m(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to\infty}(m(A_n)) = \inf_{n\in\mathbb{N}}(m(A_n)) \tag{2.8}$$

Démonstration :
La démonstration de ces propriétés est facile: elles découlent toutes du caractère positif et du caractère σ-additif de la mesure. Attention: ces propriétés ne sont pas vérifiées par les mesures signées que nous verrons à la section 2.4.

1. *Monotonie.* Soit $A, B \in T$, $A \subset B$. On a $B = A \cup (B \setminus A)$ et $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$. Comme $A \in T$ et $B \setminus A = B \cap A^c \in T$, l'additivité de m (voir la remarque 2.4) donne $m(B) = m(A) + m(B \setminus A) \geq m(A)$, car m prend ses valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

   Noter aussi que $m(B \setminus A) = m(B) - m(A)$ si $0 \leq m(A) \leq m(B) < \infty$ (mais cette relation n'a pas de sens si $m(A) = m(B) = \infty$).

2. *$\sigma-$sous additivité.* Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$. On veut montrer que $m(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n)$. On pose $B_0 = A_0$ et, par récurrence sur n, $B_n = A_n \setminus (\cup_{i=0}^{n-1} B_i)$ pour $n \geq 1$. Par récurrence sur n on montre que $B_n \in T$ pour tout n en remarquant que, pour $n > 1$, $B_n = A_n \cap (\cap_{i=0}^{n-1} B_i^c)$. La construction des B_n assure que $B_n \cap B_m = \emptyset$ si $n \neq m$ et $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Pour vérifier cette dernière propriété, on remarque que $B_n \subset A_n$ donc $\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Puis, si $x \in A_n$ et $x \notin \cup_{i=0}^{n-1} B_i$, on a alors $x \in A_n \cap (\cap_{i=0}^{n-1} B_i^c) = B_n$. Ceci prouve que $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ et donc, finalement, $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n$.

   On utilise maintenant la $\sigma-$additivité de m et la monotonie de m (car $B_n \subset A_n$) pour écrire $m(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = m(\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(B_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n)$.

3. *Continuité croissante.* Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$, t.q. $A_n \subset A_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par monotonie de m, on a $m(A_{n+1}) \geq m(A_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc $\lim_{n\to\infty} m(A_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} m(A_n) \in \overline{\mathbb{R}}_+$. On pose $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et on définit la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $B_0 = A_0$ et $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$ (noter que $A_{n-1} \subset A_n$). On a $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n$, $B_n \in T$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $B_n \cap B_m = \emptyset$ si $n \neq m$.

La $\sigma-$additivité de m nous donne

$$m(A) = m(\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(B_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{p=0}^{n} m(B_p).$$

Puis, comme $A_n = \cup_{p=0}^{n} B_p$, l'additivité de m (qui se déduit de la $\sigma-$additivité) nous donne $\sum_{p=0}^{n} m(B_p) = m(A_n)$ et donc $m(A) = \lim_{n\to\infty} m(A_n)$.

4. *Continuité décroissante.* Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$, t.q. $A_{n+1} \subset A_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et telle qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $m(A_{n_0}) < \infty$.

   Par monotonie, on a $m(A_{n+1}) \leq m(A_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $\lim_{n\to\infty} m(A_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} m(A_n) \in \overline{\mathbb{R}}_+$. On a aussi, par monotonie, $m(A) \leq m(A_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $A = \cap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Comme $m(A_{n_0}) < \infty$, on a aussi $m(A_n) < \infty$ pour tout $n \geq n_0$ et $m(A) < \infty$. On pose $B_n = A_{n_0} \setminus A_n = A_{n_0} \cap A_n^c \in T$, pour tout $n \geq n_0$. La suite $(B_n)_{n\geq n_0}$ est croissante ($B_n \subset B_{n+1}$ pour tout $n \geq n_0$) et $B = \cup_{n\geq 0} B_n = \cup_{n\geq n_0}(A_{n_0} \setminus A_n) = A_{n_0} \setminus \cap_{n\geq n_0} A_n = A_{n_0} \setminus A$.

   La continuité croissante donne

$$m(A_{n_0} \setminus A) = m(B) = \lim_{n\to\infty} m(B_n) = \lim_{n\to\infty} m(A_{n_0} \setminus A_n). \tag{2.9}$$

   Comme $A \subset A_{n_0}$, on a $m(A_{n_0} \setminus A) = m(A_{n_0}) - m(A)$ (car $m(A) \leq m(A_{n_0}) < \infty$, on utilise ici la remarque à la fin de la preuve de la monotonie). De même, comme $A_n \subset A_{n_0}$ (pour $n \geq n_0$), on a $m(A_{n_0} \setminus A_n) = m(A_{n_0}) - m(A_n)$ (car $m(A_n) \leq m(A_{n_0}) < \infty$). En utilisant une nouvelle fois que $m(A_{n_0}) < \infty$, on déduit de (2.9) que $m(A) = \lim_{n\to\infty} m(A_n)$.

■

Théorème 2.1 (Mesure complétée) *Soit (E, T, m) un espace mesuré, on note $\mathcal{N}_m$ l'ensemble des parties négligeables. On pose $\overline{T} = \{A \cup N,\ A \in T,\ N \in \mathcal{N}_m\}$. Alors $\overline{T}$ est une tribu, et il existe une et une seule mesure, notée $\overline{m}$, sur $\overline{T}$, égale à m sur T. De plus, une partie de E est négligeable pour $(E, \overline{T}, \overline{m})$ si et seulement si elle est négligeable pour (E, T, m). la mesure $\overline{m}$ est complète et l'espace mesuré $(E, \overline{T}, \overline{m})$ s'appelle le complété de (E, T, m). La mesure $\overline{m}$ s'appelle la mesure complétée de la mesure m.*

DÉMONSTRATION : Cette démonstration est l'objet de l'exercice 2.28. ■

Définition 2.16 (Mesure absolument continue, mesure étrangère)
Soient (E, T) un espace mesurable, et m et μ des mesures (positives) sur T.

1. *On dit que la mesure μ est absolument continue par rapport à la mesure m (et on note $\mu << m$) si pour tout $A \in T$ tel que $m(A) = 0$, alors $\mu(A) = 0$.*

2. *On dit que la mesure μ est étrangère à la mesure m (et note $\mu \perp m$) s'il existe $A \in T$ tel que $m(A) = 0$ et $\mu(A^c) = 0$.*

Proposition 2.4 *Soient (E, T) un espace mesurable, et m et μ des mesures (positives) sur T; on suppose de plus que la mesure μ est σ-finie. Alors il existe une mesure μ_a absolument continue par rapport à m et une mesure μ_e étrangère à m (et à μ_a) t.q. $\mu = \mu_a + \mu_e$.*

DÉMONSTRATION :
On suppose tout d'abord que μ est une mesure finie. On pose $\alpha = \sup\{\mu(A); A \in T, m(A) = 0\}$. Il existe donc une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ t.q. $m(A_n) = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $\mu(A_n) \to \alpha$, quand $n \to \infty$. On pose alors $C = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

On a $C \in T$, $0 \le m(C) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n) = 0$ (par σ-sous additivité de m), $\mu(C) \ge \mu(A_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (par monotonie de μ) et donc, en passant à la limite quand $n \to \infty$, $\mu(C) \ge \alpha$. Enfin, la définition de α donne alors $\mu(C) = \alpha$. On a donc trouvé $C \in T$ t.q. $m(C) = 0$ et $\mu(C) = \alpha$.

Pour $A \in T$, on pose $\mu_e(A) = \mu(A \cap C)$ et $\mu_a(A) = \mu(A \cap C^c)$.

Il est clair que μ_e et μ_a sont des mesures sur T et que $\mu = \mu_e + \mu_a$. Comme $\mu_e(C^c) = 0$ et $\mu_a(C) = 0$, les mesures μ_a et μ_e sont étrangères. Comme $m(C) = 0$ et $\mu_e(C^c) = 0$, les mesures μ_e et m sont aussi étrangères. Il reste à montrer que μ_a est absolument continue par rapport à m.

Soit $B \in T$ t.q. $m(B) = 0$. On veut montrer que $\mu_a(B) = 0$, c'est-à-dire que $\mu(B \cap C^c) = 0$. On pose $D = B \cap C^c$ et $F = C \cup D$. Comme $D \cap C = \emptyset$, On a $m(F) = m(C) + m(D) \le m(C) + m(B) = 0$ et $\mu(F) = \mu(C) + \mu(D) = \alpha + \mu(D)$. Comme $m(F) = 0$, la définition de α donne que $\mu(F) \le \alpha$. On a donc $\alpha + \mu(D) \le \alpha$, d'où l'on déduit, comme $\alpha \in \mathbb{R}$ (et c'est ici que l'on utilise le fait que μ est une mesure finie), que $\mu(D) = 0$, c'est-à-dire $\mu_a(B) = 0$. On a bien ainsi montré que μ_a est absolument continue par rapport à m.

On considère maintenant le cas général où μ est σ-finie. Il existe une suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ t.q. $E = \cup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, $\mu(E_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $E_n \cup E_m = \emptyset$ si $n \ne m$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $A \in T$, on pose $\mu^{(n)}(A) = \mu(A \cap E_n)$. $\mu^{(n)}$ est donc une mesure finie sur T. Le raisonnement précédent donne donc l'existence de $\mu_a^{(n)}$ absolument continue par rapport à m et de $\mu_e^{(n)}$ étrangère à m (et à $\mu_a^{(n)}$) t.q. $\mu^{(n)} = \mu_a^{(n)} + \mu_e^{(n)}$. On pose alors, pour $A \in T$:

$$\mu_e(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_e^{(n)}(A);\ \mu_a(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_a^{(n)}(A).$$

μ_e et μ_a sont bien des mesures sur T (voir l'exercice 4.2) et il est clair que $\mu = \mu_e + \mu_a$, μ_a absolument continue par rapport à m et μ_e étrangère à m (et à μ_a). ■

Il est parfois utile (surtout en théorie des probabilités, mais une telle question apparaît aussi dans le section 2.5 et dans le chapitre 7) de montrer l'unicité d'une mesure ayant des propriétés données. La proposition suivante donne une méthode pour montrer une telle unicité (d'autres méthodes sont possibles, voir, par exemple, la proposition 5.4 dans le chapitre 5).

Proposition 2.5 *Soit (E, T) un espace mesurable et m, μ deux mesures sur T. On suppose qu'il existe $\mathcal{C} \subset T$ t.q.*

1. *$\mathcal{C}$ engendre T,*
2. *$\mathcal{C}$ est stable par intersection finie (c'est-à-dire $A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{C}$),*
3. *Il existe $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$ t.q. $E_n \cap E_m = \emptyset$ si $n \ne m$, $m(E_n) < \infty$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $E = \cup_{n\in\mathbb{N}} E_n$,*
4. *$m(A) = \mu(A)$ pour tout $A \in \mathcal{C}$.*

On a alors $m = \mu$ (c'est-à-dire $m(A) = \mu(A)$ pour tout $A \in T$).

DÉMONSTRATION : Cette démonstration est l'objet de l'exercice 2.19. ■

2.4 mesure signée

Définition 2.17 (Mesure signée) *Soit (E, T) un espace mesurable. On appelle mesure signée (sur T) une application $m : T \to \mathbb{R}$ vérifiant la propriété de σ-additivité, c'est-à-dire t.q. pour toute famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$, t.q. $A_n \cap A_m = \emptyset$, si $n \neq m$,*

$$m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n). \tag{2.10}$$

Noter qu'une mesure signée prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$. En prenant $A_n = \emptyset$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ dans (2.10), on en déduit que $m(\emptyset) = 0$.

On peut aussi considérer des mesures à valeurs complexes (c'est-à-dire dans $\mathbb{C}$). Dans ce cas, les parties réelles et imaginaires de ces mesures à valeurs complexes sont des mesures signées.

Dans toute la suite du cours, les mesures considérées seront en général positives, c'est-à-dire (cf. définition 2.7) à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Lorsque l'on s'intéressera à des mesures prenant leurs valeurs dans $\mathbb{R}$, on précisera qu'il s'agit de "mesures signées".

Proposition 2.6 (Décomposition d'une mesure signée) *Soient (E, T) un espace mesurable et m une mesure signée sur T. Alors, il existe deux mesures (positives) finies, notées m^+ et m^-, t.q. :*

1. *$m(A) = m^+(A) - m^-(A)$, pour tout $A \in T$.*
2. *Les mesures m^+ et m^- sont étrangères, c'est-à-dire qu'il existe $C \in T$ tel que $m^+(C) = 0$, et $m^-(E \setminus C) = 0$.*

Une conséquence des propriétés ci-dessus est que $m^-(A) = -m(A\cap C)$ et $m^+(A) = m(A\cap C^c)$ pour tout $A \in T$.

De plus, la décompostion de m en différence de deux mesures (positives) finies étrangères est unique. Elle s'appelle "décomposition de Hahn" de m.

Démonstration :

La démonstration d'existence de m^+ et m^- est décomposée en trois étapes. Dans la première étape, on va montrer que, si $A \in T$, il existe $\tilde{A} \in T$ t.q. $\tilde{A} \subset A$, $m(\tilde{A}) \geq m(A)$ et :

$$B \in T,\ B \subset \tilde{A} \ \Rightarrow\ m(B) \geq 0.$$

Cette première étape nous permettra, dans l'étape 2, de montrer l'existence de $C \in T$ t.q. $m(C) = \sup\{m(A), A \in T\}$ (ceci montre, en particulier que $\sup\{m(A), A \in T\} < \infty$).

Enfin, dans l'étape 3, on pose $m^+(A) = m(A \cap C)$ et $m^-(A) = -m(A \cap C^c)$ (pour tout $A \in T$) et on remarque que m^+ et m^- sont des mesures finies, étrangères et t.q. $m = m^+ - m^-$.

Etape 1. Soit $A \in T$, on montre, dans cette étape, qu'il existe $\tilde{A} \in T$ t.q. $\tilde{A} \subset A$, $m(\tilde{A}) \geq m(A)$ et :

$$B \in T,\ B \subset \tilde{A} \ \Rightarrow\ m(B) \geq 0. \tag{2.11}$$

On commence par montrer, par récurrence sur n, l'existence d'une suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ déléments de T t.q. :

1. $B_0 = A$,
2. $B_{n+1} \subset B_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

3. $m(B_n \setminus B_{n+1}) \le \beta_n = \max\{\frac{\alpha_n}{2}, -1\}$ où $\alpha_n = \inf\{m(C), C \in T, C \subset B_n\}$.

On prend $B_0 = A$. Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$, on suppose B_p connu pour $p \le n$. On a $\alpha_n = \inf\{m(C), C \subset B_n\} \le 0$ (car $\emptyset \subset B_n$). Si $\alpha_n = -\infty$, il existe $C_n \in T$ t.q. $C_n \subset B_n$ et $m(C_n) \le \beta_n = -1$. Si $-\infty < \alpha_n < 0$, on a $\beta_n > \alpha_n$, il existe donc $C_n \in T$ t.q. $C_n \subset B_n$ et $m(C_n) \le \beta_n$. Si $\alpha_n = 0$, on prend $C_n = \emptyset$. Enfin, on prend $B_{n+1} = B_n \setminus C_n$ et on obtient bien les propriétés désirées en remarquant que $C_n = B_n \setminus B_{n+1}$.

La suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (c'est-à-dire $B_{n+1} \subset B_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). Pour $m > n$, on a donc $C_m \subset B_m \subset B_{n+1}$ et donc $C_m \cap C_n = \emptyset$ (car $B_{n+1} = B_n \setminus C_n$). Par $\sigma-$additivité de m, on en déduit $m(\cup_{n\in\mathbb{N}} C_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(C_n)$. Comme $m(\cup_{n\in\mathbb{N}} C_n) \in \mathbb{R}$, la série de terme général $m(C_n)$ est convergente. On a donc $m(C_n) \to 0$ quand $n \to \infty$ et donc $\beta_n \to 0$ quand $n \to \infty$ (car $m(C_n) \le \beta_n \le 0$) et, finalement, $\alpha_n \to 0$ quand $n \to \infty$.

On pose maintenant $\tilde{A} = A \setminus \cup_{n\in\mathbb{N}} C_n = \cap_{n\in\mathbb{N}} B_n$. On a, bien sûr, $\tilde{A} \in T$ et $\tilde{A} \subset A$. On montre maintenant que $\tilde{A}$ vérifie (2.11). Soit $C \in T$, $C \subset \tilde{A}$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C \subset B_n$ et donc $m(C) \ge \alpha_n$. Quand $n \to \infty$, on en déduit que $m(C) \ge 0$. ce qui donne bien (2.11).

Il reste à montrer que $m(\tilde{A}) \ge m(A)$. Comme $A = \tilde{A} \cup (\cup_{n\in\mathbb{N}} C_n)$ (et que cette union est "disjointe"), la $\sigma-$additivité de m donne que $m(A) = m(\tilde{A}) + \sum_{n\in\mathbb{N}} m(C_n) \le m(\tilde{A})$. Ce qui termine la première étape.

Etape 2. On pose $\alpha = \sup\{m(A), A \in T\}$ et on montre, dans cette étape, qu'il existe $C \in T$ t.q. $m(C) = \alpha$.

Par définition d'une borne supérieure, il existe une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de T t.q. $m(A_n) \to \alpha$ quand $n \to \infty$. Grâce à l'étape 1, on peut supposer (quitte à remplacer A_n par $\tilde{A_n}$ construit comme dans l'étape 1) que A_n vérifie (2.11), c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$B \in T,\ B \subset A_n \ \Rightarrow\ m(B) \ge 0. \tag{2.12}$$

On pose $C = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. On commence par montrer que $m(C) \ge m(A_m)$, pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Soit $m \in \mathbb{N}$. On peut écrire C comme une union "disjointe" :

$$C = A_m \cup (\cup_{n\ne m} C_{n,m}),$$

avec $C_{n,m} \in T$ et $C_{n,m} \subset A_n$ pour tout $m \ne n$. En effet, il suffit pour cela de constuire par récurrence (sur n) la suite des $C_{n,m}$ en prenant pour $C_{n,m}$ l'intersection de C avec A_n à laquelle on retranche A_m et les $C_{n,m}$ précédemment construits.

Par $\sigma-$additivité de m, on a $m(C) = m(A_m) + \sum_{n\ne m} m(C_{n,m})$. puis, comme $C_{n,m} \subset A_n$, on a, par (2.12), $m(C_{n,m}) \ge 0$. On en déduit $m(C) \ge m(A_m)$.

En faisant tendre m vers ∞, on a alors $m(C) \ge \alpha$ et donc, finalement $m(C) = \alpha$.

Etape 3. Construction de m^+ et m^-.

Pour constuire m^+ et m^-, on utilise un élément C de T t.q. $m(C) = \alpha = \sup\{m(A), A \in T\}$ (l'existence de C a été montré à l'étape 2). Pour $A \in T$, on pose :

$$m^+(A) = m(A \cap C),\ m^-(A) = -m(A \cap C^c).$$

On a $m^+(\emptyset) = m^-(\emptyset) = 0$ (car $m(\emptyset) = 0$) et les applications m^+ et m^- sont des applications $\sigma-$additives de T dans $\mathbb{R}$ (car m est $\sigma-$additive). Pour montrer que m^+ et m^- sont des mesures finies, il suffit de montrer qu'elles prennent leurs valeurs dans $\mathbb{R}_+$, ce que l'on montre maintenant.

Soit $A \in T$, on a, par additivité de m et grâce à la définition de α, $\alpha = m(C) = m(A\cap C) + m(A^c \cap C) \leq m(A \cap C) + \alpha$. On en déduit $m(A \cap C) \geq 0$. ce qui prouve bien que $m^+(A) \in \mathbb{R}_+$. On a aussi, encore une fois par additivité de m et grâce à la définition de α, $\alpha \geq m(C) + m(A \cap C^c) = \alpha + m(A \cap C^c)$. On en déduit $m(A \cap C^c) \leq 0$ et donc $m^-(A) \in \mathbb{R}_+$.

Les applications m^+ et m^- sont des mesures finies (noter que $m^+(E) = m(E\cap C) < \infty$ et $m^-(E) = m(E\cap C^c) < \infty$). Elles sont étrangères car $m^+(C^c) = m(C^c \cap C) = m(\emptyset) = 0$ et $m^-(C) = -m(C \cap C^c) = 0$. Enfin, pour tout $A \in T$, on a, par $\sigma-$additivité de m :

$$m(A) = m(A \cap C) + m(A \cap C^c) = m^+(A) - m^-(A).$$

Ceci termine la démonstration de l'existence de m^+ et m^-.

Pour montrer l'unicité de cette décomposition de m, on suppose que μ et ν sont deux mesures finies étrangères t.q. $m = \mu - \nu$. Comme elle sont étrangères, il existe $D \in T$ t.q. $\mu(D^c) = \nu(D) = 0$. On montre alors que, pour tout $A \in T$, on a nécessairement :

$$\mu(A) = \sup\{m(B);\ B \in T,\, B \subset A\}. \tag{2.13}$$

En effet, si $A \in T$ et $B \in T$, $B \subset A$, on a $m(B) = \mu(B) - \nu(B) \leq \mu(B) \leq \mu(A)$ (par positivité de ν et monotonie de μ). Puis, en prenant $B = A \cap D$, on a $m(B) = m(A \cap D) = \mu(A \cap D) - \nu(A \cap D) = \mu(A \cap D) = \mu(A) - \mu(A \cap D^c) = \mu(A)$. Ceci prouve bien que (2.13) est vraie (et prouve que le sup est atteint pour $B = A \cap D$). L'égalité (2.13) donne donc de manière unique μ en fonction de m. L'unicité de ν découle alors du fait que $\nu = \mu - m$. ■

Remarque 2.7 Une conséquence de la proposition 2.6 est que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n)$ apparaissant dans (2.10) est absolument convergente car (pour toute famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ t.q. $A_n \cap A_m = \emptyset$, si $n \neq m$) on a $\sum_{p=0}^{n} |m(A_p)| \leq \sum_{p=0}^{n} m^+(A_p) + \sum_{p=0}^{n} m^-(A_p) \leq m^+(E) + m^-(E) < \infty$.
En fait, la définition 2.17 donne directement que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n)$ apparaissant dans (2.10) est commutativement convergente (c'est-à-dire qu'elle est convergente, dans $\mathbb{R}$, quel que soit l'ordre dans lequel on prend les termes de la série et la somme de la série ne dépend pas de l'ordre dans lequel les termes ont été pris). Elle est donc absolument convergente (voir l'exercice 2.29). Nous verrons plus loin que cette équivalence entre les séries absolument convergentes et les séries commutativement convergentes est fausse pour des séries à valeurs dans un espace de Banach de dimension infinie.

2.5 La mesure de Lebesgue sur la tribu des boréliens

Il serait bien agréable, pour la suite du cours, de montrer l'existence d'une application λ, définie sur tout $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ et à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, t.q. l'image par λ d'un intervalle de $\mathbb{R}$ soit la longueur de cet intervalle, et qui vérifie les propriétés (1.9) et (1.10). Malheureusement, on peut montrer qu'une telle application n'existe pas (voir les exercices 2.24 et 2.23). Le théorème suivant donne l'existence d'une telle application définie seulement sur la tribu des boréliens de $\mathbb{R}$, notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (l'exercice 2.24 donne alors que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})$). Cette application s'appelle la mesure de Lebesgue.

Théorème 2.2 (Carathéodory) *Il existe une et une seule mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, notée λ et appelée mesure de Lebesgue sur les boréliens, t.q. $\lambda(]\alpha, \beta[) = \beta - \alpha$, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ t.q. $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$.*

Il y a plusieurs démonstrations possibles de ce théorème. Pour la partie "existence" de ce théorème, nous donnons dans cette section une démonstration due à Carathéodory. Soit $A \subset \mathbb{R}$. On définit $\lambda^\star(A)$ par :

$$\lambda^\star(A) = \inf_{(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \in E_A} \sum_{i=1}^{n} \ell(A_i),$$

où E_A est l'ensemble des familles dénombrables d'intervalles ouverts dont l'union contient A, et $\ell(A_i)$ représente la longueur de l'intervalle A_i. On peut montrer (voir l'exercice 2.23) que l'application $\lambda^\star$ ainsi définie de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ n'est pas σ- additive (ce n'est donc pas une mesure).

On montre par contre dans cette section que la restriction de $\lambda^\star$ à $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est une mesure, qu'on note λ, mesure de Lebesgue. L'existence de la mesure de Lebesgue peut aussi être démontrée en utilisant un théorème plus général (de F. Riesz) que nous verrons dans un chapitre ultérieur.

Après la définition de $\lambda^\star$ et la démonstration de propriétés de $\lambda^\star$, on donne la démonstration de la partie "existence" du théorème de Carathéodory (voir page 32). La partie "unicité" du théorème de Carathéodory (voir page 35) peut être démontrée en utilisant le théorème de "régularité" sur les mesures sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (Théorème 2.3, très utille dans la suite du cours) et d'un lemme classique sur les ouverts de $\mathbb{R}$ (lemme 2.4). Cette partie "unicité" peut aussi être démontrée, plus directement, en utilisant la proposition 2.5.

Définition 2.18 (Définition de $\lambda^\star$) *Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. On pose $\lambda^\star(A) = \inf\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n);\ (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_A\}$, avec $E_A = \{(I_n)_{n\in\mathbb{N}};\ I_n =]a_n, b_n[,\ -\infty < a_n \le b_n < \infty,\ \forall n \in \mathbb{N},\ A \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} I_n\}$ et $\ell(I) = b - a$ si $I =]a, b[,\ -\infty < a \le b < \infty$.*

Proposition 2.7 (Propriétés de $\lambda^\star$) *L'application $\lambda^\star : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ (définie dans la définition 2.18) vérifie les propriétés suivantes :*

1. *$\lambda^\star(\emptyset) = 0$,*
2. *(Monotonie) $\lambda^\star(A) \le \lambda^\star(B)$, pour tout A, $B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $A \subset B$,*
3. *($\sigma-$sous additivité) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ et $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, alors $\lambda^\star(A) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^\star(A_n)$,*
4. *$\lambda^\star(]a, b[) = b - a$ pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ t.q. $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$.*

Démonstration :
On remarque tout d'abord que $\lambda^\star(A) \in \overline{\mathbb{R}}_+$ pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ (car $\lambda^\star(A)$ est la borne inférieure d'une partie de $\overline{\mathbb{R}}_+$).

Propriété 1. Pour montrer que $\lambda^\star(\emptyset) = 0$, il suffit de remarquer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_\emptyset$ avec $I_n = \emptyset$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc $0 \le \lambda^\star(\emptyset) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n) = 0$.

Propriété 2. Soit $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ t.q. $A \subset B$. On a $E_B \subset E_A$ et donc $\lambda^\star(A) \le \lambda^\star(B)$.

Propriété 3. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ et $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Il suffit de considérer le cas où $\lambda^\star(A_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (sinon, l'inégalité est immédiate).

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(I_{n,m})_{m\in\mathbb{N}} \in E_{A_n}$ t.q. $\sum_{m\in\mathbb{N}} \ell(I_{n,m}) \le \lambda^\star(A_n) + \varepsilon/(2^n)$.

On remarque alors que $(I_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est un recouvrement de A par des intervalles ouverts et donc que :

$$\lambda^\star(A) \le \sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} \ell(I_{n,m}).$$

Noter que $\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} \ell(I_{n,m}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_{\varphi(n)})$, où φ est une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^2$ (cette somme ne dépend pas de la bijection choisie, voir le lemme 2.2 page 21).Avec le lemme 2.3 ci dessous, on en déduit :

$$\lambda^\star(A) \le \sum_{n\in\mathbb{N}}(\sum_{m\in\mathbb{N}} \ell(I_{n,m})) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^\star(A_n) + 2\varepsilon,$$

ce qui donne bien, quand $\varepsilon \to 0$, $\lambda^\star(A) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^\star(A_n)$.

Propriété 4. Pour montrer la quatrième propriété. On commence par montrer :

$$\lambda^\star([a,b]) = b - a,\ \forall a,b \in \mathbb{R}, a < b. \tag{2.14}$$

Soit donc a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Comme $[a,b] \subset]a-\varepsilon, b+\varepsilon[$, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\lambda^\star([a,b]) \le b - a + 2\varepsilon$. On en déduit $\lambda^\star([a,b]) \le b - a$.

Pour démontrer l'inégalité inverse, soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_{[a,b]}$. Par compacité de $[a,b]$, il existe $n \in \mathbb{N}$ t.q. $[a,b] \subset \cup_{p=0}^n I_p$. On peut alors construire (par récurrence) i_0, i_1, $\ldots$, $i_q \in \{0,\ldots,n\}$ t.q. $a_{i_0} < a$, $a_{i_{p+1}} < b_{i_p}$ pour tout $p \in \{0,\ldots,q-1\}$, $b < b_{i_q}$. On en déduit que $b - a < \sum_{p=0}^q b_{i_p} - a_{i_p} \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n)$ et donc $b - a \le \lambda^\star([a,b])$. Ceci donne bien (2.14).

En remarquant que $[a+\varepsilon, b-\varepsilon] \subset]a,b[\subset [a,b]$ pour tout $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et $0 < \varepsilon < (b-a)/2$, la monotonie de $\lambda^\star$ donne (avec (2.14)) que $\lambda^\star(]a,b[) = b - a$ pour tout $a,b \in \mathbb{R}, a < b$. La monotonie de $\lambda^\star$ donne alors aussi que $\lambda^\star([a,b[) = \lambda^\star(]a,b]) = \lambda^\star(]a,b[) = b - a$ pour tout $a,b \in \mathbb{R}, a < b$, et enfin que $\lambda^\star(]-\infty,a]) = \lambda^\star(]-\infty,a[) = \lambda^\star(]a,\infty]) = \lambda^\star([a,\infty]) = \infty$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. ■

Lemme 2.3 (Double série à termes positifs) *Soit $(a_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} \subset \mathbb{R}_+$. Alors on a :*

$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} a_{n,m} = \sum_{n\in\mathbb{N}}(\sum_{m\in\mathbb{N}} a_{n,m}).$$

Démonstration : On pose $A = \sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} a_{n,m}$ et $B = \sum_{n\in\mathbb{N}}(\sum_{m\in\mathbb{N}} a_{n,m})$. Soit φ une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^2$. On rappelle que $\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} a_{n,m} = \sum_{p\in\mathbb{N}} a_{\varphi(p)}$.

Pour tout i, $j \in \mathbb{N}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ t.q. $\{0,\ldots,i\} \times \{0,\ldots j\} \subset \{\varphi(0),\ldots,\varphi(n)\}$. Comme $a_{n,m} \ge 0$ pour tout (n,m), on en déduit que $A \ge \sum_{p=0}^n a_{\varphi(p)} \ge \sum_{n=0}^i(\sum_{m=0}^j a_{n,m})$ et donc, en faisant tendre j puis i vers ∞, que $A \ge B$. Un raisonnement similaire donne que $B \ge A$ et donc $A = B$. ■

On introduit maintenant la tribu de Lebesgue, sur laquelle on montrera que $\lambda^\star$ est une mesure.

Définition 2.19 (Tribu de Lebesgue) *On pose $\mathcal{L} = \{E \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ t.q. $\lambda^\star(A) = \lambda^\star(A\cap E) + \lambda^\star(A \cap E^c)$ pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})\}$. On rappelle que $\lambda^\star$ est définie dans la définition 2.18 (et que $E^c = \mathbb{R}\setminus E$). Cet ensemble de parties de $\mathbb{R}$ noté $\mathcal{L}$ s'appelle "tribu de Lebesgue" (on montre dans la proposition 2.8 que $\mathcal{L}$ est bien une tribu).*

Remarque 2.8 On peut avoir une première idée de l'intérêt de la définition 2.19 en remarquant qu'elle donne immédiatement l'additivité de $\lambda^\star$ sur $\mathcal{L}$. En effet, soit $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}$ t.q. $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ et soit $A \subset \mathbb{R}$. On suppose que $E_1 \in \mathcal{L}$ et on utilise la définition de $\mathcal{L}$ avec $A\cap(E_1\cup E_2)$, on obtient $\lambda^\star(A\cap(E_1\cup E_2)) = \lambda^\star(A\cap(E_1\cup E_2)\cap E_1) + \lambda^\star(A\cap(E_1\cup E_2)\cap E_1^c) = \lambda^\star(A\cap E_1) + \lambda^\star(A\cap E_2)$ (car $E_1\cap E_2 = \emptyset$).

Par récurrence sur n, on a donc aussi $\lambda^\star(A\cap(\cup_{i=1}^n E_i)) = \sum_{i=1}^n \lambda^\star(A\cap E_i)$, dès que $E_1,\ldots,E_{n-1} \in \mathcal{L}$, $A, E_n \subset \mathbb{R}$ et $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \ne j$, $i,j \in \{1,\ldots,n\}$.

En particulier, en prenant $A = \mathbb{R}$, on obtient l'additivité de $\lambda^\star$ sur $\mathcal{L}$, c'est-à-dire

$$\lambda^\star(\cup_{i=1}^n E_i) = \sum_{i=1}^n \lambda^\star(E_i),$$

si $E_1, \ldots, E_{n-1} \in \mathcal{L}$ et $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Remarque 2.9 Pour tout E, $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, on a, par $\sigma-$sous additivité de $\lambda^\star$, $\lambda^\star(A) \leq \lambda^\star(A \cap E) + \lambda^\star(A \cap E^c)$. Pour montrer que $E \in \mathcal{L}$ (définie dans la définition 2.19), il suffit donc de montrer que $\lambda^\star(A) \geq \lambda^\star(A \cap E) + \lambda^\star(A \cap E^c)$, pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Proposition 2.8 (Propriétés de $\mathcal{L}$) *$\mathcal{L}$ est une tribu sur $\mathbb{R}$ et $\lambda^\star_{|\mathcal{L}}$ est une mesure. $\mathcal{L}$ et $\lambda^\star$ sont définies dans les définitions 2.18 et 2.19.*

DÉMONSTRATION :
Il est immédiat que $\emptyset \in \mathcal{L}$ et que $\mathcal{L}$ est stable par "passage au complémentaire". On sait aussi que $\lambda^\star(\emptyset) = 0$. Il reste donc à démontrer que $\mathcal{L}$ est stable par union dénombrable et que la restriction de $\lambda^\star$ à $\mathcal{L}$ est une mesure. Ceci se fait en deux étapes décrites ci-après.

Etape 1. On montre, dans cette étape, que $\mathcal{L}$ est stable par union finie et que, si $n \geq 2$ et $(E_i)_{i=1,\ldots,n} \subset \mathcal{L}$ est t.q. $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$, alors on a :

$$\lambda^\star(A \cap (\cup_{i=1}^n E_i)) = \sum_{i=1}^n \lambda^\star(A \cap E_i), \ \forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}). \tag{2.15}$$

(Cette dernière propriété donne l'additivité de $\lambda^\star$ sur $\mathcal{L}$ en prenant $A = \mathbb{R}$, cette propriété d'additivité a déjà été signalée dans la remarque 2.8.)
Par une récurrence facile, il suffit de montrer que $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{L}$ si E_1, $E_2 \in \mathcal{L}$ et de montrer la propriété (2.15) pour $n = 2$. Soit donc E_1, $E_2 \in \mathcal{L}$. On pose $E = E_1 \cup E_2$. Pour montrer que $E \in \mathcal{L}$, il suffit de montrer (voir la remarque 2.9) que $\lambda^\star(A) \geq \lambda^\star(A \cap E) + \lambda^\star(A \cap E^c)$, pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Par $\sigma-$sous additivité de $\lambda^\star$ on a

$$\lambda^\star(A \cap (E_1 \cup E_2)) = \lambda^\star((A \cap E_1) \cup (A \cap E_1^c \cap E_2)) \leq \lambda^\star(A \cap E_1) + \lambda^\star(A \cap E_1^c \cap E_2),$$

et donc

$$\lambda^\star(A \cap (E_1 \cup E_2)) + \lambda^\star(A \cap (E_1 \cup E_2)^c) \leq \lambda^\star(A \cap E_1) + \lambda^\star(A \cap E_1^c \cap E_2) + \lambda^\star(A \cap E_1^c \cap E_2^c).$$

Comme $E_2 \in \mathcal{L}$, on a $\lambda^\star(A \cap E_1^c) = \lambda^\star(A \cap E_1^c \cap E_2) + \lambda^\star(A \cap E_1^c \cap E_2^c)$. Puis, comme $E_1 \in \mathcal{L}$, on a $\lambda^\star(A) = \lambda^\star(A \cap E_1) + \lambda^\star(A \cap E_1^c)$. On en déduit

$$\lambda^\star(A \cap (E_1 \cup E_2)) + \lambda^\star(A \cap (E_1 \cup E_2)^c) \leq \lambda^\star(A).$$

Ce qui prouve que $E \in \mathcal{L}$.
Pour montrer (2.15) avec $n = 2$ si E_1, $E_2 \in \mathcal{L}$ avec $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, il suffit de remarquer que (pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$) $\lambda^\star(A \cap (E_1 \cup E_2)) = \lambda^\star((A \cap E_1) \cup (A \cap E_2)) = \lambda^\star([(A \cap E_1) \cup (A \cap E_2)] \cap E_1) + \lambda^\star([(A \cap E_1) \cup (A \cap E_2)] \cap E_1^c) = \lambda^\star(A \cap E_1) + \lambda^\star(A \cap E_2)$. (On a utilisé le fait que $E_1 \in \mathcal{L}$.) Ceci termine l'étape 1.

Une conséquence de cette étape (et du fait que $\mathcal{L}$ est stable par passage au complémentaire) est que $\mathcal{L}$ est stable par intersection finie.

Etape 2. On montre, dans cette étape, que $\mathcal{L}$ est stable par union dénombrable et la restriction de $\lambda^\star$ à $\mathcal{L}$ est une mesure (ce qui termine la démonstration de la proposition 2.8).

Soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}$ et $E = \cup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. On veut montrer que $E \in \mathcal{L}$. On commence par remarquer que $E = \cup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ avec $F_0 = E_0$ et, par récurrence, pour $n \geq 1$, $F_n = E_n \setminus \cup_{p=0}^{n-1} F_p$. L'étape 1 nous donne que $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}$ et, comme $F_n \cap F_m = \emptyset$ si $n \neq m$, on peut utiliser (2.15). Pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, on a donc :

$$\lambda^\star(A) = \lambda^\star(A \cap (\cup_{p=0}^n F_p)) + \lambda^\star(A \cap (\cup_{p=0}^n F_p)^c) = \sum_{p=0}^{n} \lambda^\star(A \cap F_p) + \lambda^\star(A \cap (\cup_{p=0}^n F_p)^c). \qquad (2.16)$$

En utilisant le fait que $E^c \subset (\cup_{p=0}^n F_p)^c$ et la monotonie de $\lambda^\star$, on a $\lambda^\star(A \cap (\cup_{p=0}^n F_p)^c) \geq \lambda^\star(A \cap E^c)$. En faisant tendre n vers ∞ dans (2.16) et en utilisant la $\sigma-$sous additivité de $\lambda^\star$, on en déduit alors que $\lambda^\star(A) \geq \lambda^\star(A \cap E) + \lambda^\star(A \cap E^c)$. Ce qui prouve que $E \in \mathcal{L}$ (voir remarque 2.9) et donc que $\mathcal{L}$ est une tribu.

Il reste à montrer que $\lambda^\star$ est une mesure sur $\mathcal{L}$. Soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}$ t.q. $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$ et $E = \cup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Par monotonie de $\lambda^\star$ on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda^\star(\cup_{p=0}^n E_p) \leq \lambda^\star(E)$ et donc, en utilisant l'additivité de $\lambda^\star$ sur $\mathcal{L}$ (démontrée à l'étape 1, voir (2.15) avec $A = E$), $\sum_{p=0}^n \lambda^\star(E_p) \leq \lambda^\star(E)$. Ce qui donne, passant à limite quand $n \to \infty$, $\sum_{p=0}^\infty \lambda^\star(E_p) \leq \lambda^\star(E)$. D'autre part, $\lambda^\star(E) \leq \sum_{p=0}^\infty \lambda^\star(E_p)$, par $\sigma-$sous additivité de $\lambda^\star$. On a donc $\lambda^\star(E) = \sum_{p=0}^\infty \lambda^\star(E_p)$. Ce qui prouve que $\lambda^\star_{|\mathcal{L}}$ est une mesure.

■

Démonstration de la partie "existence" du théorème 2.2 :

Pour montrer la partie "existence" du théorème 2.2, il suffit, grâce aux propositions 2.7 et 2.8, de montrer que $\mathcal{L}$ (définie dans la définition 2.19) contient $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Pour cela, il suffit de montrer que $]a, \infty[\subset \mathcal{L}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ (car $\{]a, \infty[, a \in \mathbb{R}\}$ engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$). Soit donc $a \in \mathbb{R}$ et $E =]a, \infty[$. Pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, on veut montrer que $\lambda^\star(A) \geq \lambda^\star(A \cap E) + \lambda^\star(A \cap E^c)$. On peut supposer que $\lambda^\star(A) < \infty$ (sinon l'inégalité est immédiate).

Soit $\varepsilon > 0$. Par la définition de $\lambda^\star(A)$, il existe $(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_A$ t.q. $\lambda^\star(A) \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n) - \varepsilon$. Comme $A \cap E \subset (\cup_{n\in\mathbb{N}}(I_n \cap E))$ et $A \cap E^c \subset (\cup_{n\in\mathbb{N}}(I_n \cap E^c))$, la $\sigma-$sous additivité de $\lambda^\star$ donne

$$\lambda^\star(A \cap E) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^\star(I_n \cap E) \quad \text{et} \quad \lambda^\star(A \cap E^c) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^\star(I_n \cap E^c).$$

Comme $I_n \cap E$ et $I_n \cap E^c$ sont des intervalles, la fin de la démonstration de la proposition 2.7 donne $\lambda^\star(I_n \cap E) = \ell(I_n \cap E)$ et $\lambda^\star(I_n \cap E^c) = \ell(I_n \cap E^c)$. On en déduit $\lambda^\star(A\cap E) + \lambda^\star(A \cap E^c) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}}(\ell(I_n \cap E) + \ell(I_n \cap E^c)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n)$ (car $\ell(I_n \cap E) + \ell(I_n \cap E^c) = \ell(I_n)$) et donc $\lambda^\star(A \cap E) + \lambda^\star(A \cap E^c) \leq \lambda^\star(A) + \varepsilon$. Quand $\varepsilon \to 0$ on trouve l'inégalité recherchée. On a bien montré que $E \in \mathcal{L}$. ■

On va maintenant démontrer un théorème important dont on peut déduire, en particulier, la partie "unicité" du théorème 2.2.

Théorème 2.3 (Régularité d'une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, finie sur les compacts)
Soit m une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On suppose que m est finie sur les compacts, c'est à dire que $m(K) < \infty$ pour tout compact K de $\mathbb{R}$ (noter qu'un compact est nécessairement dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$). Alors, pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert O et un fermé F t.q. $F \subset A \subset O$ et $m(O \setminus F) \leq \varepsilon$. En particulier, on a donc, pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $m(A) = \inf\{m(O), O$ ouvert contenant $A\}$ et $m(A) = \sup\{m(K), K$ compact inclus dans $A\}$.

DÉMONSTRATION :
On appelle T l'ensemble des $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. pour tout $\varepsilon > 0$, il existe O ouvert et F fermé vérifiant $F \subset A \subset O$ et $m(O \backslash F) \le \varepsilon$. On va montrer que T est une tribu contenant $\mathcal{C} = \{]a, b[, -\infty < a < b < \infty\}$. Comme $\mathcal{C}$ engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, ceci donnera $T = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

On montre tout d'abord que $\mathcal{C} \subset T$. Soit $-\infty < a < b < \infty$ et $A =]a, b[$.

Pour tout $n \ge n_0$ avec n_0 t.q. $(2/n_0) < b - a$ on a :

$$[a + (1/n), b - (1/n)] \subset A \subset]a, b[.$$

Pour $n \ge n_0$, on pose $B_n =]a, a + (1/n)[\cup]b - (1/n), b[)$. La suite $(B_n)_{n \ge n_0}$ est une suite décroissante et $\cap_{n \ge n_0} B_n = \emptyset$. Comme m est finie sur les compacts, on a $m(B_n) \le m([a, b]) < \infty$. En utilisant la continuité décroissante de m (proposition 2.3), on a donc :

$$m(]a, b[\backslash [a + (1/n), b - (1/n)]) = m(]a, a + (1/n)[\cup]b - (1/n), b[) = m(B_n) \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$ en prenant n assez grand on a $m(B_n) \le \varepsilon$. En prenant $O = A$ et $F = [a + (1/n), b - (1/n)]$, on a bien O ouvert, F fermé, $F \subset A \subset O$ et $m(O \setminus F) \le \varepsilon$. Ceci prouve que $]a, b[\in T$.

On montre maintenant que T est une tribu. On remarque tout d'abord que $\emptyset \in T$ (il suffit de prendre $F = O = \emptyset$) et que T est stable par passage au complémentaire (car, si $F \subset A \subset O$, on a $O^c \subset A^c \subset F^c$ et $F^c \setminus O^c = O \setminus F$). Il reste à montrer que T est stable par union dénombrable.

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset T$ et $A = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. On veut montrer que $A \in T$. On va commencer par traiter le cas (simple) où $m(A) < \infty$ puis le cas (plus difficile) où $m(A) = \infty$.

Premier cas. On suppose que $m(A) < \infty$.

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe O_n ouvert et F_n fermé t.q. $F_n \subset A_n \subset O_n$ et $m(O_n \setminus F_n) \le (\varepsilon/2^n)$. On pose $O = \cup_{n \in \mathbb{N}} O_n$ et $\tilde{F} = \cup_{n \in \mathbb{N}} F_n$. On a $\tilde{F} \subset A \subset O$, $m(O \setminus \tilde{F}) \le 2\varepsilon$, car $(O \setminus \tilde{F}) \subset \cup_{n \in \mathbb{N}} (O_n \setminus F_n)$, et O ouvert mais $\tilde{F}$ n'est pas nécessairement fermé...

Cependant, puisque $m(A) < \infty$, on a aussi $m(\tilde{F}) < \infty$. Par continuité croissante de m (appliquée à la suite $(\cup_{p=0}^n F_p)_{n \in \mathbb{N}}$) on a $m(\cup_{p=0}^n F_p) \to m(\tilde{F})$, quand $n \to \infty$, d'où (puisque $m(\tilde{F}) < \infty$) $m(\tilde{F}) - m(\cup_{p=0}^n F_p) \to 0$. On prend alors $F = \cup_{p=0}^N F_p$ avec N assez grand pour que $m(\tilde{F} \setminus F) = m(\tilde{F}) - m(F) \le \varepsilon$. On a bien $F \subset A \subset O$, O ouvert, F fermé et, comme $(O \setminus F) = (O \setminus \tilde{F}) \cup (\tilde{F} \setminus F)$, on a $m(O \setminus F) = m(O \setminus \tilde{F}) + m(\tilde{F} \setminus F) \le 3\varepsilon$. Ceci prouve que $A \in T$.

Deuxième cas. On suppose maintenant que $m(A) = \infty$ (et le raisonnement précédent n'est plus correct si $m(\tilde{F}) = \infty$). On raisonne en 3 étapes :

1. Soit $p \in \mathbb{Z}$. On remarque d'abord que $A_n \cap [p, p + 1[\in T$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En effet, soit $n \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$. Il existe O ouvert et F fermé t.q. $F \subset A_n \subset O$ et $m(O \setminus F) \le \varepsilon$. Pour $k \in \mathbb{N}^\star$, on a donc :

$$F_k = F \cap [p, p + 1 - \frac{1}{k}] \subset A_n \cap [p, p + 1[\subset O_k = O \cap]p - \frac{1}{k}, p + 1[.$$

On a F_k fermé, O_k ouvert et $(O_k \setminus F_k) \subset (O \setminus F) \cup]p - \frac{1}{k}, p[\cup]p + 1 - \frac{1}{k}, p + 1[$. On en déduit :

$$m(O_k \setminus F_k) \le \varepsilon + m(]p - \frac{1}{k}, p[\cup]p + 1 - \frac{1}{k}, p + 1[).$$

Or, la continuité décroissante de m donne que $m((]p - \frac{1}{k}, p[\cup]p + 1 - \frac{1}{k}, p + 1[) \to 0$ quand $k \to \infty$ (on utilise ici le fait que $m([p - 1, p + 1]) < \infty$ car m est finie sur les compacts). Il existe donc $k \in \mathbb{N}^\star$ t.q. $m(O_k \setminus F_k) \le 2\varepsilon$, ce qui donne bien que $A_n \cap [p, p + 1[\in T$.

2. Comme $m(A \cap [p,p+1[) < \infty$, on peut maintenant utiliser le premier cas avec $A \cap [p,p+1[= \cup_{n\in\mathbb{N}}(A_n \cap [p,p+1[)$. Il donne que $A \cap [p,p+1[\in T$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$.

3. On montre enfin que $A \in T$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, il existe un ouvert O_p et un fermé G_p t.q. $G_p \subset A \cap [p,p+1[\subset O_p$ et $m(O_p \setminus G_p) \le \varepsilon/(2^{|p|})$. On prend $O = \cup_{p\in\mathbb{Z}} O_p$ et $F = \cup_{p\in\mathbb{Z}} G_p$. On obtient $F \subset A \subset O$, $m(O \setminus F) \le 3\varepsilon$ et O est ouvert. Il reste à montrer que F est fermé.

   Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F$ t.q. $x_n \to x$ (dans $\mathbb{R}$) quand $n \to \infty$. On veut montrer que $x \in F$. Il existe $p \in \mathbb{Z}$ t.q. $x \in]p-1,p+1[$. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $x_n \in]p-1,p+1[$ pour tout $n \ge n_0$. Comme $x_n \in \cup_{q\in\mathbb{Z}} G_q$ et que $G_q \subset [q,q+1[$ pour tout q, on a donc $x_n \in G_p \cup G_{p-1}$ pour tout $n \ge n_0$. Comme $G_p \cup G_{p-1}$ est fermé, on en déduit que $x \in G_p \cup G_{p-1} \subset F$ et donc que F est fermé.

   Ceci montre bien que $A \in T$ et termine la démonstration du fait que T est une tribu. Comme cela a déjà été dit, on en déduit que $T = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

On a donc bien montré que pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe O ouvert et F fermé vérifiant $F \subset A \subset O$ et $m(O \setminus F) \le \varepsilon$.

On montre maintenant que $m(A) = \inf\{m(O),\ O$ ouvert contenant $A\}$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On remarque d'abord que la monotonie d'une mesure donne $m(A) \le \inf\{m(O),\ O$ ouvert contenant $A\}$. Puis, l'inégalité inverse est immédiate si $m(A) = \infty$. Enfin, si $m(A) < \infty$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe O ouvert et F fermé vérifiant $F \subset A \subset O$ et $m(O \setminus F) \le \varepsilon$. On a donc $O \setminus A \subset O \setminus F$ et donc (par monotonie de m) $m(O \setminus A) \le \varepsilon$ et $m(O) = m(A) + m(O \setminus A) \le m(A) + \varepsilon$. On a donc trouvé un ouvert O contenant A t.q. $m(O) - \varepsilon \le m(A)$. On en déduit que $\inf\{m(O),\ O$ ouvert contenant $A\} \le m(A)$ et finalement que $m(A) = \inf\{m(O),\ O$ ouvert contenant $A\}$.

De manière semblable, on montre aussi que $m(A) = \sup\{m(K),\ K$ compact inclus dans $A\}$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. En effet, soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ici aussi, on commence par remarquer que la monotonie d'une mesure donne $m(A) \ge \sup\{m(K),\ K$ compact inclus dans $A\}$. On montre maintenant l'inégalité inverse. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe F fermé t.q. $F \subset A$ et $m(A \setminus F) \le \varepsilon$. Si $m(A) = \infty$, on en déduit que $m(F) = \infty$ et donc que $m(K_n) \uparrow \infty$ quand $n \to \infty$ (par continuité croissante de m) avec $K_n = F \cap [-n,n]$. Comme K_n est compact pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc $\sup\{m(K),\ K$ compact inclus dans $A\} = \infty = m(A)$. Si $m(A) < \infty$, on a $m(A) \ge m(F) \ge m(A) - \varepsilon$ et donc, pour n assez grand, $m(K_n) \ge m(F) - \varepsilon \ge m(A) - 2\varepsilon$ (toujours par continuité croissante de m) avec $K_n = F \cap [-n,n]$. Comme K_n est compact pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que ε est arbitraire, on en déduit que $\sup\{m(K),\ K$ compact inclus dans $A\} \ge m(A)$ et donc, finalement, $m(A) = \sup\{m(K),\ K$ compact inclus dans $A\}$. ∎

Pour démontrer la partie "unicité" du théorème 2.2 avec le théorème 2.3 on aura aussi besoin du petit lemme suivant (plus précis que le lemme 2.1 car dans le lemme 2.1 il n'est pas demandé que les ouverts soient disjoints).

Lemme 2.4 (Ouverts de $\mathbb{R}$) *Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$, alors O est une union dénombrable d'intervalles ouverts disjoints 2 à 2, c'est à dire qu'il existe $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.q. I_n est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \cap I_m = \emptyset$ si $n \ne m$ et $O = \cup_{n\in\mathbb{N}} I_n$.*

Démonstration :
Pour $x \in O$ on pose $O_x = \{y \in O;\ I(x,y) \subset O\}$, avec $I(x,y) = \{tx + (1-t)y,\ t \in [0,1]\}$ (on a donc $I(x,y) = [x,y]$ ou $[y,x]$). On remarque que $O = \cup_{x\in O} O_x$ et que O_x est, pour tout $x \in O$, un intervalle ouvert (c'est l'intervalle $]\inf O_x, \sup O_x[$, avec $\inf O_x,\ \sup O_x \in \overline{\mathbb{R}}$). Il est aussi facile de voir que, pour

tout x, $y \in O$, $O_x \cap O_y \neq \emptyset$ implique que $O_x = O_y$. On peut trouver $A \subset O$ t.q. $O = \cup_{x\in A} O_x$ et $O_x \cap O_y = \emptyset$ si x, $y \in A$, $x \neq y$. Comme $O_x \neq \emptyset$ pour tout $x \in A$, on peut donc construire une application de A dans $\mathbb{Q}$ en choisissant pour chaque $x \in A$ un rationnel de O_x (ce qui est possible car tout ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contient un rationnel). Cette application est injective car $O_x \cap O_y = \emptyset$ si x, $y \in A$, $x \neq y$. l'ensemble A est donc au plus dénombrable, ce qui termine la démonstration du lemme.

■

Remarque 2.10 Dans la démonstration du lemme 2.4, O_x est la "composante connexe" de x. Le lemme 2.4 consiste donc à remarquer qu'un ouvert est réunion de ses composantes connexes, que celles ci sont disjointes deux à deux et sont des ouverts connexes et donc des intervalles ouverts (car un connexe dans $\mathbb{R}$ est nécessairement un intervalle).

Démonstration de la partie "unicité" du théorème 2.2 :

On a construit une mesure, notée λ, sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $\lambda(]a,b[) = b - a$ pour tout a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Supposons que m soit aussi une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $m(]a,b[) = b - a$ pour tout a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$. On veut montrer que $\lambda = m$ (sur tout $\mathcal{B}(\mathbb{R})$). Nous le montrons ici avec deux méthodes différentes, utilisant le théorème 2.3 ou la proposition 2.5.

Première méthode, avec le théorème 2.3. En utilisant le fait que tout ouvert est réunion dénombrable d'intervalles ouverts disjoints deux à deux (lemme 2.4) et les propriétés de $\sigma-$additivité de λ et de m, on montre que $\lambda(O) = m(O)$ pour tout ouvert O de $\mathbb{R}$. Puis, en utilisant la dernière assertion du théorème de régularité (qui s'applique pour m et pour λ, car m et λ sont des mesures sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, finies sur les compacts), on obtient $\lambda(A) = m(A)$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, i.e. $m = \lambda$.

Deuxième méthode, avec la proposition 2.5. On utilise la proposition 2.5 avec $(E,T) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et $\mathcal{C} = \{]a,b],\ a,b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$. On sait que $\mathcal{C}$ engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, et il est clair que $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie. On prend maintenant $F_n =]n, n+1]$ pour $n \in \mathbb{Z}$. La famille $(F_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est donc une famille dénombrable d'éléments de $\mathcal{C}$, disjoints deux à deux et t.q. $\mathbb{R} = \cup_{n\in\mathbb{Z}} F_n$. Pour $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, on a, par continuité décroissante de m, $m(]a,b]) = \lim_{p\to\infty} m(]a, b + \frac{1}{p}[= \lim_{p\to\infty} b - a + \frac{1}{p} = b - a = \lambda(]a,b])$. On a donc $m = \lambda$ sur $\mathcal{C}$ (et $m(F_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$). On peut donc appliquer la proposition 2.5. Elle donne $\lambda = m$ sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. ■

Remarque 2.11 Nous avons vu que la mesure de Lebesgue, notée λ, était régulière. Ceci ne donne pas, pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, l'égalité de la mesure de A avec la mesure de son intérieur ou de son adhérence. Il suffit, pour s'en convaincre, de prendre, par exemple, $A = \mathbb{Q}$. On a alors $\lambda(A) = 0$ (voir la remarque 2.13) et $\lambda(\overline{A}) = \infty$.

Remarque 2.12 Nous avons donc, dans cette section, construit une application, notée $\lambda^\star$, de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Cette application n'est pas une mesure mais nous avons montré que la restriction de $\lambda^\star$ à la tribu de Lebesgue, notée $\mathcal{L}$, était une mesure. Puis, nous avons démontré que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}$ et obtenu ainsi, en prenant la restriction de $\lambda^\star$ à $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la mesure que nous cherchions. On peut se demander toutefois quelle est la différence entre $\mathcal{L}$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Du point de vue des cardinaux, cette différence est considérable car $\mathrm{card}(\mathcal{L}) = \mathrm{card}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$ alors que $\mathrm{card}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) = \mathrm{card}(\mathbb{R})$ mais du point de vue de l'intégration, la différence est dérisoire, comme nous pourrons le voir avec l'exercice 4.18 (plus complet que l'exercice 2.28) car l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \lambda_{|\mathcal{L}})$ est simplement le complété de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda_{|\mathcal{B}(\mathbb{R})})$.

On donne maintenant une propriété, spécifique à la mesure de Lebesgue, qui est à la base de toutes les formules de changement de variables pour l'intégrale de Lebesgue.

Proposition 2.9 (Invariance par translation "généralisée") *Soit $\alpha \in \mathbb{R}^\star$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Pour $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, on note $\alpha A + \beta = \{\alpha x + \beta, \, x \in A\}$. On a alors :*

1. *$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ implique $\alpha A + \beta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,*
2. *$\lambda(\alpha A + \beta) = |\alpha|\lambda(A)$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

Pour $\alpha = 1$, cette propriété s'appelle "invariance par translation de λ".

DÉMONSTRATION :
Pour la première partie de la proposition, on pose $T = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}); \, \alpha A+\beta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. On montre facilement que T est une tribu contenant les intervalles ouverts, on en déduit que $T = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Pour la deuxième partie, on pose, pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $m_1(A) = \lambda(\alpha A + \beta)$ et $m_2(A) = |\alpha|\lambda(A)$. Il est facile de voir que m_1 et m_2 sont des mesures sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, finies sur les bornés, et qu'elles sont égales sur l'ensemble des intervalles ouverts. On raisonne alors comme dans la démonstration de la partie "unicité" du théorème 2.2, en utilisant le théorème 2.3 ou la proposition 2.5. Par exemple, en utilisant le lemme 2.4 et les propriétés de $\sigma-$additivité de m_1 et de m_2, on montre que $m_1(O) = m_2(O)$ pour tout ouvert O de $\mathbb{R}$. Puis, en utilisant la dernière assertion du théorème de régularité (qui s'applique pour m_1 et pour m_2), on obtient $m_1(A) = m_2(A)$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On a donc $\lambda(\alpha A + \beta) = |\alpha|\lambda(A)$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

■

Remarque 2.13 La mesure de Lebesgue est diffuse (c'est-à-dire que $\lambda(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). Donc, si D est une partie dénombrable de $\mathbb{R}$, on a $\lambda(D) = 0$. Ainsi, $\lambda(\mathbb{N}) = \lambda(\mathbb{Z}) = \lambda(\mathbb{Q}) = 0$. La réciproque est fausse. On construit par exemple un ensemble (dit "ensemble de Cantor", K, qui est une partie compacte non dénombrable de [0,1], vérifiant $\lambda(K) = 0$, voir exercice 2.27).

Définition 2.20 (Mesure de Lebesgue sur un borélien de $\mathbb{R}$) *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ (ou, plus généralement, $I \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$) et $T = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}); \, B \subset I\}$ (on peut montrer que $T = \mathcal{B}(I)$, où I est muni de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}$, voir l'exercice 2.3 page 41). Il est facile de voir que T est une tribu sur I et que la restriction de λ (définie dans le théorème 2.2) à T est une mesure sur T, donc sur les boréliens de I (voir 2.15 page 44). On note toujours par λ cette mesure.*

2.6 Indépendance et probabilité conditionnelle

2.6.1 Probabilité conditionnelle

Commençons par expliquer la notion de probabilité conditionnelle sur l'exemple du lancer de dé. On se place dans le modèle équiprobable: soient $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $T = \mathcal{P}(E)$ et p la probabilité définie par $p(\{x\}) = \frac{1}{6}$, $\forall x \in E$. La probabilité de l'événement A "obtenir 6" est $\frac{1}{6}$. Supposons maintenant que l'on veuille évaluer la chance d'obtenir un 6, alors que l'on sait déjà que le résultat est pair (événement $B = \{2, 4, 6\}$). Intuitivement, on a envie de dire que la "chance" d'obtenir un 6 est alors $\frac{1}{\mathrm{card} B} = \frac{1}{3}$.

Définition 2.21 (Probabilité conditionnelle) *Soient (E, T, p) un espace probabilisé et $A, B \in T$.*

Si $p(B) \neq 0$, la probabilité conditionnelle de A par rapport à B (on dit aussi probabilité de A par rapport à B), notée $p(A|B)$, est définie par $p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$.

Si $p(B) = 0$, la probabilité conditionnelle de A par rapport à B, notée $p(A|B)$, n'est pas définie. C'est un nombre arbitraire entre 0 et 1.

De cette définition on déduit la formule de Bayes: soient (E, T, p) un espace probabilisé et $A, B \in T$, alors:

$$p(B)p(A|B) = p(A \cap B) \tag{2.17}$$

Remarque 2.14 Soient (E, T, p) un espace probabilisé et A un événement tel que $p(A) \neq 0$. Alors l'application $p_A : T \to [0, 1]$ définie par:

$$p_A(B) = p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}, \forall B \in T \tag{2.18}$$

est une probabilité sur T. On dit que "la masse de p_A est concentrée en A" : on a en effet : $p_A(B) = 0$, pour tout $B \in T$ t.q. $A \cap B = \emptyset$. On a aussi $p_A(A) = 1$.

Définition 2.22 *Soit (E, T, p) un espace probabilisé, on appelle système de constituants une famille $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ d'ensembles disjoints deux à deux t.q. $\cup_{n\in\mathbb{N}} C_n = E$.*

On a comme corollaire immédiat de la relation 2.17:

Proposition 2.10 *Soient (E, T, p) un espace probabilisé, $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ un système de constituants de probabilités non nulles et $A \in T$, alors:*

$$p(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} p(C_n)p(A|C_n). \tag{2.19}$$

Dans le cas où $p(B) = p(B|A)$, on a envie de dire que A n'influe en rien sur B ; on a dans ce cas: $p(A)p(B) = p(A \cap B)$.

2.6.2 Evènements indépendants, tribus indépendantes

Définition 2.23 (Indépendance de deux évènements) *Soient (E, T, p) on dit que deux événements A et B sont (stochastiquement) indépendants si $p(A)p(B) = p(A \cap B)$.*

Remarque 2.15 Attention: il est clair que, lors de la modélisation d'un phénomène aléatoire, si on a des évènements indépendants *a priori*, i.e. tels que la réalisation de l'un n'a aucune influence sur la réalisation de l'autre, on choisira, pour le modèle probabiliste, une probabilité qui respecte l'indépendance: on dit que l'indépendance *a priori* implique l'indépendance stochastique. Cependant, la notion d'indépendance est liée à la notion de probabilité; ainsi, pour une probabilité p donnée, deux évènements peuvent être indépendants alors qu'ils ne paraissent pas intuitivement indépendants.

Exemple 2.3 Prenons comme exemple le lancer simultané de deux dés: *a priori*, il parait raisonnable de supposer que les résultats obtenus pour chacun des deux dés n'influent pas l'un sur l'autre, et on va donc chercher une probabilité qui respecte cette indépendance. L'univers des possibles est ici $E = \{(i, j), 1 \leq i \leq 6, 1 \leq j \leq 6\}$. Les résultats de chaque lancer simultané des deux dés étant équiprobables, on a donc envie de définir, pour $A \in \mathcal{P}(E)$, $p(A) = \frac{\text{card}A}{36}$. Voyons maintenant si deux évènements *a priori* indépendants sont indépendants pour cette probabilité. Considérons par exemple l'évènement A: "obtenir un double 6"; on peut écrire: $A = B \cap C$, où B est l'évènement "obtenir un 6 sur le premier dé" et C l'évènement "obtenir un 6 sur le deuxième dé". On doit donc vérifier que: $p(A) = p(B)p(C)$. Or $B = \{(6, j), 1 \leq j \leq 6\}$ et $C = \{(i, 6), 1 \leq i \leq 6\}$. On a donc $p(B) = p(C) = \frac{1}{6}$, et on a bien $p(A) = p(B)p(C)(= \frac{1}{36})$.

On généralise la notion d'indépendance de deux évènements en introduisant la notion d'indépendance de tribus.

Définition 2.24 (Indépendance des tribus) *Soit* (E, T, p) *un espace probabilisé et* $(T_k)_{k\in\mathbb{N}^\star}$ *une suite de tribus incluses dans* T.

1. *Soit* $N > 1$. *On dit que les* N *tribus* T_k, $k = 1, \ldots, N$, *sont indépendantes (on dit aussi que la suite* $T_1, \ldots, T_N$ *est indépendante) si pour toute famille* $(A_1, \ldots, A_N)$ *d'événements tels que* $A_k \in T_k$ *pour* $k = 1, \ldots, N$ *on a:* $p(\cap_{k=1}^N A_k) = p(A_1)p(A_2)\ldots p(A_N)$.
2. *On dit que la suite* $(T_k)_{k\in\mathbb{N}^\star}$ *est indépendante (ou que les tribus* $T_1, \ldots, T_n, \ldots$ *sont indépendantes) si„ pour tout* $N \geq 1$, *les* N *tribus* T_k, $k = 1, \ldots, N$, *sont indépendantes.*

On peut facilement remarquer que si A et B sont deux évènements d'un espace probabilisé (E, T, p), ils sont indépendants (au sens de la définition 2.23) si et seulement si les tribus $T_A = \{\emptyset, E, A, A^c\}$ et $T_B = \{\emptyset, E, B, B^c\}$ sont indépendantes (voir l'exercice 3.16). On en déduit la généralisation de la définition d'indépendance à plusieurs évènements:

Définition 2.25 (Evénements indépendants) *Soient* (E, T, p) *un espace probabilisé et* $(A_k)_{k=1,\ldots,N}$ *des événements, on dit que les* N *événements* $(A_k)_{k=1,\ldots,N}$ *sont indépendants si les* N *tribus engendrées par les événements* A_k, $k = 1\ldots, N$ *(c'est-à-dire les* N *tribus définies par* $T_k = \{A_k, A_k^c, E, \emptyset\}$ *pour* $k = 1\ldots, N$*) sont indépendantes.*

Sous les hypothèses de la définition précédente, on peut remarquer que les événements $A_1, \ldots, A_N$ sont indépendants (c'est-à-dire que les tribus engendrées par $A_1, \ldots, A_N$ sont indépendantes) si et seulement si $P(\cap_{i\in I} A_i) = \prod_{i\in I} P(A_i)$ pour tout $I \subset \{1, \ldots, N\}$), voir l'exercice 3.16. Nous terminons ce paragraphe par une proposition sur les tribus indépendantes :

Proposition 2.11 *Soit* (E, T, p) *un espace probabilisé.*

1. *Soit* $N > 1$ *et* $(T_k)_{k\in\{0,\ldots N\}}$ *une suite indépendante de tribus incluses dans* T. *La tribu* T_0 *est alors indépendante de la tribu engendrée par les tribus* $T_1, \ldots, T_N$.
2. *(Généralisation) Soit* $N > 3$, $q > 1$, $n_0, \ldots, n_q$ *t.q.* $n_0 = 0$, $n_i < n_{i+1}$ *(pour* $i = 0, \ldots, q-1$*),* $n_q = N$ *et* $(T_k)_{k\in\{1,\ldots N\}}$ *une suite indépendante de tribus incluses dans* T. *Pour* $i = 1, \ldots, q$, *on note* τ_i *la tribu engendrée par les tribus* T_n *pour* $n = n_{i-1}, \ldots, n_i$. *Alors, les tribus* $\tau_1, \ldots, \tau_q$ *sont indépendantes.*

Démonstration : On montre tout d'abord le premier item de la proposition. On note S la tribu engendrée par les tribus $T_1, \ldots, T_N$. Comme S est la plus petite tribu contenant les tribus T_k ($k = 1, \ldots, N$), elle est incluse dans T. On veut montrer que T_0 et S sont indépendantes, c'est-à-dire que $p(A \cap B) = p(A)p(B)$ pour tout $A \in T_0$ et tout $B \in S$. Pour le montrer, on va utiliser la proposition 2.5 (donnant l'unicité d'une mesure). Soit $A \in T_0$, on définit les mesures m et μ sur T en posant :

$$m(B) = p(A \cap B),\ \mu(B) = p(A)p(B), \text{ pour } B \in T,$$

et on pose :

$$\mathcal{C} = \{\cap_{k=1}^N A_k,\ A_k \in T_k \text{ pour } k = 1, \ldots, N\}.$$

Pour $B \in \mathcal{C}$, on a $B = \cap_{k=1}^N A_k$ avec $A_k \in T_k$ avec $k = 1, \ldots, N$. On a donc, en utilisant l'indépendance des tribus $T_0, T_1, \ldots, T_N$, $m(B) = p(A \cap B) = p(A)p(A_1)p(A_2)\ldots p(A_N) = p(A)p(B) = \mu(B)$. On a donc

$m = \mu$ sur $\mathcal{C}$. Comme $\mathcal{C}$ est stable par intersection et que $E \in \mathcal{C}$, la proposition 2.5 nous donne $m = \mu$ sur la tribu engendrée par $\mathcal{C}$. Comme cette tribu contient toutes les tribus T_k ($k = 1, \ldots, N$), elle contient aussi S (en fait, elle est égale à S). On a donc bien montré que $p(A \cap B) = p(A)p(B)$ pour tout $B \in S$ et pour tout $A \in T_0$.

Pour montrer le deuxième item (qui est une généralisation du premier), il suffit de faire une récurrence finie de q étapes et d'utiliser la technique précédente. Par exemple, pour $q = 2$ la technique précédente donne :

$$p((\cap_{k=1}^{n_1} A_k) \cap B_2) = p(\cap_{k=1}^{n_1} A_k)p(B_2),$$

pour $A_k \in T_k$, $k = 1, \ldots, n_1$ et $B_2 \in \tau_2$. Puis en reprenant la technique précénete, on montre $p(B_1 \cap B_2) = p(B_1)p(B_2)$ pour $B_1 \in \tau_1$ et $B_2 \in \tau_2$. Ce qui donne bien l'indépendance de τ_1 et τ_2. ■

2.6.3 Probabilités sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

Une probabilité est définie sur un espace probabilisable quelconque. Très souvent, on ne connait du problème aléatoire que l'on cherche à modéliser ni l'ensemble E ("univers des possibles") ni la tribu T (ensemble des évènements) ni la probabilité p. Par contre, on connait une "image" de la probabilité p par une application (dite mesurable, voir chapitre suivant) X de E dans $\mathbb{R}$. On travaille alors avec l'espace beaucoup plus sympathique (car mieux défini...) $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), p_X)$, ou p_X est une probabilité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, que les probabilistes appellent souvent "loi de probabilité" (elle dépend de p et de l'application X).
Nous donnons maintenant quelques notions propres aux lois de probabilités (ou probabilités définies sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$), ainsi que quelques exemples concrets utilisés dans la représentation de phénomènes aléatoires.

Définition 2.26 (Fonction de répartition) *Soit p une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On appelle fonction de répartition de la probabilité p la fonction F, définie de $\mathbb{R}$ dans $[0, 1]$ par: $F(t) = p(]-\infty, t])$. Cette fonction est croissante et continue à droite.*

Démonstration : Utiliser les propriétés de monotonie et de continuité croissante de la mesure. ■

Théorème 2.4 *Soit F une fonction croissante et continue à droite t.q.:*
$\lim_{t \to -\infty} F(t) = 0$ *et* $\lim_{t \to +\infty} F(t) = 1$.
Alors, il existe une unique probabilité p sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ telle que F soit la fonction de répartition de p.

Plus généralement, on a le théorème suivant pour les mesures:

Théorème 2.5 (Lebesgue-Stieltjes)

1. *Pour toute mesure m sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, finie sur les compacts (on dit "localement finie"), et pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(t) = m(]a, t])$ si $t \geq a$ et $F(t) = -m(]t, a])$ si $t \leq a$ est continue à droite et croissante.*

2. *Réciproquement, pour toute fonction F de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, croissante et continue à droite, il existe une unique mesure m sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, t.q. $a \leq b$, on ait $m(]a, b]) = F(b) - F(a)$. Cette mesure s'appelle la mesure de Lebesgue-Stieltjes associée à F.*

Pour démontrer ce théorème, on introduit $p^\star$, application définie de l'ensemble des intervalles de $\mathbb{R}$ de la forme $]a,b]$ dans $\mathbb{R}$ par: $p^\star(]a,b]) = F(b) - F(a)$. La démonstration du fait qu'il existe un prolongement unique de cette application en une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est très voisine à celle du théorème de Carathéodory (théorème 2.2).

Donnons, pour clore ce chapitre, quelques exemples de lois de probabilités et leurs fonctions de répartition associées.

Définition 2.27 (Loi discrète) *Soit p une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On dit que p est discrète si elle est purement atomique (l'ensemble de ses atomes $\mathcal{A}$ est dénombrable, voir exercice 2.12). La probabilité p s'écrit alors $p = \sum_{a\in\mathcal{A}} p(\{a\})\delta_a$, où δ_a désigne la mesure de Dirac en a. La fonction de répartition de la probabilité p est définie par: $F(t) = \sum_{a\in\mathcal{A}, a\le t} p(\{a\})$*

Exemple 2.4 (Exemples de lois discrètes) Donnons quelques exemples de probabilités discrètes, p, sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et de $\mathcal{A}$ l'ensemble (dénombrable) de leurs atomes.

- La loi uniforme : $N \in \mathbb{N}^\star$, $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_N\}$, $p(\{a_i\}) = \frac{1}{N}$
- La loi binômiale : $N \in \mathbb{N}^\star$, $\mathcal{A} = \{1, \ldots, N\}$, $P \in]0,1[$, $p(\{k\}) = C_N^k P^k (1-P)^{N-k}$
- La loi de Pascal : $\mathcal{A} = \mathbb{N}$, $P \in]0,1[$, $p(\{k\}) = P(1-P)^{k-1}$
- La loi de Poisson à paramètre λ : $\mathcal{A} = \mathbb{N}$, $\lambda > 0$, $p(\{k\}) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$

Définition 2.28 (Loi continue) *Soit p une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On dit que p est continue si sa fonction de répartition est continue.*

Exemple 2.5 (Exemple de loi continue) La plupart des exemples de probabilités continues provient de ce qu'on appelle "les mesures de densité" par rapport à la mesure de Lebesgue, pour lesquelles on a besoin de la notion d'intégrale de Lebesgue qu'on n'a pas encore introduite. On peut toutefois déjà citer l'exemple de la loi uniforme sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$: Soient $-\infty < a < b < +\infty$; pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on pose $p(A) = \frac{\lambda(A\cap[a,b])}{b-a}$. On vérifie facilement que p est une probabilité appelée probabilité uniforme sur $[a,b]$.

2.7 Exercices

2.7.1 Tribus

Exercice 2.1 (Caractérisation d'une tribu) *Corrigé 9 page 280*
Soit E un ensemble.

1. Soit T une partie de $\mathcal{P}(E)$ stable par union dénombrable, stable par passage au complémentaire et t.q. $\emptyset \in T$. Montrer que T est une tribu, c'est-à-dire qu'elle vérifie aussi $E \in T$ et qu'elle est stable par intersection dénombrable.
2. L'ensemble des parties finies de E est-il une tribu ?

Exercice 2.2 (Tribu engendrée) *Corrigé 10 page 280*
Soit E un ensemble.

1. Montrer qu'une intersection quelconque de tribus sur E est une tribu sur E.

2. Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$. On note $T_{\mathcal{A}}$ l'intersection de toutes les tribus sur E contenant $\mathcal{A}$ (une partie de E appartient donc à $T_{\mathcal{A}}$ si et seulement si elle appartient à toutes les tribus contenant $\mathcal{A}$, on remarquera qu'il y a toujours au moins une tribu contenant $\mathcal{A}$, c'est la tribu $\mathcal{P}(E)$). Montrer que $T_{\mathcal{A}}$ est la plus petite des tribus contenant $\mathcal{A}$ (c'est la tribu engendrée par $\mathcal{A}$).

3. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(E)$ et $T_{\mathcal{A}}$, $T_{\mathcal{B}}$ les tribus engendrées par $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. Montrer que si $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ alors $T_{\mathcal{A}} \subset T_{\mathcal{B}}$.

Exercice 2.3 (Exemples de Tribus) *Corrigé 11 page 281*

1. Tribu trace

   (a) Soit $\mathcal{T}$ une tribu sur un ensemble E et $F \subset E$. Montrer que $\mathcal{T}_F = \{A \cap F;\ A \in \mathcal{T}\}$ est une tribu sur F (tribu trace de $\mathcal{T}$ sur F).

   (b) Si E est un espace topologique et $\mathcal{T} = \mathcal{B}(E)$ ($\mathcal{B}(E)$ est la tribu borélienne de E), montrer que la tribu trace sur F, notée T_F, est la tribu engendrée par la topologie trace sur F (tribu borélienne de F, notée $\mathcal{B}(F)$). [Montrer que $\mathcal{B}(F) \subset T_F$. Pour montrer que $T_F \subset \mathcal{B}(F)$, considérer $\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{P}(E);\ A \cap F \in \mathcal{B}(F)\}$ et montrer que $\mathcal{C}$ est une tribu (sur E) contenant les ouverts de E.] Si F est un borélien de E, montrer que T_F est égale à l'ensemble des boréliens de E contenus dans F.

2. Soit E un ensemble infini et $S = \{\{x\}, x \in E\}$. Déterminer la tribu engendrée par S (distinguer les cas E dénombrable et non dénombrable).

3. Soit E un ensemble et f une application de E dans lui-même. Montrer que l'ensemble des parties A de E t.q. $f^{-1}(f(A)) = A$ est une tribu sur E.

4. Soit E un ensemble et A un sous-ensemble de E. Trouver la tribu engendrée par $\mathcal{C} = \{B \subset E \mid A \subset B\}$. A quelle condition obtient-on $\mathcal{P}(E)$ ou la tribu grossière ?

5. Soit E un ensemble et f une bijection de E. Montrer que l'ensemble des parties A de E t.q. ($x \in A \iff f(x) \in A$ et $f^{-1}(x) \in A$) est une tribu sur E.

6. Dans $\mathbb{R}^2$, soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des parties de $\mathbb{R}^2$ contenues dans une réunion dénombrable de droites. Décrire la tribu engendrée par $\mathcal{C}$. Est-ce une sous-tribu de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$?

Exercice 2.4 (Tribus images) *Corrigé 12 page 282*
Soient E et F des ensembles. Pour $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ (resp. $\mathcal{P}(F)$) on note $T(\mathcal{A})$ la tribu de E (resp. F) engendrée par $\mathcal{A}$.
Soit $f : E \to F$ une application.

1. Montrer que si $\mathcal{T}'$ est une tribu sur F, alors $f^{-1}(\mathcal{T}') = \{f^{-1}(B);\ B \in \mathcal{T}'\}$ est une tribu sur E (tribu image réciproque).

2. Montrer que si $\mathcal{T}$ est une tribu sur E, alors $\mathcal{T}' = \{B \subset F;\ f^{-1}(B) \in \mathcal{T}\}$ est une tribu sur F (tribu image directe).

3. Montrer que pour tout ensemble $\mathcal{C}$ de parties de F on a : $T(f^{-1}(\mathcal{C})) = f^{-1}(T(\mathcal{C}))$. [*Montrer que* $T(f^{-1}(\mathcal{C})) \subset f^{-1}(T(\mathcal{C}))$. *Puis, pour montrer que* $f^{-1}(T(\mathcal{C})) \subset T(f^{-1}(\mathcal{C}))$, *montrer que* $T = \{G \subset F;\ f^{-1}(G) \in T(f^{-1}(\mathcal{C}))\}$ *est une tribu contenant* $\mathcal{C}$.]

Exercice 2.5 (Tribu borélienne de $\mathbb{R}^2$) *Corrigé 13 page 283*
On note T la tribu (sur $\mathbb{R}^2$) engendrée par $\{A \times B;\ A,\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. On va montrer ici que $T = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

1. Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}^2$ est réunion au plus dénombrable de produits d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. [S'inspirer d'une démonstration analogue faite pour $\mathbb{R}$ au lieu de $\mathbb{R}^2$.] En déduire que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \subset T$.
2. Soit A un ouvert de $\mathbb{R}$ et $T_1 = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R});\ A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\}$. Montrer que T_1 est une tribu (sur $\mathbb{R}$) contenant les ouverts (de $\mathbb{R}$). En déduire que $T_1 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
3. Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $T_2 = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R});\ A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\}$. Montrer que $T_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
4. Montrer que $T \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ (et donc que $T = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$).

Exercice 2.6 (Tribu borélienne sur $\mathbb{R}^N$) *Corrigé 14 page 285*

1. Montrer que la tribu borélienne de $\mathbb{R}^N$ est égale à celle engendrée par l'ensemble de toutes les boules ouvertes de $\mathbb{R}^N$. [On pourra montrer d'abord que tout ouvert de $\mathbb{R}^N$ est réunion dénombrable de boules ouvertes de $\mathbb{R}^N$.]
2. Montrer que la tribu borélienne de $\mathbb{R}^N$ est égale à celle engendrée par l'ensemble des produits d'intervalles ouverts à extrémités rationnelles.
3. Montrer que la tribu borélienne de $\mathbb{R}$ est engendrée par les intervalles $]a, b]$ où $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.
4. Soit S un sous ensemble dense de $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ est engendrée par la classe des boules ouvertes (ou bien fermées) telles que les coordonnées du centre et le rayon appartiennent S.

Exercice 2.7 (Une tribu infinie est non dénombrable) $(\star\star)$
Montrer que toute tribu infinie T sur un ensemble (infini) E est non dénombrable. [Si T est dénombrable, on pourra introduire, pour tout élément $x \in E$, l'ensemble $A(x)$ intersection de tous les éléments de T contenant x. Puis, montrer à l'aide de ces ensembles qu'il existe une injection de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ dans T.]

Exercice 2.8 (Algèbre) *Corrigé 15 page 286*
Soit E un ensemble et $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$.

1. Montrer que $\mathcal{A}$ est une algèbre (cf. définition 2.4) si et seulement si $\mathcal{A}$ vérifie les deux propriétés suivantes :

   (a) $E \in \mathcal{A}$,
   (b) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$.
2. Soit $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ une famille d'algèbres (sur E). Montrer que $\cap_{i \in I} \mathcal{A}_i = \{A \in \mathcal{P}(E);\ A \in \mathcal{A}_i$ pour tout $i \in I\}$ est encore une algèbre.

Si $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$, la deuxième question permet donc de définir l'algèbre engendrée par $\mathcal{C}$ comme l'intersection de toutes les algèbres sur E contenant $\mathcal{C}$.

Exercice 2.9 (Suite croissante de tribus)
Soit E un ensemble. Soit $(\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de tribus de E. Montrer que $\mathcal{A} = \cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n$ est une algèbre (cf. définition 2.4), mais n'est pas, en général, une tribu. Donner une suite d'algèbres finies de parties de $[0, 1]$ dont la réunion engendre $\mathcal{B}([0, 1])$.

Exercice 2.10 (Tribu engendrée par une partition)

Soit E un ensemble.

1. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une partition dénombrable de E. Décrire la tribu engendrée par cette partition, c'est à dire par le sous ensemble de $\mathcal{P}(E)$ dont les éléments sont les A_i. Cette tribu est-elle dénombrable?

2. Montrer que toute tribu finie de parties de E est la tribu engendrée par une partition finie de E. Quel est le cardinal d'une telle tribu?

3. ($\star$) Montrer que si E est dénombrable, toute tribu sur E est engendrée par une partition.

Exercice 2.11 *Corrigé 16 page 287*
Soit E un ensemble et $\mathcal{C}$ un ensemble de parties de E. On suppose que $\emptyset, E \in \mathcal{C}$, que $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie et que le complémentaire de tout élément de $\mathcal{C}$ est une union finie disjointe d'éléments de $\mathcal{C}$, c'est-à-dire :

$$C \in \mathcal{C} \Rightarrow \text{ il existe } n \in \mathbb{N}^\star \text{ et } C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{C} \text{ t.q. } C^c = \cup_{p=1}^n C_p \text{ et } C_p \cap C_q = \emptyset \text{ si } p \neq q.$$

On note $\mathcal{B}$ l'ensemble des réunions finies disjointes d'éléments de $\mathcal{C}$. Une partie de E est donc un élément de $\mathcal{B}$ si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}^\star$ et $(A_p)_{p=1,\ldots,n} \subset \mathcal{C}$ t.q. $A_p \cap A_q = \emptyset$ si $p \neq q$ et $A = \cup_{p=1}^n A_p$.

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est stable par intersection finie et par passage au complémentaire.

2. Montrer que l'algèbre (cf. définition 2.4) engendrée par $\mathcal{C}$ est égale à $\mathcal{B}$.

Exercice 2.12 (Classes monotones) *Corrigé 17 page 288*
Soit E un ensemble. Pour $\Sigma \subset \mathcal{P}(E)$, on dit que Σ est une classe monotone (sur E) si Σ vérifie les deux propriétés suivantes (de stabilité par union croissante dénombrable et par intersection décroissante dénombrable) :

- $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$, $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \Sigma$,
- $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$, $A_n \supset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \cap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \Sigma$.

1. Soit $\Sigma \subset \mathcal{P}(E)$. Montrer que Σ est une tribu si et seulement si Σ est une classe monotone et une algèbre (cf. exercice 2.8).

2. Donner un exemple, avec $E = \mathbb{R}$, de classe monotone qui ne soit pas une tribu.

3. Soit $(\Sigma_i)_{i\in I}$ une famille de classes monotones (sur E). Montrer que $\cap_{i\in I}\Sigma_i = \{A \in \mathcal{P}(E); A \in \Sigma_i$ pour tout $i \in I\}$ est encore une classe monotone.

   Si $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$, cette question permet donc de définir la classe monotone engendrée par $\mathcal{C}$ comme l'intersection de toutes les classes monotones sur E contenant $\mathcal{C}$.

4. (Lemme des classes monotones) Soit $\mathcal{A}$ une algèbre sur E. On note Σ la classe monotone engendrée par $\mathcal{A}$ et on note T la tribu engendrée par $\mathcal{A}$.

   (a) Montrer que $\Sigma \subset T$.

   (b) Soit $A \subset E$. On pose $\Sigma_A = \{B \subset E;\ A \setminus B \in \Sigma$ et $B \setminus A \in \Sigma\}$. Montrer que Σ_A est une classe monotone.

   (c) (Question plus difficile.) Montrer que Σ est une algèbre. [Utiliser la question (b) et la première question de l'exercice 2.8.] En déduire que $T = \Sigma$.

Exercice 2.13 (Caractérisation de la tribu engendrée) *Corrigé 18 page 290*
Soit E un ensemble et $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$. On dit que $\mathcal{A}$ est stable par intersection finie si $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$. On dit que $\mathcal{A}$ est stable par différence si :

$$A, B \in \mathcal{A},\ B \subset A \Rightarrow A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{A}.$$

On dit que $\mathcal{A}$ est stable par union dénombrable disjointe si :

$$(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}, A_n \cap A_m = \emptyset \text{ pour } n \neq m \Rightarrow \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}.$$

Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$.

1. On note $\mathcal{Z}$ l'ensemble des parties de $\mathcal{P}(E)$ stables par différence et stables par union dénombrable disjointe. Montrer qu'il existe $\mathcal{D} \in \mathcal{Z}$ t.q. $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ et :

$$\mathcal{A} \in \mathcal{Z},\ \mathcal{C} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{D} \subset \mathcal{A}.$$

   Dans la suite, on note toujours $\mathcal{D}$ cette partie de $\mathcal{P}(E)$. On suppose maintenant que $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie et que $E \in \mathcal{C}$.

2. Pour $A \in \mathcal{P}(E)$, on note $\mathcal{D}_A = \{D \in \mathcal{D} \text{ t.q. } A \cap D \in \mathcal{D}\}$.
   (a) Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que $\mathcal{D}_A$ est stable par union dénombrable disjointe et stable par différence.
   (b) Soit $A \in \mathcal{C}$. Montrer que $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}_A$. En déduire que $\mathcal{D}_A = \mathcal{D}$.
   (c) Soit $A \in \mathcal{D}$. Montrer que $\mathcal{D}_A = \mathcal{D}$. En déduire que $\mathcal{D}$ est stable par intersection finie.

3. Montrer que $\mathcal{D}$ est une tribu. En déduire que $\mathcal{D}$ est la tribu engendrée par $\mathcal{C}$.

2.7.2 Mesures

Exercice 2.14 (Exemple de mesures) *Corrigé 19 page 292*
Soit E un ensemble infini non dénombrable. Pour toute partie A de E, on pose $m(A) = 0$ si A est au plus dénombrable, et $m(A) = +\infty$ sinon. L'application m est-elle une mesure sur $\mathcal{P}(E)$?

Exercice 2.15 (Mesure trace et restriction d'une mesure) *Corrigé 20 page 292*
Soit (E, T, m) un espace mesuré

1. Soit $F \in T$. Montrer que la tribu trace de T sur F, notée T_F, est incluse dans T (cette tribu est une tribu sur F). Montrer que la restriction de m à T_F est une mesure sur T_F. On l'appellera la *trace* de m sur F. Si $m(F) < \infty$, cette mesure est finie.

2. Soit $\mathcal{A}$ une tribu incluse dans T. La restriction de m à $\mathcal{A}$ est une mesure. Est-elle finie (resp. σ-finie) si m est finie (resp. σ-finie) ?

Exercice 2.16 *Corrigé 21 page 293*
Soit (E, T, m) un espace mesuré fini ("fini" signifie que $m(E) < \infty$) et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des suites d'ensembles mesurables tels que $B_n \subset A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \setminus \cup_{n \in \mathbb{N}} B_n \subset \cup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \setminus B_n)$.

2. Montrer que $m(\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n) - m(\cup_{n\in\mathbb{N}}B_n) \le \sum_{n\in\mathbb{N}}(m(A_n) - m(B_n))$.

Exercice 2.17 *Corrigé 22 page 293*
Soit (E, T, m) un espace mesuré fini et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ t.q., pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m(A_n) = m(E)$. Montrer que $m(\cap_{n\in\mathbb{N}}A_n) = m(E)$.

Exercice 2.18 (Contre exemples. . .) *Corrigé 23 page 294*

1. Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $\lambda(A) = 0$. A-t-on nécessairement A fermé ?
2. Soit (E, T) un espace mesurable et $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$ qui engendre T. On considère m_1 et m_2 des mesures sur T. Montrer que $m_1(A) = m_2(A)$ pour tout $A \in \mathcal{C}$ n'implique pas que $m_1 = m_2$ sur T. [*On pourra trouver un exemple (facile) avec* $(E, T) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *et* m_1, m_2 *non finies. Un exemple avec* $(E, T) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *et* m_1, m_2 *finies est aussi possible mais plus difficile à trouver. . .*]

Exercice 2.19 (Résultat d'unicité) *Corrigé 24 page 295*
Soit (E, T) un espace mesurable et m, μ deux mesures sur T. Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$. On suppose que $\mathcal{C}$ engendre T et que $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie.
On suppose que $m(A) = \mu(A)$ pour tout $A \in \mathcal{C}$.

1. On suppose que $E \in \mathcal{C}$ et que $m(E) < \infty$. Montrer que $m(A) = \mu(A)$ pour tout $A \in T$. [On pourra introduire $\mathcal{D} = \{A \in T,\ m(A) = \mu(A)\}$ et utiliser l'exercice 2.13.]
2. (Généralisation de la question précédente). On suppose qu'il existe une suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$ t.q. $E_n \cap E_m = \emptyset$ si $n \ne m$, $m(E_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $E = \cup_{n\in\mathbb{N}}E_n$. Montrer que $m(A) = \mu(A)$ pour tout $A \in T$.
3. Avec $(E, T) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})$, donner un exemple pour lequel $E \in \mathcal{C}$ et $m \ne \mu$.

Exercice 2.20 (Mesure atomique, mesure diffuse) *Corrigé 25 page 296*
Soit (E, T) un espace mesurable t.q. $\{x\} \in T$ pour tout $x \in E$. Une mesure m sur T est diffuse si $m(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in E$. Une mesure m sur T est purement atomique si il existe $S \in T$ t.q. $m(S^c) = 0$ et $m(\{x\}) > 0$ si $x \in S$.

1. Montrer qu'une mesure purement atomique et diffuse est nulle. Donner, pour $(E, T) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ un exemple de mesure purement atomique et un exemple de mesure diffuse. [Montrer que la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est diffuse.]
2. Soit m une mesure diffuse sur T. Montrer que tous les ensembles dénombrables sont de mesure nulle.
3. Soit m une mesure sur T. On suppose que m est σ-finie, c'est à dire qu'il existe $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ t.q. $E = \cup_{n\in\mathbb{N}}E_n$ et $m(E_n) < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que l'ensemble des $x \in E$ t.q. $m(\{x\}) > 0$ (de tels x sont appelés "atomes" de m) est au plus dénombrable. [On pourra introduire l'ensemble $A_{n,k} = \{x \in E_n;\ m(\{x\}) \ge \frac{1}{k}\}$.]
   (b) Montrer qu'il existe une mesure diffuse m_d et une mesure purement atomique m_a sur T telles que $m = m_d + m_a$. Montrer que m_d et m_a sont étrangères, c'est à dire qu'il existe $A \in T$ t.q. $m_d(A) = 0$ et $m_a(A^c) = 0$.

(c) Montrer que si m est finie il existe un singleton dont la mesure est supérieure ou égale à la mesure de tous les autres singletons. Montrer que ceci peut-être inexact si m n'est que σ-finie.

4. Pour $(E,T) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, donner un exemple de mesure purement atomique finie dont l'ensemble des atomes est infini.

Exercice 2.21 (limites sup et inf d'ensembles) *Corrigé 26 page 298*
Soit (E,T,m) un espace mesuré et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$. On rappelle que $\limsup_{n\to\infty} A_n = \cap_{n\in\mathbb{N}} \cup_{p\ge n} A_p$ et $\liminf_{n\to\infty} A_n = \cup_{n\in\mathbb{N}} \cap_{p\ge n} A_p$.

1. On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $m(\cup_{p\ge n_0} A_p) < \infty$. Montrer que $m(\liminf_{n\to\infty} A_n) \le \liminf_{n\to\infty} m(A_n) \le \limsup_{n\to\infty} m(A_n) \le m(\limsup_{n\to\infty} A_n)$.
2. Donner un exemple (c'est-à-dire choisir (E,T,m) et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$) pour lequel :
$$\limsup_{n\to\infty} m(A_n) > m(\limsup_{n\to\infty} A_n).$$
3. Donner un exemple avec m finie (c'est-à-dire $m(E) < \infty$) pour lequel
$m(\liminf_{n\to\infty} A_n) < \liminf_{n\to\infty} m(A_n) < \limsup_{n\to\infty} m(A_n) < m(\limsup_{n\to\infty} A_n)$.
4. $(\star)$ (Lemme de Borel-Cantelli) On suppose que $\sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n) < \infty$.
Montrer que $m(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$.

Exercice 2.22 (Petit ouvert dense...) *Corrigé 27 page 299*
On considère ici l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Soit $\varepsilon > 0$, peut-on construire un ouvert dense dans $\mathbb{R}$ de mesure inférieure à ε ? [On rappelle qu'une partie A de R est dense dans $\mathbb{R}$ si $\overline{A} = \mathbb{R}$ ou encore si, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in A$ t.q. $|x-a| < \varepsilon$.]

Exercice 2.23 (Non existence d'une mesure sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ exprimant la longueur) *Corrigé 28 page 299*
On définit la relation d'équivalence sur $[0,1[$: xRy si $x-y \in \mathbb{Q}$. En utilisant l'axiome du choix, on construit un ensemble $A \subset [0,1[$ tel que A contienne un élément et un seul de chaque classe d'équivalence. Pour $q \in \mathbb{Q} \cap [0,1[$, on définit $A_q = \{y \in [0,1[;\, y = x+q \text{ ou } y = x+q-1, x \in A\}$, c'est-à-dire $A_q = \{y \in [0,1[;\, y-q \in A \text{ ou } y-q+1 \in A\}$.

1. Montrer que $\bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1[} A_q = [0,1[$.
2. Montrer que si m est une application de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, invariante par translation et vérifiant $m([0,1[) = 1$, m ne peut pas être σ- additive. En déduire la non-existence d'une mesure m, sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, invariante par translation et t.q. $m([a,b]) = b-a$ pour tout $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$. En particulier, montrer que l'application $\lambda^\star$, définie en cours, ne peut pas être une mesure sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Exercice 2.24 (Non existence d'une mesure sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ donnant la longueur des intervalles)
Cet exercice est plus général que le précédent car on veut montrer qu'il n'existe pas de mesure sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ t.q. $m([a,b]) = b-a$ pour tout $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$, sans l'hypothèse d'invariance par translation de l'exercice précédent.

Soit E un ensemble non dénombrable, sur lequel on suppose qu'il existe un ordre total, noté $\le$, tel que pour tout $x \in E$, l'ensemble $\{y \in E; y \le x\}$ est dénombrable, c'est-à-dire qu'il existe une application f_x injective de cet ensemble dans $\mathbb{N}$. Si $E = \mathbb{R}$ ou $E = [0,1]$, on peut démontrer l'existence d'un tel ordre (ceci est une conséquence de l'axiome du continu). Soit m une mesure sur $\mathcal{P}(E)$; on suppose que m est finie, i.e. $m(E) < +\infty$, et diffuse. On se propose de montrer que m est nulle, i.e. $m(A) = 0$, pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$. On pose, pour $x \in E$ et $n \in \mathbb{N}$, $A_{x,n} = \{y \in E; y \ge x \text{ et } f_y(x) = n\}$.

1. Montrer que pour tout $x, y \in E$ et $n \in \mathbb{N}$, $A_{x,n} \cap A_{y,n} = \emptyset$. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\{x \in E; m(A_{x,n}) \neq 0\}$ est au plus dénombrable (utiliser le fait que m est finie).

2. Montrer qu'il existe $x \in E$ t.q., pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m(A_{x,n}) = 0$.

3. En déduire que m est nulle (montrer pour cela que $m(E) = 0$ en utilisant la question précédente et le fait que m est diffuse).

4. Montrer qu'il n'existe pas de mesure m sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ t.q. $m(]a,b[) = b - a$ pour tout a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Exercice 2.25 *Corrigé 29 page 300*
Soit m une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. pour tout intervalle I et tout $x \in \mathbb{R}$ on ait $m(I) = m(I + x)$ (avec $I + x = \{a + x,\, a \in I\}$) et $m([0,1]) = 1$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $m(\{x\}) = 0$ (i.e. m est diffuse). En déduire que m est la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. [On pourra découper $[0,1[$ en q intervalles de longueur $1/q$.]

Exercice 2.26 (Support d'une mesure sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$) *Corrigé 30 page 301*
Soit m une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Montrer qu'il existe un plus grand ouvert de mesure nulle pour m. L'ensemble fermé complémentaire de cet ouvert s'appelle *le support* de m. [On pourra, par exemple, considérer les pavés à extrémités rationnelles qui sont de mesure nulle pour m.]

Exercice 2.27 (Ensemble de Cantor) *Corrigé 31 page 302*
On considère l'espace mesuré $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$.
On pose $C_0 = [0,1]$, $a_1^0 = 0$, $b_1^0 = 1$, et $\alpha_0 = 1$. Pour $n \geq 0$, on construit $C_{n+1} \subset [0,1]$ de la manière suivante : on suppose $C_n = \bigcup_{p=1}^{2^n} [a_p^n, b_p^n]$ connu, et on définit $C_{n+1} = \bigcup_{p=1}^{2^{n+1}} [a_p^{n+1}, b_p^{n+1}]$ où, pour $p = 1, \ldots, 2^n$, $a_{2p-1}^{n+1} = a_p^n$, $b_{2p-1}^{n+1} = a_p^n + \alpha_{n+1}$, $a_{2p}^{n+1} = b_p^n - \alpha_{n+1}$ et $b_{2p}^{n+1} = b_p^n$, avec $\alpha_{n+1} = \frac{\rho_n \alpha_n}{2}$, et $0 < \rho_n < 1$. On pose $C = \cap_{n \geq 0} C_n$ (C s'appelle "ensemble de Cantor", l'exemple le plus classique est obtenu avec $\rho_n = \frac{2}{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

1. Montrer que $C_{n+1} \subset C_n$.

2. Montrer que C est compact et $\overset{\circ}{C} = \emptyset$.

3. (Question plus difficile.) Montrer que C est non dénombrable.

4. Montrer que si ρ_n ne dépend pas de n, alors $\lambda(C) = 0$. En déduire que si $A \in \mathcal{B}([0,1])$, $\lambda(A) = 0$ n'entraîne pas que A est dénombrable.

5. Soit $0 < \epsilon < 1$. Montrer qu'il existe une suite $(\rho_n)_{n \geq 0} \subset]0,1[$ t.q. $\lambda(C) = \epsilon$.

6. Soit f lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que si A est un compact de $[0,1]$ t.q. $\lambda(A) = 0$, alors $f(A)$ est un compact de $\mathbb{R}$ t.q. $\lambda(f(A)) = 0$.

7. Construire une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ t.q. si A est un compact de $[0,1]$ t.q. $\lambda(A) = 0$, on n'a pas forcément $\lambda(f(A)) = 0$ (mais $f(A)$ est un compact de $\mathbb{R}$). [Utiliser un ensemble de Cantor de mesure nulle (cf question 4) et un ensemble de Cantor de mesure $\epsilon > 0$ (cf question 5).]

Exercice 2.28 (Mesure complète) *Corrigé 32 page 305*
Soit (E, T, m) un espace mesuré. Une partie B de E est dite "négligeable" si elle est incluse dans un élément de T de mesure nulle. On note $\mathcal{N}_m$ l'ensemble des parties négligeables. On pose $\overline{T} = \{A \cup N;\, A \in T,\, N \in \mathcal{N}_m\}$.

1. Montrer que $\overline{T}$ est une tribu et que $T \cup \mathcal{N}_m \subset \overline{T}$.

2. Soit A_1, $A_2 \in T$ et N_1, $N_2 \in \mathcal{N}_m$ t.q. $A_1 \cup N_1 = A_2 \cup N_2$. Montrer que $m(A_1) = m(A_2)$.

   Pour $B \in \overline{T}$, soit $A \in T$ et $N \in \mathcal{N}_m$ t.q. $B = A \cup N$, on pose $\overline{m}(B) = m(A)$. (La question précédente montre que cette définition est cohérente.)

3. Montrer que $\overline{m}$ est une mesure sur $\overline{T}$ et $\overline{m}_{|T} = m$. Montrer que $\overline{m}$ est la seule mesure sur $\overline{T}$ égale à m sur T.

4. Montrer que $\mathcal{N}_{\overline{m}} = \mathcal{N}_m \subset \overline{T}$.

L'exercice 4.18 page 102 montre la différence "dérisoire", du point de vue de l'intégration, entre (E, T, m) et son complété $(E, \overline{T}, \overline{m})$.

Exercice 2.29 (Série commutativement convergente dans $\mathbb{R}$) *Corrigé 33 page 307*
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Le but de l'exercice est de montrer que si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{\varphi(n)}$ est convergente pour toute bijection $\varphi\ : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ est absolument convergente.
Pour montrer ce résultat, on suppose, par exemple, que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^+ = \infty$. Montrer qu'il existe $\varphi\ :\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, bijective, t.q. $\sum_{p=0}^{n} a_{\varphi(p)} \to \infty$ quand $n \to \infty$. Conclure.

Exercice 2.30 (Régularité d'une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, finie sur les bornés)
Cet exercice redémontre le théorème de régularité (théorème 2.3).

I. Soit m une mesure finie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, tribu borélienne sur $\mathbb{R}$. On pose: $T = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, O$ ouvert de $\mathbb{R}$, et F fermé de $\mathbb{R}$, tels que $F \subset A \subset O$ et $m(O \setminus F) \leq \varepsilon\}$.

   1. Soient a et $b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Montrer que $]a, b[\, \in T$.
   2. Montrer que T est une tribu. En déduire que m est régulière.
   3. En déduire que, $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $m(A) = \inf\{m(O), O \supset A, O$ ouvert de $\mathbb{R}\}$.

II. Soit m une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, tribu borélienne sur $\mathbb{R}$. On suppose que pour toute partie B bornée de $\mathbb{R}$ t.q. $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a: $m(B) < +\infty$.

   Pour $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on pose: $\nu_B(A) = m(A \cap B)$, $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

   1. Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ une partie bornée de $\mathbb{R}$; montrer que ν_B est une mesure finie.
   2. Soient $\varepsilon > 0$ et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il existe un ouvert O_n de $\mathbb{R}$ tel que $O_n \supset A\cap]n, n+1]$ et $m(O_n) \leq m(A\cap]n, n+1]) + \dfrac{\varepsilon}{2^{|n|}}$. [*Appliquer* I.3 *avec* ν_{B_n}, B_n *ouvert borné contenant* $]n, n+1]$, *et* $A\cap]n, n+1]$.]
   3. a) Soient $\varepsilon > 0$ et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il existe O_n ouvert de $\mathbb{R}$ et F_n fermé de $\mathbb{R}$ t.q. $F_n \subset A\cap]n, n+1] \subset O_n$ et $m(O_n \setminus F_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^{|n|}}$.
      b) Montrer que m est régulière. [*On pourra remarquer, en le démontrant, que si* F_n *est fermé et* $F_n \subset]n, n+1] \forall n \in \mathbb{Z}$, *alors* $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} F_n$ *est fermé.*]
      c) Montrer que $m(A) = \inf\{m(O), A \subset O, O$ ouvert de $\mathbb{R}\}$, $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

III. On note λ la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{R})$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^\star$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Soit $A \in \mathcal{R}$. On pose $\alpha A + \beta = \{\alpha x + \beta, x \in A\}$. Montrer que $\alpha A + \beta \in \mathcal{R}$ et que $\lambda(\alpha A + \beta) = |\alpha|\lambda(A)$. [*On pourra commencer par étudier le cas où A est un ouvert de* $\mathbb{R}$.] (Nous appellerons cette propriété : "invariance par translation généralisée pour la mesure de Lebesgue".)

Exercice 2.31 (Mesure sur S^1) *Corrigé 34 page 308*
On considère $S^1 = \{(x,y)^t \in \mathbb{R}^2, |x|^2+|y|^2 = 1\}$ (S^1 est donc le cercle unité de $\mathbb{R}^2$). Pour $z = (x,y)^t \in S^1$, il existe un unique $\theta_z \in [0, 2\pi[$ t.q. $x = \cos(\theta_z)$ et $y = \sin(\theta_z)$. Pour $\alpha \in [0, 2\pi[$ et $z \in S^1$ on pose $R_\alpha(z) = (\cos(\theta_z + \alpha), \sin(\theta_z + \alpha))^t$. Noter que R_α est une bijection de S^1 sur S^1 (c'est la rotation d'angle α).

Définir une tribu T sur S^1, t.q. T contienne les parties de la forme $\{(\cos(\theta), \sin(\theta))^t,\ \theta \in]\alpha, \beta[\}$ avec $-\infty < \alpha < \beta < \infty$, et une mesure μ sur T de sorte que (S^1, T, μ) soit un espace mesuré avec $\mu(S^1) = 1$ et t.q. μ soit invariante par rotation (c'est à dire que, pour tout $A \in T$ et $\alpha \in [0, 2\pi[$, on ait $R_\alpha(A) = \{R_\alpha(z), z \in A\} \in T$ et $\mu(R_\alpha(A)) = \mu(A)$). [On pourra utiliser la tribu borélienne de $\mathbb{R}$, notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, et la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.]

2.7.3 Probabilités

Exercice 2.32 (Exemple de probabilité)
Soit $E = \{x_k, k \in \mathbb{N}\}$ un ensemble infini dénombrable et $(p_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset [0,1]^{\mathbb{N}}$ t.q. $p_k \geq 0\, \forall k \in \mathbb{N}$ et $\sum_{k\in\mathbb{N}} p_k = 1$.

1. Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $A \neq \emptyset$, on peut définir $p(A) = \sum_{k;x_k\in A} p_k$. On pose $p(\emptyset) = 0$.
2. Montrer que p définie en 1. est une probabilité

Exercice 2.33 (Lemme de Borel-Cantelli) *Corrigé 35 page 309*
Soient (E, T, p) un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$. On pose $B_n = \cup_{k\geq n} A_k$ et $A = \cap_{n\in\mathbb{N}} B_n$ (on rappelle que $A = \limsup_{n\to\infty} A_n$).

1. Montrer que si $\sum_{n\in\mathbb{N}} p(A_n) < +\infty$ alors $p(A) = 0$.
2. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, les événements $A_1, \ldots, A_n$ sont indépendants. On suppose aussi que $\sum_{n\in\mathbb{N}} p(A_n) = \infty$. Montrer que $p(A) = 1$.

Exercice 2.34 Soient E une "population", c'est-à-dire un ensemble fini,et $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de "sous-populations", c'est-à-dire un système de constituants de l'espace probabilisable $(E, \mathcal{P}(E))$. Soit P_n la probabilité qu'un individu de la population appartienne à la sous-population C_n, c'est-à-dire $p(C_n)$, où p est une probabilité sur $(E, \mathcal{P}(E))$. Sachant que dans chaque sous-population la probabilité d'être gaucher est Q_n, trouver la probabilité qu'un gaucher appartienne à C_n.

Exercice 2.35 Soient S_1 (resp. S_2) un seau contenant n_1 cailloux noirs et b_1 cailloux blancs (resp. n_2 cailloux noirs et b_2 cailloux blancs). On tire au hasard, de manière équiprobable, un des deux seaux, et on tire ensuite au hasard, de manière équiprobable, un caillou dans ce seau. Sachant qu'on a tiré un caillou noir, quelle est la probabilité de l'avoir tiré du seau S_1 ?

Exercice 2.36 Soient p une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et F la fonction de répartition de p. Montrer que F est continue ssi $p(\{a\}) = 0$. En déduire que F est continue si F ne charge pas les points.

Chapter 3

Fonctions mesurables, variables aléatoires

3.1 Introduction, topologie sur $\overline{\mathbb{R}}_+$

Nous allons, dans ce chapitre, introduire différents outils nécessaires à la définition de l'intégrale de Lebesgue. De la même manière que les fonctions en escalier ont été introduites lors de la définition de l'intégrale des fonctions réglées, nous introduisons maintenant le concept de fonction étagée sur un espace mesurable (E, T). Nous introduirons ensuite les concepts de fonction mesurable et de variable aléatoire, ainsi que les premières notions de convergence de ces fonctions. La notion de variable aléatoire est fondamentale en calcul des probabilités: c'est en général par la connaissance de la variable aléatoire (et par sa "loi de probabilité") que se construit le modèle probabiliste, l'espace probabilisé (E, T, p) restant souvent mal connu.

Remarque 3.1

1. L'objectif est d'intégrer des fonctions de E (espace de départ) dans F (espace d'arrivée). Pour construire ainsi une notion d'intégrale, il faut un espace mesuré au départ et un espace topologique à l'arrivée, car nous aurons besoin dans l'espace d'arrivée d'une notion de convergence (pour les procédés de passage à la limite dans la définition de l'intégrale). Les espaces d'arrivée usuels sont (pour la théorie de l'intégration) $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^N$ ou un espace de Banach. Le procédé de construction dû à Lebesgue donne un rôle fondamental aux fonctions à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ (et à la notion de convergence "croissante") et nous aurons besoin d'utiliser la topologie de $\overline{\mathbb{R}}_+$ (voir la définition 3.1).

2. On rappelle qu'un espace topologique est la donnée d'un ensemble F muni d'une famille de parties de F, appelées "ouverts de F", contenant $\emptyset$ et F, stable par union (quelconque) et stable par intersection finie. On rappelle aussi que, dans un espace topologique, $x_n \to x$, quand $n \to \infty$, signifie que, pour tout O ouvert contenant x, il existe n_0 t.q. $x_n \in O$ pour tout $n \geq n_0$.

3. Soit F un espace topologique et $G \subset F$. On appelle topologie trace sur G, ou topologie induite sur G, la topologie définie par l'ensemble des restrictions à G des ouverts de F. Si $O \subset G$, O est un ouvert de G si et seulement si il existe U ouvert de F t.q. $O = U \cap G$. Noter donc que O peut ne pas être un ouvert de F si G n'est pas un ouvert de F. Par contre, il est important de remarquer que si G est un borélien de F (c'est-à-dire $G \in \mathcal{B}(F)$, $\mathcal{B}(F)$ étant la tribu engendrée par les ouverts

de F), l'ensemble des boréliens de G est exactement l'ensemble des boréliens de F inclus dans G, c'est-à-dire $\mathcal{B}(G) = \{B \subset G;\ B \in \mathcal{B}(F)\}$, ceci est démontré dans l'exercice 2.3 page 41.

4. Un exemple fondamental de topologie sur l'ensemble F est celui de la topologie donnée par une distance sur F. Dans le cas de $F = \mathbb{R}$, nous considérerons toujours $\mathbb{R}$ muni de la topologie donnée par la structure métrique de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire par l'application "distance" définie par $d(a, b) = |b - a|$.

Définition 3.1 (Topologie et tribu de Borel sur $\overline{\mathbb{R}}_+$) $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$

1. *Soit $O \subset \overline{\mathbb{R}}_+$. O est un ouvert si pour tout $a \in O$ on a :*
   - *(a) Si $0 < a < \infty$, alors il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^\star$ t.q. $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\subset O$,*
   - *(b) si $a = 0$, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^\star$ t.q. $[0, \alpha[\subset O$,*
   - *(c) si $a = \infty$, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+$ t.q. $]\alpha, \infty] \subset O$.*
2. *$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ est la tribu (sur $\overline{\mathbb{R}}_+$) engendrée par les ouverts de $\overline{\mathbb{R}}_+$. Soit $B \subset \overline{\mathbb{R}}_+$, on peut montrer (voir la remarque 3.2 ci après) que $B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ si et seulement si $B \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ($\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu de Borel sur $\mathbb{R}$).*

Remarque 3.2

1. La topologie sur $\mathbb{R}_+$ est la topologie induite par celle de $\overline{\mathbb{R}}_+$, c'est aussi la topologie induite par celle de $\mathbb{R}$. L'ensemble des boréliens de $\mathbb{R}_+$ est donc égal à l'ensemble des boréliens de $\overline{\mathbb{R}}_+$ inclus dans $\mathbb{R}_+$ et c'est aussi l'ensemble des boréliens de $\mathbb{R}$ inclus dans $\mathbb{R}_+$ (voir la remarque 3.1). On remarque aussi que $\{\infty\} \in B(\overline{\mathbb{R}}_+)$ (car $\{\infty\}$ est, par exemple, une intersection dénombrable d'ouverts de $\overline{\mathbb{R}}_+$). On en déduit que, si $B \subset \overline{\mathbb{R}}_+$, on a $B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ si et seulement si $B \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (noter que $B \cap \mathbb{R} = B \cap \mathbb{R}_+$).
2. Soit $A \subset \overline{\mathbb{R}}_+$, A est donc un borélien de $\overline{\mathbb{R}}_+$ si et seulement si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ou si $A = B \cup \{\infty\}$, avec $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
3. La définition de la topologie sur $\overline{\mathbb{R}}_+$ donne bien que, pour $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$, on a $x_n \to \infty$ (dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, quand $n \to \infty$) si et seulement si, pour tout $\alpha > 0$, il existe n_0 t.q. $x_n \in]\alpha, \infty]$ pour tout $n \geq n_0$ (ce qui est la définition usuelle de convergence vers ∞).
4. On peut aussi montrer (exercice...) que $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ est la tribu engendrée par $\mathcal{C}_1 = \{]a, \infty];\ a \in \mathbb{R}_+\}$. C'est aussi la tribu engendrée par $\mathcal{C}_2 = \{]a, \infty[\cap \mathbb{R}_+;\ a \in \mathbb{R}\}$. Par contre, ce n'est pas la tribu engendrée (sur $\overline{\mathbb{R}}_+$) par $\mathcal{C}_3 = \{]a, \infty[;\ a \in \mathbb{R}_+\}$ (on a donc $T(\mathcal{C}_3) \subset \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ et $T(\mathcal{C}_3) \neq \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$).

3.2 Fonctions étagées

Définition 3.2 (Fonction caractéristique) *Soient (E, T) un espace mesurable et soit $A \in T$. On appelle fonction caractéristique mesurable de l'ensemble A, et on note 1_A (ou χ_A) la fonction définie par : $1_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $1_A(x) = 0$ si $x \in A^c$.*

Définition 3.3 (Fonction étagée) *Soient (E, T) un espace mesurable et f ; $E \to \mathbb{R}$.*

1. *On dit que f est étagée (ou T-étagée) si f est une combinaison linéaire (finie) de fonctions caractéristiques mesurables, c'est-à-dire s'il existe une famille finie $(A_i)_{i=1,\ldots,n} \subset T$ et n réels $a_1, \ldots, a_n$ tels que $f = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i}$.*

2. On dit que f est étagée positive si f est étagée et prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions étagées et $\mathcal{E}_+$ l'ensemble des fonctions étagées positives.

La notion de fonction étagée positive va nous permettre de définir l'intégrale à partir de la notion de mesure. On se limite pour l'instant aux fonctions positives afin de donner un sens à l'addition de mesures infinies. Notons que, dans la définition d'une fonction étagée, les ensembles A_i peuvent être d'intersection non vide. On aura besoin, pour introduire facilement la notion d'intégrale d'une fonction étagée positive, de considérer une décomposition de la fonction étagée sur des ensembles d'intersection vide. C'est l'objet du lemme suivant:

Lemme 3.1 (Décomposition canonique d'une fonction étagée positive)
Soit (E, T) un espace mesurable, et soit $f \in \mathcal{E}_+$ une fonction étagée positive, non identiquement nulle. Alors il existe une unique famille finie $(a_i, A_i)_{i=1,\ldots,n} \subset \mathbb{R}_+^\star \times T$ t.q. $0 < a_1 < \ldots < a_n$, $A_i \neq \emptyset$, pour tout i, $A_i \cap A_j = \emptyset$, si $i \neq j$, et $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$.

Démonstration : Soient $(B_i)_{i=1,\ldots,p} \subset T$, $(b_i)_{i=1,\ldots,p} \subset \mathbb{R}$ et $f = \sum_{i=1}^p b_i 1_{B_i}$ une fonction étagée positive non nulle. L'ensemble $\mathrm{Im} f$ des valeurs prises par f est donc fini. Comme $\mathrm{Im} f \subset \mathbb{R}_+$, on a donc $\mathrm{Im} f \setminus \{0\} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ avec $0 < a_1, \ldots < a_n$. En posant $A_i = \{x \in E; f(x) = a_i\}$, on a donc $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$ avec $A_i \neq \emptyset$ et $A_i \cap A_j = \emptyset$. (Noter aussi que $\{x \in E; f(x) = 0\} = (\cup_{i=1}^n A_i)^c$.) Il reste à montrer que $A_i \in T$. Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, on pose $I_i = \{K \subset \{1, \ldots, p\} \ ; \ a_i = \sum_{k \in K} b_k\}$. On a alors, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $A_i = \cup_{K \in I_i} C_K$, avec $C_K = \cap_{j=1}^p D_j$, $D_j = B_j$ si $j \in K$ et $D_j = B_j^c$ si $j \notin K$. Les propriétés de stabilité d'une tribu nous donnent alors que $A_i \in T$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. On a donc trouvé la décomposition voulue de f. Le fait que cette décomposition est unique est immédiat car on a nécessairement $\{a_1, \ldots, a_n\} = \mathrm{Im} f \setminus \{0\}$ et $A_i = \{x \in E; f(x) = a_i\}$. ■

On aurait envie à partir de la notion de fonction étagée positive décomposée sous la forme précédente, de définir l'intégrale de f comme $\int f dm = \sum_{i=1}^n a_i m(A_i)$.
En fait, on pourra même (cf définition 4.1) définir l'intégrale d'une fonction étagée avec une décomposition plus générale (non unique) grâce au lemme suivant :

Lemme 3.2 *Soit (E, T, m) un espace mesuré et soit $f \in \mathcal{E}_+$ une fonction étagée positive non nulle, t.q. $f = \displaystyle\sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$ et $f = \displaystyle\sum_{i=1}^p b_i 1_{B_i}$ où $a_1, ..., a_n$, $b_1, ..., b_p$ sont des réels strictement positifs, $(A_i)_{i=1,\ldots,n} \subset T$ et $(B_i)_{i=1,\ldots,p} \subset T$ sont des familles de parties disjointes deux à deux, i.e. telles que $A_i \cap A_j = \emptyset$ et $B_i \cap B_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Alors :*

$$\sum_{i=1}^n a_i m(A_i) = \sum_{j=1}^p b_j m(B_j). \tag{3.1}$$

Démonstration : On pose, pour $i = 1, \ldots, n$ et $j = 1, \ldots, p$, $C_{ij} = A_i \cap B_j$. En remarquant que $\{x; f(x) > 0\} = \cup_{i=1}^n A_i = \cup_{j=1}^p B_j$, on écrit $A_i = \cup_{j=1}^p C_{ij}$ et $B_j = \cup_{i=1}^n C_{ij}$. On peut donc écrire

$$\sum_{i=1}^n a_i m(A_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_i m(C_{ij}) \tag{3.2}$$

et

$$\sum_{j=1}^p b_j m(B_j) = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n b_j m(C_{ij}) \tag{3.3}$$

On remarque alors que $a_i = b_j$ dès que $C_{ij} \neq \emptyset$, d'où l'égalité 3.1. ■

Lemme 3.3 (Décomposition d'une fonction étagée avec une partition)
Soit (E,T) un espace mesurable, et soit $f \in \mathcal{E}$ une fonction étagée. Alors il existe une unique famille finie $(a_i, A_i)_{i=0,\ldots,n} \subset \mathbb{R} \times T$ t.q. $a_i \neq a_j$ si $i \neq j$, $A_i \neq \emptyset$, pour tout i, $A_i \cap A_j = \emptyset$, si $i \neq j$, $E = \cup_{i=0}^n A_i$ et $f = \sum_{i=0}^n a_i 1_{A_i}$.

Démonstration :
La démonstration est très voisine de celle donnée pour la décomposition d'une fonction étagée positive (lemme 3.1). L'ensemble $\{a_i,\ i \in \{0,\ldots,n\}\}$ est l'ensemble de toutes les valeurs prises par f (et pas seulement les valeurs non nulles) et $A_i = \{x \in E;\ f(x) = a_i\}$.

■

Enfin, on conclut ce paragraphe en remarquant que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Proposition 3.1 (Structure vectorielle de $\mathcal{E}$) *Soit (E,T) un espace mesurable, l'ensemble des fonctions étagées, $\mathcal{E}$, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. De plus, si $f, g \in \mathcal{E}$, on a aussi $fg \in \mathcal{E}$.*

Démonstration :
Soit $f, g \in \mathcal{E}$ et soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On utilise la décomposition de f et g donnée dans le lemme 3.3. Elle donne $f = \sum_{i=0}^n a_i 1_{A_i}$ et $g = \sum_{j=0}^m b_j 1_{B_i}$. Comme les familles $(A_i)_{\{i\in\{0,\ldots,n\}\}}$ et $(B_j)_{\{j\in\{0,\ldots,m\}\}}$ forment des partitions de E, on a:
$f = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_i 1_{A_i \cap B_j}$ et $g = \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^n b_j 1_{A_i \cap B_j}$,
de sorte que $\alpha f + \beta g = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (\alpha a_i + \beta b_i) 1_{A_i \cap B_j}$, ce qui montre que $\alpha f + \beta g \in \mathcal{E}$, et donc que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel.
D'autre part, on remarque aussi que $fg = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_i b_i 1_{A_i \cap B_j}$, ce qui montre que $fg \in \mathcal{E}$.

■

On montrera aussi les propriétés de linéarité et de monotonie de l'intégrale des fonctions étagées (voir proposition 4.1).

3.3 Fonctions mesurables et variables aléatoires

Afin d'étendre le concept d'intégrale à une classe de fonctions plus générale que celle des fonctions étagées (positives), on introduit les fonctions mesurables (positives). On pourra ensuite utiliser une technique de "passage à la limite" pour définir l'intégrale de telles fonctions.

On va tout d'abord définir la notion de mesurabilité pour une fonction f de E dans F. L'espace de départ, E, est muni d'une tribu et l'espace d'arrivée, F, est, en général, muni d'une topologie (et donc de sa tribu de Borel, les exemples fondamentaux sont $F = \mathbb{R}$ ou $F = \overline{\mathbb{R}}_+$). On peut aussi considérer le cas où F est muni d'une tribu (non donnée par une topologie sur F).

Définition 3.4 (Fonction mesurable) *Soient (E,T) un espace mesurable et F un ensemble muni d'une topologie (par exemple : $F = \mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}_+$). Une fonction f, définie de E dans F, est une fonction T-mesurable si $f^{-1}(A) \in T$, pour tout $A \in \mathcal{B}(F)$. (Ce qui est équivalent à dire que la tribu $f^{-1}(\mathcal{B}(F)) = \{f^{-1}(B),\ B \in \mathcal{B}(F)\}$ est incluse dans T ou encore que la tribu $T_f = \{B \in \mathcal{P}(F);\ f^{-1}(B) \in T\}$ contient*

$\mathcal{B}(F)$, voir l'exercice 2.4 sur les tribus image directe et image réciproque.) En l'absence d'ambiguïté possible on dira "mesurable" au lieu de "T-mesurable".

Plus généralement, si F n'est pas muni d'une topologie (et donc de la tribu $\mathcal{B}(F)$) mais est muni directement d'une tribu $\mathcal{T}$ (on a alors deux espaces mesurables : (E,T) et $(F,\mathcal{T})$), une fonction f, définie de E dans F, est une fonction $(T,\mathcal{T})$-mesurable si $f^{-1}(A) \in T$, pour tout $A \in \mathcal{T}$. (Ce qui est équivalent à dire que la tribu $f^{-1}(\mathcal{T}) = \{f^{-1}(B),\ B \in \mathcal{T}\}$ est incluse dans T ou encore que la tribu $T_f = \{B \in \mathcal{P}(F);\ f^{-1}(B) \in T\}$ contient $\mathcal{T}$.) En l'absence d'ambiguïté possible on dira "mesurable" au lieu de "$(T,\mathcal{T})$-mesurable".

Remarque 3.3 Une fonction étagée est toujours mesurable. En effet, soit (E,T) un espace mesurable. Soit $f \in \mathcal{E}$ (donc f est une application de E dans $\mathbb{R}$). D'après la proposition 3.3, il existe $(A_0,\ldots,A_n)$, partition de E, et $a_0,\ldots,a_n \in \mathbb{R}$ t.q. $f = \sum_{i=0}^{n} a_i 1_{A_i}$ et $A_i \in T$ pour tout $i \in \{0,\ldots,n\}$. Pour tout $B \subset \mathbb{R}$, on a donc $f^{-1}(B) = \cup_{\{i;\, a_i \in B\}} A_i \in T$. Ce qui prouve que f est mesurable de E dans $\mathbb{R}$.

Noter que si $f \in \mathcal{E}_+$, on a donc aussi f mesurable de E dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ (voir l'exercice 3.3).

La terminologie probabiliste utilise les termes "variable aléatoire" ou " élément aléatoire" (au lieu de "fonction mesurable" ou "application mesurable").

Définition 3.5 (Variable aléatoire, élément aléatoire)

1. *Soit (E,T) un espace probabilisable, on appelle variable aléatoire une fonction X définie de E dans $\mathbb{R}$ et T-mesurable, i.e. t.q. $X^{-1}(A) \in T$, pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.*
2. *Soit (E,T) et $(F,\mathcal{T})$ deux espaces probabilisables. Une fonction X, définie de E dans F, est un élément aléatoire si c'est une fonction $(T,\mathcal{T})$-mesurable (c'est-à-dire si $X^{-1}(A) \in T$, pour tout $A \in \mathcal{T}$). Lorsque F est un espace vectoriel, on dit que X est une variable aléatoire vectorielle ou un "vecteur aléatoire".*

Remarque 3.4 Comme cela a été dit dans la proposition 3.4, on dit, en l'absence d'ambiguïté, "mesurable" au lieu de "T-mesurable". On remarque d'ailleurs que le terme probabiliste "variable aléatoire" ne mentionne pas la dépendance par rapport à la tribu. Dans la définition 3.5, on a noté X la variable aléatoire plutôt que f car c'est l'usage dans la littérature probabiliste.

Définition 3.6 (Tribu engendrée par une fonction mesurable)
Soient (E,T) un espace mesurable (resp. probabilisable) et f (resp. X) une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$ (resp. une variable aléatoire) alors l'ensemble $\{f^{-1}(A), A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ (resp. $\{X^{-1}(A), A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$) est une tribu sur E qu'on appelle tribu engendrée par la fonction mesurable f (resp. la variable aléatoire X). Cette tribu est aussi la tribu image réciproque de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ par f (resp. X).

Définition 3.7 (espaces $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}_+$) *Soit (E,T) un espace mesurable, on note :*

- *$\mathcal{M}(E,T) = \{f : E \to \mathbb{R},$ mesurable $\}$,*
- *$\mathcal{M}_+(E,T) = \{f : E \to \overline{\mathbb{R}}_+,$ mesurable $\}$.*

En l'absence d'ambiguïté, on notera $\mathcal{M} = \mathcal{M}(E,T)$ et $\mathcal{M}_+ = \mathcal{M}_+(E,T)$.

Proposition 3.2 (Première caractérisation de la mesurabilité)
Soient $(E,\ T)$ un espace mesurable et $f : E \to F$, avec $F = \mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}_+$. Soit $\mathcal{C}$ une partie de $\mathcal{P}(F)$ engendrant la tribu borélienne de F. On a alors : f est mesurable si et seulement $f^{-1}(C) \in T$ pour tout $C \in \mathcal{C}$. En particulier, f est mesurable si et seulement si f vérifie l'une des deux propriétés suivantes :

1. $f^{-1}(]\alpha,\beta[) \in T$, pour tout $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$,

2. $f^{-1}(]\alpha,\infty[) \in T$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Dans cette caractérisation, l'ensemble $]\alpha,\beta[$ (ou $]\alpha,\infty[$) désigne, bien sûr, l'ensemble des éléments de F appartenant à $]\alpha,\beta[$ (ou $]\alpha,\infty[$).

La démonstration de cette proposition fait l'objet de l'exercice 3.1. Le lecteur pourra trouver lui-même d'autres caractérisations de la mesurabilité, en utilisant la proposition ci-dessus. Par exemple, soit f de E (muni de la tribu T) dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, la fonction f est mesurable si et seulement si $f^{-1}(]\alpha,\infty]) \in T$ pour tout $\alpha > 0$ (par contre, $f^{-1}(]\alpha,\infty[) \in T$ pour tout $\alpha \geq 0$ n'implique pas que f est mesurable).
La proposition suivante nous permettra de définir l'intégrale des fonctions appartenant à $\mathcal{M}_+$ (comme limite d'intégrales de fonctions étagées, voir le chapitre suivant). Par contre, on ne pourra pas donner un sens, dans le cas général, à l'intégrale des fonctions appartenant à $\mathcal{M}$.

Proposition 3.3 (Mesurabilité positive) *Soient (E,T) un espace mesurable et $f : E \to \overline{\mathbb{R}}_+$. Alors $f \in \mathcal{M}_+$ si et seulement si il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$, t.q. :*

1. Pour tout $x \in E$, $f_n(x) \to f(x)$, quand $n \to \infty$,

2. $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$, pour tout $x \in E$, et tout $n \in \mathbb{N}$.

les 2 conditions précédentes seront dénotées dans la suite sous la forme $f_n \uparrow f$ quand $n \to \infty$.

Démonstration : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}_+$ t.q. $f_n \uparrow f$ quand $n \to \infty$. On remarque que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$f^{-1}(]\alpha,+\infty]) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}(]\alpha,+\infty[). \tag{3.4}$$

Comme f_n est mesurable, pour tout $n \in \mathbb{N}$ (voir la remarque 3.3), on a $f_n^{-1}(]\alpha,+\infty[) \in T$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc, par stabilité de T par union dénombrable, $f^{-1}(]\alpha,+\infty]) \in T$. Ceci étant vrai pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on en déduit, comme $\{]\alpha,+\infty],\ \alpha \geq 0\}$ engendre $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$, que f est mesurable de E dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, c'est-à-dire $f \in \mathcal{M}_+$.

Réciproquement, on suppose que $f \in \mathcal{M}+$. On va construire $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \subset \mathcal{E}_+$ t.q. $f_n \uparrow f$ quand $n \to \infty$.
Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit la fonction f_n par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{p}{2^n} \text{ si } f(x) \in [\dfrac{p}{2^n}, \dfrac{p+1}{2^n}[, \text{ avec } p \in \{0,\ldots,n2^n-1\}, \\ n \text{ si } f(x) \geq n, \end{cases} \tag{3.5}$$

de sorte que

$$f_n = n1_{\{x\in E;\, f(x)\geq n\}} + \sum_{p=0}^{n2^n-1} \frac{p}{2^n} 1_{\{x\in E;\, f(x)\in[\frac{p}{2^n},\frac{p+1}{2^n}[\}}.$$

Comme $f \in \mathcal{M}_+$, on a $\{x \in E;\ f(x) \geq n\} \in T$ et $\{x \in E;\ f(x) \in [\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}[\} \in T$ pour tout n et tout p, on a donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \subset \mathcal{E}_+$.

On montre maintenant que, pour tout $x \in E$, on a $f_n(x) \to f(x)$, quand $n \to \infty$. Soit $x \in E$. On distingue deux cas :

Premier cas. On suppose $f(x) < \infty$. On a alors, pour $n \geq f(x)$, $|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}$. On a donc $f_n(x) \to f(x)$ quand $n \to \infty$.
Deuxième cas. On suppose $f(x) = \infty$. On a alors $f_n(x) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et donc $f_n(x) \to f(x)$ quand $n \to \infty$.

On montre enfin que, pour tout $x \in E$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$. Soit $x \in E$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. On distingue trois cas :
Premier cas. On suppose $f(x) \geq n + 1$. On a alors $f_{n+1}(x) = n + 1 > n = f_n(x)$.
Deuxième cas. On suppose $n \leq f(x) < n + 1$. Il existe alors $i \in \{n2^{n+1}, \ldots, (n+1)2^{n+1} - 1\}$ t.q. $f(x) \in [\frac{i}{2^{n+1}}, \frac{i+1}{2^{n+1}}]$. On a alors $f_n(x) = n \leq \frac{i}{2^{n+1}} = f_{n+1}(x)$.
Troisième cas. On suppose $f(x) < n$. Il existe alors $p \in \{0, \ldots, n2^n - 1\}$ t.q. $f(x) \in [\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}[= [\frac{2p}{2^{n+1}}, \frac{2(p+1)}{2^{n+1}}[$. Si $f(x) \in [\frac{2p}{2^{n+1}}, \frac{2p+1}{2^{n+1}}[$, on a $f_n(x) = \frac{p}{2^n} = \frac{2p}{2^{n+1}} = f_{n+1}(x)$. Si $f(x) \in [\frac{2p+1}{2^{n+1}}, \frac{2(p+1)}{2^{n+1}}[$, on a $f_n(x) = \frac{p}{2^n} < \frac{2p+1}{2^{n+1}} = f_{n+1}(x)$. On a toujours $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$.

On a bien ainsi construit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \subset \mathcal{E}_+$ t.q. $f_n \uparrow f$ quand $n \to \infty$.

■

Proposition 3.4 (Mesurabilité sans signe) *Soient (E, T) un espace mesurable, et $f : E \to \mathbb{R}$. On suppose que f est mesurable. Il existe alors une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ t.q., pour tout $x \in E$, $f_n(x) \to f(x)$, quand $n \to \infty$.*

Démonstration :
On définit la fonction $f^+ : E \to \mathbb{R}_+$ par $f^+(x) = \max(f(x), 0)$ pour tout $x \in E$. On remarque que $f^+ \in \mathcal{M}_+$ (et $f^+ \in \mathcal{M}$, voir l'exercice 3.3). En effet, f^+ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et $(f^+)^{-1}(]\alpha, \infty]) = f^{-1}(]\alpha, \infty[) \in T$ si $\alpha > 0$. On conclut en remarquant que $\{]\alpha, \infty], \alpha > 0\}$ engendre $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$. On définit également $f^- = (-f)^+$, de sorte que $f = f^+ - f^-$. On a donc aussi $f^- \in \mathcal{M}_+$. La proposition 3.3 donne l'existence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ t.q. $f_n \uparrow f^+$ et $g_n \uparrow f^-$ quand $n \to \infty$. On pose $h_n = f_n - g_n$, de sorte que $h_n(x) \to f(x)$, quand $n \to \infty$, pour tout $x \in E$. D'autre part, comme $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel (voir la proposition 3.1 page 53), on a $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}$.

■

La proposition précédente nous donnera, avec les propriétés de stabilité de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}_+$ (voir la proposition 3.5) une deuxième caractérisation de la mesurabilité, voir la proposition 3.6.

L'ensemble des fonctions mesurables est un ensemble très "stable", c'est-à-dire que des opérations "usuelles" (comme "addition", "multiplication", "limite"...) sur des fonctions mesurables donnent encore des fonctions mesurables, ceci est précisé dans la proposition suivante. Dans le cas (fondamental) de $(E, T) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, il est "difficile" de trouver des fonctions non mesurables (comme il est "difficile" de trouver des parties non boréliennes, bien que le cardinal de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ soit égal au cardinal de $\mathbb{R}$ et donc strictement inférieur au cardinal de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$). En pratique, on peut en gros supposer que les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont *toutes* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mesurables (bien qu'il y ait "beaucoup" de fonctions non mesurables...).

Proposition 3.5 (Stabilité de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}_+$) *Soit (E, T) un espace mesurable.*

1. *Soit $I \subset \mathbb{N}$.*

   Soit $(f_n)_{n\in I} \subset \mathcal{M}_+$, alors $\sup_{n\in I} f_n \in \mathcal{M}_+$ et $\inf_{n\in I} f_n \in \mathcal{M}_+$.

   Soit $(f_n)_{n\in I} \subset \mathcal{M}$. Si $\sup_{n\in I} f_n$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$, alors $\sup_{n\in I} f_n \in \mathcal{M}$. De même, si $\inf_{n\in I} f_n$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$, alors $\inf_{n\in I} f_n \in \mathcal{M}$.

2. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$*, alors* $\limsup_{n\to\infty} f_n \in \mathcal{M}_+$ *et* $\liminf_{n\to\infty} f_n \in \mathcal{M}_+$.

   Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$*. Si* $\limsup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *prend ses valeurs dans* $\mathbb{R}$*, alors* $\limsup_{n\in\mathbb{N}} f_n \in \mathcal{M}$*. De même, si* $\liminf_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *prend ses valeurs dans* $\mathbb{R}$*, alors* $\liminf_{n\in\mathbb{N}} f_n \in \mathcal{M}$.

3. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$*. On suppose que* $f_n(x) \to f(x)$ *dans* $\overline{\mathbb{R}}_+$*, pour tout* $x \in E$*. Alors* $f \in \mathcal{M}_+$.

   Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$*. On suppose que* $f_n(x) \to f(x)$ *dans* $\mathbb{R}$*, pour tout* $x \in E$*. Alors* $f \in \mathcal{M}$.

4. $\mathcal{M}$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *et si* $f, g \in \mathcal{M}$*, alors* $fg \in \mathcal{M}$.

DÉMONSTRATION :

1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$. Il est clair que $f = \sup_{n\in I} f_n$ est bien définie et prend ses valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Puis, Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $f^{-1}(]\alpha,\infty]) = \cup_{n\in I} f_n^{-1}(]\alpha,\infty]) \in T$. Comme $\{]\alpha,\infty] \cap \overline{\mathbb{R}}_+,\ \alpha \in \mathbb{R}\}$ engendre $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$, on en déduit que f est mesurable de E dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, c'est-à-dire $f \in \mathcal{M}_+$.

   De même la fonction $f = \inf_{n\in I} f_n$ est aussi bien définie et prend ses valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ (elle prend même ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$ si les f_n prennent leurs valeurs dans $\mathbb{R}_+$, ceci n'est pas vrai avec la fonction $\sup_{n\in I} f_n$). On remarque ensuite que $f^{-1}([-\infty,\alpha[) = \cup_{n\in I} f_n^{-1}([-\infty,\alpha[)$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. Comme $\{[-\infty,\alpha[\cap \overline{\mathbb{R}}_+,\ \alpha \in \mathbb{R}\}$ engendre $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$, on en déduit que f est mesurable de E dans $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$, c'est-à-dire $f \in \mathcal{M}_+$.

   Soit maintenant $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$. La fonction $f = \sup_{n\in I} f_n$ est bien définie si on la considère comme étant à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ car elle peut prendre la valeur $+\infty$ en certains points. On la suppose maintenant à valeurs dans $\mathbb{R}$. On peut alors raisonner comme précédemment en remarquant que $f^{-1}(]\alpha,\infty[) = \cup_{n\in I} f_n^{-1}(]\alpha,\infty[)$ et que $\{]\alpha,\infty[,\ \alpha \in \mathbb{R}\}$ engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. De même, La fonction $f = \inf_{n\in I} f_n$ est bien définie si on la considère comme étant à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ car elle peut prendre la valeur $-\infty$ en certains points. On la suppose maintenant à valeurs dans $\mathbb{R}$. On peut alors raisonner comme précédemment en remarquant que $f^{-1}(]-\infty,\alpha[) = \cup_{n\in I} f_n^{-1}(]-\infty,\alpha[)$ et que $\{]-\infty,\alpha[,\ \alpha \in \mathbb{R}\}$ engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$. On pose $f = \limsup_{n\to\infty} f_n$, la fonction f est bien définie à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Pour tout $x \in E$, on a $f(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}(\sup_{p\geq n} f_p(x)) = \inf_{n\in\mathbb{N}}(\sup_{p\geq n} f_p(x))$, c'est-à-dire $f = \inf_{n\in\mathbb{N}}(\sup_{p\geq n} f_p)$. En utilisant les résultats précédents (avec sup puis inf), on a donc $f \in \mathcal{M}_+$. Un raisonnement similaire donne $\liminf_{n\to\infty} f_n = \sup_{n\in\mathbb{N}}(\inf_{p\geq n} f_p) \in \mathcal{M}_+$.

   Soit maintenant $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$. On suppose que $f = \limsup_{n\to\infty} f_n = \inf_{n\in\mathbb{N}}(\sup_{p\geq n} f_p)$ (qui est bien définie dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$) prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$. Comme les f_n prennent leurs valeurs dans $\mathbb{R}$, on peut alors remarquer que la fonction $\sup_{p\geq n} f_p$ prend aussi ses valeurs dans $\mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a donc, avec la propriété démontrée en 1, $\sup_{p\geq n} f_p \in \mathcal{M}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puis, utilisant encore la propriété démontrée en 1, $f = \inf_{n\in\mathbb{N}}(\sup_{p\geq n} f_p) \in \mathcal{M}$. Un raisonnement analogue donne $\liminf_{n\to\infty} f_n = \sup_{n\in\mathbb{N}}(\inf_{p\geq n} f_p) \in \mathcal{M}$ dès que l'on suppose que $\liminf_{n\to\infty} f_n$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$.

3. Cette question est immédiate grâce à la précédente. Il suffit de remarquer que dès que la limite de la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ existe, elle est nécessairement égale à la limite supérieure (ou la limite inférieure) de cette même suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, c'est-à-dire que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x)$ (pour tout $x \in E$). Ici on remarque donc simplement que $f = \limsup_{n\to\infty} f_n$ et on applique la propriété 2.

4. Soit $f, g \in \mathcal{M}$ et soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ On pose $h = \alpha f + \beta g$. D'après la proposition 3.4, il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ t.q. $f_n(x) \to f(x)$ et $g_n(x) \to g(x)$, quand $n \to \infty$, pour tout $x \in E$. On pose $h_n = \alpha f_n + \beta g_n$, de sorte que $h_n(x) \to h(x)$, quand $n \to \infty$, pour tout $x \in E$. La proposition 3.1 donne que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, on a donc $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$. Comme $\mathcal{E} \subset \mathcal{M}$ (voir la remarque 3.3), la propriété 3 ci dessus donne alors que $h \in \mathcal{M}$. L'ensemble $\mathcal{M}$ est donc un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$).

   Soit $f, g \in \mathcal{M}$. On pose $h = fg$. On raisonne comme ci dessus, il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ t.q. $f_n(x) \to f(x)$ et $g_n(x) \to g(x)$, quand $n \to \infty$, pour tout $x \in E$. On pose $h_n = f_n g_n$, de sorte que $h_n(x) \to h(x)$, quand $n \to \infty$, pour tout $x \in E$. La proposition 3.1 donne aussi $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E} \subset \mathcal{M}$. La propriété 3 ci dessus donne alors que $h \in \mathcal{M}$.

■

Proposition 3.6 (Deuxième caractérisation de la mesurabilité) *Soit (E, T) un espace mesurable et $f : E \to \mathbb{R}$. Alors, f est mesurable si et seulement si il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ t.q., pour tout $x \in E$, $f_n(x) \to f(x)$, quand $n \to \infty$.*

DÉMONSTRATION :
Cette caractérisation est donnée par la proposition 3.4 pour le sens “seulement si” et par la propriété 3 de la proposition 3.5 pour le sens “si”.

■

On rappelle aussi qu'une fonction f de E (muni de la tribu T) dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ est mesurable (c'est-à-dire appartient à $\mathcal{M}_+$) si et seulement si il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ t.q. $f_n \uparrow f$ (voir la proposition 3.3).

Remarque 3.5 Il est intéressant de remarquer que la proposition 3.6 peut être fausse si on prend pour F un espace topologique quelconque (elle reste vraie, par exemple, si F est un espace vectoriel normé de dimension finie) avec une définition immédiate de $\mathcal{E}$ généralisant celle donnée pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Définition 3.8 *Soient E un ensemble et $f : E \to \mathbb{R}$. Pour tout $x \in E$, on pose :*

- $f^+(x) = \max(f(x), 0)$,
- $f^-(x) = -\min(f(x), 0) = (-f)^+(x)$,
- $|f|(x) = |f(x)|$.

Proposition 3.7 *Soient (E, T) un espace mesurable et $f \in \mathcal{M}$. On a alors $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$ et f^+, f^-, $|f| \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{M}$.*

DÉMONSTRATION :
Le fait que $f = f^+ - f^-$ et $|f| = f^+ + f^-$ est immédiat. On a déjà vu, dans la démonstration de la proposition 3.4, que $f^+, f^- \in \mathcal{M}_+$ et donc que $f^+, f^- \in \mathcal{M}$ (voir l'exercice 3.3). La proposition 3.5 donne que $\mathcal{M}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On a donc $|f| \in \mathcal{M}$ et donc aussi $|f| \in \mathcal{M}_+$ car $|f| \geq 0$.

■

3.4 Mesure image, loi d'une v.a., v.a. indépendantes

Soit (E, T) et $(F, \mathcal{T})$ deux espaces mesurables (l'exemple fondamental est $(F, \mathcal{T}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$) et f une fonction mesurable de E vers F. Si m est une mesure sur T, alors on peut définir, à partir de f et m, une mesure sur $\mathcal{T}$ de la manière suivante :

Proposition 3.8 (Mesure image) *Soient (E, T, m) un espace mesuré, $(F, \mathcal{T})$ un espace mesurable et f une fonction mesurable de E vers F (c'est-à-dire $(T, \mathcal{T})$-mesurable). Alors, l'application m_f définie de $\mathcal{T}$ dans $\mathbb{R}_+$ par : $m_f(A) = m(f^{-1}(A))$, pour tout $A \in \mathcal{T}$, est une mesure sur $\mathcal{T}$, appelée mesure image par f.*

Démonstration : Il suffit de remarquer que m_f est bien définie, que $m_f(\emptyset) = 0$ et que m_f est $\sigma-$additive, ce qui découle naturellement des propriétés de m. ■

Définition 3.9 (Loi de probabilité et fonction de répartition d'une variable aléatoire)
Soient (E, T, p) un espace probabilisé, X une variable aléatoire réelle (c'est-à-dire une fonction mesurable de E, muni de la tribu T, dans $\mathbb{R}$, muni de la tribu borélienne). On appelle loi de probabilité de la variable aléatoire X la probabilité p_X image de p par X (cette probabilité est donc définie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$). On appelle fonction de répartition de la variable aléatoire X la fonction de répartition de la probabilité p_X.

Dans de nombreux cas, les modèles probabilistes seront déterminés par une loi de probabilité d'une variable aléatoire. Une conséquence immédiate du théorème 2.4 est que la loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle est entièrement déterminée par sa fonction de répartition. Ceci est énoncé dans la proposition suivante.

Proposition 3.9 (Egalité de deux lois) *Soient (E, T, p) et (E', T', p') des espaces probabilisés, X une variable aléatoire réelle sur E (c'est-à-dire une fonction mesurable de E, muni de T, dans R muni de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$) et X' une variable aléatoire réelle sur E'. On a alors $p_X = p_Y$ si et seulement si $p(\{X \le t\}) = p'(\{Y \le t\})$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On a aussi $p_X = p_Y$ si et seulement si $p(\{s \le X \le t\}) = p'(\{s \le Y \le t\})$ pour tout $s, t \in \mathbb{R}$, $s < t$. (Les inégalités strictes peuvent remplacées par des inégalités larges.)*

Démonstration : Cette proposition est une conséquence des théorèmes 2.4 et 2.5. Il suffit de remarquer que $p(\{X \le t\}) = p_X(]-\infty, t])$ et $p(\{s \le X \le t\}) = p_X([s, t])$ (et les mêmes égalités avec Y au lieu de X). ■

On rappelle que la notation $p(\{X \le t\})$ (si X est une v. a. réelle sur l'espace probabilisé (E, T, p)) signifie $p(\{\omega \in E;\ X(\omega) \le t\})$. Cette notation sera abrégée sous la forme $p(X \le t)$.

Définition 3.10 (Variables aléatoires équidistribuées)
Soient (E, T, p) et (E', T', p') des espaces probabilisés, X (resp. X') une variable aléatoire de (E, T, p) (resp. (E', T', p')) dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, on dit que les variables aléatoires X et X' sont équidistribuées si elles ont même loi de probabilité.

Définition 3.11 (Variable aléatoire discrète, entière, continue) *Soient (E, T, p) un espace probabilisé, X une variable aléatoire sur (E, T, p), p_X la loi de la variable aléatoire X et F_X sa fonction de répartition;*

1. *Si $X(E)$ est dénombrable, on dit que la variable aléatoire X est discrète.*
2. *Si $X(E) \subset \mathbb{N}$, on dit que la variable aléatoire X est entière.*

3. *Si la fonction de répartition F_X définie de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$ est continue, on dit que la variable aléatoire est continue.*

Définition 3.12 (Variables aléatoires indépendantes) *Soit $(E,T,p))$ un espace probabilisé.*

1. *Soit $N > 1$ et $X_1,\ldots,X_N$ une famille de variables aléatoires réelles. On dit que $X_1,\ldots,X_N$ sont indépendantes (ou que la famille ($X_1,\ldots,X_N$) est indépendante) si les tribus engendrées par $X_1,\ldots,X_N$ (on notera souvent $\tau(X)$ ou $\sigma(X)$ la tribu engendrée par la variable aléatoire X) sont indépendantes.*

2. *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite de variables aléatoires réelles. On dit que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est indépendante (ou que les v.a. $X_1,\ldots,X_n,\ldots$ sont indépendantes) si, pour tout $N > 1$, les v.a. $X_1,\ldots,X_N$ sont indépendantes.*

On appellera “suite de v.a.r.i.i.d. ” une suite de variables aléatoires réelles indépendantes identiquement distribuées (ce dernier point signifiant que toutes les v.a. de la suite ont même loi).

Soit $(E,T,p))$ un espace probabilisé et X_1,X_2,X_3 trois v.a.r. (c'est-à-dire variables aléatoires réelles). Le fait que X_1 soit indépendante de X_2 et X_3 n'implique pas que X_1 soit indépendante de (par exemple) X_2+X_3, même si X_2 et X_3 sont indépendantes. Mais, on a bien X_1 indépendante de X_2+X_3 si la famille (X_1,X_2,X_3) est indépendante. Ceci est une conséquence da la proposition suivante.

Proposition 3.10 (Indépendance et composition)
Soit $(E,T,p))$ un espace probabilisé, $n \geq 1$, $m \geq 1$ et $X_1,\ldots,X_n,Y_1,\ldots,Y_m$ des v.a.r indépendantes. Soit φ une fonction borélienne de R^n dans $\mathbb{R}$ et ψ une fonction borélienne de R^m dans $\mathbb{R}$. Alors, les v.a.r. $\phi(X_1,\ldots,X_n)$ et $\psi(Y_1,\ldots,Y_m)$ sont indépendantes. Nous avons ici décomposé la famille initiale de v.a.r. indépendantes en 2 groupes. la proposition peut se généraliser à une décomposition en un nombre quelconque de groupes.

Démonstration : La notation $\varphi(X_1,\ldots,X_n)$ est un peu incorrecte (mais toujours utilisée). Elle désigne (comme on le devine facilement) la composition de φ (qui va de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$) avec l'application de E dans $\mathbb{R}^n$ donnée par les X_i, $i=1,\ldots,n$.

La démonstration de cette proposition (et de sa généralisation à un nombre quelconque de groupes) est une conséquence simple de la proposition 2.11 dés que l'on remarque que la tribu engendrée par $\varphi(X_1,\ldots,X_n)$ est incluse dans la tribu engendrée par $X_1,\ldots,X_n$, ce que nous démontrons maintenant.

On note τ la tribu engendrée par $X_1,\ldots,X_n$ et X l'application de E dans $\mathbb{R}^n$ qui à $\omega \in E$ associe $(X_1(\omega,)\ldots,X_n(\omega))^t$. Il est facile de voir que $\{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ t.q. $X^{-1}(A) \in \tau\}$ est une tribu (sur $\mathbb{R}^n$). Si $A = \prod_{i=1}^n A_i$ avec $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour tout $i=1,\ldots,n$, on a $X^{-1}(A) = \cap_{i=1}^n X_i^{-1}(A_i) \in \tau$ (car $X_i^{-1}(A_i)$ appartient à $\tau(X_i)$ et donc à τ). Comme $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ est engendrée par l'ensemble des produits de boréliens de $\mathbb{R}$ (et même par l'ensemble des produits d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, voir l'exercice 2.6), on en déduit qie $\{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ t.q. $X^{-1}(A) \in \tau\}$ contient $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a donc $(\varphi(X))^{-1}(B) = X^{-1}(\varphi^{-1}(B)) \in \tau$ car $\varphi^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ (puisque φ est borélienne). ce qui prouve bien que la tribu engendrée par $\varphi(X_1,\ldots,X_n)$ est incluse dans la tribu engendrée par $X_1,\ldots,X_n$. ■

Nous verrons au chapitre 7 la conséquence principale de l'indépendance. Cette conséquence est que, si X,Y sont des v.a.r. indépendantes, la loi du couple (X,Y) est le produit des lois P_X et P_Y (c'est-à-dire , avec les notations du Chapitre 7, $P_{(X,Y)} = P_X \otimes P_Y$). Une propriété analogue est vraie pour une famille $(X_1,\ldots,X_n)$ de v.a.r. indépendantes.

Nous terminons ce paragraphe par un théorème très utile en probabilités sur la représentation d'une v.a. mesurable par rapport à une autre v.a..

Théorème 3.1 (V.a. mesurable par rapport à une autre v.a.) *Soient X et Y deux v.a. réelles définies sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Alors, la v.a. Y est mesurable par rapport à la tribu engendrée par X (notée $\tau(X)$) si et seulement si il existe une fonction borélienne f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $Y = f(X)$.*

Démonstration : La démonstration de ce résultat fait l'objet de l'exercice 3.14 (corrigé 46). Il est intéressant de remarquer que le démonstration de ce théorème faite dans le corrigé 46 donne les informations complémentaires suivantes :

- Y est $\tau(X)$-mesurable bornée si et seulement si il existe f borélienne bornée t.q. $Y = f(X)$,
- Y est $\tau(X)$-mesurable positive si et seulement si il existe f borélienne positive t.q. $Y = f(X)$.

La partie "si" de ces deux résultats est immédiate. Pour la partie "seulement si", il suffit de remarquer que la démonstration faite dans le corrigé 46 donne f t.q.

$$\mathrm{Im} f = \{f(t),\, t \in \mathbb{R}\} \subset \mathrm{Im}(Y) \cup \{0\}, \text{ avec } \mathrm{Im} Y = \{Y(\omega),\, \omega \in \Omega\}.$$

■

3.5 Convergence p.p., p.s., en mesure, en probabilité

On introduit ici plusieurs notions de convergence de fonctions définies sur un espace mesuré à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\overline{\mathbb{R}}_+$) et on donne des liens entre ces différentes convergences. On introduit les notions équivalentes pour les variables aléatoires en langage probabiliste.

Définition 3.13 (Egalité presque partout) *Soient (E, T, m) un espace mesuré, F un ensemble et f et g des fonctions définies de E dans F ($F = \mathbb{R}$ ou $F = \overline{\mathbb{R}}_+$, par exemple) ; on dit que $f = g$ m-presque partout (et on note $f = g$ m-p.p.) si l'ensemble $\{x \in E\,;\, f(x) \neq g(x)\}$ est négligeable, c'est à dire qu'il existe $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in A^c$.*

On peut remarquer que si f et g sont des fonctions mesurables de E (muni de la tribu T et de la mesure m) dans $\mathbb{R}$ (ou $\overline{\mathbb{R}}_+$), l'ensemble $\{x \in E\,;\, f(x) \neq g(x)\}$ (noté aussi $\{f \neq g\}$) appartient à T. Le fait que $f = g\, m$ p.p. revient donc à dire que $m(\{f \neq g\}) = 0$. Dans la cas où f ou g n'est pas mesurable, l'ensemble $\{f \neq g\}$ peut être négligeable sans appartenir à T (il appartient nécessairement à T si la mesure est complète, voir la définition 2.15).

En l'absence de confusion possible, on remplace m-p.p. par p.p.. Cette définition se traduit en langage probabiliste par:

Définition 3.14 (Egalité presque sûre) *Soient (E, T, p) un espace probabilisé, X et Y des variables aléatoires X et Y de (E, T) dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$; on dit que $X = Y$ p-presque sûrement (et on note $X = Y$ p.s.), si l'ensemble $\{x \in E\,;\, X(x) \neq Y(x)\}$ est négligeable.*

Définition 3.15 (Convergence presque partout) *Soient (E, T, m) un espace mesuré, F un ensemble, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de E dans F et f une fonction de E dans F ($F = \mathbb{R}$ ou $F = \overline{\mathbb{R}}_+$, par exemple) ; on dit que f_n converge presque partout vers f ($f_n \to f$ p.p.) si il existe une partie A de E, négligeable, t.q., pour tout élément x de A^c, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.*

Noter que la convergence simple entraîne la convergence presque partout.

La définition 3.15 se traduit en langage probabiliste par:

Définition 3.16 (Convergence presque sure) *Soient (E,T,p) un espace probabilisé, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires et X une variable aléatoire ; on dit que X_n converge presque sûrement vers X ($X_n \to X$ p.s.) si il existe une partie A de E, négligeable, t.q., pour tout élément x de A^c, la suite $(X_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $X(x)$.*

Définition 3.17 (Convergence presque uniforme) *Soient (E,T,m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ et $f \in \mathcal{M}$. On dit que f_n converge presque uniformément vers f ($f_n \to f$ p.unif.) si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in T$ t.q. $m(A) \le \varepsilon$ et f_n converge uniformément vers f sur A^c.*

La convergence presque uniforme entraîne la convergence presque partout (voir exercice 3.23).
Attention, la convergence "presque uniforme" ne donne pas la convergence "uniforme en dehors d'un ensemble de mesure nulle". La convergence "uniforme en dehors d'un ensemble de mesure nulle" est reliée à la convergence "essentiellement uniforme", c'est-à-dire la convergence pour le "sup essentiel", défini ci-après, ou pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ que nous verrons dans la section 6.1.2.

Définition 3.18 (sup essentiel) *Soient (E,T,m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}$. On dit que f est essentiellement bornée si il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que $|f| \le C$ p.p.. On appelle alors "sup essentiel de $|f|$", et on le note $\|f\|_\infty$, l'infimum des valeurs C telles que $|f| \le C$ p.p.. Si f n'est pas essentiellement bornée, on pose $\|f\|_\infty = \infty$.*

Remarquons que dans le cas où $(E,T,m) = (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$, le sup essentiel d'une fonction continue est la borne supérieure de sa valeur absolue (ceci fait l'objet de la proposition 6.4).

Définition 3.19 (Convergence essentiellement uniforme) *Soient (E,T,m) un espace mesuré, $f \in \mathcal{M}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$; on dit que f_n converge essentiellement uniformément vers f ($f_n \to f$ ess. unif.) si $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.*

Il est facile de voir que la convergence essentiellement uniforme entraîne la convergence presque uniforme, mais la réciproque est fausse (voir l'exercice 3.24). Le théorème suivant donne, dans le cas où la mesure est finie, un résultat très important qui fait le lien entre la convergence presque partout et la convergence presque uniforme.

Théorème 3.2 (Egorov) *Soient (E,T,m) un espace mesuré, tel que $m(E) < +\infty$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ et $f \in \mathcal{M}$. On suppose que $f_n \to f$ p.p.. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in T$ tel que $m(A) \le \varepsilon$ et f_n converge uniformément vers f sur A^c. (Autrement dit, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque uniformément vers f.)*

La démonstration de ce théorème fait l'objet de l'exercice 3.24. Attention, lorsque $m(E) = +\infty$, on peut trouver des suites de fonctions qui convergent presque partout et non presque uniformément.

Définition 3.20 (Convergence en mesure) *Soient (E,T,m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ et $f \in \mathcal{M}$. On dit que f_n converge en mesure vers f si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to+\infty} m(\{x \in E \;; |f(x) - f_n(x)| \ge \varepsilon\}) = 0. \tag{3.6}$$

Cette définition se traduit en langage probabiliste par:

Définition 3.21 (Convergence stochastique ou en probabilité) *Soient (E, T, p) un espace probabilisé, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires et X une variable aléatoire . On dit que X_n converge stochastiquement, ou en probabilité, vers X si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to+\infty} p(\{x \in X_n \ ; |X(x) - X_n(x)| \geq \varepsilon\}) = 0. \tag{3.7}$$

On peut montrer (cf exercice 3.22) que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f \in \mathcal{M}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en mesure vers $g \in \mathcal{M}$, alors $f = g$ p.p.. On montre aussi que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f \in \mathcal{M}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en mesure vers $g \in \mathcal{M}$, alors $(f_n + g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f + g \in \mathcal{M}$, et, si m est une mesure finie, $(f_n\, g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f\, g \in \mathcal{M}$. On montre à l'aide du théorème d'Egorov que si f_n converge vers f presque partout, et si $m(E) < +\infty$, alors f_n converge vers f en mesure. Réciproquement, si f_n converge vers f en mesure, alors il existe une sous-suite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers f presque uniformément (et donc presque partout). Ce second résultat est vrai même si $m(E) = +\infty$ (voir exercice 3.25).

On donne maintenant un résumé des différents types de convergence connus jusqu'à présent avec les relations existantes entre eux; les relations entre convergence presque partout et convergence en mesure (resp. convergence presque sure et convergence stochastique) sont étudiées dans l'exercice 3.25. (On en introduira bientôt encore quelques-unes. . .)

Terminologie "analyste"	**Terminologie "probabiliste"**
convergence simple (cs)	
convergence uniforme (cu)	
convergence presque partout (cpp)	convergence presque sure (cps)
convergence presque uniforme (cpu)	
convergence en mesure (cm)	convergence stochastique (cst)

On a les implications suivantes :

Terminologie "analyste"	**Terminologie "probabiliste"**
(cu) $\Rightarrow$ (cs) $\Rightarrow$ (cpp)	
(cu) $\Rightarrow$ (cpu) $\Rightarrow$ (cpp)	
(cpp) $\Rightarrow$ (cpu) si la mesure est finie	
(cm) $\Rightarrow$ (cpu) (et donc (cpp)) pour une sous-suite	(cst) $\Rightarrow$ (cps) pour une sous-suite
(cpp) $\Rightarrow$ (cm) si la mesure est finie	(cps) $\Rightarrow$ (cst) si la mesure est finie
(cpu) $\Rightarrow$ (cm)	

3.6 Exercices

Exercice 3.1 (Caractérisation des fonctions mesurables) ($\star$)*Corrigé 36 page 310*
Soient (E, T) un espace mesurable et f une application de E dans $\mathbb{R}$;

1. Montrer que $T_f = \{B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})\, ;\, f^{-1}(B) \in T\}$ est une tribu.

2. Soit $\mathcal{C}$ un ensemble qui engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

   (i) f est mesurable,

   (ii) $f^{-1}(C) \in T$, pour tout $C \in \mathcal{C}$.

Exercice 3.2 (Composition de fonctions mesurables) *Corrigé 37 page 310*
Soit (E, T) et (F, S) deux espaces mesurables. Soit $f : E \to F$ et $\varphi : F \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ est muni, comme toujours, de la tribu borélienne). On suppose que f et φ sont mesurables. Montrer que $\varphi \circ f$ est mesurable (de E dans $\mathbb{R}$).

Exercice 3.3 ($\mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}_+ \ldots$) *Corrigé 38 page 310*
Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi \geq 0$. On munit $\mathbb{R}$ (au départ et à l'arrivée) de la tribu borélienne. Montrer que φ est mesurable (on dit aussi borélienne) si et seulement si φ est mesurable quand on la considère comme une application de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ ($\overline{\mathbb{R}}_+$ étant aussi muni de la tribu borélienne).

Exercice 3.4 (Stabilité de $\mathcal{M}$) *Corrigé 39 page 311*

1. Soient (E, T), (E', T'), (E'', T'') des espaces mesurables, f (resp. g) une application de E dans E' (resp. de E' dans E''). On suppose que f et g sont mesurables. Montrer que $g \circ f$ est une application mesurable de E dans E''.
2. Soit (E, T) un espace mesurable, on munit $\mathbb{R}$ de la tribu des boréliens $\mathcal{B}(\mathbb{R})$; soient f et g des fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que $f^+ (= \sup(f, 0))$, $f^- (= -\inf(f, 0))$ sont des fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que $f + g$, fg et $|f|$ sont des fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$.
3. Soient (E, T) un espace mesurable, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$. On suppose que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge (dans $\mathbb{R}$) pour tout $x \in E$. On pose $f(x) = lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ (pour tout $x \in E$). Montrer que f est une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$.
4. Soit (E, T) un espace mesurable, on suppose qu'il existe $A \in T$ dont les sous-ensembles ne soient pas tous mesurables. Il existe donc $B \subset A$ t.q. $B \notin T$. Montrer que $h = 1_B - 1_{A\setminus B}$ n'est pas mesurable (de E dans $\mathbb{R}$), alors que $|h|$ l'est.

Exercice 3.5 (Mesurabilité des fonctions continues) *Corrigé 40 page 312*
Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On munit $\mathbb{R}$ (au départ et à l'arrivée) de la tribu borélienne

1. On suppose f continue. Montrer que f est mesurable (on dit aussi que f est borélienne).
2. On suppose f continue à droite (resp. gauche). Montrer que f est mesurable.
3. On suppose f croissante. Montrer que f est mesurable.

Exercice 3.6 (Mesurabilité de $1_\mathbb{Q}$)
On munit $\mathbb{R}$ de sa tribu borélienne. La fonction $1_\mathbb{Q}$ est-elle mesurable ?

Exercice 3.7
Soit (E, T, p) un espace probabilisé et X une variable aléatoire sur (E, T) ;

1. On prend pour X la variable aléatoire nulle, c'est-à-dire $X : E \to \mathbb{R}$, $X(x) = 0$, pour tout $x \in E$. Calculer la loi de probabilité p_X de X. En déduire que la connaissance de p_X ne permet pas en général de déterminer la probabilité p sur E.
2. Montrer que p_X détermine p de manière unique si la tribu engendrée par X (voir la définition 3.6), notée T_X, est égale à T. Cette condition est-elle nécessaire ?

Exercice 3.8
Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur un ensemble E et $A \in \mathcal{A}$ tel que : $B \in \mathcal{A}$ et $B \subset A$ implique $B = \emptyset$ ou $B = A$. Montrer que toute fonction mesurable (de E dans $\mathbb{R}$) est constante sur A. En particulier si $\mathcal{A}$ est engendrée par une partition, une fonction mesurable est constante sur chaque élément de la partition. Donner une fonction constante sur tout élément d'une partition mais qui ne soit pas mesurable. [Prendre comme partition de $\mathbb{R}$ tous les singletons. . .]

Exercice 3.9 (Egalité presque partout) *Corrigé 41 page 312*

1. Soient f et g des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et λ la mesure de Lebesgue ; montrer que $f = g$ λ p.p. si et seulement si $f = g$.

2. Soient f et g des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et δ_0 la mesure de Dirac en 0 ; montrer que $f = g$ δ_0 p.p. si et seulement si $f(0) = g(0)$.

Exercice 3.10 *Corrigé 42 page 313*
Soit $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On munit $\mathbb{R}^p$ de sa tribu borélienne (pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$). On suppose que f est mesurable par rapport à $x \in \mathbb{R}^N$, pour tout $y \in \mathbb{R}$, et que f est continue a gauche par rapport a $y \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$.
Pour $n > 1$ et $p \in \mathbb{Z}$, on pose : $a_p^n = \frac{p}{n}$, $p \in \mathbb{Z}$; on définit la fonction f_n, $n > 1$, de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x, y) = f(x, a_p^n), \text{ si } y \in [a_p^n, a_{p+1}^n[$$

1. Montrer que f_n converge simplement vers f lorsque $n \to +\infty$.

2. Montrer que f_n est mesurable. [On pourra utiliser, sans le démontrer, le fait que $A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{N+1})$ si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ceci est démontré dans l'exercice 2.5 page 42 pour $N = 1$ et dans l'exercice 7.1 pour $N > 1$.]

3. Montrer que f est mesurable.

[On pourra se contenter du cas $N = 1$. . .]

Exercice 3.11 (Tribu de Borel sur $\overline{\mathbb{R}}_+$) *Corrigé 43 page 314*

1. Montrer que $\{[0, \beta[, \beta \in \mathbb{R}_+^\star\}$ engendre $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.

2. Montrer que $\{[0, \beta[, \beta \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+^\star\}$ engendre $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.

3. (Question plus difficile.) Montrer que $\{]0, \beta[, \beta \in \mathbb{R}_+^\star\}$ n'engendre pas $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.

Exercice 3.12 *Corrigé 44 page 315*
Soit f une fonction mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ est muni de sa tribu borélienne, notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$). On se propose de montrer que le graphe de f est un borélien de $\mathbb{R}^2$. On admettra le résultat suivant, vu dans l'exercice 2.5:

$$A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2).$$

On munit aussi $\mathbb{R}^2$ de sa tribu borélienne. Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on pose $F(x, y) = f(x)$ et $H(x, y) = y$.

1. Montrer que F et H sont mesurables de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

2. On pose $G(f) = \{(x, y)^t \in \mathbb{R}^2;\ y = f(x)\}$ ($G(f)$ est donc le graphe de f). Montrer que $G(f) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 3.13 (mesurabilité au sens de Lusin) *Corrigé 45 page 315*
Soit m une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, finie sur les compacts de $\mathbb{R}^N$. On rappelle (cf. cours) que m est nécessairement régulière (c'est-à-dire que pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe F fermé et O ouvert t.q. $F \subset A \subset O$ et $m(O \setminus F) < \varepsilon$).

Soit $f \in \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. On dit que f est "mesurable au sens de Lusin" si pour tout compact K et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe K_1 compact, $K_1 \subset K$, t.q. $m(K \setminus K_1) \leq \varepsilon$ et $f_{|K_1} \in C(K_1, \mathbb{R})$.

1. On suppose, dans cette question, que $f = 1_A$ avec $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. Montrer que f est mesurable au sens de Lusin. [Construire K_1 avec K, F et O, où F et O sont donnés par la régularité de m appliquée à l'ensemble A.]
2. On suppose, dans cette question, que f est étagée (c'est-à-dire $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$). Montrer que f est mesurable au sens de Lusin.
3. On suppose que f est mesurable (c'est-à-dire $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$). Montrer que f est mesurable au sens de Lusin. [On rappelle qu'une fonction mesurable est limite simple de fonctions étagées. On pourra utiliser le théorème d'Egorov, Théorème 3.2, et la question précédente.]

Exercice 3.14 (V.a. mesurable par rapport à une autre v.a.) *Corrigé 46 page 317*
Dans cet exercice, on démontre le théorème 3.1. Soit X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On veut veut montrer que Y est mesurable par rapport à la tribu engendrée par X (notée $\tau(X)$ si et seulement si il existe une fonction borélienne f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $Y = f(X)$ (c'est-à-dire , plus précisément, que $Y = f \circ X$).

1. Montrer que si Y est de la forme $Y = f(X)$ où f est une fonction borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors Y est $\tau(X)$-mesurable.

On suppose maintenant que Y est $\tau(X)$-mesurable.

2. On suppose, dans cette question, qu'il existe une suite de réels (a_j) tels que $a_j \neq a_k$ pour $j \neq k$ et une suite d'événements (A_j) disjoints deux à deux tels que
$$Y = \sum_j a_j 1_{A_j}.$$
On suppose aussi que $\cup_j A_j = \Omega$. Montrer que, pour tout j, $A_j \in \tau(X)$ et qu'il existe une fonction borélienne $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $Y = f(X)$.
3. Soit n un entier. On définit la fonction $\phi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par: $\phi_n(x) = \frac{1}{n}[nx]$ où $[\cdot]$ désigne la partie entière. ($[x]$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x.)
   (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\phi_n(x)$ converge vers x, quand $n \to \infty$.
   (b) On pose $Y_n = \phi_n(Y)$. Montrer que Y_n est $\tau(X)$ mesurable.
4. Terminer la preuve du théorème.

Maintenant, on se demande dans quelle mesure la fonction f est unique. On note P_X la loi de X.

5. Soit f et g deux fonctions boréliennes t.q. $Y = f(X) = g(X)$. Montrer que
$$P_X(f = g) = 1.$$

Exercice 3.15 (Composition de v.a.) *Corrigé 47 page 319*
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^\star$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables alélatoires réelles. (c'est-à-dire à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de la tribu des boréliens). On définit Z par
$$\forall \omega \in \Omega\,,\ \ Z(\omega) = Y_{N(\omega)}(\omega).$$
Montrer que Z est une variable aléatoire.

Exercice 3.16 (Evénements, tribus et v.a. indépendantes) *Corrigé 48 page 319*
Soit $(E, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. (Indépendance de 2 évènements) Soit $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$. Montrer que A_1 et A_2 sont indépendants (c'est-à-dire $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$) si et seulement si les tribus $\tau(\{A_1\})$ et $\tau(\{A_2\})$ sont indépendantes (c'est-à-dire $P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P(B_2)$ pour tout $B_1 \in \tau(\{A_1\})$ et $B_2 \in \tau(\{A_2\})$).
2. (Indépendance de n évènements, $n \geq 2$) Soit $n \geq 2$, $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$. Montrer que les événements $A_1, \ldots, A_n$ vérifient "$P(\cap_{i\in I} A_i) = \prod_{i\in I} P(A_i)$ pour tout $I \subset \{1, \ldots, n\}$" si et seulement si les tribus $\tau(\{A_1\}), \ldots, \tau(\{A_n\})$ sont indépendantes (c'est-à-dire $P(\cap_{i=1}^n B_i) = \prod_{i=1}^n P(B_i)$ pour tout $B_i \in \tau(\{A_i\})$, $i \in \{1, \ldots, n\}$).
3. En donnant un exemple (avec $n \geq 3$), montrer que l'on peut avoir n évévements, notés $A_1, \ldots, A_n$, indépendants deux à deux, sans que les événements $A_1, \ldots, A_n$ soient indépendants.
4. Soit $A \in \mathcal{A}$.
   (a) On suppose que $A \in \mathcal{A}_1$ et $A \in \mathcal{A}_2$ et que $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont deux tribus indépendantes (et contenues dans $\mathcal{A}$). Montrer que $P(A) \in \{0, 1\}$.
   (b) Montrer que $P(A) \in \{0, 1\}$ si et seulement si A est indépendant de tous les éléments de $\mathcal{A}$.
5. Soit $n \geq 1$ et $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$. Montrer que les événements $A_1, \ldots, A_n$ sont indépendants si et seulement si les v.a. $1_{A_1}, \ldots, 1_{A_n}$ sont indépendantes.

Exercice 3.17 (Indépendance 3 par 3 et dépendance globale)
Trouver un espace de probabilités et 4 v.a.r. prenant leurs valeurs dans $\{-1, 1\}$ t.q. les 4 v.a. soient 3 par 3 indépendantes mais ne soient pas indépendantes. [On pourra considérer des produits de v.a. indépendantes.]

Exercice 3.18 (Transformation d'une v.a.r. de loi uniforme en une v.a.r. de loi donnée)
Soit $(E, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilités, X une v.a.r. et U une v.a.r. de loi $\mathcal{U}([0, 1])$, Soit F la fonction de répartition de X (i. e. $F(x) = P(X \leq x)$ pour $x \in \mathbb{R}$). On définit G de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la manière suivante :
$$G(u) = \inf\{x \in \mathbb{R};\ F(x) \geq u\},\ \text{si } u \in]0, 1[,$$
$$G(u) = 0,\ \text{si } u \notin]0, 1[.$$
Montrer que la v.a.r. $Y = G(U)$ a la même loi que X. [On pourra montrer que $P(G(U) \leq x) = P(U \leq F(x))$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.]

Exercice 3.19 (Limite croissante d'une suite de v.a.r.)
Soit $(E, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilités, Y une v.a.r., $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. et X une application de E dans $\mathbb{R}$. On suppose que $X_n \uparrow X$, quand $n \to \infty$, et que X_n et Y sont indépendantes, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que X est une v.a.r. et que X et Y sont indépendantes. (N.B. La conclusion est encore vraie sans la croissance de la suite X_n.)

Exercice 3.20 (Construction de v.a. indépendantes de lois uniformes sur un intervalle)
Soit $(E, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilités.

1. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$, une suite de v.a.r.i.i.d. avec $P(U_n = 0) = P(U_n = 1) = 1/2$. Montrer que V, définie par $V = \sum_{n\geq 1} U_n 2^{-n}$ est une v.a. de loi $\mathcal{U}([0,1])$.
2. Soit $U_{n,k}$, $n, k \geq 1$, des v.a.r.i.i.d. avec $P(U_{n,k} = 0) = P(U_{n,k} = 1) = 1/2$. Montrer les v. a. V_n, $n \geq 1$ définies par $V_n = \sum_{k\geq 1} U_{n,k} 2^{-k}$ sont des v.a.r.i.i.d. de loi $\mathcal{U}([0,1])$.

Exercice 3.21 (Loi du "produit de la loi exponentielle par ± 1")
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X, Y deux v.a.r. indépendantes. On suppose que X suit une loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$), c'est-à-dire que P_X est une mesure de densité par rapport à la mesure de Lebesgue et cette densité est la fonction f définie par $f(x) = \lambda \exp(-\lambda x) 1_{]0,+\infty[}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. On suppose que Y est t. q. $P(Y = 1) = P(Y = -1) = 1/2$. Donner la loi de XY.

Exercice 3.22 (Convergence en mesure) $(\star\star)$ *Corrigé 49 page 322*
Soient (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si il existe f et g fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$ telles que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en mesure vers f et g, alors $f = g$ p.p..

   [*On pourra commencer par montrer que, pour tout* $\delta > 0$, $m(\{x \in E\,;\, |f(x) - g(x)| > \delta\}) = 0$].
2. Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f \in \mathcal{M}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $g \in \mathcal{M}$, alors $(f_n + g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f + g \in \mathcal{M}$.
3. On suppose maintenant que m est une mesure finie. Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f \in \mathcal{M}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers g, alors $(f_n\, g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f\, g \in \mathcal{M}$.

   [*On pourra commencer par montrer que, si* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ *converge en mesure vers* $f \in \mathcal{M}$, *alors, pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* n_0 *et* $k_0 \in \mathbb{N}$ *tels que, si* $n \geq n_0$ *et* $k \geq k_0$, *on a* $m(\{x \in E\,;\, |f_n(x)| \geq k\}) \leq \varepsilon$]. Donner un contre-exemple au résultat précédent lorsque $m(E) = \infty$.

Exercice 3.23 (Convergence presque uniforme et convergence p.p.) *Corrigé 50 page 324*
Soient (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ (c'est-à-dire une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$) et $f \in \mathcal{M}$. On suppose que $f_n \to f$ presque uniformément (c'est à dire que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $A \in T$ t.q. $m(A) \leq \varepsilon$ et $f_n \to f$ uniformément sur A^c). Montrer que $f_n \to f$ p.p., quand $n \to \infty$.

Exercice 3.24 (Théorème d'Egorov) $(\star\star)$ *Corrigé 51 page 324*
Soient (E, T, m) un espace mesuré fini, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$, et f une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f_n \to f$ p.p., lorsque $n \to +\infty$.
Pour $j \in \mathbb{N}^\star$ et $n \in \mathbb{N}$, on définit :

$$A_{n,j} = \{x\,;\, |f(x) - f_n(x)| \geq \frac{1}{j}\}, \text{ et } B_{n,j} = \bigcup_{p\geq n} A_{p,j} \tag{3.8}$$

1. Montrer que à j fixé, $\lim_{n\to+\infty} m(B_{n,j}) = 0$.
2. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe A tel que $m(A) \le \varepsilon$ et $f_n \to f$ uniformément sur A^c lorsque $n \to +\infty$. En déduire le théorème d'Egorov (théorème 3.2).

   [*On cherchera A sous la forme :* $\bigcup_{j\in\mathbb{N}^\star} B_{n_j,j}$*, avec un choix judicieux de* n_j*.*]
3. Montrer, par un contre exemple, qu'on ne peut pas prendre $\varepsilon = 0$ dans la question précédente.
4. Montrer, par un contre exemple, que le résultat du théorème d'Egorov est faux lorsque $m(E) = +\infty$.

Exercice 3.25 (Convergence en mesure et convergence p.p.) *Corrigé 52 page 326*
Soient (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$, et f une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$. On rappelle que, par définition, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en mesure vers f si :

$$\forall\,\varepsilon > 0, \lim_{n\to+\infty} m(\{x \in E; |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0. \tag{3.9}$$

1. On suppose ici que $m(E) < +\infty$.
   (a) Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers f presque partout, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers f en mesure [*Utiliser le théorème d'Egorov.*]
   (b) (Question plus difficile.) Montrer par un contrexemple que la réciproque de la question précédente est fausse.
2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy en mesure si :

   $$\forall\,\varepsilon > 0, \forall\delta > 0, \exists n \in \mathbb{N}; p, q \ge n \Rightarrow m(\{x \in E; |f_p(x) - f_q(x)| > \varepsilon\}) \le \delta. \tag{3.10}$$

   Montrer que si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en mesure vers f, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy en mesure.
3. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy en mesure ; montrer qu'il existe une fonction mesurable g et une sous-suite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, telles que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in T$ vérifiant $m(A) \le \varepsilon$ et tel que $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g sur A^c. [*On pourra construire la sous-suite* $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *de telle sorte que* $m(A_k) \le 2^{-k}$*, avec* $A_k = \{x \in E; |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| > 2^{-k}\}$*, et chercher A sous la forme* $\bigcup_{k\ge p} A_k$*, où p est convenablement choisi.*]
4. Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en mesure vers f, il existe une sous-suite qui converge vers f presque partout. [*On pourra commencer par montrer que la suite* $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *construite à la question précédente converge presque partout et en mesure.*]

Exercice 3.26
Soient (E, T, m) un espace mesuré fini. On pose, pour f et g fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire $f, g \in \mathcal{M}$) :

$$d(f, g) = \int \frac{|f - g|}{1 + |f - g|} dm.$$

1. Montrer que d est bien définie et prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$ (c'est-à-dire que $\frac{|f-g|}{1+|f-g|} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ pour tout $f,g \in \mathcal{M}$) et que d est une semi-distance sur $\mathcal{M}$ (c'est-à-dire que $d(f,g) = d(g,f)$, pour tout $f,g \in \mathcal{M}$, et que $d(f,h) \leq d(f,g) + d(g,h)$, pour tout $f,g,h \in \mathcal{M}$).

2. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ et $f \subset \mathcal{M}$. Montrer que f_n converge en mesure vers f lorsque $n \to +\infty$ si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} d(f_n,f) = 0$. [Il est probablement utile de considérer, pour $\varepsilon > 0$, les ensembles $A_n = \{x \in E; |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}$.]

Exercice 3.27 (Mesurabilité d'une limite p.p.)
Soient (E,T,m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}(E,T)$ et $f : E \to \mathbb{R}$. On suppose que $f_n \to f$ p.p.. Montrer que $f \in \mathcal{M}(E,\overline{T})$, où $(E,\overline{T},\overline{m})$ est le compété de (E,T,m) (voir le théorème 2.1). En donnant un exemple (c'est-à-dire en choisissant convenablement (E,T,m), $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et f), montrer qu'on peut avoir $f \notin \mathcal{M}(E,T)$.

Exercice 3.28 (Essentiellement uniforme versus presque uniforme) *Corrigé 53 page 327*
Soit (E,T,m) un espace mesuré. Pour $f \in \mathcal{M}$, on pose $A_f = \{C \in \mathbb{R}, |f| \leq C \text{ p.p.}\}$. Si $A_f \neq \emptyset$, on pose $\|f\|_\infty = \inf A_f$. Si $A_f = \emptyset$, on pose $\|f\|_\infty = \infty$.

1. Soit $f \in \mathcal{M}$ t.q. $A_f \neq \emptyset$. Montrer que $\|f\|_\infty \in A_f$.

2. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ et $f \in \mathcal{M}$.

   (a) On suppose, dans cette question, que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ quand $n \to \infty$ (on dit que $f_n \to f$ essentiellement uniformément). Montrer que $f_n \to f$ presque uniformément.

   (b) En donnant un exemple (c'est-à-dire en choisissant convenablement (E,T,m), $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et f), montrer qu'on peut avoir $f_n \to f$ presque uniformément, quand $n \to \infty$, et $\|f_n - f\|_\infty \not\to 0$.

Exercice 3.29
Soit $\mathcal{A}$ la classe des sous-ensembles de $\mathbb{Z}$ tels que

$$\text{pour } n > 0, \quad 2n \in A \Longleftrightarrow 2n+1 \in A.$$

1. Montrer que $\mathcal{A}$ est une tribu.

2. Montrer que l'application $\varphi : n \mapsto n+2$ est une bijection de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$, mesurable quand $\mathbb{Z}$ est muni (au départ et à l'arrivée) de la tribu $\mathcal{A}$ (c'est à dire t.q. que $\varphi^{-1}(A) \in \mathcal{A}$ pour tout $A \in \mathcal{A}$). Montrer que l'inverse de φ n'est pas mesurable.

Exercice 3.30
On considère des applications f de E dans $\mathbb{R}$. On note $\sigma(f) = \{f^{-1}(A), A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ ($\sigma(f)$ est la tribu image réciproque de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ par f).

1. Décrire $\sigma(f)$ dans chacun des cas suivants:

   (a) $E = \mathbb{R}$ et $f(x) = x$ ou $f(x) = x^2$ ou $f(x) = |x|$.

   (b) $E = \mathbb{R}^2$ et $f(x,y) = x + y$.

2. Montrer que les singletons sont tous dans $\sigma(f)$ si et seulement si f est injective.

3. Dans le cas général, montrer qu'une fonction g de E dans $\mathbb{R}$ est $\sigma(f)$-mesurable si et seulement si il existe une fonction borélienne φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ t.q. $g = \varphi \circ f$. [On pourra commencer par le cas où g est étagée, puis utiliser un argument de limite].

4. Montrer que l'on a toujours une fonction bornée g t.q. $\sigma(g) = \sigma(f)$.

Exercice 3.31 (Mesurabilité des troncatures) *Corrigé 54 page 328*
Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable et f une fonction mesurable de X dans $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ est muni, comme toujours quand on ne le précise pas, de la tribu borélienne). Pour $a > 0$, on définit la fonction "tronquée" :

$$f_a(x) = \begin{cases} a & \text{si} \quad f(x) > a \\ f(x) & \text{si} \quad |f(x)| \leq a \\ -a & \text{si} \quad f(x) < -a \end{cases}$$

Montrer que f_a est mesurable.

Exercice 3.32
Soit (E, T) un espace mesurable (on munit $\mathbb{R}$ de la tribu des boréliens $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, comme toujours). Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$, et A l'ensemble des points $x \in E$ tels que $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ne soit pas de Cauchy. Montrer que A est mesurable (i.e. $A \in T$).

Exercice 3.33
Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$-mesurable. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose : $f_\varphi(x) = \varphi(x, x)$.

1. Montrer que f_φ est $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mesurable.

2. Soient φ et $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$-mesurables. Montrer que $\varphi = \psi$ λ_2-p.p. $\not\Rightarrow f_\varphi = f_\psi$ λ-p.p.. (λ_2 est la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ dont on suppose l'existence).

3. Soient φ et $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$-mesurables t.q. :

   (a) $\varphi(x, .)$ et $\psi(x, .)$ sont continues p.p. en $x \in \mathbb{R}$
   (b) $\varphi(, .y)$ et $\psi(., y)$ sont mesurables pour tout $y \in \mathbb{R}$

   (Ces fonctions sont dites de "Carathéodory".)

   (a) Montrer que φ et ψ sont $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$-mesurables.
   (b) Montrer que $\varphi = \psi$ λ_2-p.p. $\Rightarrow \varphi(x, .) = \psi(x, .)$ partout, p.p. en $x \in \mathbb{R}$. En déduire que si $\varphi = \psi$ λ_2-p.p, alors $f_\varphi = f_\psi$ λ-p.p..

Exercice 3.34 (Exemple de tribu engendrée)
Dans cet exercice, on s'intéresse à la tribu $\tau(X)$ engendrée par la variable aléatoire X définie sur Ω, muni de la tribu $\mathcal{A}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de la tribu borélienne.

1. (Cas d'un lancer de dé) Dans cette question, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega))$ et X est la variable aléatoire définie par $X(\omega) = 1$ lorsque ω est pair, $X(\omega) = 0$ sinon. Montrer que $\tau(X)$ est formé de 4 éléments.

2. (Cas de n tirages à pile ou face) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, $\Omega = \{0, 1\}^n$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega))$ et $k \in \{1, \cdots, n\}$. La variable aléatoire X représente le k-ième tirage, X est donc l'application $\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_n) \mapsto \omega_k$. Montrer que $\tau(X)$ est ici aussi formé de 4 éléments.

3. Dans cette question, on prend $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et, pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) = \omega - [\omega]$, où $[\omega]$ désigne la partie entière de ω (c'est-à-dire $[\omega] = \max\{n \in \mathbb{Z}$, t.q. $n \leq \omega\}$. Si C est un borélien inclus dans $[0, 1[$ (ce qui est équivalent à dire $C \in \mathcal{B}([0, 1[)$), on pose $\varphi(C) = \cup_{k\in\mathbb{Z}} C_k$, avec $C_k = \{x + k$, $x \in C\}$. Montrer que $\tau(X) = \{\varphi(C), C \in \mathcal{B}([0, 1[)\}$.

Exercice 3.35 (Tribu et partition)
Soit Ω un ensemble. On appelle partition de Ω une famille finie ou dénombrable de parties non vides de Ω et disjointes deux à deux et dont l'union est égale à Ω. Les éléments d'une partition sont appelés atomes.

1. Soit $a = \{A_i\,;\, i \in I\}$ une partition de Ω et soit $\tau(a)$ la tribu engendrée par a. Montrer que

$$\tau(a) = \{\bigcup_{j\in J} A_j \text{ où } J \subset I\}\,.$$

   En déduire qu'une v.a. réelle est $\tau(a)$-mesurable si et seulement si elle est constante sur tous les atomes de a.

   Une partition a est dite plus fine qu'une partition b si tous les atomes de b s'écrivent comme union d'atomes de a.

2. Montrer que si a est plus fine que b et si b est plus fine que a alors a et b sont égales.

3. Montrer que si a et b sont deux partitions telles que $\tau(a) = \tau(b)$ alors a et b sont égales.

Exercice 3.36 (Fonctions constantes)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et X une variable aléatoire (réelle). On suppose que, pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a $P(X^{-1}(B)) = 0$ ou 1. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ t.q. $X = \alpha$ p.s.. [On pourra, par exemple, introduire la fonction φ de $\mathbb{R}$ dans $[0, 1]$ définie par $\varphi(a) = P(X^{-1}(] - \infty, a]))$.]

Chapter 4

Fonctions intégrables

Maintenant qu'on a construit un espace mesuré (E, T, m) (dont un exemple fondamental est $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, on voudrait généraliser la notion d'intégrale à cet espace, c'est-à-dire introduire une application qui à f, fonction de E dans $\mathbb{R}$, associe un réel, dépendant de la mesure m, que nous noterons $\int f dm$, tel que:

- Si $f = 1_A$, $\quad A \in T$, alors $\int f dm = m(A)$,
- L'application ainsi définie soit linéaire, c'est-à-dire que pour toutes fonctions f et g définies de E dans $\mathbb{R}$, $\int(\alpha f + \beta g)dm = \alpha \int f dm + \beta \int g dm, \quad \forall \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

En fait, on ne peut pas définir une telle application sur *toutes* les fonctions de E dans $\mathbb{R}$, nous allons la définir seulement sur les fonctions que nous appellerons "intégrables".

4.1 Intégrale d'une fonction étagée positive

Soit (E, T, m) un espace mesuré. On rappelle que $\mathcal{E}_+$ est l'ensemble des fonctions étagées de E dans $\mathbb{R}$, ne prenant que des valeurs positives ou nulles. Si $f \in \mathcal{E}_+$, f non nulle, le lemme 3.1 nous donne, en particulier, l'existence de $(a_i, A_i)_{i=1,\ldots,n} \subset \mathbb{R}_+^\star \times T$ t.q. $A_i \cap A_j = \emptyset$, si $i \neq j$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, et $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$. D'autre part, le lemme 3.2 nous permet d'affirmer que, pour une fonction étagée positive qu'on écrit sous la forme : $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$, où les A_i sont deux à deux disjoints et les a_i sont strictement positifs, la valeur $\sum_{i=1}^n a_i m(A_i)$ est indépendante de la décomposition choisie. On peut donc définir l'intégrale sur $\mathcal{E}_+$ de la manière suivante :

Définition 4.1 (Intégrale d'une fonction de $\mathcal{E}_+$) *Soit (E, T, m) un espace mesuré et soit f de E dans $\mathbb{R}$ une fonction étagée positive non nulle (c'est-à-dire $f \in \mathcal{E}_+$). Soient $(A_i)_{i=1,\ldots,n} \subset T$ une famille de parties disjointes deux à deux (i.e. t.q. $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$) et n réels $a_1, ..., a_n$ strictement positifs tels que $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$. On définit l'intégrale de f, qu'on note $\int f dm$, par : $\int f dm = \sum_{i=1}^n a_i m(A_i)$ (on a donc $\int f dm \in \overline{\mathbb{R}}_+$). D'autre part, si $f = 0$, on pose $\int f dm = 0$.*

Remarque 4.1 En adoptant la convention $0 \times +\infty = 0$, on peut aussi remarquer que si $f = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i} \in \mathcal{E}_+$, où la famille $(A_i)_{i=1,\ldots,n} \subset T$ est t.q. $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$, et où les réels $a_1, ..., a_n$ sont supposés positifs seulement, on a encore :

$$\int f dm = \sum_{i=1}^{n} a_i m(A_i). \tag{4.1}$$

Proposition 4.1 (Propriétés de l'intégrale sur $\mathcal{E}_+$) *Soient f et $g \in \mathcal{E}_+$, α et $\beta \in \mathbb{R}_+^\star$, alors :*

- *linéarité positive :* $\alpha f + \beta g \in \mathcal{E}_+$, *et* $\displaystyle\int (\alpha f + \beta g) dm = \alpha \int f dm + \beta \int g dm$,
- *monotonie :* $f \geq g \Rightarrow \int f dm \geq \int g dm$.

Démonstration :
Il est facile de montrer que si $f \in \mathcal{E}_+$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^\star$ on a $\alpha f \in \mathcal{E}_+$ et $\int \alpha f dm = \alpha \int f dm$. Pour montrer la linéarité positive, il suffit donc de considérer le cas $\alpha = \beta = 1$ et f et g non nulles. Soit donc f, $g \in \mathcal{E}_+$, non nulles. D'après le lemme sur la décomposition canonique des fonctions étagées positives non nulles (lemme 3.1), on peut écrire $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$ et $g = \sum_{j=1}^m b_j 1_{B_j}$ avec $0 < a_1 < \ldots < a_n$, $A_i \neq \emptyset$ pour tout i, $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$, $0 < b_1 < \ldots < b_m$, $B_j \neq \emptyset$ pour tout j, $B_j \cap B_i = \emptyset$ si $j \neq i$. En posant $a_0 = b_0 = 0$, $A_0 = (\cup_{i=1}^n A_i)^c$ et $B_0 = (\cup_{j=1}^n B_j)^c$, on a aussi $f = \sum_{i=0}^n a_i 1_{A_i}$, $g = \sum_{j=0}^m b_j 1_{B_j}$ et on peut écrire $f + g = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (a_i + b_j) 1_{A_i \cap B_j} = \sum_{(i,j)\in K} (a_i + b_j) 1_{A_i \cap B_j}$, avec $K = \{(i,j) \in \{0, \ldots, n\} \times \{0, \ldots, m\} \setminus (0,0)\}$.
On a donc $f + g \in \mathcal{E}_+$ et $\int (f+g) dm = \sum_{(i,j)\in K} (a_i + b_j) m(A_i \cap B_j)$. On en déduit $\int (f+g) dm = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^m a_i m(A_i \cap B_j) + \sum_{j=1}^m \sum_{i=0}^n b_j m(A_i \cap B_j) = \sum_{i=1}^n a_i m(A_i) + \sum_{j=1}^m b_j m(B_j)$ (car $(A_0, \ldots, A_n)$ et $(B_0, \ldots, B_m)$ sont des partitions de E). On a donc bien montré $\int (f+g) dm = \int f dm + \int g dm$.

Il reste à montrer la monotonie. Soit f, $g \in \mathcal{E}_+$ t.q. $f \geq g$. On a donc $f - g \in \mathcal{E}_+$ (on rappelle que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, voir la proposition 3.1) et donc la linéarité positive nous donne que $\int f dm = \int (f-g) dm + \int g dm \geq \int g dm$ car $\int (f-g) dm \geq 0$.

■

Remarque 4.2

1. Une conséquence directe de la linéarité positive de l'intégrale sur $\mathcal{E}_+$ est que, si $f \in \mathcal{E}_+$, pour n'importe quelle décomposition de f : $f = \displaystyle\sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i} \in \mathcal{E}_+$, $a_1, ..., a_n \geq 0$ et $(A_i)_{i=1,\ldots,n} \subset T$ (on ne suppose plus $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$), on a encore, par linéarité positive :
$$\int f dm = \sum_{i=1}^n a_i \int 1_{A_i} = \sum_{i=1}^n a_i m(A_i), \tag{4.2}$$
en posant $a_i m(A_i) = 0$ si $a_i = 0$.
2. Une conséquence de la monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{E}_+$ est que, pour tout $f \in \mathcal{E}_+$, on a :
$$\int f dm = \sup\{\int g dm, g \in \mathcal{E}_+, g \leq f\}.$$

4.2 Intégrale d'une fonction mesurable positive

On donne maintenant un petit lemme fondamental qui va permettre de définir l'intégrale des fonctions de $\mathcal{M}_+$.

Lemme 4.1 *Soient (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$, et $g \in \mathcal{E}_+$, tels que :*

- *$f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $x \in E$,*
- *$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \geq g(x)$, pour tout $x \in E$,*

alors

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, dm \geq \int g \, dm. \tag{4.3}$$

Noter que la suite $(\int f_n dm)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de $\overline{\mathbb{R}}_+$, donc sa limite existe dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Démonstration : Pour $x \in E$, on pose $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ (cette limite existe et appartient à $\overline{\mathbb{R}}_+$). Il se peut que $f \notin \mathcal{E}_+$, mais on a toujours $f \in \mathcal{M}_+$ et les hypothèses du lemme donne $f_n \uparrow f$ quand $n \to \infty$.

Soit $\alpha \in]0, 1[$, on définit, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$A_n = \{x \in E \,;\, \alpha g(x) \leq f_n(x)\}. \tag{4.4}$$

On a donc $A_n = (f_n - \alpha g)^{-1}([0, \infty[) \in T$, $A_n \subset A_{n+1}$ (car $f_n \leq f_{n+1}$) et $E = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. En effet, si $x \in E$, on distingue 2 cas :

1. Si $g(x) = 0$, alors $x \in A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $x \in \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$,
2. Si $g(x) > 0$, on a alors $\alpha g(x) < g(x) \leq \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Il existe donc n_x (dépendant de x) t.q. $x \in A_n$ pour $n \geq n_x$. Donc, $x \in \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

On a donc bien montré que $E = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. (Comme $A_n \subset A_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut aussi remarquer que la suite de fonctions $(\alpha g 1_{A_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement et en croissant vers la fonction αg.)

On remarque maintenant que $\alpha g 1_{A_n} \in \mathcal{E}_+$, $f_n \in \mathcal{E}_+$ et que, grâce à la définition de A_n, on a $\alpha g 1_{A_n} \leq f_n$. La monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{E}_+$ donne donc :

$$\int \alpha g 1_{A_n} dm \leq \int f_n dm. \tag{4.5}$$

En utilisant la décomposition canonique de g (lemme 3.1) il existe $(b_i, B_i)_{i=1,\ldots,p}$ t.q. $0 < b_1 < \ldots < b_p$, $B_i \neq \emptyset$ pour tout i, $B_i \cap B_j = \emptyset$ si $i \neq j$ et $g = \sum_{i=1}^p b_i 1_{B_i}$. On a donc $\alpha g 1_{A_n} = \sum_{i=1}^p \alpha b_i 1_{B_i \cap A_n}$ et donc :

$$\int \alpha g 1_{A_n} dm = \sum_{i=1}^p \alpha b_i m(B_i \cap A_n).$$

Comme $\cup_{n\in\mathbb{N}}(B_i \cap A_n) = B_i \cap (\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = B_i \cap E = B_i$, la continuité croissante de m donne $m(B_i \cap A_n) \to m(B_i)$, quand $n \to \infty$. On en déduit :

$$\lim_{n\to\infty} \int \alpha g 1_{A_n} dm = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^p \alpha b_i m(B_i \cap A_n) = \sum_{i=1}^p \alpha b_i m(B_i) = \int \alpha g dm.$$

On peut donc passer à la limite, quand $n \to \infty$, dans (4.5) et obtenir :

$$\int \alpha g dm \leq \lim_{n\to\infty} \int f_n dm.$$

Enfin, la linéarité positive de l'intégrale sur $\mathcal{E}_+$ donne $\int \alpha g dm = \alpha \int g dm$. On conclut la démonstration du lemme en faisant tendre α vers 1.

■

Remarque 4.3 Dans la démonstration précédente, on a besoin de $\alpha < 1$ pour pouvoir écrire $\alpha g(x) \leq f_n(x)$ pour $n \geq n_x$, avec $n_x \in \mathbb{N}$ pouvant dépendre de x. Un tel n_x pourrait ne pas exister en prenant $\alpha = 1$.

Le lemme suivant est une conséquence simple du lemme 4.1.

Lemme 4.2 *Soient (E, T, m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}_+$. Soient deux suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{E}_+$ convergeant simplement et en croissant vers f. On a alors :*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n dm = \lim_{n\to\infty} \int g_n dm. \tag{4.6}$$

Démonstration :
Il suffit d'appliquer le lemme 4.1 avec $g = g_p$, p fixé. On obtient $\int g_p dm \leq \lim_{n\to\infty} \int f_n dm$. Puis, passant à la limite quand $p \to \infty$, $\lim_{p\to\infty} \int g_p dm \leq \lim_{n\to\infty} \int f_n dm$. On obtient enfin (4.6) en changeant les rôles de f_n et g_p.

■

Le lemme 4.2 permet donc de définir l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$ de la manière suivante :

Définition 4.2 (Intégrale sur $\mathcal{M}_+$) *Soient (E, T, m) un espace mesuré, et $f \in \mathcal{M}_+$. D'après la proposition sur la mesurabilité positive, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ telle que $f_n \uparrow f$ quand $n \to \infty$, c'est-à-dire :*

- *Pour tout $x \in E$, $f_n(x) \to f(x)$, quand $n \to \infty$,*
- *$f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$, pour tout $x \in E$, et tout $n \in \mathbb{N}$.*

On définit l'intégrale de f en posant :

$$\int f dm = \lim_{n\to\infty} \int f_n dm \quad (\in \overline{\mathbb{R}}_+). \tag{4.7}$$

On a aussi la caractérisation suivante, parfois bien utile, de l'intégrale d'une fonction mesurable positive à partir d'intégrales de fonctions étagées positives:

Lemme 4.3 *Soient (E, T, m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}_+$; alors $\int f dm = \sup\{\int g dm, g \in \mathcal{E}_+, g \leq f\}$.*

DÉMONSTRATION : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ telle que $f_n \uparrow f$ quand $n \to \infty$.
La monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{E}_+$ donne que $\int f_n dm = \sup\{\int gdm, g \in \mathcal{E}_+, g \le f_n\}$ (voir la remarque 4.2). Comme $f_n \le f$, on a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int f_n dm = \sup\{\int gdm, g \in \mathcal{E}_+, g \le f_n\} \le \sup\{\int gdm, g \in \mathcal{E}_+, g \le f\}.$$

La définition de $\int fdm$ donne alors : $\int fdm \le \sup\{\int gdm, g \in \mathcal{E}_+, g \le f\}$.

Pour montrer l'inégalité inverse, soit $g \in \mathcal{E}_+$ t.q. $g \le f$. Comme $f_n \uparrow f$, le lemme 4.1 donne $\int gdm \le \lim_{n\to\infty} \int f_n dm = \int fdm$. On a donc $\sup\{\int gdm, g \in \mathcal{E}_+, g \le f\} \le \int fdm$.

■

Proposition 4.2 (Propriétés de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$) *Soient f et $g \in \mathcal{M}_+$, α et $\beta \in \mathbb{R}_+^\star$, alors :*

- *linéarité positive :* $\alpha f + \beta g \in \mathcal{M}_+$, *et* $\displaystyle\int (\alpha f + \beta g)dm = \alpha \int fdm + \beta \int gdm$,
- *monotonie :* $f \ge g \Rightarrow \int fdm \ge \int gdm$.

DÉMONSTRATION :
La linéarité positive se démontre de manière très simple à partir de la linéarité positive sur $\mathcal{E}_+$ (proposition 4.1). et de la définition 4.2.

La monotonie est une conséquence immédiate du lemme 4.3.

■

Remarque 4.4 (A propos de $0 \times \infty \ldots$) Soient (E, T, m) un espace mesuré et $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$. On note I_A la fonction indicatrice de l'ensemble A. Cette fonction est définie de E dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ par : $I_A(x) = +\infty$ si $x \in A$ et $I_A(x) = 0$ si $x \notin A$. Cette fonction est souvent notée aussi $\infty 1_A$. Il est clair que $I_A \in \mathcal{M}_+$ et que I_A est la limite croissante de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ définie par $f_n = n1_A$. On en déduit, en utilisant la définition de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$, que $\int I_A dm = 0$.

Une conséquence de cette remarque est le lemme suivant :

Lemme 4.4 *Soit (E, T, m) un espace mesuré.*

1. *Soit $f \in \mathcal{M}_+$ et $A \in T$. On note $f1_A \in \mathcal{M}_+$ la fonction définie par $f1_A(x) = f(x)$ si $x \in A$ et $f1_A(x) = 0$ si $x \in A^c$. On définit $\int_A fdm$ par $\int f1_A dm$. On suppose que $m(A) = 0$. Alors, $\int_A fdm = 0$.*
2. *Soit f, $g \in \mathcal{M}_+$ t.q. $f = g$ p.p.. Alors, $\int fdm = \int gdm$.*
3. *Soit $f \in \mathcal{M}_+$ t.q. $f = 0$ p.p.. Alors $\int fdm = 0$.*

DÉMONSTRATION :

1. Soit $f \in \mathcal{M}_+$ et $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$. Soit I_A la fonction indicatrice de l'ensemble A (définie dans la remarque 4.4). On a évidemment $f1_A \le I_A$ et donc, par monotonie, $\int f1_A dm = 0$.

2. Soit f, $g \in \mathcal{M}_+$ t.q. $f = g$ p.p.. Soit $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et $f1_{A^c} = g1_{A^c}$. On a donc $f1_{A^c}$, $g1_{A^c} \in \mathcal{M}_+$ et $\int f1_{A^c}dm = \int g1_{A^c}dm$. D'autre part, comme $\int f1_A dm = \int g1_A dm = 0$, on a aussi, par linéarité positive $\int fdm = \int f1_{A^c}dm + \int f1_A dm = \int f1_{A^c}dm$ (et de même pour g). Donc, $\int fdm = \int gdm$.
3. Soit $f \in \mathcal{M}_+$ t.q. $f = 0$ p.p.. Alors $\int fdm = \int 0dm = 0$.

■

Ce lemme nous permet d'étendre la définition de l'intégrale à certaines fonctions non mesurables :

Définition 4.3 *Soit (E, T, m) un espace mesuré et f définie sur A^c, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. $\overline{\mathbb{R}}_+$), avec $A \in T$, $m(A) = 0$ (on dit que f est définie p.p., car f n'est pas définie sur A).*

1. *f est m-mesurable (resp. m-mesurable positive) si il existe $g \in \mathcal{M}$ (resp. $g \in \mathcal{M}_+$) t.q. $f = g$ p.p.. (c'est-à-dire qu'il existe $B \in T$ t.q. $m(B) = 0$, $B \supset A$ et $f = g$ sur B^c).*
2. *Soit f m-mesurable positive. On pose $\int fdm = \int gdm$, avec $g \in \mathcal{M}_+$ t.q. $f = g$ p.p. (noter que cette intégrale ne dépend pas du choix de g, grâce au lemme 4.4).*

Remarque 4.5 Soit (E, T, m) un espace mesuré. Il est facile de montrer les résultats suivants :

1. Soit f de E dans $\mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}_+$. Alors, $f \in \mathcal{E}_+$ si et seulement si $f \in \mathcal{M}_+$, $\mathrm{Im}f \subset \mathbb{R}_+$ et $\mathrm{card}(\mathrm{Im}f) < \infty$.
2. Soit $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et f de A^c dans $\mathbb{R}$. Alors, f est m-mesurable si et seulement si il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ t.q. $f_n \to f$ p.p. (voir l'exercice 4.17).
3. Soit $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et f de A^c dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Alors, f est m-mesurable positive si et seulement si il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ t.q. $f_n \to f$ p.p..

Le résultat suivant sera souvent utile par la suite. En particulier, les inégalités de Markov et Bienaymé-Tchebichev (voir la section 4.9) en découlent immédiatement.

Lemme 4.5 *Soient (E, T, m) un espace mesuré, $f \in \mathcal{M}_+$ et $t \in \mathbb{R}_+^\star$; alors :*

$$m(\{f \geq t\}) \leq \frac{1}{t} \int fdm. \tag{4.8}$$

Démonstration : On définit $A_t = \{f \geq t\} = \{x \in E \; ; \; f(x) \geq t\}$. On a $A_t \in T$ et $f \geq t1_{A_t}$. Par monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$, on en déduit l'inégalité 4.8. ■

4.3 Théorème de convergence monotone et lemme de Fatou

Théorème 4.1 (Convergence Monotone (1)) *Soit (E, T, m) un espace mesuré et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$ t.q. $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in E$. On pose, pour tout $x \in E$, $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \in \overline{\mathbb{R}}_+$. Alors $f \in \mathcal{M}_+$ et : $\int f_n dm \to \int fdm$ lorsque $n \to +\infty$.*

DÉMONSTRATION :
Noter que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}_+$, le fait que $\int f_n dm \to \int f dm$, lorsque $n \to +\infty$, est donné par la définition de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$. La difficulté est donc ici de travailler avec $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}_+$ au lieu de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}_+$.

Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$ converge simplement et en croissant vers f, la proposition 3.5 donne $f \in \mathcal{M}_+$. Puis, par monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n dm \leq \int f\, dm. \tag{4.9}$$

Il reste donc à montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n dm \geq \int f\, dm. \tag{4.10}$$

Pour montrer (4.10), on va construire une suite de fonctions $(g_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ t.q $g_p \uparrow f$, quand $p \to \infty$, et $g_p \leq f_p$, pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{M}_+$; il existe une suite de fonctions $(f_{n,p})_{p\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ t.q. $f_{n,p} \uparrow f_n$ lorsque p tend vers $+\infty$. On définit alors :

$$g_p = \sup_{n\leq p} f_{n,p} \tag{4.11}$$

On note que :

1. $g_p \in \mathcal{E}_+$ car g_p est le sup d'un nombre fini d'éléments de $\mathcal{E}_+$ (donc g_p est mesurable, $\mathrm{Im}(g_p) \subset \mathbb{R}_+$ et $\mathrm{card}(\mathrm{Im}(g_p)) < \infty$, ce qui donne $g_p \in \mathcal{E}_+$).

2. $g_{p+1} \geq g_p$, pour tout $p \in \mathbb{N}$. En effet, comme $f_{n,p+1} \geq f_{n,p}$ (pour tout n et p), on a

$$g_{p+1} = \sup\{f_{p+1,p+1}, \sup_{n\leq p} f_{n,p+1}\} \geq \sup_{n\leq p} f_{n,p+1} \geq \sup_{n\leq p} f_{n,p} = g_p.$$

   On peut donc définir, pour $x \in E$, $g(x) = \lim_{p\to\infty} g_p(x) \in \overline{\mathbb{R}}_+$ (car la suite $(g_p(x))_{p\in\mathbb{N}}$ est croissante dans $\overline{\mathbb{R}}_+$).

3. $g = f$. En effet, on remarque que $g_p \geq f_{n,p}$ si $n \leq p$. On fixe n et on fait tendre p vers l'infini, on obtient $g \geq f_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En faisant $n \to \infty$ on en déduit $g \geq f$. D'autre part, on a $f_{n,p} \leq f_n \leq f$ pour tout n et tout p. On a donc $g_p \leq f$ pour tout p. En faisant $p \to \infty$ on en déduit $g \leq f$. On a bien montré que $f = g$.

4. $g_p \leq f_p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. En effet, $f_{n,p} \leq f_n \leq f_p$ si $n \leq p$. On a donc $g_p = \sup_{n\leq p} f_{n,p} \leq f_p$.

Les points 1 à 3 ci dessus donnent $(g_p)_{p\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}_+$ et $g_p \uparrow f$ quand $p \to \infty$. Donc, la définition de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$ donne $\int f dm = \lim_{p\to\infty} \int g_p dm$.
Le point 4 donne (par monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$) $\int g_p dm \leq \int f_p dm$, on en déduit $\int f dm = \lim_{p\to\infty} \int g_p dm \leq \lim_{p\to\infty} \int f_p dm$.

Finalement, on obtient bien $\int f dm = \lim_{p\to\infty} \int f_p dm$.

■

On utilisera souvent une légère extension (facile) du théorème de convergence monotone :

Théorème 4.2 (Convergence Monotone (2)) *Soit* (E,T,m) *un espace mesuré et soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$. *On suppose que* $f_n \uparrow f$ *p.p. (c'est-à-dire que il existe* $A \in T$ *t.q.* $m(A) = 0$ *et* $f_n(x) \uparrow f(x)$ *pour tout* $x \in A^c$*). La fonction* f *(définie p.p.) est alors* $m-$*mesurable positive (c'est-à-dire que il existe* $g \in \mathcal{M}_+$ *t.q.* $f = g$ *p.p.) et* $\displaystyle\int f_n dm \to \int f dm$. *On rappelle que, par définition (voir la définition 4.3),* $\int f dm = \int g dm$ *avec* $g \in \mathcal{M}_+$ *t.q.* $f = g$ *p.p..*

DÉMONSTRATION :
Soit $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et $f_n \uparrow f$ sur A^c, quand $n \to \infty$. On pose $g_n = f_n 1_{A^c}$ (c'est-à-dire $g_n(x) = f_n(x)$ si $x \in A^c$ et $g_n(x) = 0$ si $x \in A$). On a $g_n \in \mathcal{M}_+$ et $g_n \uparrow g$ avec $g = f1_{A^c}$ (c'est-à-dire $g(x) = f(x)$ si $x \in A^c$ et $g(x) = 0$ si $x \in A$). Comme $g \in \mathcal{M}_+$ et $f = g$ p.p., on a donc f $m-$mesurable positive. Puis, le théorème 4.1 donne $\int g_n dm \to \int g dm$ quand $n \to \infty$. D'autre part, on a $\int g_n dm = \int f_n dm$ (car $f_n = g_n$ p.p.) et $\int g dm = \int f dm$ (par définition de $\int f dm$), donc

$$\int f_n dm \to \int f dm.$$

■

Corollaire 4.1 (Séries à termes positifs ou nuls) *Soient* (E,T,m) *un espace mesuré,* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$ *; on pose, pour tout* $x \in E$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) (\in \overline{\mathbb{R}}_+)$. *Alors* $f \in \mathcal{M}_+$ *et* $\displaystyle\int f dm = \sum_{n=0}^{+\infty} \int f_n dm$.

DÉMONSTRATION : On applique le théorème de convergence monotone (théorème 4.1) à la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$g_n = \sum_{p=0}^{n} f_p.$$

On a $g_n \in \mathcal{M}_+$ et $g_n \uparrow f$. Donc $f \in \mathcal{M}_+$ et

$$\sum_{p=0}^{n} \int f_p dm = \int g_n dm \to \int f dm.$$

■

Lemme 4.6 (Fatou) *Soient* (E,T,m) *un espace mesuré,* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$. *On pose pour tout* $x \in E$ *:* $f(x) = \liminf\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} (\inf\limits_{p\geq n} f_p(x)) \in \overline{\mathbb{R}}_+$. *Alors* $f \in \mathcal{M}_+$ *et :*

$$\int f dm \leq \liminf_{n\to+\infty} \int f_n dm = \lim_{n\to+\infty} (\inf_{p\geq n} \int f_p dm). \tag{4.12}$$

DÉMONSTRATION : Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $g_n(x) = \inf_{p\geq n} f_p(x)$ (pour tout $x \in E$), de sorte que $g_n \in \mathcal{M}_+$ (cf. proposition 3.5) et $g_n \uparrow f$. Le théorème de convergence monotone (théorème 4.1) donne que $f \in \mathcal{M}_+$ et $\int g_n dm \to \int f dm$.
Or, $g_n \leq f_p$ si $p \geq n$. On a donc $\int g_n dm \leq \int f_p dm$ si $p \geq n$ et donc (en fixant n) $\int g_n dm \leq \inf_{p\geq n} \int f_p dm$. On en déduit

$$\int f dm = \lim_{n\to\infty} \int g_n dm \leq \lim_{n\to\infty} (\inf_{p\geq n} \int f_p dm) = \liminf_{n\to\infty} \int f_n dm.$$

■

Le lemme de Fatou est souvent utilisé avec des suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$ telles que la suite $(\int f_n dm)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente pour presque tout $x \in E$. Il permet alors de montrer que la limite (au sens de la convergence p.p.) de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est "intégrable" (voir les paragraphes suivants). On utilise pour cela le corollaire (immédiat) suivant :

Corollaire 4.2 *Soient (E, T, m) un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$ t.q. $f_n(x) \to f(x)$, pour presque tout $x \in E$, lorsque $n \to +\infty$. On suppose qu'il existe $C \geq 0$ t.q. $\displaystyle\int f_n \, dm \leq C$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, f est $m-$mesurable positive et $\displaystyle\int f \, dm \leq C$.*

Démonstration : Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}_+$ et $f_n \to f$ p.p., on a bien f $m-$mesurable positive. On pose $g = \liminf_{n\to\infty} f_n$ (c'est-à-dire $g(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$ pour tout $x \in E$). On a donc $g \in \mathcal{M}_+$ et $f = g$ p.p. donc $\int f dm = \int g dm$ par définition de l'intégrale des fonctions m-mesurables (définition 4.3).

Le lemme de Fatou donne $\int f dm = \int g dm \leq \liminf_{n\to\infty} \int g_n dm$ et donc $\int f dm \leq C$ car $\int g_n dm \leq C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

■

4.4 Mesures et probabilités de densité

4.4.1 Définitions

A partir d'une mesure et d'une fonction mesurable positive, on peut définir une autre mesure de la manière suivante :

Définition 4.4 (Mesure de densité)
Soient (E, T, m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}_+$. Pour $A \in T$, on rappelle que $f1_A$ est la fonction (de E dans $\overline{\mathbb{R}}_+$) définie par $f1_A(x) = f(x)$ si $x \in A$ et $f1_A(x) = 0$ si $x \in A^c$ (cette fonction appartient à $\mathcal{M}_+$) et on définit $\int_A f dm$ par $\int f1_A dm$.

On définit alors $\mu : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ par :

$$\mu(A) = \int f1_A dm = \int_A f dm, \quad \forall A \in T. \tag{4.13}$$

L'application μ ainsi définie est une mesure sur T (ceci est démontré dans l'exercice 4.22), appelée mesure de densité f par rapport à m, et notée $\mu = fm$.

Proposition 4.3 *Soient (E, T, m) un espace mesuré, $f \in \mathcal{M}_+$ et μ la mesure de densité f par rapport à m. Alors, la mesure μ est absolument continue par rapport à la mesure m, c'est-à-dire que si $A \in T$ est tel que $m(A) = 0$, alors $\mu(A) = 0$.*

Démonstration : Soit $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$. On a alors $f1_A = 0$ m-p.p. et donc $\mu(A) = \int f1_A dm = 0$ d'après le lemme 4.4. ■

On déduit de cette proposition que la mesure de Dirac définie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ par :

$$\begin{aligned} \delta(A) &= 1 \text{ si } 0 \in A \\ \delta(A) &= 0 \text{ si } 0 \in A^c. \end{aligned} \tag{4.14}$$

n'est pas une mesure de densité par rapport à la mesure de Lebesgue (on peut montrer que ces deux mesures sont étrangères (voir définition 2.16 et proposition 2.4).
Notons que l'on peut aussi définir des mesures signées de densité, voir la définition 6.15.

4.4.2 Exemples de probabilités de densité

Définition 4.5 (Probabilité de densité) *Soit p une probabilité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, on dit que p est une probabilité de densité (par rapport à Lebesgue) s'il existe $f \in \mathcal{M}_+$ t.q. $\int f d\lambda = 1$ et $p(A) = \int f 1_A d\lambda = \int_A f d\lambda$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

Les lois de probabilité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, de densité par rapport à la mesure de Lebesgue, données dans la proposition suivante seront souvent utilisées dans le calcul des probabilités (On rappelle qu'une loi de probabilité est, par définition, une probabilité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$).

Définition 4.6 (Quelques lois de densité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$)

1. *Loi uniforme, $\mathcal{U}(a,b)$ Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, la loi uniforme sur $[a,b]$ est la loi de densité $\frac{1}{b-a}1_{[a,b]}$: $p(A) = \frac{1}{b-a}\int 1_{[a,b]}1_A d\lambda$, $\forall A \in \mathcal{T}$.*
2. *Loi exponentielle, $\mathcal{E}(\tau)$ Soit $\tau > 0$; la loi exponentielle est définie par la densité f définie par :*
$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ \tau e^{-\tau x} & si \quad x \geq 0 \end{cases} \tag{4.15}$$
3. *Loi de Gauss, $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ Soit $(\mu, \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^\star$; la loi de Gauss de paramètre (μ, σ) est définie par la densité f définie par :*
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\big(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\big) \tag{4.16}$$

4.5 L'espace $\mathcal{L}^1$ des fonctions intégrables

Soit $f \in \mathcal{M}$, La proposition 3.7 donne que $|f|$, f^+, $f^- \in \mathcal{M}_+$ et la monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$ donne $\int f^+ dm \leq \int |f| dm$ et $\int f^- dm \leq \int |f| dm$. Ceci va nous permette de définir l'espace $\mathcal{L}^1$ et l'intégrale sur $\mathcal{L}^1$ à partir de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$ (définition 4.2 page 76).

Définition 4.7 (Espace $\mathcal{L}^1$ et Intégrale de Lebesgue) *Soient (E, T, m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}$. On dit que f est intégrable (ou intégrable au sens de Lebesgue) si $\displaystyle\int |f| dm < +\infty$. Dans ce cas, on a aussi $\displaystyle\int f^+ dm < +\infty$ et $\displaystyle\int f^- dm < +\infty$. On pose alors :*
$$\int f dm = \int f^+ dm - \int f^- dm \ \ (\in \mathbb{R}). \tag{4.17}$$
On note $\mathcal{L}^1_\mathbb{R}(E, T, m)$ (ou plus simplement $\mathcal{L}^1$) l'ensemble des fonctions intégrables.

Soit $f \in \mathcal{M}$, la linéarité positive de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$ donne $\int |f| dm = \int f^+ dm + \int f^- dm$. On voit donc que $f \in \mathcal{L}^1$ si et seulement si $\int f^+ dm < \infty$ et $\int f^- dm < \infty$.

Proposition 4.4 (Propriétés de $\mathcal{L}^1$ et de l'intégrale sur $\mathcal{L}^1$) *Soit (E, T, m) un espace mesuré. On a alors :*

1. $\mathcal{L}^1$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

2. L'application $f \mapsto \displaystyle\int f dm$ est une application linéaire de $\mathcal{L}^1$ dans $\mathbb{R}$.

3. Monotonie : soient f et $g \in \mathcal{L}^1$ telles que $f \le g$; alors $\displaystyle\int f dm \le \int g dm$

4. Pour tout $f \in \mathcal{L}^1$, $|\int f dm| \le \int |f| dm$.

DÉMONSTRATION :

1. On sait déjà que $\mathcal{M}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (proposition 3.5). Pour montrer que $\mathcal{L}^1$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, il suffit de remarquer, en utilisant la linéarité positive et la monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$, que $\int |\alpha f| dm = |\alpha| \int |f| dm$ et $\int |f+g| dm \le \int |f| dm + \int |g| dm$, pour tout $f, g \in \mathcal{M}$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. (a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{L}^1$. On veut montrer que

$$\int \alpha f dm = \alpha \int f dm. \tag{4.18}$$

Cas 1. Si $\alpha = 0$, (4.18) est bien vraie.

Cas 2. Si $\alpha > 0$, on remarque que $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$ et $(\alpha f)^- = \alpha f^-$. En utilisant la linéarité positive de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$, on en déduit $\int \alpha f dm = \int (\alpha f)^+ dm - \int (\alpha f)^- dm = \alpha(\int f^+ dm - \int f^- dm) = \alpha \int f dm$.

Cas 3. Si $\alpha < 0$, on remarque que $(\alpha f)^+ = (-\alpha) f^-$ et $(\alpha f)^- = (-\alpha) f^+$. En utilisant la linéarité positive de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$, on en déduit $\int \alpha f dm = \int (\alpha f)^+ dm - \int (\alpha f)^- dm = (-\alpha)(\int f^- dm - \int f^+ dm) = \alpha \int f dm$.

(b) Soit $f, g \in \mathcal{L}^1$. On veut montrer que

$$\int (f+g) dm = \int f dm + \int g dm.$$

On utilise les deux décompositions de $f+g$: $f+g = (f+g)^+ - (f+g)^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$. On en déduit $(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+$. En utilisant la linéarité positive de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$, on en déduit

$$\int (f+g)^+ dm + \int f^- dm + \int g^- dm = \int (f+g)^- dm + \int f^+ dm + \int g^+ dm.$$

On en déduit (noter que tous les termes de l'égalité précédente sont dans $\mathbb{R}_+$)

$$\int (f+g)^+ dm - \int (f+g)^- dm = \int f^+ dm - \int f^- dm + \int g^+ dm - \int g^- dm,$$

et donc $\int (f+g) dm = \int f dm + \int g dm$.

On a bien montré que l'application $f \mapsto \displaystyle\int f dm$ est une application linéaire de $\mathcal{L}^1$ dans $\mathbb{R}$.

3. Soit $f, g \in \mathcal{L}^1$ t.q. $f \leq g$. On remarque que $f^+ - f^- \leq g^+ - g^-$, donc $f^+ + g^- \leq g^+ + f^-$. En utilisant la linéarité positive et la monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$, on en déduit $\int f^+ dm + \int g^- dm \leq \int g^+ dm + \int f^- dm$ et donc $\int f dm = \int f^+ dm - \int f^- dm \leq \int g^+ dm - \int g^- dm = \int g dm$.
4. Soit $f \in \mathcal{L}^1$. On a $|\int f dm| = |\int f^+ dm - \int f^- dm| \leq \int f^+ dm + \int f^- dm = \int |f| dm$.

■

On peut définir sur $\mathcal{L}^1$ une semi-norme de la manière suivante :

Définition 4.8 (Semi-norme sur $\mathcal{L}^1$) *Soient (E, T, m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{L}^1$. On pose :*

$$\|f\|_1 = \int |f| dm \tag{4.19}$$

L'application de $\mathcal{L}^1$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par $f \mapsto \|f\|_1$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}_1$.

On a bien $\|f\|_1 \in \mathbb{R}_+$ pour tout $f \in \mathcal{L}^1$. Le fait que $f \mapsto \|f\|_1$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}^1$ découle alors de la partie 1 de la démonstration de la proposition 4.4, c'est-à-dire du fait que $\int |\alpha f| dm = |\alpha| \int |f| dm$ et $\int |f + g| dm \leq \int |f| dm + \int |g| dm$, pour tout $f, g \in \mathcal{M}$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}$. Par contre, $\| \cdot \|_1$ n'est pas une norme sur $\mathcal{L}^1$ car $\|f\|_1 = 0$ n'entraîne pas $f = 0$ mais seulement $f = 0$ p.p., comme cela est démontré à la proposition 4.5.

Proposition 4.5 *Soit (E, T, m) un espace mesuré.*

1. *Soit $f \in \mathcal{M}_+$. Alors $\int f dm = 0$ si et seulement si $f = 0$ p.p..*
2. *Soit $f \in \mathcal{L}^1$. Alors $\|f\|_1 = 0$ si et seulement si $f = 0$ p.p..*
3. *Soit $f, g \in \mathcal{L}^1$ t.q. $f = g$ p.p.. Alors $\int f dm = \int g dm$.*

Démonstration :

1. Soit $f \in \mathcal{M}_+$.
   (a) On suppose que $f = 0$ p.p. . On a alors $\int f dm = \int 0 dm = 0$ (ceci est donné par le troisième point du lemme 4.4.)
   (b) on suppose que $\int f dm = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, le lemme 4.5 page 78 donne $\int f dm \geq \frac{1}{n} m(\{f \geq \frac{1}{n}\})$. On a donc $m(\{f \geq \frac{1}{n}\}) = 0$ et $m(\{f > 0\}) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}^\star} m(\{f \geq \frac{1}{n}\}) = 0$ (on a utilisé ici la σ-sous additivité de m). Comme $\{f = 0\}^c = \{f > 0\}$, on en déduit $f = 0$ p.p..
2. Soit $f \in \mathcal{L}^1$. La propriété démontrée ci dessus donne $\|f\|_1 = 0$ si et seulement si $|f| = 0$ p.p., et donc $\|f\|_1 = 0$ si et seulement si $f = 0$ p.p.
3. Soit $f, g \in \mathcal{L}^1$ t.q. $f = g$ p.p.. On a $|\int f dm - \int g dm| = |\int (f - g) dm| \leq \int |f - g| dm = 0$ (On a utilisé le quatrième point de la proposition 4.4 et $|f - g| = 0$ p.p.). Donc, $\int f dm = \int g dm$.

■

La dernière assertion de la proposition précédente nous permettra, dans la prochaine section, de définir l'intégrale sur un espace appelé L^1.

On conclut cette section par une proposition préliminaire au théorème de convergence dominée.

Proposition 4.6 *Soit (E, T, m) un espace mesuré. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1$, $f \in \mathcal{M}$ et $g \in \mathcal{L}^1$ t.q. $f_n \to f$ p.p., quand $n \to \infty$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq g$ p.p.. On a alors $f \in \mathcal{L}^1$, $\|f_n - f\|_1 \to 0$, quand $n \to \infty$ et $\int f_n dm \to \int f dm$, quand $n \to \infty$.*

DÉMONSTRATION :
Comme $f_n \to f$ p.p. quand $n \to \infty$, Il existe $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et $f_n(x) \to f(x)$ pour tout $x \in A^c$. Puis, comme $|f_n| \leq g$ p.p., il existe, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n \in T$ t.q. $m(B_n) = 0$ et $|f_n| \leq g$ sur B_n^c. On pose $C = A \cup (\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n)$. Par σ-sous additivité de m, on a aussi $m(C) = 0$. On pose alors $h_n = f_n 1_{C^c}$, $h = f 1_{C^c}$ $G = g 1_{C^c}$, de sorte que $h_n = f_n$ p.p., $h = f$ p.p. et $G = g$ p.p.. De plus les fonctions h_n, h et G sont toujours mesurables et donc $h_n \in \mathcal{L}^1$, $h \in \mathcal{M}$ et $G \in \mathcal{L}^1$.

Comme $|h_n(x)| \leq G(x)$ pour tout $x \in E$ (et pour tout $n \in \mathbb{N}$) et $h_n(x) \to h(x)$ pour tout $x \in E$. On a aussi $|h| \leq G$. Ceci montre que $h \in \mathcal{L}^1$ et donc que $f \in \mathcal{L}^1$.

On pose maintenant $F_n = 2G - |h_n - h|$. Comme $|h_n - h| \leq 2G$, on a $F_n \in \mathcal{M}_+$ et on peut donc appliquer le lemme de Fatou (lemme 4.6) à la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Comme $\liminf_{n\to\infty} F_n = 2G$, on obtient :

$$\int 2G dm \leq \liminf_{n\to\infty} \int (2G - |h_n - h|) dm = \lim_{n\to\infty} (\inf_{p\geq n} \int (2G - |h_n - h|) dm). \tag{4.20}$$

La linéarité de l'intégrale sur $\mathcal{L}^1$ donne $\int (2G - |h_n - h|) dm = \int 2G dm - \int |h_n - h| dm$. Donc :

$$\inf_{p\geq n} \int (2G - |h_n - h|) dm = \int 2G dm - \sup_{p\geq n} \int |h_n - h| dm$$

et

$$\liminf_{n\to\infty} \int (2G - |h_n - h|) dm = \int 2G dm - \limsup_{n\to\infty} \int |h_n - h| dm.$$

L'inégalité 4.20 devient alors (en remarquant que $\int 2G dm \in \mathbb{R}$) :

$$\limsup_{n\to\infty} \int |h_n - h| dm \leq 0.$$

On a donc $\|h_n - h\|_1 \to 0$ quand $n \to \infty$ et, comme $h_n - h = f_n - f$ p.p., on en déduit $\|f_n - f\|_1 \to 0$, quand $n \to \infty$, et donc $\int f_n dm \to \int f dm$, quand $n \to \infty$ (grâce au quatrième point de la proposition 4.4).

■

4.6 L'espace L^1

Dans toute cette section, on travaille avec un espace mesuré (E, T, m).
On définit maintenant une relation d'équivalence, notée ($=$ *p.p.*), sur $\mathcal{L}^1$ par :

$$f \ \ (= p.p.) \ \ g \text{ si } f = g \ \ p.p.. \tag{4.21}$$

Définition 4.9 (L^1) *L'ensemble $L^1 = L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ est l'ensemble des classes d'équivalence de la relation ($=$ p.p.) définie sur $\mathcal{L}^1$, i.e. $L^1 = \mathcal{L}^1/(= p.p.)$.*

Dans la suite, L^1 désigne $L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et $\mathcal{L}^1$ désigne $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

Remarque 4.6

1. Un élément de L^1 est donc une partie de $\mathcal{L}^1$.
2. Si $f \in L^1$, on note $\tilde{f} = \{g \in \mathcal{L}^1;\ g = f \text{ p.p.}\}$. $\tilde{f}$ est donc un élément de L^1, c'est l'élément de L^1 auquel f appartient (on l'appelle la classe de f).

Définition 4.10 (Structure vectorielle sur L^1) *On munit L^1 d'une structure vectorielle (faisant de L^1 un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$)*

1. *Soient $F \in L^1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On choisit $f \in F$ et on pose $\alpha F = \{g \in \mathcal{L}^1;\ g = \alpha f \text{ p.p.}\}$.*
2. *Soient $F, G \in L^1$. On choisit $f \in F$, $g \in G$ et on pose $F + G = \{h \in \mathcal{L}^1;\ h = f + g \text{ p.p.}\}$.*

La définition précédente est bien cohérente. En effet αF (qui est la classe de αf) ne dépend pas du choix de f dans F car $f = f_1$ p.p. implique $\alpha f = \alpha f_1$ p.p.. De même $F + G$ (qui est la classe de $f + g$) ne dépend pas du choix de f dans F et du choix de g dans G car $f = f_1$ p.p. et $g = g_1$ p.p. implique $f + g = f_1 + g_1$ p.p..

Définition 4.11 (Intégrale sur L^1) *Soit $F \in L^1$ et $f \in F$ (on dit que f est un représentant de la classe F, noter que $f \in \mathcal{L}^1$). On pose :*

$$\int F dm = \int f dm. \tag{4.22}$$

Ici aussi cette définition est bien cohérente car $\int F dm$ ne dépend pas du choix de f dans F, grâce au troisième point de la proposition 4.5. Le troisième point de la proposition 4.5 nous donne aussi $\|f\|_1 = \|g\|_1$ si $f, g \in \mathcal{L}^1$ et $f = g$ p.p.. Ceci nous permet de définir une norme sur L^1 :

Définition 4.12 (Norme sur L^1) *Soit $F \in L^1$. On choisit $f \in F$ et on pose $\|F\|_1 = \|f\|_1$.*

Proposition 4.7 *L'application $F \mapsto \|F\|_1$ est une norme sur L^1. L'espace L^1 muni de la norme $\|\cdot\|_1$ est donc un espace vectoriel normé.*

Démonstration : Il est facile de vérifier que $\|\cdot\|_1$ est bien une norme sur $\mathbb{R}$ (sachant que c'est déjà une semi-norme sur $\mathcal{L}^1$). Le seul point délicat est de remarquer que $\|F\|_1 = 0$ implique que $F = 0$ (0 est ici l'élément neutre de L^1, c'est-à-dire $\{h \in \mathcal{L}^1;\ h = 0 \text{ p.p.}\}$). Ceci découle du premier point de la proposition 4.5. ∎

On montrera plus loin que L^1 est complet, c'est donc un espace vectoriel normé complet, c'est-à-dire un espace de Banach, voir le théorème 4.6 page 91.

On rappelle que si $f \in \mathcal{L}^1$, $F \in L^1$ et que $f \in F$, on dit que f est un représentant de F. On introduit maintenant plusieurs notions de convergence dans L^1. Il est facile de vérifier que ces définitions sont cohérentes, c'est-à-dire qu'elles ne dépendent pas des représentants choisis pour les éléments de L^1.

La notion de convergence simple n'a pas de sens dans L^1, mais la notion de convergence p.p., vue précédemment, se généralise aux éléments de L^1 ainsi que la notion de convergence en mesure.

Définition 4.13 *Soit (E, T, m) un espace mesuré.*

1. *Soient $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ et $F \in L^1$. On dit que $F_n \to F$ p.p. quand $n \to \infty$ si $f_n \to f$ p.p., quand $n \to \infty$, avec $f_n \in F_n$ et $f \in F$.*

2. *Soient $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ et $F \in L^1$. On dit que $F_n \to F$ en mesure quand $n \to \infty$ si $f_n \to f$ en mesure, quand $n \to \infty$, avec $f_n \in F_n$ et $f \in F$.*

3. *Soient $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ et $F \in L^1$. On dit que $F_n \to F$ dans L^1 quand $n \to \infty$ si $\|F_n - F\|_1 \to 0$ quand $n \to \infty$. (Ici aussi, noter que $\|F_n - F\|_1 = \|f_n - f\|_1$ si $f_n \in F_n$ et $f \in F$.)*

4. *Soient $F, G \in L^1$. On dit que $F \geq G$ p.p. si $f \geq g$ p.p. avec $f \in F$ et $g \in G$.*

On peut démontrer (s'inspirer de la démonstration du théorème 4.7 et voir les exercices du chapitre 3) que si une suite de fonctions de L^1 converge en mesure, alors on peut en extraire une sous-suite qui converge presque partout. Dans le cas où la mesure m est finie, la convergence presque partout entraîne la convergence en mesure.

Remarque 4.7 Soit (E, T, m) un espace mesuré. Soient $F, G \in L^1$. $F = G$ est donc équivalent à $f = g$ p.p. si $f \in F$ et $g \in G$. En général, on écrira plutôt $F = G$ p.p. au lieu de $F = G$ (voir la remarque 4.9).

Remarque 4.8 Soit (E, T, m) un espace mesuré. Soient $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ et $f : E \to \mathbb{R}$ (ou $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$). On utilisera souvent la notation (légérement incorrecte), "$F_n \to f$ p.p. quand $n \to \infty$". Cette notation signifie "$f_n \to f$ p.p. quand $n \to \infty$" en choisissant $f_n \in F_n$. Ceci est cohérent car le fait que "$f_n \to f$ p.p. quand $n \to \infty$" ne dépend pas du choix de f_n dans F_n (voir aussi la remarque 4.9).

En fait, on écrira même souvent "$F_n \to f$ p.p. quand $n \to \infty$" (pour une suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$) sans préciser les espaces de départ et d'arrivée pour f. A vrai dire, en choisissant $f_n \in F_n$, f est au moins définie p.p. sur E et le changement du choix de f_n dans F_n ne change f que sur un ensemble de mesure nulle. D'autre part, en l'absence de précision, f sera supposée être à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Proposition 4.8 (propriétés de l'intégrale sur L^1) *Soit (E, T, m) un espace mesuré. On a alors :*

1. *Soit $F \in L^1$. Alors $|\int F dm| \leq \|F\|_1$.*

2. *$F \mapsto \int F dm$ est une application linéaire continue de L^1 dans $\mathbb{R}$.*

3. *Soient $F, G \in L^1$ t.q. $F \geq G$ p.p., alors $\int F dm \geq \int G dm$.*

Démonstration :

1. Soit $F \in L^1$ et $f \in F$, on a $|\int F dm| = |\int f dm| \leq \|f\|_1 = \|F\|_1$.

2. La linéarité de l'intégrale sur L^1 découle immédiatement de la linéarité de l'intégrale sur $\mathcal{L}^1$ (proposition 4.4). La continuité est donné par le premier point ci dessus.

3. La monotonie de l'intégrale sur L^1 découle immédiatement de la monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{L}^1$ (proposition 4.4).

■

Remarque 4.9 soit (E, T, m) un espace mesuré.

1. On confondra dans la suite un élément F de L^1 avec un représentant f de F, c'est-à-dire avec un élément $f \in \mathcal{L}^1$ t.q. $f \in F$.

2. De manière plus générale, soit $A \subset E$ t.q. A^c soit négligeable (c'est-à-dire $A^c \subset B$ avec $B \in T$ et $m(B) = 0$) et soit $f : A \to \mathbb{R}$ (la fonction f est donc définie p.p.). On dira que f est un élément de L^1 si il existe une fonction $g \in \mathcal{L}^1$ t.q. $f = g$ p.p.. On confond donc, en fait, la fonction f avec la classe d'équivalence de g, c'est-à-dire avec $\tilde{g} = \{h \in \mathcal{L}^1;\ h = g \text{ p.p.}\}$. D'ailleurs, cet ensemble est aussi égal à $\{h \in \mathcal{L}^1;\ h = f \text{ p.p.}\}$. En confondant ainsi f et $\tilde{g}$ on a donc $\int f dm = \int g dm$. Noter également que f est m-mesurable (voir la définition 4.3 page 78).
3. Avec la confusion décrite ci-dessus, si f et g sont des éléments de L^1, $f = g$ signifie en fait $f = g$ p.p..

Remarque 4.10 Soient (E, T, m) un espace mesuré, et $(E, \overline{T}, \overline{m})$ son complété (cf définition 2.15 et exercice 2.15). L'espace $L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ est "identique" à l'espace $L^1_{\mathbb{R}}(E, \overline{T}, \overline{m})$, il existe une bijection évidente entre ces deux espaces en remarquant que si $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, \overline{T}, \overline{m})$, alors il existe $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ t.q. $f = g$ p.p. (voir à ce propos l'exercice 4.9).

Pour montrer qu'une fonction est dans L^1 on utilise souvent le lemme de Fatou de la manière suivante (voir l'exercice 4.27 pour la démonstration, qui est en fait une conséquence facile du lemme de Fatou pour les fonctions mesurables positives, cf lemme 4.6) :

Lemme 4.7 (Utilisation de Fatou) *Soient (E, T, m) un espace mesuré, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. On suppose que :*

1. $f_n \geq 0$ p.p., $\forall n \in \mathbb{N}$,

2. $\exists C$, $\int f_n dm \leq C$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

3. $f_n \to f$ p.p., quand $n \to \infty$,

alors $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ (au sens "il existe $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ t.q. $f = g$ p.p.") et $\int |f| dm \leq C$.

On peut également montrer qu'une fonction est dans L^1 en utilisant le théorème de convergence monotone. Ceci est précisé dans le théorème 4.3 (dit théorème de Beppo-Lévi) (qui donne aussi un résultat de convergence dans L^1).

4.7 Théorèmes de convergence dans L^1

Nous connaissons à présent trois notions de convergence pour les fonctions de L^1, les notions de convergence presque partout, convergence en mesure et la notion de convergence habituelle dans un espace normé, c'est-à-dire , ici, la convergence pour la norme L^1. On peut montrer par des contre-exemples que la convergence presque partout n'entraîne pas la convergence L^1, et que la convergence L^1 n'entraîne pas la convergence presque partout. Pour montrer que la convergence presque partout n'entraîne pas la convergence L^1, on peut considérer l'espace mesuré $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R})$ définie par : $f_n(x) = n\, 1_{]0,\frac{1}{n}]}$. On a évidemment $f_n \to 0\ \ pp$, alors que $\|f_n\|_1 = 1$. Pour montrer que la convergence L^1 n'entraîne pas la convergence presque partout, on considère à nouveau l'espace mesuré $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, et on construit la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R})$ (dite "bosse glissante") définie par : $f_{n+k}(x) = 1_{]\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]}$, pour $n = \frac{p(p-1)}{2}$, $p \in \mathbb{N}$ et $1 \leq k \leq n$. On peut voir facilement que $\|f_n\|_1 = \frac{1}{p}$ pour $n \in [\frac{p(p-1)}{2}, \frac{p(p+1)}{2}[$, alors que $f_n \not\to 0\ \ pp$ (par contre, on peut noter qu'il est possible d'extraire de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite qui converge presque partout vers 0). Le théorème de convergence dominée, énoncé ci-après, donne une hypothèse suffisante pour qu'une suite (de fonctions) convergeant presque partout converge aussi dans L^1.

On rappelle (voir la remarque 4.8) que l'hypothèse "$(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ et $f : E \to \mathbb{R}$ t.q. $F_n \to f$ p.p." signifie simplement que $f_n \to f$ p.p. en choisissant $f_n \in F_n$. Cette définition est bien cohérente car elle ne dépend pas du choix des f_n dans F_n. On rappelle aussi que $f_n \to f$ p.p. signifie qu'il existe $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et $f_n(x) \to f(x)$ dans $\mathbb{R}$ pour tout $x \in A^c$.

4.7.1 Convergence presque partout et convergence dans L^1

Le théorème suivant est une conséquence du théorème de convergence monotone et permet de montrer la convergence dans L^1 d'une suite monotone de fonctions convergeant presque partout.

Théorème 4.3 (Beppo-Lévi) *Soient (E, T, m) un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. On suppose que :*

1. *$f_{n+1} \geq f_n$ p.p., $\forall n \in \mathbb{N}$, [ou $f_{n+1} \leq f_n$ p.p., $\forall n \in \mathbb{N}$],*
2. *$f_n \to f$ p.p., quand $n \to \infty$.*

On a alors :

1. *$f \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ (au sens "il existe $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ t.q. $f = g$ p.p.") si et seulement si :*
$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n dm \in \mathbb{R}.$$
2. *Si $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, alors $f_n \to f$ dans L^1.*

La démonstration de ce théorème fait l'objet de l'exercice 4.28.
Nous allons maintenant voir un résultat fondamental, conséquence du lemme de Fatou, qui permet de prouver la convergence de suites dans L^1 sans hypothèse de convergence monotone.

Théorème 4.4 (Convergence dominée) *Soit (E, T, m) un espace mesuré. L'espace $L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ est noté L^1 . Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ et f une fonction de E dans $\mathbb{R}$ telles que :*

1. *$f_n \to f$ p.p.*
2. *$\exists F \in L^1$ t.q., pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq F$ p.p..*

Alors $f \in L^1$ (au sens "il existe $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ t.q. $f = g$ p.p.") et $f_n \to f$ dans L^1 (c'est-à-dire $\int |f_n - f| dm \to 0$ lorsque $n \to +\infty$). Ceci donne aussi $\int f_n dm \to \int f dm$, lorsque $n \to +\infty$.

Démonstration :
Ce théorème est essentiellement donné par la proposition 4.6. La différence avec la proposition 4.6 tient dans le fait que f_n et F sont dans L^1 au lieu de $\mathcal{L}^1$ et que f n'est pas nécessairement mesurable. Il s'agit toutefois de différences "mineures" comme nous le voyons ci après.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on choisit un représentant de f_n, encore noté f_n. La première hypothèse du théorème signifie que $f_n \to f$ p.p. (voir la remarque 4.8). Il existe donc $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et $f_n(x) \to f(x)$, quand $n \to \infty$, pour tout $x \in A^c$. On remplace alors f_n par $f_n 1_{A^c}$, encore noté f_n (c'est toujours un représentant de la même classe d'équivalence car $m(A) = 0$). On définit aussi g par $g = f$ sur A^c et $g = 0$ sur A. Enfin, on choisit un représentant de F, encore noté F. On obtient ainsi :

1. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1$,
2. $f_n(x) \to g(x)$ pour tout $x \in E$, quand $n \to \infty$,
3. $F \in \mathcal{L}^1$ et $f_n \le F$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Les 2 premiers items donnent aussi $g \in \mathcal{M}$ (par la proposition 3.5, on utilise ici le fait que $f_n(x) \to f(x)$ pour tout $x \in E$ et pas seulement pour presque tout x). On peut donc appliquer la proposition 4.6 page 85. Elle donne : $g \in \mathcal{L}^1$, $\|f_n - g\|_1 \to 0$, quand $n \to \infty$ et $\int f_n dm \to \int g dm$, quand $n \to \infty$.
Comme $g = f$ p.p., on a donc $f \in L^1$ (au sens "il existe $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ t.q. $f = g$ p.p."). Puis $\|f_n - f\|_1 = \|f_n - g\|_1 \to 0$, quand $n \to \infty$, et $\int f_n dm \to \int g dm = \int f dm$, quand $n \to \infty$.

■

4.7.2 Convergence d'une série absolument convergente et conséquences

On va maintenant montrer que l'espace $(L^1, \|.\|_1)$ est un espace de Banach, en montrant que toute série absolument convergente dans L^1 (i.e. t.q. la série des normes converge) est convergente dans L^1. On en déduira aussi un résultat très important (le théorème 4.7) qui permet d'extraire d'une suite convergeant dans L^1 une sous-suite convergeant presque partout. On aura besoin au cours de la démonstration du petit résultat (démontré dans l'exercice 4.9) suivant :

Lemme 4.8 *Soient (E,T,m) un espace mesuré et $F \in \mathcal{M}_+$. On suppose que $\int F dm < \infty$. Alors $F < +\infty$ p.p. (c'est-à-dire que il existe $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et $F(x) < \infty$ pour tout $x \in A^c$).*

Théorème 4.5 (Séries absolument convergentes dans L^1) *Soit (E,T,m) un espace mesuré. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ t.q. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_1 < +\infty$; alors :*

1. *$\exists F \in L^1$; $|\sum_{p=0}^n f_p| \le F$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
2. *La série de terme général $f_n(x)$ est, pour presque tout $x \in E$, convergente (dans $\mathbb{R}$).*

   On définit f par $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ (de sorte que f est définie p.p.).
3. *$f \in L^1$ (au sens "il existe $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ t.q. $f = g$ p.p.") et $\sum_{p=0}^n f_p \to f$ dans L^1 et p.p., quand $n \to \infty$.*

Démonstration :

1. On choisit un représentant de f_n, encore noté f_n, et on pose $F(x) = \sum_{p\in\mathbb{N}} |f_p(x)| \in \overline{\mathbb{R}}_+$. On a donc $F \in \mathcal{M}_+$ et le corollaire 4.1 du théorème de convergence monotone donne
$$\int F dm = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int |f_n| dm = \sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_1 < \infty.$$
   Le lemme 4.8 donne alors $F < \infty$ p.p., c'est-à-dire il existe $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et $F(x) < \infty$ pour tout $x \in A^c$. En remplaçant F par 0 sur A, on a donc $F \in \mathcal{L}^1$. (Donc, $F \in L^1$ au sens de la remarque 4.9).

   La définition de F donne immédiatement $|\sum_{p=0}^n f_p| \le F$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Pour tout $x \in A^c$, la série de terme général $f_n(x)$ est absolument convergente dans $\mathbb{R}$, donc convergente. Comme $m(A) = 0$, f est donc définie p.p. car elle est définie pour $x \in A^c$ par $f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{p=0}^{n} f_p(x)$.

3. On pose $s_n = \sum_{p=0}^{n} f_p$. le premier point donne $|s_n| \le F$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $F \in L^1$. Le deuxième point donne $s_n \to f$ p.p.. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée (théorème 4.4). Il donne $f \in L^1$ et la convergence de la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (vers f) dans L^1. La convergence p.p. (vers f) de la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donné par le deuxième point.

■

Théorème 4.6 (Riesz-Fisher) *Soit (E, T, m) un espace mesuré. L^1 est un espace de Banach, c'est-à-dire un espace vectoriel normé complet.*

Démonstration : On sait déjà que L^1 est espace vectoriel normé. Une conséquence du théorème 4.5 est que, dans L^1, toute série absolument convergente est convergente. Cette propriété est une caractérisation du fait qu'un espace vectoriel normé est complet. On en déduit donc que $(L^1, \|.\|_1)$ est complet et donc que $(L^1, \|.\|_1)$ est un espace de Banach. ■

Dans la suite L^1 sera toujours muni de la norme $\|\cdot\|_1$.

Théorème 4.7 (Réciproque partielle du théorème de CD) *Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ et $f \in L^1$ telles que $f_n \to f$ dans L^1, alors il existe une sous-suite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, et $F \in L^1$ telles que :*

1. *$f_{n_k} \to f$ p.p.,*
2. *$|f_{n_k}| \le F$ p.p., pour tout $k \in \mathbb{N}$.*

Démonstration :En utilisant le fait que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans L^1, on construit par récurrence une suite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $n_{k+1} > n_k$ et si $p, q \ge n_k$, $\|f_p - f_q\|_1 \le \frac{1}{2^k}$. On peut alors appliquer le théorème 4.5 à la série de terme général $g_k = f_{n_{k+1}} - f_{n_k}$ pour conclure. ■

On donne maintenant le théorème de Vitali, qui donne des conditions nécessaires et suffisantes de convergence dans L^1 pour une suite convergeant p.p.. La démonstration de ce théorème ainsi que des petits résultats préliminaires qu'elle nécessite font l'objet des exercices 4.29 et 4.30.

Proposition 4.9 *Soient (E, T, m) un espace mesuré, $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$; alors :*

1. *$\forall\ \ \varepsilon > 0,\ \ \exists\ \ \delta > 0$ t.q. $\forall A \in T, m(A) \le \delta \Rightarrow \int_A |f|dm \le \varepsilon$.*
2. *$\forall\ \ \varepsilon > 0,\ \ \exists\ \ C \in T$ t.q. $m(C) < +\infty$ et $\int_{C^c} |f|dm \le \varepsilon$.*

Théorème 4.8 (Vitali) *Soient (E, T, m) un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1 = L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ t.q. $f_n \to f$ p.p., f prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}$ (voir remarque 4.8). Alors, $f \in L^1$ et $f_n \to f$ dans L^1 si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *(Equi-intégrabilité) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0\ \ ; \forall\ \ A \in T, \forall\ \ n \in \mathbb{N}, m(A) \le \delta \Rightarrow \displaystyle\int_A |f_n|dm \le \varepsilon$.*
2. *("Equi-petitesse à l'infini") $\forall \varepsilon > 0, \exists C \in T, m(C) < +\infty\ \ ; \forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\int_{C^c} |f_n|dm \le \varepsilon$.*

La démonstration de ce théorème fait l'objet de l'exercice 4.30 ; elle ne nécessite pas le théorème de convergence dominée : on utilise le théorème d'Egorov (cf théorème 3.2 et exercice 3.24). Le théorème de convergence dominée peut être vu comme une conséquence du théorème de Vitali (cf exercice 4.30).

4.8 Continuité et dérivabilité sous le signe $\int$

Soient (E,T,m) un espace mesuré, f une fonction de $E\times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; à $t\in\mathbb{R}$ fixé, on définit l'application $f(.,t):E\to\mathbb{R}$, qui à x associe $f(x,t)$. On suppose que l'application $f(.,t)$ ainsi définie vérifie l'hypothèse suivante :

$$f(.,t)\in L^1=L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m),\quad \forall t\in\mathbb{R}, \tag{4.23}$$

et on note F l'application définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$F(t)=\int f(.,t)dm=\int f(x,t)dm(x). \tag{4.24}$$

Théorème 4.9 (Continuité sous $\int$) *Soient (E,T,m) un espace mesuré, f une fonction de $E\times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant l'hypothèse (4.23) et $t_0\in\mathbb{R}$; on suppose de plus que :*

1. *l'application $f(x,.)$, définie pour presque tout $x\in E$ par : $t\mapsto f(x,t)$, est continue en t_0, pour presque tout $x\in E$;*
2. *$\exists\ \ \varepsilon>0$ et $\exists\ \ G\in L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ tels que $|f(.,t)|\le G$ p.p., pour tout $t\in]t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon[$.*

Alors F, définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $F(t)=\displaystyle\int f(.,t)dm=\int f(x,t)dm(x)$, est continue en t_0.

Démonstration : Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset]t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon[$, t.q. $t_n\to t_0$ lorsque $n\to+\infty$. Soit f_n définie par $f_n(x)=f(x,t_n)$. Comme $f_n\to f(\cdot,t_0)$ p.p. et $|f_n|\le G$ p.p.. On peut appliquer le théorème de convergence dominée (théorème 4.4) à la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il donne $F(t_n)\to F(t_0)$ quand $n\to\infty$.

■

Théorème 4.10 (Dérivabilité sous $\int$) *Soient (E,T,m) un espace mesuré, f une fonction de $E\times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant l'hypothèse (4.23) et $t_0\in\mathbb{R}$. On suppose de plus qu'il existe $\varepsilon>0$, $A\in T$ et $G\in L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ t.q. $m(A)=0$ et :*

1. *L'application $t\mapsto f(x,t)$ est dérivable pour tout $t\in]t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon[$ et pour tout $x\in A^c$;*
2. *$|\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)|\le G(x)$ pour tout $t\in]t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon[$ et pour tout $x\in A^c$.*

Alors F, définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $F(t)=\displaystyle\int f(.,t)dm=\int f(x,t)dm(x)$, est dérivable en t_0 et :

$$F'(t_0)=\int\frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)dm(x). \tag{4.25}$$

Démonstration : Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}\subset]t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon[$, t.q. $t_n\to t_0$ lorsque $n\to+\infty$ et $t_n\neq t_0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$. Soit f_n définie par

$$f_n(x)=\frac{f(x,t_n)-f(x,t_0)}{t_n-t_0}.$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans L^1 et on peut lui appliquer le théorème de convergence dominée (théorème 4.4) car $f_n\to\frac{\partial f}{\partial t}(\cdot,t_0)$ p.p., quand $n\to\infty$, et, si $x\in A^c$ et $n\in\mathbb{N}$, il existe $\theta_{x,n}\in]0,1[$ t.q. $f_n(x)=\frac{\partial f}{\partial t}(x,\theta_{x,n}t_0+(1-\theta_{x,n})t_n)$ (grâce au théorème des accroissements finis) et donc $|f_n|\le G$ p.p., pour tout

$n \in \mathbb{N}$. Le théorème 4.4 donne alors $\frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t_0) \in L^1$ et $\int f_n dm \to \int \frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t_0) dm$. Ceci étant vrai pour toute suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$, t.q. $t_n \to t_0$ lorsque $n \to +\infty$ et $t_n \neq t_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on en déduit bien que F est dérivable en t_0 et :

$$F'(t_0) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) dm(x). \tag{4.26}$$

.

■

4.9 Espérance et moments des variables aléatoires

Définition 4.14 (Espérance, moment, variance) *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle.*

1. *Si $X \geq 0$ (c'est-à-dire $X(\omega) \geq 0$ pour tout $\omega \in \Omega$), on définit l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X par $E(X) = \int X(\omega) dp(\omega)$.*
2. *Si $X \in L^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{A}, p)$ (c'est-à-dire $E(|X|) < \infty$), on définit l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X par :*
$$E(X) = \int X(\omega) dp(\omega).$$
On définit la variance de X par Var$(X) = \sigma^2(X) = E((X - E(X))^2)$ (avec $\sigma(X) \geq 0$).
3. *Pour $r \in [1, +\infty[$, le moment d'ordre r de la variable aléatoire X est l'espérance de la variable aléatoire $|X|^r$.*

Définition 4.15 (Covariance) *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace probabilisé et X, Y deux v.a.r. t.q. $E(X^2) < \infty$ et $E(Y^2) < \infty$. On définit la covariance de X et Y par : cov$(X, Y) = E((X - E(X)(Y - E(Y))$. (Remarquer que $(X - E(X)(Y - E(Y))$ est une v.a.r. intégrable car sa valeur absolue est majorée, par exemple, par $X^2 + Y^2 + E(X)^2 + E(Y)^2$ qui est intégrable.)*

On calcule rarement l'espérance d'une v.a. comme intégrale par rapport à la probabilité p ; en effet, l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ est souvent mal connu. Le théorème 4.11 montre qu'il suffit en fait de connaître la loi de la v.a. X pour calculer son espérance (ou, plus généralement, l'espérance d'une fonction de X). On se ramène ainsi au calcul d'une intégrale sur $\mathbb{R}$.
Les deux inégalités suivantes découlent immédiatement du lemme 4.5 :

Lemme 4.9 (Inégalité de Markov) *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace probabilisé, X une variable aléatoire réelle positive sur Ω et $\lambda \in \mathbb{R}_+^\star$. On suppose que $0 < E(X) < \infty$. Alors :*

$$p(\{X \geq \lambda E(X)\}) \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Démonstration : Il suffit, par exemple, d'appliquer le lemme 4.5 avec $f = X$ et $t = \lambda E(X)$. ■

Lemme 4.10 (Inégalité de Bienaymé Tchebichev) *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace probabilisé, X une variable aléatoire réelle sur Ω, intégrable et t.q. sa variance vérifie $0 < \sigma^2(X) < +\infty$, et $\lambda \in \mathbb{R}_+^\star$. Alors :*

$$p(\{|X - E(X)| \geq \lambda\sigma(X)\}) \leq \frac{1}{\lambda^2}.$$

DÉMONSTRATION : Appliquer le lemme 4.5 avec $f = |X - E(X)|^2$ et $t = \lambda^2\sigma^2(X)$. ■

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace probabilisé, X une variable aléatoire réelle sur Ω. La loi de X, notée p_X est définie par $p_X(A) = p(X^{-1}(A))$, pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$). Ceci est équivalent à dire que pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a, avec $\varphi = 1_A$:

$$\int_\Omega \varphi \circ X(\omega) dp(\omega) = \int_\mathbb{R} \varphi(x) dp_X(x). \tag{4.27}$$

On rappelle que $\varphi \circ X$ est souvent improprement noté $\varphi(X)$, ce qui s'explique par le fait $\varphi \circ X(\omega) = \varphi(X(\omega))$ pour tout $\omega \in \Omega$. Le théorème 4.11 montre que cette égalité est vraie pour une large classe de fonctions boréliennes φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}_+$ (on rappelle que borélienne signifie mesurable quand les espaces sont munis de la tribu de Borel).

Théorème 4.11 (Loi image) *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace probabilisé, X une variable aléatoire réelle sur Ω et p_X la loi de la variable aléatoire X. On a alors :*

1. *L'égalité (4.27) est vraie pour toute fonction φ borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ et toute fonction borélienne bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*

2. *Soit φ une fonction borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la fonction $\varphi \circ X$ appartient à $L^1(\Omega, \mathcal{A}, p)$ si et seulement si $\varphi \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), p_X)$. De plus, si $\varphi \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), p_X)$, L'égalité (4.27) est vraie.*

DÉMONSTRATION : On remarque que (4.27) est vraie pour tout $\varphi = 1_A$, avec $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (par définition de p_X). Par linéarité positive, (4.27) est encore vraie pour tout φ borélienne étagée positive de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Par convergence monotone, (4.27) est alors vraie pour tout φ borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Ceci donne la première partie du premier item. En utilisant la décomposition $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$, on montre alors le deuxième item. Enfin, la deuxième partie du premier item vient du fait que φ est intégrable pour la probabilité p_X si φ est borélienne bornée. ■

Un produit de v.a.r. intégrables et indépendantes est une v.a.r. intégrable (ce qui est, bien sûr, faux sans l'hypothèse d'indépendance) et L'espérance de ce produit est égal au produit des espérances. Ce résultat plus général est donnée dans la proposition suivante.

Proposition 4.10 *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace probabilisé, $d > 1$ et $X_1, \ldots, X_d$ des v.a.r. indépendantes.*

1. *Soit $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$ des fonctions boréliennes de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. On a alors :*

$$E(\prod_{i=1}^{d} \varphi_i(X_i)) = \prod_{i=1}^{n} E(\varphi_i(X_i)). \tag{4.28}$$

   (En convenant qu'un produit de termes est nul si l'un des termes est nul.)

2. *Soit $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$ des fonctions boréliennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $\varphi(X_i)$ est intégrable pour tout $i = 1, \ldots, d$. La v.a.r. $\prod_{i=1}^d \varphi_i(X_i)$ est intégrable et l'égalité (4.28) est vraie.*

3. *Soit $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$ des fonctions boréliennes bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. L'égalité (4.28) est vraie.*

N.B. Si $X_1, \ldots, X_d$ sont des v.a.r., le fait que (4.28) soit vraie pour toute famille $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$ de fonctions boréliennes bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est donc une condition nécessaire et suffisante pour les v.a.r. $X_1, \ldots, X_d$ soient indépendantes.

Démonstration : Si $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$ sont des fonctions caractéristiques de boréliens de $\mathbb{R}$, l'égalité (4.28) est une conséquence immédiate de la définition de l'indépendance des X_i (Si $\varphi_i = 1_{A_i}$ avec $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a $E(\varphi_i(X_i)) = P(\{X_i \in A_i\}) = P(X_i^{-1}(A_i)))$. Par linéarité positive, on en déduit que (4.28) est vraie si les fonctions φ_i sont (boréliennes) étagées positives (c'est-à-dire $\varphi \in \mathcal{E}_+$). Puis, par convergence monotone, on en déduit le premier item de la proposition (car toute fonction orélienne de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ est limite croissante d'éléments de $\mathcal{E}_+$).

Pour le deuxième item, on utilise (4.28) avec la fonction $x \mapsto |\varphi_i(x)|$ au lieu de la fonction φ_i (pour tout i). On montre ainsi que la v.a.r. $\prod_{i=1}^d \varphi_i(X_i)$ est intégrable. Puis, on montre (4.28) par linéarité (utilisant $\varphi_i = \varphi_i^+ - \varphi_i^-$).

Le troisième item est conséquence immédiate du deuxième (car si X est une v.a.r. et φ est une fonction borélienne bornée, la v.a.r. $\varphi(X)$ est intégrable). ■

Une conséquence de la proposition 4.10 est que XY est intégrable et $\text{cov}(X, Y) = 0$ si X, Y sont deux v.a.r. intégrables sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, p)$.

Pour montrer que des v.a.r. sont indépendantes, il est parfois utile de savoir qu'il suffit de montrer (4.28) lorsque les fonctions φ_i sont continues à support compact de $\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}$. C'est l'objet de la proposition 4.12 qui se démontre à partir d'un résultat d'unicité (proposition 4.11) sur lequel nous reviendrons au chapitre 5. On note $C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues à support compact de $\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}$ (une fonction φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est à support compact si il existe un compact K de $\mathbb{R}$ t.q. $\varphi = 0$ sur K^c).

Proposition 4.11 *Soit m et μ deux mesures sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, finies sur les compacts de $\mathbb{R}$. On suppose que :*

$$\int \varphi dm = \int \varphi d\mu \text{ pour tout } \varphi \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

Alors, $m = \mu$.

Démonstration : Puisque m et μ sont des mesures sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, finies sur les compacts, on a bien $C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$ et $C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$. On pose maintenant $\mathcal{C} = \{]a, b[, \ a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ et on commence par montrer que $m = \mu$ sur $\mathcal{C}$.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Il existe une suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ t.q. $\varphi_n \uparrow 1_{]a,b[}$. En effet, il suffit de construire φ_n, pour $n \geq 2/(b-a)$, de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
&\varphi_n(x) = 0 \text{ si } x \leq a, \\
&\varphi_n(x) = n(x-a) \text{ si } a < x < a + \tfrac{1}{n}, \\
&\varphi_n(x) = 1 \text{ si } a + \tfrac{1}{n} < x < b - \tfrac{1}{n}, \\
&\varphi_n(x) = -n(x-b) \text{ si } b - \tfrac{1}{n} \leq x \leq b \\
&\varphi_n(x) = 0 \text{ si } b \leq x.
\end{aligned}$$

Puis, en passant à la limite quand $n \to \infty$ dans l'égalité $\int \varphi_n dm = \int \varphi_n d\mu$, on obtient (par convergence monotone ou par convergence dominée) $m(]a, b[) = \mu(]a, b[)$.

On conclut enfin que $m = \mu$ en utilisant, par exemple, la proposition 2.5. ■

Proposition 4.12 *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace probabilisé, $d > 1$ et $X_1, \ldots, X_d$ des v.a.r. Ces v.a.r. sont indépendantes si et seulement si on a, pour tout famille $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_d\} \subset C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,*

$$E\Big(\prod_{i=1}^d \varphi_i(X_i)\Big) = \prod_{i=1}^d E(\varphi_i(X_i)), \tag{4.29}$$

(En convenant qu'un produit de termes est nul si l'un des termes est nul.)

DÉMONSTRATION : Le fait que la condition est nécessaire est une conséquence immédiate de la proposition 4.10 car une fonction continue à support compact est borélienne et bornée. On montre maintenant que la condtion est nécessaire. On suppose donc que (4.29) est vraie pour toute famille $\{\varphi_1,\ldots,\varphi_d\} \subset C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et on veut montrer que les v.a.r. $X_1,\ldots,X_d$ sont indépendantes, c'est-à-dire que pour tout $A_1,\ldots,A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a :

$$E\left(\prod_{i=1}^{d} 1_{A_i}(X_i)\right) = \prod_{i=1}^{d} E(1_{A_i}(X_i)). \tag{4.30}$$

(On rappelle en effet que $E(1_{A_i}(X_i)) = p(X_i^{-1}(A_i))$ et $E(\prod_{i=1}^{d} 1_{A_i} X_i)) = p(\cap_{i=1}^{n} X_i^{-1}(A_i)).$)

Pour montrer (4.30), on introduit, pour tout $1 \le n \le d+1$, la propriété suivante, notée P_n :
P_n : (4.29) est vraie si $\varphi_i = 1_{A_i}$, avec $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, pour $i < n$, et $\varphi_i \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ pour $i \ge n$.
L'hypothèse de la proposition donne que P_1 est vraie. On suppose maintenant que P_n est vraie pour un $n \in \{1,\ldots,d\}$. Soit $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour $i < n$ (et $\varphi_i = 1_{A_i}$) et $\varphi_i \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ pour $i > n$. Pour $A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on pose, avec $\varphi_n = 1_{A_n}$:

$$m(A_n) = E(\textstyle\prod_{i=1}^{d} \varphi_i(X_i)),$$
$$\mu(A_n) = \textstyle\prod_{i=1}^{d} E(\varphi_i(X_i)).$$

Les applications m et μ sont des mesures sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. La propriété P_n montre que $\int \varphi dm = \int \varphi d\mu$ pour tout $\varphi \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$. La proposition 4.11 montre alors que $m = \mu$ ce qui donne la propriété P_{n+1}. Par récurrence sur n, on montre ainsi que P_{d+1} est vraie, ce qui donne (4.30) et l'indépendance de $X_1,\ldots,X_d$.

■

4.10 Espace $L^1_{\mathbb{C}}(E,T,m)$ et espace $L^1_{\mathbb{R}^N}(E,T,m)$

Définition 4.16 *Soient (E,T,m) un espace mesuré et $N > 1$ ($N \in \mathbb{N}$).*

1. *Soit $f : E \to \mathbb{R}^N$. Pour $x \in E$, on pose $f(x) = (f_1(x),\ldots,f_N(x))^t \in \mathbb{R}^N$. La fonction f appartient à $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}^N}(E,T,m)$ si $f_n \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ pour tout $n \in \{1,\ldots,N\}$.*
2. *Si $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}^N}(E,T,m)$, on note*

$$\int f dm = (\int f_1 dm,\ldots,\int f_N dm)^t \in \mathbb{R}^N.$$

La caractérisation suivante de mesurabilité et intégrabilité est intéressante.

Proposition 4.13 *Soient (E,T,m) un espace mesuré, $N > 1$ et $f : E \to \mathbb{R}^N$.*

1. *f_n est mesurable (de E dans $\mathbb{R}$) pour tout $n \in \{1,\ldots,N\}$ si et seulement si f est mesurable de E dans $\mathbb{R}^N$, c'est-à-dire si et seulement si $f^{-1}(A) \in E$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.*
2. *Si f est mesurable (de E dans $\mathbb{R}^N$). On munit $\mathbb{R}^N$ d'une norme, notée $\|\cdot\|$. Alors, $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}^N}(E,T,m)$ si et seulement si $\int \|f\| dm < \infty$ (noter que $\|f\| \in \mathcal{M}_+$).*

DÉMONSTRATION : On donne la démonstration pour $N = 2$.

1. On suppose d'abord $f_1, f_2 \in \mathcal{M}$. On veut montrer que f est mesurable de E dans $\mathbb{R}^2$. Comme $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ est engendré par $\{A \times B,\ A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$, il suffit de montrer que $f^{-1}(A \times B) \in T$ pour tout $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

   Soit donc $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On a $f^{-1}(A \times B) = f_1^{-1}(A) \cap f_2^{-1}(B) \in T$ car f_1 et f_2 sont mesurables. Donc $f^{-1}(A \times B) \in T$. On a bien montré que f est mesurable de E dans $\mathbb{R}^2$

   Réciproquement, on suppose maintenant que f est mesurable de E dans $\mathbb{R}^2$. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On remarque que $f_1^{-1}(A) = f^{-1}(A \times \mathbb{R})$. Or $A \times \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, donc $f_1^{-1}(A) = f^{-1}(A \times \mathbb{R}) \in T$, ce qui prouve que f_1 est mesurable. On prouve de manière semblable que f_2 est mesurable.

2. Soit f mesurable de E dans $\mathbb{R}^N$. On suppose que $\mathbb{R}^N$ est muni d'une norme, notée $\|\cdot\|$. Comme $y \mapsto \|y\|$ est continue de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$, l'application $\|f\| : x \mapsto \|f(x)\|$ est mesurable de E dans $\mathbb{R}$ (comme composée d'applications mesurables). Comme cette application ne prend que des valeurs positives ou nulles, on a donc $\|f\| \in \mathcal{M}_+$.

   Comme toutes les normes sur $\mathbb{R}^N$ sont équivalentes, on a donc $\int \|f\| dm < \infty$ si et seulement si $\int \|f\|_1 dm < \infty$, avec $\|f\|_1 = \sum_{n=1}^N |f_n|$. Il est alors immédiat de remarquer que $\int \|f\|_1 dm < \infty$ si et seulement $f_n \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ pour tout $n \in \{1, \ldots, N\}$. On a donc :

$$\int \|f\| dm < \infty \Leftrightarrow f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}^N}(E, T, m).$$

■

La définition de $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}^N}(E, T, m)$ donne immédiatement que cet espace est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. De plus, si $\mathbb{R}^N$ est muni d'une norme, notée $\|\cdot\|$, il est aussi immédiat que l'application $f \mapsto \int \|f\| dm$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}^N}(E, T, m)$. Pour obtenir un espace vectoriel normé, on va considérer, comme dans le cas $N = 1$, l'espace $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}^N}(E, T, m)$ quotienté par la relation "$f = g$ p.p.". On rappelle que $f = g$ p.p. si il existe $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et $f = g$ sur A^c.

Définition 4.17 *Soit (E, T, m) un espace mesuré.*

1. *L'espace $L^1_{\mathbb{R}^N}(E, T, m)$ est l'espace $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}^N}(E, T, m)$ quotienté par la relation "$f = g$ p.p.".*
2. *On munit $\mathbb{R}^N$ d'une norme notée $\|\cdot\|$. Soit $F \in L^1_{\mathbb{R}^N}(E, T, m)$. On pose $\|F\|_1 = \int \|f\| dm$, où $f \in F$ (cette définition est correcte car indépendante du choix de f dans F).*

Proposition 4.14 *Soient (E, T, m) un espace mesuré et $N > 1$. L'espace $L^1_{\mathbb{R}^N}(E, T, m)$ est un espace de Banach (réel) c'est-à-dire un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$) normé complet (avec la norme définie dans la définition 4.17).*

Démonstration : La démonstration de cette proposition découle facilement du cas $N = 1$. ■

Définition 4.18 *Soit (E, T, m) un espace mesuré.*

1. *Soit $f : E \to \mathbb{C}$. On note $\Re(f)$ et $\Im(f)$ les parties réelle et imaginaire de f. On a donc, pour $x \in E$, $f(x) = \Re(f)(x) + i\Im(f)(x)$, avec $\Re(f)(x), \Im(f)(x) \in \mathbb{R}$. La fonction f appartient à $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(E, T, m)$ si $\Re(f), \Im(f) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.*

2. Si $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(E,T,m)$, on note

$$\int f dm = \int \Re(f) dm + i \int \Im(f) dm \in \mathbb{C}.$$

Ici aussi, on a une caractérisation de mesurabilité et intégrabilité.

Proposition 4.15 *Soit (E,T,m) un espace mesuré et f une application de $E \to \mathbb{C}$.*

1. *$\Re(f)$ et $\Im(f)$ sont mesurables (de E dans $\mathbb{R}$) si et seulement si f est mesurable de E dans $\mathbb{C}$, c'est-à-dire si et seulement $f^{-1}(A) \in E$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$.*
2. *Si f est mesurable (de E dans $\mathbb{C}$), $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(E,T,m)$ si et seulement si $\int |f| dm < \infty$ (noter que $|f| \in \mathcal{M}_+$).*

Démonstration :
La démonstration de cette proposition se ramène facilement à la précédente démonstration (c'est-à-dire à la démonstration de la proposition 4.13) en utilisant l'application $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(z) = (x,y)^t$ si $z = x + iy \in \mathbb{C}$, qui est une bijection continue, d'inverse continue.

■

Ici aussi, la définition de $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(E,T,m)$ donne immédiatement que cet espace est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Il est aussi immédiat que l'application $f \mapsto \int |f| dm$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(E,T,m)$. Pour obtenir un espace vectoriel normé, on va considérer l'espace $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(E,T,m)$ quotienté par la relation "$f = g$ p.p.".

Définition 4.19 *Soit (E,T,m) un espace mesuré.*

1. *L'espace $L^1_{\mathbb{C}}(E,T,m)$ est l'espace $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(E,T,m)$ quotienté par la relation "$f = g$ p.p.".*
2. *Soit $F \in L^1_{\mathbb{C}}(E,T,m)$. On pose $\|F\|_1 = \int |f| dm$, où $f \in F$ (cette défintion est correcte car indépendante du choix de f dans F).*

Proposition 4.16 *Soit (E,T,m) un espace mesuré. L'espace $L^1_{\mathbb{C}}(E,T,m)$ est un espace de Banach (complexe) c'est-à-dire un espace vectoriel (sur $\mathbb{C}$) normé complet (avec la norme définie dans la définition 4.19).*

Démonstration :
La démonstration de cette proposition découle facilement du fait que $L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ est un espace de Banach (réel).

■

4.11 Exercices

4.11.1 Intégrale des fonctions mesurables positives et espace $\mathcal{L}^1$

Exercice 4.1 (Sup de mesures) *Corrigé 55 page 329*
Soit (E,T) un espace mesurable et $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures sur T. On suppose que $m_{n+1}(A) \geq m_n(A)$ pour tout $A \in T$ et tout $n \in \mathbb{N}$. On pose $m(A) = \sup\{m_n(A), n \in \mathbb{N}\}$ pour $A \in T$.

1. (Lemme préliminaire) Soit $(a_{n,p})_{n,p\in\mathbb{N}} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ et $(a_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ t.q. $a_{n+1,p} \geq a_{n,p}$, pour tout $n, p \in \mathbb{N}$, et $a_{n,p} \to a_p$ quand $n \to \infty$, pour tout $p \in \mathbb{N}$. Montrer $\sum_{p=0}^{\infty} a_{n,p} \to \sum_{p=0}^{\infty} a_p$ (dans $\overline{\mathbb{R}}_+$) quand $n \to \infty$. [On pourra utiliser $\sum_{p=0}^{N} a_{n,p} \leq \sum_{p=0}^{\infty} a_{n,p} \leq \sum_{p=0}^{\infty} a_p$.]

2. Montrer que m est une mesure.

3. Soit $f \in \mathcal{E}_+(E,T)$. (On rappelle que $\mathcal{E}_+(E,T)$ est l'ensemble des fonctions étagées de E dans $\mathbb{R}_+$.) Montrer que $\int f dm = \sup_{n\in\mathbb{N}}(\int f dm_n)$.

4. Soit $f \in \mathcal{M}_+(E,T)$. (On rappelle que $\mathcal{M}_+(E,T)$ est l'ensemble des fonctions mesurables de E dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.)

   (a) Montrer que $(\int f dm_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante majorée par $\int f dm$.

   (b) Montrer que $\int f dm_n \to \int f dm$ quand $n \to \infty$.

5. Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$. Montrer que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $\int f dm_n \to \int f dm$ quand $n \to \infty$.

Exercice 4.2 (Somme de mesures) *Corrigé 56 page 330*
Soient m_1 et m_2 deux mesures sur l'espace mesurable (E,T).

1. Montrer que $m = m_1 + m_2$ est une mesure.

2. Montrer qu'une application f mesurable de E dans $\mathbb{R}$ est intégrable pour la mesure m si et seulement si elle est intégrable pour les mesures m_1 et m_2. Si f est intégrable pour la mesure m, montrer que $\int f dm = \int f dm_1 + \int f dm_2$.

3. Soit $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de mesures (positives) sur (E,T) et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+^\star$. On pose, pour $A \in T$, $m(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n m_n(A)$. Montrer que m est une mesure sur T ; soit f une application mesurable de E dans $\mathbb{R}$ et intégrable pour la mesure m ; montrer que f est, pour tout $n \in \mathbb{N}$, intégrable pour la mesure m_n et que $\int f dm = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \int f dm_n$.

Exercice 4.3 (Mesure de Dirac) *Corrigé 57 page 332*
Soit δ_0 la mesure de Dirac en 0, définie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. (cf exemple 2.1.) Soit $f \in \mathcal{M}_+$, calculer $\int f d\delta_0$.

Exercice 4.4 (Restrictions de la mesure de Lebesgue) *Corrigé 58 page 332*
Soit A et B deux boréliens de $\mathbb{R}$ t.q. $A \subset B$. On note λ_A [resp. λ_B] la restriction à $\mathcal{B}(A)$ [resp. $\mathcal{B}(B)$] de la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(B,\mathcal{B}(B),\lambda_B)$. Montrer que $f_{|A} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(A,\mathcal{B}(A),\lambda_A)$ et que $\int f_{|A} d\lambda_A = \int f 1_A d\lambda_B$. [Considérer d'abord le cas $f \in \mathcal{E}_+$ puis $f \in \mathcal{M}_+$ et enfin $f \in \mathcal{L}^1$.]

Exercice 4.5 (Intégrale de Lebesgue et intégrale des fonctions continues) *Corrigé 59 page 333*
Soit $f \in C([0,1],\mathbb{R})$. Montrer que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1],\mathcal{B}([0,1]),\lambda)$ et que $\int f d\lambda = \int_0^1 f(x)dx$ (cette dernière intégrale est à prendre au sens de "l'intégrale des fonctions continues" vue au Chapitre 1). On rappelle que l'on note (un peu abusivement...) par λ la restriction à $\mathcal{B}([0,1])$ de la mesure le Lebesgue (aussi notée λ...) sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Exercice 4.6 (Fonctions continues et fonctions intégrables) *Corrigé 60 page 334*
Soit m une mesure finie sur $\mathcal{B}([0,1])$. Montrer que $C([0,1],\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1],\mathcal{B}([0,1]),m)$.

Exercice 4.7 (f, $g \in \mathcal{L}^1 \not\Rightarrow fg \in \mathcal{L}^1$)

Soient f, $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$. Donner un exemple pour lequel $fg \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$.

Exercice 4.8 (Rappel du cours. . .)
Soit (E, T, m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}_+$. Montrer que si $A \in T$ est tel que $m(A) = 0$, alors $\int_A f dm (= \int f 1_A dm) = 0$. (On rappelle que $f 1_A = f$ sur A et $f 1_A = 0$ sur A^c.)

Exercice 4.9 (f positive intégrable implique f finie p.p.) *Corrigé 61 page 334*
Soit (E, T, m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}_+$. Montrer que si $\displaystyle\int f dm < +\infty$, alors $f < +\infty$ p.p..

Exercice 4.10 (Une caractérisation de l'intégrabilité) *Corrigé 62 page 335*
Soient (E, T, m) un espace mesuré fini, u une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = \{x \in E, |u(x)| \geq n\}$ et $B_n = \{x \in E, n < |u(x)| \leq n+1\}$.

1. Montrer que :

$$\int |u| dm < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n\, m(B_n) < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} m(A_n) < +\infty. \tag{4.31}$$

2. Soit $p \in]1, +\infty[$, montrer que $|u|^p$ est une fonction mesurable et que :

$$\int |u|^p dm < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n^p\, m(B_n) < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n^{p-1}\, m(A_n) < +\infty. \tag{4.32}$$

Exercice 4.11 (Sur la convergence en mesure)
Soit (E, T, m) un espace mesuré. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ et $f, g \in \mathcal{M}$ t.q. $f_n \to f$ en mesure et $g_n \to g$ en mesure, quand $n \to \infty$.

1. On suppose, dans cette question, que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et que $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Montrer que $fg \in \mathcal{M}$ et $f_n g_n \to fg$ en mesure, quand $n \to \infty$.

   [On pourra s'inspirer de la question 3. de l'exercice 3.22 et donc commencer par montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 et $k_0 \in \mathbb{N}$ tels que :

   $$n \geq n_0,\ k \geq k_0 \Rightarrow m(\{x \in E\,;\, |f_n(x)| \geq k\}) \leq \varepsilon.]$$

   Donner un exemple pour lequel $fg \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

2. En prenant $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, Donner un exemple pour lequel $f_n g_n \not\to fg$ en mesure, quand $n \to \infty$ (pour cet exemple, on a donc $f \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ ou $g \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$).

Exercice 4.12 (Sur l'inégalité de Markov) *Corrigé 63 page 337*
Soit (E, T, m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

1. Montrer que pour tout $a > 0$, on a $a\, m(\{|f| > a\}) \leq \displaystyle\int_{\{|f|>a\}} |f|\, dm$.

2. Montrer que pour tout $a > 0$, on a $m(\{|f| > a\}) \leq (\displaystyle\int |f|\, dm)/a$. (Ceci est l'inégalité de Markov.)

3. Montrer que
$$\lim_{a\to\infty} a\, m(\{|f|>a\}) = 0. \tag{4.33}$$

4. Donner des exemples de fonctions non intégrables qui vérifient la propriété (4.33) dans les 2 cas suivants : $(E,T,m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $(E,T,m) = (]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda)$.

Exercice 4.13 (Sur $f \geq 0$ p.p.) *Corrigé 64 page 338*
Soit (E,T,m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$. Montrer que les 2 conditions suivantes sont équivalentes :

1. $f \geq 0$ p.p.,
2. $\int_A f\, dm \geq 0$ pour tout $A \in T$.

Exercice 4.14 *Corrigé 65 page 339*
Soient (E,T,m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{L}^1 (= \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m))$.

1. Montrer que : $\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ t.q. $\forall A \in T$, $m(A) \leq \delta \Rightarrow \displaystyle\int_A |f| dm \leq \varepsilon$. [*Introduire* $f_n = \inf(|f|, n)$].

2. Montrer que : $\forall \varepsilon > 0, \exists\, C \in T$ t.q. :

   (i) $m(C) < +\infty$,

   (ii) $\displaystyle\int_{C^c} |f| dm \leq \varepsilon$,

   (iii) $\sup_C |f| < +\infty$,

   [*Considérer* $C_n = \{x \in E\,;\ \dfrac{1}{n} \leq |f(x)| \leq n\}$, *et montrer que pour* $n \geq n_0$ *où* n_0 *est bien choisi,* C_n *vérifie (i), (ii) et (iii).*]

Exercice 4.15
Soit (E,T,m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$. On suppose que $0 \leq f \leq 1$ p.p. et que $\int f\, dm = \int f^2\, dm$. Montrer qu'il existe un ensemble mesurable fini A tel que $f = 1_A$ p.p..

Exercice 4.16 (Intégration par rapport à une mesure image)
Soit (E,T,m) un espace mesuré, (F,S) un espace mesurable et f de E dans F. On suppose que f est mesurable, c'est à dire que $f^{-1}(B) \in T$ pour tout $B \in S$. pour tout $B \in S$, on pose $\mu(B) = m(f^{-1}(B))$ (On note souvent $\mu = f_\star m$).

1. Montrer que μ est une mesure sur S (on l'appelle *mesure image* de m par f).

2. μ est-elle finie (resp. σ-finie, diffuse) lorsque m est finie (resp. σ-finie, diffuse) ?

3. Montrer qu'une fonction Φ mesurable de F dans $\mathbb{R}$ est $\mu-$intégrable si et seulement si $\Phi \circ f$ est m-intégrable et que dans ce cas
$$\int_E \Phi \circ f\, dm = \int_F \Phi\, d\mu.$$

Exercice 4.17 ($m-$mesurabilité) *Corrigé 66 page 340*

Soit (E, T, m) un espace mesuré. Soit $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et f une application de A^c dans $\mathbb{R}$. Montrer que :
il existe g mesurable de E dans $\mathbb{R}$ t.q. $f = g$ p.p. si et seulement si il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, suite de fonctions étagées, t.q. $f_n \to f$ p.p., quand $n \to \infty$.

Exercice 4.18 (Mesure complète, suite de l'exercice 2.28) *Corrigé 67 page 340*
On reprend les notations de l'exercice 2.28 page 47. On note donc $(E, \overline{T}, \overline{m})$ le complété de l'espace mesuré (E, T, m).

Montrer que $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, \overline{T}, \overline{m})$. Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, \overline{T}, \overline{m})$, montrer qu'il existe $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ t.q. $f = g$ p.p. et que $\displaystyle\int f d\overline{m} = \int g dm$.

Exercice 4.19 (Petit lemme d'intégration) *Corrigé 68 page 341*
Soit (E, T, m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}(E, T)$. (On rappelle que $\mathcal{M}(E, T)$ est l'ensemble des fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$.)

1. On suppose (dans cette question) que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Montrer que

$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T,\ m(A_n) \to 0 \ \Rightarrow \int f 1_{A_n} dm \to 0. \tag{4.34}$$

2. On prend (dans cette question) $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Donner un exemple de $f \in \mathcal{M}(E, T)$ t.q. $f \geq 0$ (de sorte que $f \in \mathcal{M}_+(E, T)$), pour lequel (4.34) est faux.
3. On suppose (dans cette question) que $m(E) < \infty$ et que $f > 0$ (c'est à dire $f(x) > 0$ pour tout $x \in E$). Montrer que

$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T,\ \int f 1_{A_n} dm \to 0 \ \Rightarrow m(A_n) \to 0. \tag{4.35}$$

   On pourra utiliser le fait que, pour $p \in \mathbb{N}^\star$, $A_n \subset \{f < \frac{1}{p}\} \cup \{x \in A_n; f(x) \geq \frac{1}{p}\}$.
4. On prend (dans cette question) $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ (de sorte que $m(E) = \infty$). Montrer que si $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et $f > 0$, alors (4.35) est faux. Donner un exemple de $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ t.q. $f > 0$.

Exercice 4.20 (Fatou sans positivité) *Corrigé 69 page 343*
Soit (E, T, m) un espace mesuré. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et $h \in \mathcal{M}(E, T)$. (On rappelle que $\mathcal{M}(E, T)$ est l'ensemble des fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$.)

1. On suppose que $f_n \to h$ p.p. quand $n \to \infty$, $f_n \geq f$ p.p. pour tout $n \in \mathbb{N}$, et on suppose qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ t.q. $\int f_n dm \leq C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer qu'il existe $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ t.q.
      - $f_n = g_n$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f = g$ p.p.,
      - $g_n(x) \to h(x)$, quand $n \to \infty$, pour tout $x \in E$,
      - $g_n \geq g$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Montrer que $h \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

2. (question plus difficile) On reprend les hypothèses de la question précédente sauf "$f_n \ge f$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$" que l'on remplace par l'hypothèse (plus faible) "il existe $D \in \mathbb{R}$ t.q. $\int f_n dm \ge D$ pour tout $n \in \mathbb{N}$". Donner un exemple pour lequel $h \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$. [Prendre $(E,T,m) = (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$.]

Exercice 4.21 *Corrigé 70 page 343*
Soient $T > 0$ et $f \in \mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1([0,T],\mathcal{B}([0,T]),\lambda)$ (λ désigne donc ici la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}([0,T])$).

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction $x \mapsto e^{nx} f(x)$ appartient à $\mathcal{L}^1$.

   On suppose, dans la suite de l'exercice, que $f \ge 0$ p.p. et qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ t.q. que $\int e^{nx} f(x)\, d\lambda(x) \le M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que $f = 0$ p.p.. [Appliquer le théorème de convergence monotone.]

3. On suppose de plus que f est continue. Montrer que $f(x) = 0$ pour tout $x \in [0,T]$.

4.11.2 L'espace L^1

Exercice 4.22 (Mesure de densité) *Corrigé 71 page 344*
Soit (E,T,m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}_+$. Pour $A \in T$, on pose $\mu(A) = \int_A f dm$.

1. Montrer que μ est une mesure sur T.

2. Soit $g \in \mathcal{M}$. Montrer que $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,\mu)$ si et seulement si $fg \in L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ (on pose $fg(x) = 0$ si $f(x) = \infty$ et $g(x) = 0$). Montrer que, pour $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,\mu)$, $\int g d\mu = \int fg dm$.

(On dit que μ est la mesure de densité f par rapport à m et on pose $\mu = fm$.)

Exercice 4.23 (Comparaison de convergence dans L^1)
On considère ici l'espace mesurable $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R})$, où $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu des boréliens sur $\mathbb{R}$. On note λ la mesure de Lebesgue et, pour $a \in \mathbb{R}$, on note δ_a la mesure de Dirac en a. On pose $\mu = \delta_1 + \delta_2 + 3\lambda$ (noter que μ est une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$). Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$. On pose $f_n = f 1_{[-n,n]}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose $L^1(\mu) = L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\mu)$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in L^1(\mu)$, et calculer $a_n = \int f_n d\mu$.

2. A-t-on convergence simple, convergence uniforme, convergence en mesure, convergence dans $L^1(\mu)$ de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$?.

Exercice 4.24 (Convergence uniforme et convergence des intégrales)
Soient (E,T,m) un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ $(= L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m))$; on suppose que f_n converge uniformément vers f quand $n \to \infty$ (plus précisément : il existe des représentants des f_n, encore notés f_n, t.q. f_n converge uniformément vers f).

1. A-t-on $f \in L^1$ (plus précisément : existe-t-il $F \in L^1$ t.q. $f = g$ p.p. si $g \in F$) ? [*distinguer les cas* $m(E) < +\infty$ *et* $m(E) = +\infty$.]

2. Si $f \in L^1$ et $(\int f_n dm)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$, a-t-on : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int f_n dm = \int f dm$?

Exercice 4.25 *Corrigé 72 page 345*

Soient (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ $(= L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m))$ et $f \in L^1$; on suppose que $f_n \geq 0$ pp $\forall n \in \mathbb{N}$, que $f_n \to f$ pp et que $\int f_n dm \to \int f dm$ lorsque $n \to +\infty$. Montrer que $f_n \to f$ dans L^1. [*on pourra examiner la suite* $(f - f_n)^+$.]

Exercice 4.26 (Exemple de convergence)

1. Soit (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, $f, g \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. On suppose que $f_n \to f$ p.p. et que $f_n \to g$ dans $L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Montrer que $f = g$ p.p.

2. On suppose maintenant $(E, T, m) = ([-1, 1], \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction : $f_n = n1_{[\frac{-1}{2n}, \frac{1}{2n}]}$.

   (a) Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans L^1, et que la suite $(\int f_n d\lambda)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

   (b) Peut-on appliquer le théorème de Lebesgue de la convergence dominée ?

   (c) A-t-on convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$?

   (d) Montrer que pour toute fonction φ continue de $[-1, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, $\int f_n \varphi d\lambda \to \int \varphi d\delta_0$ lorsque $n \to +\infty$ (on dit que $f_n\lambda$ tend vers δ_0 dans l'ensemble des mesures sur les boréliens de $[-1, 1]$ pour la topologie "faible $\star$").

Exercice 4.27 (A propos du lemme de Fatou)
Soient (E, T, m) un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1 (= \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m))$ t.q. $f_n \geq 0$ p.p. pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose, pour tout $x \in E$, $f(x) = \liminf_{n\to+\infty} f_n(x)$.

1. Construire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n \in \mathcal{M}_+$ t.q. $f_n = g_n$ p.p..

   On pose $g = \liminf_{n\to+\infty} g_n$ (où g_n est construite à la question 1).

2. Montrer que $f = g$ pp, que $f \geq 0$ p.p. et que :
$$\int g dm \leq \liminf_{n\to+\infty} \int f_n dm \tag{4.36}$$

3. On suppose de plus qu'il existe $C > 0$ t.q. $\displaystyle\int f_n dm \leq C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et que $f < +\infty$ p.p..

Exercice 4.28 (Théorème de Beppo-Lévi) *Corrigé 73 page 346*
Soient (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ $(= L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m))$ et $f\colon E \to \mathbb{R}$, t.q. :

(i) $f_n \to f$ p.p. lorsque $n \to +\infty$.

(ii) La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, c'est-à-dire :

$f_{n+1} \geq f_n$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$,

ou

$f_{n+1} \leq f_n$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Construire $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1 (= \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m))$ et $g \in \mathcal{M}$ t.q. $f_n = g_n$ p.p., $f = g$ p.p., $g_n(x) \to g(x)$ pour tout $x \in E$, et $g_{n+1} \geq g_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou $g_{n+1} \leq g_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

2. Montrer que $f \in L^1 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \int f_n dm \in \mathbb{R}$.
3. On suppose ici que $f \in L^1$, montrer que $f_n \to f$ dans L^1, lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 4.29 (Préliminaire pour le théorème de Vitali) *Corrigé 74 page 348*
Soient (E, T, m) un espace mesuré et $f \in L^1(= L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m))$.

1. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ t.q. :
$$A \in T,\ m(A) \le \delta \Rightarrow \int_A |f| dm \le \varepsilon.$$
[*Choisir un représentant de* f *et introduire* $f_n = \inf(|f|, n)$].
2. Soit $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe $C \in T$ t.q. $m(C) < +\infty$ et $\int_{C^c} |f| dm \le \varepsilon$. [*Choisir un représentant de* f *et considérer* $C_n = \{x \in E\,;\ \frac{1}{n} \le |f(x)|\}$.]

Exercice 4.30 (Théorème de Vitali) *Corrigé 75 page 349*
Soient (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(= L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m))$ et $f\colon E \to \mathbb{R}$, t.q. $f_n \to f$ p.p..

1. On suppose $m(E) < +\infty$. Montrer que : $f \in L^1$ et $f_n \to f$ dans L^1 lorsque $n \to +\infty$ si et seulement si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-intégrable (i.e. : Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe δ t.q. $(A \in T,\ n \in \mathbb{N},\ m(A) \le \delta \Rightarrow \int_A |f_n| dm \le \varepsilon)$. [*Pour montrer le sens* $\Rightarrow$*, utiliser la question 1 de l'exercice 4.29. Pour le sens* $\Leftarrow$*, remarquer que* $\int |f_n - f| dm = \int_A |f_n - f| dm + \int_{A^c} |f_n - f| dm$*, utiliser le théorème d'Egorov et le lemme de Fatou...*]
2. On suppose maintenant $m(E) = +\infty$. Montrer que : $f \in L^1$ et $f_n \to f$ dans L^1 lorsque $n \to +\infty$ si et seulement si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-intégrable et vérifie : $\forall \varepsilon > 0, \exists C \in T,\ m(C) < +\infty$ et $\int_{C^c} |f_n| dm \le \varepsilon$ pour tout n. [*Pour montrer le sens* $\Rightarrow$*, utiliser l'exercice 4.29. Pour le sens* $\Leftarrow$*, utiliser l'exercice 4.29, le lemme de Fatou et le résultat de la question 1.*]
3. Montrer que le théorème de convergence dominée de Lebesgue peut être vu comme une conséquence du théorème de Vitali.

Exercice 4.31 (Théorème de "Vitali-moyenne") *Corrigé 76 page 352*
Soit (E, T, m) un espace mesuré. On note $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1$ et $f \in \mathcal{M}(E, T)$.

1. On suppose que $m(E) < \infty$. On se propose ici de montrer que :
$$\left.\begin{array}{l} f \in \mathcal{L}^1 \text{ et} \\ \|f_n - f\|_1 \to 0 \text{ quand } n \to \infty \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1.\ f_n \to f \text{ en mesure, quand } n \to \infty, \\ 2.\ (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ équi-intégrable.} \end{array}\right. \tag{4.37}$$
   (a) Montrer le sens $(\Rightarrow)$ de (4.37).
   (b) Pour montrer le sens $(\Leftarrow)$, on suppose maintenant que $f_n \to f$ en mesure, quand $n \to \infty$, et que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-intégrable.
      i. Montrer que pour tout $\delta > 0$ et $\eta > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ t.q. : $p, q \ge n \Rightarrow m(\{|f_p - f_q| \ge \eta\} \le \delta$.
      ii. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans L^1.

iii. Montrer que $f \in \mathcal{L}^1$ et que $\|f_n - f\|_1 \to 0$ quand $n \to \infty$.

2. On ne suppose plus que $m(E) < \infty$. Montrer que :

$$\left.\begin{array}{l} f \in \mathcal{L}^1 \text{ et} \\ \|f_n - f\|_1 \to 0 \text{ quand } n \to \infty \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1.\ f_n \to f \text{ en mesure, quand } n \to \infty, \\ 2.\ (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ équi-intégrable,} \\ 3.\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in T \text{ t.q. } m(A) < \infty \text{ et ,} \\ \qquad \int_{A^c} |f_n| dm \le \varepsilon, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{array}\right. \tag{4.38}$$

Exercice 4.32 (Continuité de $p \mapsto \|\cdot\|_p$**)** *Corrigé 77 page 355*
Soient (E, T, m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}(E, T)$.

1. Pour $p \in [1, +\infty[$, on pose $\|f\|_p = \left(\int |f|^p dm\right)^{\frac{1}{p}}$ (noter que $|f|^p \in \mathcal{M}_+$) et on dit que $f \in \mathcal{L}^p$ si $\|f\|_p < +\infty$. On pose $I = \{p \in [1, +\infty[, f \in \mathcal{L}^p\}$.
   (a) Soient p_1 et $p_2 \in [1, +\infty[$, et $p \in [p_1, p_2]$. Montrer que si $f \in \mathcal{L}^{p_1} \cap \mathcal{L}^{p_2}$, alors $f \in \mathcal{L}^p$. En déduire que I est un intervalle. [*On pourra introduire* $A = \{x; |f(x)| \le 1\}$.]
   (b) On montre sur des exemples que les bornes de I peuvent être ou ne pas être dans I. On prend pour cela: $(E, T, m) = ([2, +\infty[, \mathcal{B}([2, \infty[), \lambda)$ (λ est ici la restriction à $[2, \infty[$ de la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$). Calculer I dans les deux cas suivants:
      i. $f(x) = \frac{1}{x}, x \in [2, +\infty[$.
      ii. $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}, x \in [2, +\infty[$.
   (c) Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset I$ et $p \in \overline{I}$, ($\overline{I}$ désigne l'adhérence de I dans $\mathbb{R}$), t.q. $p_n \uparrow p$ (ou $p_n \downarrow p$). Montrer que $\int |f|^{p_n} dm \to \int |f|^p dm$ quand $n \to +\infty$. [*On pourra encore utiliser l'ensemble* A].
2. On dit que $f \in \mathcal{L}^\infty$ s'il existe $C \in \mathbb{R}$ t.q. $|f| < C$ p.p.. On note $\|f\|_\infty = \inf\{C \in \mathbb{R}$ t.q. $|f| < C$ p.p.$\}$. Si $f \notin \mathcal{L}^\infty$, on pose $\|f\|_\infty = +\infty$.
   (a) Montrer que $f \le \|f\|_\infty$ p.p.. A-t-on $f < \|f\|_\infty$p.p. ?
   On pose $J = \{p \in [1, +\infty]; f \in \mathcal{L}^p\} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$.
   (b) Remarquer que $J = I$ ou $J = I \cup \{+\infty\}$. Montrer que si $p \in I$ et $+\infty \in J$, alors $[p, +\infty] \subset J$. En déduire que J est un intervalle de $\overline{\mathbb{R}}_+$.
   (c) Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset I$ t.q. $p_n \uparrow +\infty$. On suppose que $\|f\|_\infty > 0$ (noter que $f = 0$ p.p. $\Leftrightarrow \|f\|_\infty = 0$).
      i. Soit $0 < c < \|f\|_\infty$. Montrer que : $\liminf_{n\to+\infty} \|f\|_{p_n} \ge c$. [*On pourra remarquer que* $\int |f|^p dm \ge c^p m(\{x; |f(x)| \ge c\}$.]
      ii. On suppose que $\|f\|_\infty < +\infty$. Montrer que : $\limsup_{n\to+\infty} \|f\|_{p_n} \le \|f\|_\infty$. [*On pourra considérer la suite* $g_n = \left(\frac{|f|}{\|f\|_\infty}\right)^{p_n}$ *et noter que* $g_n \le g_0$ *p.p..*]
      iii. Déduire de (a) et (b) que $\|f\|_{p_n} \to \|f\|_\infty$ lorsque $n \to +\infty$.

3. Déduire des deux parties précédentes que $p \to \|f\|_p$ est continue de $\overline{J}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, où $\overline{J}$ désigne l'adhérence de J dans $\overline{\mathbb{R}}$ (c'est-à-dire $\overline{J} = [a, b]$ si $J = |a, b|$, avec $1 \leq a \leq b \leq +\infty$, et $|$ désigne] ou [).

Exercice 4.33 (Exemple de continuité et dérivabilité sous le signe $\int$)
Soit $f : \mathbb{R} \times R_+ \to \mathbb{R}_+$donnée par: $f(t, x) =$ch$(t/(1 + x)) - 1$.

1. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $f(t, .)$ appartient à $L^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

2. On pose: $F(t) = \int_{\mathbb{R}_+} f(t, x)dx$. Montrer que F est continue, dérivable. Donner une expression de F'.

Exercice 4.34 (Contre exemple à la continuité sous le signe $\int$)
Soit $f : R_+ \times]0, 1[\to \mathbb{R}_+$ donnée par: $f(t, x) = 1$ si $x \in [0, \frac{t}{4}] \cup [t, 1]$, $f(\frac{t}{2}, t) = \frac{2}{t}$ et f est affine par morceaux.

1. Montrer que la fonction $f(., x)$ est continue pour tout $x \in]0, 1[$.

2. Montrer que $f(t, x) \to 1$ lorsque $t \to 0$, pour tout $x \in]0, 1[$.

3. Montrer que $\int f(t, x)dx \not\to 1$ lorsque $t \to 0$. Pourquoi ne peut on pas appliquer le théorème de continuité sous le signe $\int$?

Exercice 4.35 (Continuité d'une application de L^1 dans L^1) *Corrigé 78 page 361*
Soient (E, T, m) un espace mesuré fini et soit g une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ t.q. :

$$\exists\, C \in \mathbb{R}_+^\star \,;\ |g(s)| \leq C|s| + C,\ \forall s \in \mathbb{R}. \tag{4.39}$$

1. Soit $u \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Montrer que $g \circ u \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

   On pose $L^1 = L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Pour $u \in L^1$, on pose $G(u) = \{h \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m);\ h = g \circ v \text{ p.p.}\} \in L^1$, avec $v \in u$.

2. Montrer que la définition précédente a bien un sens, c'est à dire que $G(u)$ ne dépend pas du choix de v dans u.

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$. On suppose que $u_n \to u$ p.p. et qu'il existe $F \in L^1$ t.q. $|u_n| \leq F$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $G(u_n) \to G(u)$ dans L^1.

4. Montrer que G est continue de L^1 dans L^1. [*On pourra utiliser la question 3. et le théorème appelé "réciproque partielle de la convergence dominée".*]

5. (Question non corrigée, voir le corrigé 102 page 387) On considère ici $(E, T, m) = ([0, 1], \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. On suppose que g ne vérifie pas (4.39). On va construire $u \in L^1$ t.q. $G(u) \notin L^1$.

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, montrer qu'il existe $\alpha_n \in \mathbb{R}$ tel que : $|g(\alpha_n)| \geq n|\alpha_n|$ et $|\alpha_n| \geq n$.

   (b) On choisit une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ vérifiant les conditions données à la question précédente. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ t.q.

   $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha}{|\alpha_n| n^2} = 1.$$

   (c) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite définie par : $a_1 = 1$ et $a_{n+1} = a_n - \dfrac{\alpha}{|\alpha_n| n^2}$ (où α_n et α sont définies dans les 2 questions précédentes). On pose $u = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n 1_{[a_{n+1}, a_n[}$. Montrer que $u \in L^1$ et $G(u) \notin L^1$.

4.11.3 Espérance et moments des variables aléatoires

Exercice 4.36 *Soient (E,T) un espace probabilisé et X une variable aléatoire de (E,T) dans $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$, de loi de probabilité p_X. Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire X dans les cas suivants :*

1. *p_X est la loi uniforme sur $[a,b]$ $(a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$;*
2. *p_X est la loi exponentielle ;*
3. *p_X est la loi de Gauss.*

Exercice 4.37 Dans une ruche, la longévité d'une abeille ouvrière née au printemps est une variable aléatoire X définie par la densité de probabilité $f(t)=\lambda t^2e^{-\alpha t}$, où λ et α sont des réels positifs.
Sachant que la longévité moyenne d'une abeille est de 45 jours, calculer λ et α.

Exercice 4.38 (Problème de Buffon) Sur un parquet "infini" dont les lattes ont une largeur $2d$, on laisse tomber au hasard une aiguille de longueur 2ℓ avec $\ell<d$, et on veut estimer la probabilité de l'événement A: "l'aiguille rencontre un interstice". On appelle (Ω,T,p) l'espace probabilisé associé à ce problème.
On considère:

- que la position x du centre de l'aiguille par rapport à l'interstice le plus proche et dans la direction $x'x$ perpendiculaire aux lattes est une variable aléatoire uniformément distribuée sur $[-d,d]$,
- que l'angle orienté θ que fait l'aiguille avec l'interstice est une variable aléatoire uniformément distribuée sur $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

1. Montrer que l'événement A "correspond" (on précisera en quel sens) à la partie P_A du plan (x,θ): $P_A=\{(x,\theta)\in[-d,d]\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}];|x|<\ell\sin\theta\}$. Représenter graphiquement P_A.
2. Montrer que $p(A)=\frac{2\ell}{\pi d}$.

Exercice 4.39 (Inégalité de Jensen) *Corrigé 79 page 362*
Rappel : Une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est convexe si et seulement si pour tout $a\in\mathbb{R}$ il existe c_a t.q. $f(x)-f(a)\geq c_a(x-a)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
Soit f une fonction convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et X une v.a. sur un espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{A},P)$. On suppose que X et $f(X)$ sont intégrables. Montrer l'**inégalité de Jensen**, c'est-à-dire :

$$\int f(X)dP\geq f(\int XdP).$$

[Utiliser le rappel avec a bien choisi.]

Exercice 4.40 (Sur l'équi-intégrabilité) *Corrigé 80 page 363*
Soit $(E,\mathcal{A},P)$ un espace de probabilité et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. (réelles). On rappelle que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-intégrable si $\int_A|X_n|dP\to0$, quand $P(A)\to0$ (avec $A\in\mathcal{A}$), uniformément par rapport à $n\in\mathbb{N}$. Montrer l'équivalence entre les deux propriétés suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{a\to\infty}\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_{\{|X_n|>a\}}|X_n|dP=0,$

2. $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int |X_n|dP < +\infty$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ équi-intégrable.

Exercice 4.41 (Caractérisation de l'indépendance) *Corrigé 81 page 363*
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilités, $n \geq 2$ et $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n variables aléatoires réelles. Montrer que l'indépendance de $(X_1, X_2, \ldots X_n)$ est équivalente à la propriété suivante :

$$\forall (a_1, \ldots, a_n) \in]-\infty, +\infty[^n, P[X_1 \leq a_1, \ldots, X_n \leq a_n] = \prod_{i=1}^{n} P[X_i \leq a_i].$$

(La notation $P[X \leq a]$ est identique à $P(\{X \leq a\})$, elle désigne la probabilité de l'ensemble $\{\omega \in \Omega, X(\omega) \leq a\}$.)

Exercice 4.42 (Sign(X) et $|X|$ pour une gaussienne) *Corrigé 82 page 363*
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une v.a.r. gaussienne centrée (c'est-à-dire $P_X = f\lambda$ avec, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, où $\sigma > 0$ est la racine carré de la variance de X). Montrer que sign(X) et $|X|$ sont indépendantes et préciser leurs lois. Même question avec sign(X) et X^2.

Exercice 4.43 (V.a. gaussiennes dépendantes) *Corrigé 83 page 363*
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilités, $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$ et X_1, X_2 deux variables aléatoires indépendantes et telles que :

$$X_1 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_1^2) \text{ et } X_2 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_2^2).$$

(le signe "$\sim$" signifie "a pour loi".) Construire deux v.a. Y_1 et Y_2 t.q. $X_1 \sim Y_1$, $X_2 \sim Y_2$ et Y_1 et Y_2 soient dépendantes.

Exercice 4.44 (V.a. gaussiennes dépendantes, à covariance nulle) *Corrigé 84 page 364*
soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace de probabilités et X, S deux v.a. réelles, indépendantes, t.q. $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et S a pour loi $P_S = \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1}$. (Il est possible de construire un espace de probabilités et des v.a. indépendantes ayant des lois prescrites, voir le Chapitre 7.)

1. Montrer que $SX \sim \mathcal{N}(0,1)$.
2. Montrer que SX et X sont dépendantes.
3. Montrer que $\mathrm{Cov}(SX, X) = 0$.
4. (Question subsidiaire.) On ne suppose plus l'existence de S, mais on suppose qu'il existe Y v.a. gaussienne indépendante de X. Montrer que si $Y \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, avec $\sigma > 0$, il est possible d'utiliser Y pour construire S, v.a. indépendante de X et telle que $P_S = \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1}$.

Exercice 4.45 (Identités de Wald) *Corrigé 85 page 365*
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite v.a.r.i.i.d. et N une v. a. à valeurs dans $\mathbb{N}^\star$. On pose $S_N = X_1 + \ldots + X_N$ (c'est-à-dire que, pour $\omega \in \Omega$, $S_N(\omega) = \sum_{n=1}^{N(\omega)} X_n(\omega)$).

1. On suppose, dans cette question, que la suite $N, X_1, \ldots, X_N, \ldots$ est indépendante.
   (a) On suppose que N et X_1 sont intégrables . Montrer que S_N est intégrable et calculer $E(S_N)$ en fonction de $E(N)$ et $E(X_1)$.

(b) On suppose que N et X_1 sont de carré intégrable, montrer que S_N est de carré intégrable et calculer sa variance en utilisant les variances de N et X_1.

2. On suppose maintenant que $\{N = n\} \in \sigma(X_1, .., X_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et que $E(X_1) = 0$.

   (a) Montrer que $1_{\{n \leq N\}}$ et X_n sont des v.a. indépendantes.

   (b) Reprendre les questions $1(a)$ et $1(b)$. [On pourra écrire $S_N = \sum_{n\in\mathbb{N}^\star} 1_{\{n\leq N\}} X_n$.]

   N.B. : Le cas $E(X_1) \neq 0$ peut aussi être traité. Il se ramène au cas $E(X_1) = 0$ en considérant $Y_n = X_n - E(X_n)$.

Exercice 4.46 (Limite p.s. et indépendance) *Corrigé 86 page 365*

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite v.a.r. et X, Y deux v.a.r.. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, X_n et Y sont indépendantes et on suppose que $X_n \to X$ p.s., quand $n \to \infty$. Montrer que X et Y sont indépendantes.

Exercice 4.47 (Exponentielle d'une v.a. gaussienne)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et X une v.a. t.q. $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Soit $Y = \exp(X)$. Calculer la moyenne, la variance et la densité de Y.

Exercice 4.48 (Loi du χ^2)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et X une v.a. t.q. $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Calculer l'espérance, la variance ainsi que la densité de la v.a. X^2. (Remarque : cette loi s'appelle "Loi du χ^2 à 1 degré de liberté".)

Chapter 5

Mesures sur la tribu des boréliens

5.1 L'intégrale de Lebesgue et l'intégrale des fonctions continues

Nous commençons par comparer l'intégrale de Lebesgue (définie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$) à l'intégrale "classique" des fonctions continues (et plus généralement des fonctions réglées).

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ (borné ou non). On rappelle que $\mathcal{B}(I) = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ A \subset I\}$. On peut donc considérer la restriction à $\mathcal{B}(I)$ de la mesure de Lebesgue définie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On notera en général (un peu incorrectement) aussi λ cette mesure sur $\mathcal{B}(I)$.

Proposition 5.1 *Soit $-\infty < a < b < +\infty$. Soit $f \in C([a,b], \mathbb{R})$. Alors, $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([a,b], \mathcal{B}([a,b]), \lambda))$ et $\int f d\lambda = \int_a^b f(x)dx$ (cette dernière intégrale est à prendre au sens de "l'intégrale des fonctions continues" vue au Chapitre 1).*

DÉMONSTRATION :
La démonstration de cette proposition fait l'objet de l'exercice (corrigé) 4.5 page 99. En fait l'exercice 4.5 s'intéresse au cas $[0,1]$ mais s'adapte facilement pour le cas général $[a,b]$.

■

Remarque 5.1

1. Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ dont les bornes sont $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ (I peut être fermé ou ouvert en a et b) et si $f \in \mathcal{L}^1(I, \mathcal{B}(I), \lambda)$ ou $L^1(I, \mathcal{B}(I), \lambda)$, on notera souvent :

$$\int f d\lambda = \int f(x) d\lambda(x) = \int_a^b f(x)dx.$$

   Cette notation est justifée par la proposition précédente (proposition 5.1) car, si I est compact, l'intégrale de Lebesgue contient l'intégrale des fonctions continues (et aussi l'intégrale des fonctions réglées et aussi l'intégrale de Riemann, voir l'exercice 5.3).

2. Soient $-\infty < a < b < +\infty$ et $f \in C([a,b], \mathbb{R})$.

   La proposition 5.1 donne que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([a,b], \mathcal{B}([a,b]), \lambda))$. En fait, on écrira souvent que $f \in L^1_{\mathbb{R}}([a,b], \mathcal{B}([a,b]), \lambda))$, c'est-à-dire qu'on confondra f avec sa classe dans $L^1_{\mathbb{R}}([a,b], \mathcal{B}([a,b]), \lambda)$, qui est $\{g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([a,b],\mathcal{B}([a,b]),\lambda);\ g = f \text{ p.p.}\}$. On peut d'ailleurs noter que f est alors le seul élément continu de $\{g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([a,b],\mathcal{B}([a,b]),\lambda);\ g = f \text{ p.p.}\}$ comme le montre la proposition suivante (proposition 5.2).

Proposition 5.2 *Soient $-\infty \le a < b \le +\infty$ et $f, g \in C(]a,b[,\mathbb{R})$. On suppose que $f = g$ λ-p.p.. On a alors $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in [a,b]$.*

Démonstration :
Cette proposition est démontrée à l'exercice (corrigé) 3.9 page 65 pour $a = -\infty$ et $b = \infty$. La démonstration pour a et b quelconques est similaire.

■

Proposition 5.3 *Soit $f \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (fonction continue à support compact). Alors $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$. (Ici aussi, on écrira souvent $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$.)*

De plus, si $a, b \in \mathbb{R}$ sont t.q. $a < b$ et $f = 0$ sur $[a,b]^c$ (de tels a et b existent). Alors, $\int f d\lambda = \int_a^b f(x)dx$ (cette dernière intégrale étant à prendre au sens de "l'intégrale des fonctions continues" vue au Chapitre 1).

Démonstration:
On remarque d'abord que f est borélienne car continue. Puis, pour montrer que f est intégrable, on va utiliser la proposition 5.1. Comme f est à support compact, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ t.q. $a < b$ et $f = 0$ sur $[a,b]^c$. On a alors, par la proposition 5.1, $f_{|_{[a,b]}} \in C([a,b],\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([a,b],\mathcal{B}([a,b]),\lambda)$. On a donc $\int |f| d\lambda = \int |f_{|_{[a,b]}}| d\lambda < \infty$ et donc $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$. Enfin, la proposition 5.1 donne aussi :

$$\int f_{|_{[a,b]}} d\lambda = \int_a^b f(x)dx.$$

D'où l'on conclut bien que $\int f d\lambda = \int_a^b f(x)dx$.

■

Le résultat précédent se généralise à l'intégrale de Riemann des fonctions Riemann-intégrables (construite à partir des sommes de Darboux). Ceci fait l'objet de l'exercice 5.3.

5.2 Mesures abstraites et mesures de Radon

F

Remarque 5.2 Les propositions 5.1 et 5.3 donnent les résultats suivants :

1. Pour $f \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on pose $L(f) = \int f d\lambda$. L'application L est une application linéaire (de $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$) positive, c'est-à-dire que $f \ge 0 \Rightarrow L(f) \ge 0$. (On rappelle que $f \ge 0$ signifie que $f(x) \ge 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.)

   Plus généralement, soit m une mesure sur $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$, finie sur les compacts. Il est facile de voir que $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),m)$ (en toute rigueur, on a plutôt $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),m)$). Pour $f \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on pose $L(f) = \int f dm$. L'application L est une application linéaire (de $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$) positive (ou encore une "forme linéaire positive").

   On peut montrer une réciproque de ce résultat (théorème 5.1).

2. Soit $-\infty < a < b < \infty$. Pour $f \in C([a,b],\mathbb{R})$, on pose $L(f) = \int f d\lambda$. L'application L est une application linéaire (de $C([a,b],\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$) positive.

   Ici aussi, plus généralement, soit m une mesure finie sur $([a,b],\mathcal{B}([a,b]))$. Il est facile de voir que $C([a,b],\mathbb{R}) \subset L^1_{\mathbb{R}}([a,b],\mathcal{B}([a,b]),m)$ (ou plutôt $C([a,b],\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([a,b],\mathcal{B}([a,b]),m)$). Pour $f \in C([a,b],\mathbb{R})$, on pose $L(f) = \int f dm$. L'application L est une application linéaire (de $C([a,b],\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$) positive (ou encore une "forme linéaire positive").

   Ici aussi, on peut montrer une réciproque de ce résultat (voir la remarque 5.5).

On énonce maintenant des résultats, dûs à F. Riesz, qui font le lien entre les applications linéaires (continues ou positives) sur des espaces de fonctions continues (c'est cela que nous appellerons "mesures de Radon") et les mesures "abstraites" sur $\mathcal{B}(R)$ (c'est-à-dire les applications $\sigma-$additives sur les boréliens de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}_+$, non identiquement égales à $+\infty$). Le théorème 5.1 donné ci après est parfois appelé "Théorème de représentation de Riesz en théorie de la mesure". Dans ce cours, nous utilisation l'appelation "Théorème de représentation de Riesz" pour le théorème 6.8, il s'agit du "Théorème de représentation de Riesz dans les espaces de Hilbert".

Théorème 5.1 (Riesz) *Soit L une forme linéaire positive sur C_c dans $\mathbb{R}$, alors il existe une unique mesure m sur $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ t.q. :*

$$\forall \ f \in C_c, \quad L(f) = \int f dm. \tag{5.1}$$

De plus, m est finie sur les compacts (c'est-à-dire $m(K) < \infty$ pour tout compact K de $\mathbb{R}$.)

DÉMONSTRATION : La partie "unicité" de cette démonstration est assez facile et est donnée dans la proposition 5.4. La partie "existence" est plus difficile, on en donne seulement le schéma général.
Soit L une forme linéaire positive sur $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1. Montrer que L est continue, c'est-à-dire : pour tout compact K de $\mathbb{R}$, il existe $C_K \in \mathbb{R}$ t.q. pour toute fonction continue à support dans K, $|L(f)| \le C_K\|f\|_\infty$. (Considérer une fonction $\psi_K \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ t. q. $\psi_K(x) = 1$ si $x \in K$, et $\psi_K(x) \ge 0$).

2. Montrer le lemme suivant:

   Lemme 5.1 (Dini) Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $f \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ t.q. $f_n \uparrow f$ ou $f_n \downarrow f$ lorsque $n \to +\infty$. Alors f_n converge uniformément vers f.

3. Déduire des deux étapes précédentes que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $f \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ t.q. $f_n \uparrow f$ ou $f_n \downarrow f$ lorsque $n \to +\infty$, alors $L(f_n) \to L(f)$.

4. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des suites telles que $f_n \uparrow f$ et $g_n \uparrow g$ (ou $f_n \downarrow f$ et $g_n \downarrow g$), où f et g sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$. Montrer que si $f \le g$ alors $\lim_{n\to+\infty} L(f_n) \le \lim_{n\to+\infty} L(g_n)$ (et dans le cas particulier où $f = g$, $\lim_{n\to+\infty} L(f_n) = \lim_{n\to+\infty} L(g_n)$). [On pourra, par exemple, considérer, pour n fixé, $h_p = \inf(g_p, f_n)$ et remarquer que $h_p \uparrow f_n$.]

5. On définit:

$$A_+ = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \exists (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c(\mathbb{R},\mathbb{R}); f_n \uparrow f \text{ et } \lim_{n\to+\infty} L(f_n) < +\infty\}, \tag{5.2}$$

$$A_- = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \exists (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c(\mathbb{R},\mathbb{R}); f_n \downarrow f \text{ et } \lim_{n\to+\infty} L(f_n) > -\infty\}, \tag{5.3}$$

Si $f \in A^+$, on pose $L(f) = \lim_{n\to+\infty} L(f_n)$, où $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c(\mathbb{R},\mathbb{R}); f_n \uparrow f$. Si $f \in A^-$, on pose $L(f) = \lim_{n\to+\infty} L(f_n)$, où $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c(\mathbb{R},\mathbb{R}); f_n \downarrow f$. Vérifier que ces définitions sont cohérentes (c'est-à-dire qu'elles ne dépendent pas des suites choisies et que si $f \in A^+ \cap A^-$, les deux définitions coincident). Montrer les propriétés suivantes:

(a) Si $f \in A^+$ (resp. A^-) alors $-f \in A^-$ (resp. A^+)et $L(-f) = -L(f)$.

(b) Si $f, g \in A^+$ (resp. A^-) alors $f + g \in A^+$ (resp. A^-) et $L(f + g) = L(f) + L(g)$.

(c) Si $f \in A^+$ (resp. A^-) et $\alpha \in \mathbb{R}_+$ alors $\alpha f \in A^+$ (resp. A^-) et $L(\alpha f) = \alpha L(f)$.

(d) Si $f \in A^+$ (resp. A^-) et $g \in A^+$ alors $\sup(f, g) \in A^+$ et $\inf(f, g) \in A^+$.

(e) Si $f, g \in A^+$ (resp. A^-) et $f \geq g$, alors $L(f) \geq L(g)$.

(f) Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A_+$ (resp. A^-) et $f_n \uparrow f \in A^+$ (resp. $f_n \downarrow f \in A^-$), alors $L(f_n) \geq L(f)$.

(g) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A_+$ (resp. A^-) t.q. $f_n \uparrow f$ (resp. $f_n \downarrow f$), où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Si $\lim_{n\to+\infty} L(f_n) < +\infty$, alors $f \in A^+$.

Remarquer aussi que A^+ contient toutes les fonctions caractéristiques des ouverts bornés et que A^- contient toutes les fonctions caractéristiques des compacts.

6. On pose:

$$E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \forall\varepsilon > 0, \exists g \in A^+ \text{ et } h \in A^-; h \leq f \leq g \text{ et } L(g) - L(h) \leq \varepsilon\} \tag{5.4}$$

et pour $f \in E$, on définit:

$$L(f) = \sup_{\substack{h\in A^-\\ h\leq f}} L(h) = \inf_{\substack{g\in A^-\\ g\geq f}} L(g). \tag{5.5}$$

Montrer que cette définition a bien un sens, c'est-à-dire que d'une part :

$$\sup_{\substack{h\in A^-\\ h\leq f}} L(h) = \inf_{\substack{g\in A^-\\ g\geq f}} L(g),$$

et d'autre part la définition de L sur E est compatible avec la définition sur A^+ et A^- (après avoir remarqué que $A^+ \subset E$ et $A^- \subset E$). Montrer les propriétés suivantes sur E:

(a) E est un espace vectoriel et L une forme linéaire positive sur E.

(b) E est stable par passage à la limite croissante ou décroissante.

(c) E est stable par inf et sup, i.e. si $f \in E$ et $g \in E$, alors $\sup(f, g) \in E$ et $\inf(f, g) \in E$.

7. Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c$ t.q. $0 \leq \varphi_n \leq 1$ et $\varphi_n \uparrow 1$. On pose $T = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}); 1_A\varphi_n \in E \forall n \in \mathbb{N}\}$. Montrer que $T \supset \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

8. Pour $A \in T$, on pose: $m(A) = \lim_{n\to+\infty} L(1_A\varphi_n) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Montrer que m est une mesure σ-finie.

9. Montrer que $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, T, m) = E$ et que $\int f dm = L(f), \forall f \in E$.

■

Proposition 5.4 *Soit $d \geq 1$, m et μ deux mesures sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, finies sur les compacts. On suppose que $\int f dm = \int f d\mu$, pour tout $f \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Alors $m = \mu$.*

DÉMONSTRATION : La démonstration de cette proposition peut se faire en utilisant la proposition 2.5. Elle est faite pour $d = 1$ au chapitre 4 (proposition 4.11. Sa généralisation au cas $d > 1$ est laissée en exercice. ■

Remarque 5.3 Le théorème 5.1 donne un autre moyen de construire la mesure de Lebesgue que celui vu au chapitre 2 :

Pour $f \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on pose $L(f) = \int_a^b f(x)dx$, où $a, b \in \mathbb{R}$ sont choisis pour que $f = 0$ sur $[a, b]^c$ (on utilise ici l'intégrale des fonctions continues sur un compact de $\mathbb{R}$). L'application L est clairement linéaire positive de $C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$. Le théorème 5.1 donne donc l'existence d'une mesure m sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $\int f dm = L(f)$ pour tout $f \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Cette mesure est justement la mesure de Lebesgue (elle vérifie bien $m(]a, b[) = b - a$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$).

Définition 5.1 *On définit les espaces de fonctions continues (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) suivants :*

$$C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}); \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| < \infty\},$$
$$C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}); f(x) \to 0 \textit{ quand } |x| \to \infty\},$$
$$C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}); \exists K \subset \mathbb{R},\ K \textit{ compact, } f = 0 \textit{ sur } K^c\}.$$

Pour $f \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on pose $\|f\|_u = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$. La norme $\| \cdot \|_u$ s'appelle "norme de la convergence uniforme" (elle est aussi parfois appelée "norme infinie".)

Il est clair que $C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et on rappelle que $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sont des espaces de Banach (e.v.n. complet) avec la norme $\| \cdot \|_u$

Remarque 5.4 Soit m une mesure finie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, alors $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$ (en toute rigueur, on a plutôt $C_b \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$). Pour $f \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on pose $L(f) = \int f dm$. L'application L est alors une application linéaire sur $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On munit $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de la norme de la convergence uniforme, L'application L est alors continue (car $L(f) \leq m(E)\|f\|_u$ pour tout $f \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$). L'application L est aussi positive, c'est-à-dire que $f \geq 0 \Rightarrow L(f) \geq 0$. On donne ci-après des réciproques partielles de ces résultats.

Théorème 5.2 (Riesz) *Soit L une application linéaire positive de C_0 dans $\mathbb{R}$, alors il existe une unique mesure m finie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ t.q. :*

$$\forall \ \ f \in C_0, \quad L(f) = \int f dm. \tag{5.6}$$

DÉMONSTRATION : Ici aussi, on ne donne qu'un schéma de la démonstration.

Soit L une application linéaire positive de C_0 dans $\mathbb{R}$.

1. Pour montrer que si m existe, alors m est finie, considérer les fonctions $f_n = 1_{[-n,n]} + (x + n + 1)1_{[-(n+1),n]} + (n + 1 - x)1_{[n,n+1]}$, et la continuité de L.

2. Montrer que L est continue.[*Raisonner par l'absurde en supposant que L est positive et non continue : en utilisant le fait que si L est non continue alors L est non bornée sur la boule unité, construire une suite g_n de fonctions positives telles que la série de terme général g_n converge absolument. Soit g la limite de la série de terme général g_n, montrer que $T(g) > n, \forall\, n \in \mathbb{N}$.*]

3. Montrer que la restriction T de L à $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est linéaire continue, et donc par le théorème 5.1 qu'il existe une unique mesure m t.q. $T(f) = \int f dm, \forall f \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

4. Montrer que $L(f) = \int f dm \; \forall f \in C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ [*approcher* f *de manière uniforme par* $f_n \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$, *prendre par exemple:* $f_n = f\varphi_n$ *où* $\varphi_n \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\varphi_n = 1$ *sur* $[-n,n]$ *et* $\varphi_n(x) = 0$ *sur* $[-(n+1),n]^c$. *Montrer que* $\lim_{n\to+\infty} L(f_n) = L(f)$ *et que* $\lim_{n\to+\infty} \int f_n dm = \int f dm$.

■

Le résultat du théorème 5.2 est faux si on remplace C_0 par C_b. On peut, par exemple, construire une application linéaire continue positive sur C_b, non identiquement nulle sur C_b et nulle sur C_0. Si on note L une telle application (nulle sur C_0 mais non identiquement nulle sur C_b) et si m est une mesure finie sur $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ t.q. $L(f) = \int f dm$ pour $f \in C_b$, on montre facilement (en utilisant $\int f dm = 0$ pour tout $f \in C_0$) que $m = 0$ et donc $L(f) = 0$ pour tout $f \in C_b$, en contradiction avec le fait que L n'est pas identiquement nulle sur C_b.

Pour construire une application linéaire continue positive sur C_b, non identiquement nulle et nulle sur C_0, on peut procéder de la manière décrite ci après. On note F le sous espace vectoriel de C_b formé des éléments de C_b ayant une limite en $+\infty$. On a donc $f \in F$ si $f \in C_b$ et si il existe $l \in \mathbb{R}$ t.q. $f(x) \to l$ quand $x \to \infty$. Pour $f \in F$ on pose $\tilde{L}(f) = \lim_{x\to\infty} f(x)$. On a ainsi défini une forme linéaire positive sur F (car, pour $f \in F$, $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ implique bien $\tilde{L}(f) \geq 0$). En utilisant le théorème 5.3 donné ci après, il existe donc L, forme linéaire positive sur C_b, t.q. $L = \tilde{L}$ sur F. L'application L est donc linéaire continue positive sur C_b (pour la continuité, on remarque que $|L(f)| \leq \|f\|_u$), elle est bien nulle sur C_0 (car $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ si $f \in C_0 \subset F$) et non identiquement nulle sur C_b car $L(f) = 1$ si f est la fonction constante, égale à 1 en tout point.

Théorème 5.3 (Hahn-Banach positif)
Soit F un sous espace vectoriel de $C_b = \{f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}); \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| < \infty\}$ et T une application linéaire de F dans $\mathbb{R}$. On suppose que F contient les fonctions constantes et que T est positive (c'est-à-dire que, pour $f \in F$, $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ implique $T(f) \geq 0$). Il existe alors $\overline{T}$, application linéaire positive sur C_b, t.q. $\overline{T} = T$ sur F.

Démonstration : La démonstration n'est pas détaillée ici. Elle peut se faire en utilisant une technique très similaire à celle donnant la démonstration du théorème de Hahn-Banach (qui permet aussi de montrer le théorème de prolongement d'une application linéaire continue définie sur un sous espace vectoriel d'un espace de Banach). Elle peut aussi se faire en se ramenant au théorème de Hahn-Banach lui-même tel qu'il est donné, par exemple, dans le livre d'analyse fonctionnelle de H. Brezis.

Il est intéressant de noter que le résultat du théorème peut être faux si on retire l'hypothèse "F contient les fonctions constantes". ■

On peut maintenant faire la remarque suivante:

Remarque 5.5 Soit K une partie compacte de $\mathbb{R}$. On note $C(K,\mathbb{R}) = \{f_{|_K}, f \in C_b\}$. Si m est une mesure finie sur $(K,\mathcal{B}(K))$ l'espace fonctionnel $C(K,\mathbb{R})$ est inclus dans $L^1_{\mathbb{R}}(K,\mathcal{B}(K),m)$, et l'application qui à $f \in C(K,\mathbb{R})$ associe $\int f dm$ est linéaire positive (et continue, si $C(K,\mathbb{R})$ est muni de la norme de la convergence uniforme). Réciproquement, soit L une application linéaire positive de $C(K,\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$. Le théorème précédent permet de montrer qu'il existe une unique mesure finie, notée m, sur $(K,\mathcal{B}(K))$ t.q. :

$$L(f) = \int f dm, \quad \forall f \in C(K,\mathbb{R}). \tag{5.7}$$

Considérons maintenant le cas des mesures signées: si m est une mesure signée sur $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ (ou sur $(K,\mathcal{B}(K))$), l'application qui à $f \in C_0$ (ou $\in C(K)$, K étant une partie compacte de $\mathbb{R}$) associe $\int f dm$ est linéaire continue (pour la norme de la convergence uniforme). Réciproquement, on a aussi existence et unicité d'une mesure (signée) définie à partir d'une application linéaire continue de C_0 (ou de $C(K)$) dans $\mathbb{R}$:

Théorème 5.4 (Riesz, mesures signées) *Soit L une application linéaire continue (pour la norme infinie) de $C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ (ou de $C(K,\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, où K est un compact de $\mathbb{R}$). Alors il existe une unique mesure signée, notée m, sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (ou sur $\mathcal{B}(K)$) t.q. :*

$$L(f) = \int f dm, \quad \forall f \in C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})(\text{ ou } C(K,\mathbb{R})). \tag{5.8}$$

Les éléments de $(C_0(\mathbb{R},\mathbb{R}))'$ (ou $(C(K,\mathbb{R}))'$) sont appelés "mesures de Radon" sur $\mathbb{R}$ (ou K). On rappelle que, pour un espace de Banach (réel) E, on note E' son dual topologique, c'est-à-dire l'ensemble des applications linéaires continues de E dans $\mathbb{R}$.

Démonstration : Elle consiste à se ramener au théorème de Riesz pour des formes linéaires positives. Elle n'est pas détaillée ici. On rappelle seulement que si m est une mesure signée sur T (tribu sur un ensemble E). il existe deux mesures finies m^+ et m^- sur T, étrangères (c'est-à-dire qu'il existe $A \in T$ t.q. $m^+(A) = m^-(A^c) = 0$) et t.q. $m = m^+ - m^-$. On a alors (par définition) $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m) = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m^+) \cap \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m^-)$ et, si $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$, $\int f dm = \int f dm^+ - \int f dm^-$. ■

Définition 5.2 (Mesure de Radon) *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}$, alors on appelle mesure de Radon sur $\overline{\Omega}$ un élément de $(C(\overline{\Omega},\mathbb{R}))'$, c'est-à-dire une application linéaire continue (pour la norme infinie) de $C(\overline{\Omega},\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.*

Remarque 5.6 Soit T une forme linéaire sur $C_c(\Omega,\mathbb{R})$.

1. Si T est continue pour la norme $\|.\|_\infty$, on peut montrer qu'il existe une et une seule mesure signée, notée μ, sur les boréliens de Ω telle que $T(f) = \int f d\mu$, pour tout $f \in C_c(\Omega,\mathbb{R})$. Pour montrer l'existence de μ, on peut commencer par se ramener au théorème 5.4 en prolongeant T (de manière non unique) en une application linéaire continue sur $C(\overline{\Omega},\mathbb{R})$ (ceci est possible par le théorème de Hahn-Banach). Le théorème 5.4 donne alors une (unique) mesure sur $\mathcal{B}(\overline{\Omega})$ correspondant à ce prolongement de T. La restriction de cette mesure à $\mathcal{B}(\Omega)$ est la mesure μ recherchée. Il est intéressant de remarquer que cette mesure μ est unique, sans que celle donnée par le théorème 5.4 soit unique (car cette dernière dépend du prolongement choisi de T à $C(\overline{\Omega},\mathbb{R})$).

2. Si T est continue pour la topologie “naturelle” de $C_c(\Omega,\mathbb{R})$, (c'est-à-dire que, pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $C_K \in \mathbb{R}$ tel que $T(f) \le C_K\|f\|_\infty$, pour tout $f \in C_c(\Omega,\mathbb{R})$ avec $f = 0$ sur le complémentaire de K) alors ce résultat est faux ; par contre on peut montrer qu'il existe deux mesures (positives) μ_1 et μ_2 sur les boréliens de Ω telles que $T(f) = \int f d\mu_1 - \int f d\mu_2, \forall f \in C_c(\Omega,\mathbb{R})$; noter que μ_1 et μ_2 peuvent prendre toutes les deux la valeur $+\infty$ (exemple : $N = 1$, $\Omega =]-1,1[$, $T(f) = \sum_{n\in\mathbb{N}^\star} nf(1-\frac{1}{n}) - \sum_{n\in\mathbb{N}^\star} nf(-1+\frac{1}{n})$), et donc que $(\mu_1-\mu_2)(\Omega)$ n'a pas toujours un sens....

Soit maintenant T une forme linéaire sur $C_c^\infty(\Omega,\mathbb{R})$, continue pour la norme $\|\cdot\|_u$, alors il existe une et une seule mesure signée, notée μ, sur les boréliens de Ω telle que $T(f) = \int f d\mu$, $\forall f \in C_c^\infty(\Omega,\mathbb{R})$.

5.3 Changement de variables, densité et continuité

On montre dans cette section quelques propriétés importantes de l'espace $L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ (et éventuellement de $L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$ si μ est finie sur les compacts)

Proposition 5.5 (Changement de variable affine) *Soient $\alpha \in \mathbb{R}^\star$, $\beta \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. On définit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $g(x) = f(\alpha x + \beta)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Alors, $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $\int g d\lambda = \frac{1}{|\alpha|} \int f d\lambda$.*

Le même résultat reste vrai en remplaçant $\mathcal{L}^1$ par L^1.

Démonstration :

1. On pose $\varphi(x) = \alpha x + \beta$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, de sorte que $g = f \circ \varphi$. Comme f et φ sont boréliennes (noter que φ est même continue), g est aussi borélienne, c'est-à-dire $g \in \mathcal{M}$.
2. Pour montrer que $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et
$$\int g d\lambda = \frac{1}{|\alpha|} \int f d\lambda, \tag{5.9}$$
on raisonne en plusieurs étapes :
   (a) On suppose que $f = 1_A$ avec $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $\lambda(A) < \infty$. On a alors $g = 1_{\frac{1}{\alpha}A - \frac{\beta}{\alpha}}$ (avec $\frac{1}{\alpha}A - \frac{\beta}{\alpha} = \{\frac{1}{\alpha}x - \frac{\beta}{\alpha},\ x \in A\}$). On a donc $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et (5.9) est vraie (car on a déjà vu que $\lambda(\frac{1}{\alpha}A - \frac{\beta}{\alpha}) = \frac{1}{|\alpha|}\lambda(A)$, dans la proposition 2.9).
   (b) On suppose que $f \in \mathcal{E}_+ \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Il existe donc $a_1, \ldots, a_n > 0$ et $A_1, \ldots, A_n \in T$ t.q. $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$. Comme $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, on a aussi $\lambda(A_i) < \infty$ pour tout i. On conclut alors que $g = \sum_{i=1}^n a_i 1_{\frac{1}{\alpha}A_i - \frac{\beta}{\alpha}}$, ce qui donne que $g \in \mathcal{E}_+ \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et que (5.9) est vraie.
   (c) On suppose que $f \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+ \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ t.q. $f_n \uparrow f$ quand $n \to \infty$. On a donc $\int f_n d\lambda \uparrow \int f d\lambda$ quand $n \to \infty$. On définit g_n par $g_n(x) = \alpha x + \beta$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a alors $g_n \in \mathcal{E}_+ \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, $g_n \uparrow g$ et $\int g_n d\lambda \uparrow \int g d\lambda$ quand $n \to \infty$. Comme (5.9) est vraie pour $f = f_n$ et $g = g_n$, on en déduit que $g \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et (5.9) est vraie.
   (d) On suppose enfin seulement que $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Comme $f = f^+ - f^-$, avec $f^\pm \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, on peut utiliser l'étape précédente avec $f^\pm$ et on obtient que $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et que (5.9) est vraie.
3. Le résultat obtenu est encore vrai pour L^1 au lieu de $\mathcal{L}^1$. Il suffit de remarquer que
$$f_1 = f_2 \text{ p.p. } \Rightarrow g_1 = g_2 \text{ p.p. },$$
avec $g_i(\cdot) = f_i(\alpha \cdot +\beta)$, $i = 1, 2$.

   En fait, lorsque f décrit un élément de L^1 (qui est un ensemble d'éléments de $\mathcal{L}^1$), la fonction $g(\alpha \cdot +\beta)$ décrit alors un élément de L^1.

■

Le résultat de densité que nous énonçons à présent permet d'approcher une fonction de $L^1_R(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ “aussi près que l'on veut” par une fonction continue à support compact. Ce résultat est souvent utilisé pour démontrer certaines propriétés des fonctions de L^1: On montre la propriété pour les fonctions continues, ce qui s'avère en général plus facile, et on “passe à la limite”.

Théorème 5.5 (Densité de $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans $L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$)
L'ensemble $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et à supports compacts, est dense dans $L^1 = L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$, c'est-à-dire :

$$\forall f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda),\ \forall \varepsilon > 0,\ \ \exists \varphi \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R}); \|f-\varphi\|_1 < \varepsilon.$$

Démonstration :
On a déjà vu que $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset L^1$. En toute rigueur, on a plutôt $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$. L'objectif est donc de montrer que pour tout $f \in \mathcal{L}^1$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ t.q. $\|f-\varphi\|_1 \le \varepsilon$. On va raisonner une nouvelle fois en plusieurs étapes (fonctions caractéristiques, $\mathcal{E}_+$, $\mathcal{M}_+$ et enfin $\mathcal{L}^1$).

Etape 1. On suppose ici que $f = 1_A$ avec $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $\lambda(A) < \infty$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme λ est une mesure régulière (proposition 2.3), il existe un ouvert O et un fermé F t.q. $F \subset A \subset O$ et $\lambda(O \setminus F) \le \varepsilon$. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $F_n = F \cap [-n,n]$, de sorte que F_n est compact (pour tout n) et $F = \cup_{n\in\mathbb{N}^\star} F_n$. La continuité croissante de λ donne alors $\lambda(F_n) \uparrow \lambda(F)$, quand $n \to \infty$. Comme $\lambda(F) \le \lambda(A) < \infty$, on a aussi $\lambda(F \setminus F_n) = \lambda(F) - \lambda(F_n) \to 0$ quand $n \to \infty$. Il existe donc n_0 t.q. $\lambda(F \setminus F_{n_0}) \le \varepsilon$.

On pose $K = F_{n_0}$ et on obtient donc $K \subset F \subset A \subset O$. Ce qui donne $\lambda(O\setminus K) \le \lambda(O\setminus F)+\lambda(F\setminus K) \le 2\varepsilon$.

On a donc trouvé un compact K et un ouvert O t.q. $K \subset A \subset O$ et $\lambda(O \setminus K) \le 2\varepsilon$. ceci va nous permettre de construire $\varphi \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ t.q. $\|f-\varphi\|_1 \le 2\varepsilon$.

On pose $d = d(K,O^c) = \inf\{d(x,y), x \in K, y \in O^c\}$. On remarque que $d > 0$. En effet, il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset O^c$ t.q. $d(x_n,y_n) = |x_n - y_n| \to d$ quand $n \to \infty$. Par compacité de K, on peut supposer (après extraction éventuelle d'une sous suite) que $x_n \to x$, quand $n \to \infty$. Si $d = 0$, on a alors aussi $y_n \to x$ quand $n \to \infty$ et donc $x \in O^c \cap K$ (car K et O^c sont fermés). Ce qui est impossible car $O^c \cap K = \emptyset$. On a donc bien montré $d > 0$.

On pose maintenant , pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \frac{1}{d}(d - d(x,K))^+$ avec $d(x,K) = \inf\{d(x,y),\ y \in K\}$. La fonction φ est continue car $x \mapsto d(x,K)$ est continue (cette fonction est même lipschitzienne, on peut montrer que $|d(x,k)-d(y,K)| \le |x-y|$). Elle est à support compact car il existe $A > 0$ t.q. $K \subset [-A,A]$ et on remarque alors que $\varphi = 0$ sur $[-A-d, A+d]^c$. On a donc $\varphi \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Enfin, on remarque que $\varphi = 1$ sur K, $\varphi = 0$ sur O^c et $0 \le \varphi \le 1$ (partout). On en déduit que $f - \varphi = 0$ sur $K \cup O^c$ et $0 \le |f-\varphi| \le 1$, ce qui donne

$$\|f-\varphi\|_1 \le \lambda(O \setminus K) \le 2\varepsilon,$$

et termine donc la première (et principale) étape.

Etape 2. On suppose ici que $f \in \mathcal{E}_+ \cap \mathcal{L}^1$. Il existe donc $a_1,\ldots,a_n > 0$ et $A_1,\ldots,A_n \in T$ t.q. $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$. Comme $f \in \mathcal{L}^1$, on a aussi $\lambda(A_i) < \infty$ pour tout i.

Soit $\varepsilon > 0$, l'étape 1 donne, pour tout i, l'existence de $\varphi_i \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ t.q. $\|1_{A_i} - \varphi_i\|_1 \le \varepsilon$. On pose $\varphi = \sum_{i=1}^n a_i\varphi_i \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et on obtient $\|f-\varphi\|_1 \le (\sum_{i=1}^n a_i)\varepsilon$ (ce qui est bien arbitrairement petit).

Etape 3. On suppose ici que $f \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{L}^1$.

Soit $\varepsilon > 0$. D'après la caractérisation de l'intégrale dans $\mathcal{M}_+$ (lemme 4.3), Il existe $g \in \mathcal{E}_+$ t.q. $g \le f$ et $\int f d\lambda - \varepsilon \le \int g dm \le \int f dm$, de sorte que $\|g-f\|_1 = \int (f-g)d\lambda \le \varepsilon$. L'étape 2 donne alors l'existence de $\varphi \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ t.q. $\|g-\varphi\|_1 \le \varepsilon$. D'où l'on déduit $\|f-\varphi\|_1 \le 2\varepsilon$. Ce qui termine l'étape 3.

Etape 4. On suppose enfin que $f \in \mathcal{L}^1$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $f^{\pm} \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{L}^1$, l'étape 3 donne qu'il existe $\varphi_1, \varphi_2 \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ t.q. $\|f^+ - \varphi_1\|_1 \leq \varepsilon$ et $\|f^- - \varphi_2\|_1 \leq \varepsilon$. On pose alors $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. On a $\varphi \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\|f - \varphi\|_1 \leq 2\varepsilon$. Ce qui prouve bien la densité de $C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans L^1. ∎

Le résultat de densité que nous venons de démontrer n'est pas limité à la mesure de Lebesgue. Il est vrai pour toute mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, finie sur les compacts. Il est aussi vrai en remplaçant C_c par C_c^∞. Enfin, il n'est pas limité à $\mathbb{R}$, il est également vrai dans $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$. Tout ceci est montré dans l'exercice 7.13. Par contre, le résultat que nous montrons maintenant n'est pas vrai pour toute mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, finie sur les compacts (voir l'exercice 7.13).

Théorème 5.6 (Continuité en moyenne) *Soient $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $h \in \mathbb{R}$. On définit f_h ("translatée" de f) par : $f_h(x) = f(x + h)$, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$. Alors :*

$$\|f_h - f\|_1 = \int |f(x + h) - f(x)| dx \to 0 \text{ lorsque } h \to 0. \tag{5.10}$$

Démonstration :
Soient $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $h \in \mathbb{R}$. On remarque que $f_h = f(\cdot + h) \in \mathcal{L}1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ (d'après la proposition 5.5). D'autre part $f = g$ p.p. implique $f_h = g_h$ p.p.. On peut donc définir f_h comme élément de $L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ si $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.
La démonstration de (5.10) fait l'objet de l'exercice 5.14.

∎

5.4 Intégrales impropres des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

On considère ici des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

Définition 5.3 (Intégrabilité à gauche) *Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, a > \alpha$; on suppose que $\forall\ \ \beta \in]\alpha, a[$, $f1_{]\alpha,\beta[} \in L^1 (= L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda))$. On dit que f est intégrable à gauche en a (ou encore que $\int^a$ existe) si $\int f1_{]\alpha,\beta[} d\lambda$ a une limite dans $\mathbb{R}$ lorsque $\beta \to a$. Cette limite est notée $\int_\alpha^a f(t)dt$.*

Remarque 5.7 Ceci ne veut pas dire que $f1_{]\alpha,a[} \in L^1$. Il suffit pour s'en convaincre de prendre $a = +\infty$, $\alpha = 0$, considérer la fonction f définie par $f(0) = 1$ et, pour $x > 0$, $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

Par contre, dès que la fonction f considérée est de signe constant, on a équivalence entre les deux notions :

Proposition 5.6 *Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, a > \alpha$; on suppose que $\forall\ \ \beta \in]\alpha, a[$, $f1_{]\alpha,\beta[} \in L^1 (= L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda))$. Alors f est intégrable à gauche en a si et seulement si $f1_{]\alpha,a[} \in L^1$.*
Démonstration : Ce résultat se déduit du théorème de convergence monotone (construire une suite qui tend en croissant vers $f1_{]\alpha,a[}$). ∎

5.5 Exercices

Exercice 5.1 (La mesure de Dirac n'est pas une fonction. . .)
On note $E = C([0,1],\mathbb{R})$ et on munit E de la norme de la convergence uniforme. Soit T l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par $T(\varphi) = \varphi(0)$. On note aussi δ_0 la mesure de Dirac en 0 sur $\mathcal{B}([0,1])$.

1. Montrer que $T \in E'$ (on rappelle que E' est le dual topologique de E, c'est à dire l'ensemble des applications linéaires continues de E dans $\mathbb{R}$).
2. Soit $\varphi \in E$. Monter que $\varphi \in \mathcal{L}^1([0,1],\mathcal{B}([0,1]),\delta_0)$ et que $T(\varphi) = \int \varphi d\delta_0$, où δ_0 est la mesure de Dirac en 0.
3. Soient $g \in L^1_{\mathbb{R}}([0,1],\mathcal{B}([0,1]),\lambda)$ et $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ définie par: $\varphi_n(x) = (1/n)(n - n^2x)^+$, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\int g\varphi_n d\lambda \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

   En déduire qu'il n'existe pas $g \in L^1_{\mathbb{R}}([0,1],\mathcal{B}([0,1]),\lambda)$ t.q. on ait, pour toute fonction $\varphi \in E$: $T(\varphi) = \int g\varphi d\lambda$.
4. Montrer que δ_0 n'est pas une mesure de densité par rapport à λ.

Exercice 5.2
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = (n - n^2x)^+$. On note λ la mesure de Lebesgue sur la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ des boréliens de $]0,1[$, et $L^1 = L^1_{\mathbb{R}}(]0,1[,\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$.
Soit T l'application de $C([0,1],\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par $T(\varphi) = \varphi(0)$.

1. Montrer que $T \in \Big(C([0,1],\mathbb{R})\Big)'$ (on rappelle que $\Big(C([0,1],\mathbb{R})\Big)'$ est le dual de $C([0,1],\mathbb{R})$, c'est à dire l'ensemble des formes linéaires continues sur $C([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme uniforme).
2. Montrer que $T(\varphi) = \int \varphi d\delta_0$, où δ_0 est la mesure de Dirac en 0.
3. Soient $g \in L^1(]0,1[,\mathbb{R})$ et $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Big(C([0,1],\mathbb{R})\Big)$ définie par: $\varphi_n = \frac{f_n}{2n}$. Montrer que $\int g\varphi_n d\lambda \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

   En déduire qu'il n'existe pas $g \in L^1(]0,1[,\mathbb{R})$ t.q. on ait, pour toute fonction $\varphi \in C([0,1],\mathbb{R})$: $T(\varphi) = \int g\varphi d\lambda$; montrer que δ_0 n'est pas une mesure de densité.

Exercice 5.3 (Intégrale de Riemann) Soient a, b des réels, $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée, i.e. telle qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ t.q. $|f(t)| \le M, \forall t \in [a,b]$. Soit Δ une subdivision de $[a,b]$, $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_{N+1}\}$ avec $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_{N+1} = b$. On pose $S^\Delta = \sum_{i=0}^N (\sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x))(x_{i+1} - x_i)$, et $S_\Delta = \sum_{i=0}^N (\inf_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x))(x_{i+1} - x_i)$. On note A l'ensemble des subdivisions de $[a,b]$ et $S^\star = \inf_{\Delta\in A} S^\Delta$, et $S_\star = \sup_{\Delta\in A} S_\Delta$. On dit que f est Riemann intégrable si $S^\star = S_\star$. On pose alors $R\int_a^b f(x)dx = S^\star$.

1. Soient Δ_1 et $\Delta_2 \in A$ tels que $\Delta_1 \subset \Delta_2$. Montrer que $S_{\Delta_1} \le S_{\Delta_2} \le S^{\Delta_2} \le S^{\Delta_1}$. En déduire que $S_\Delta \le S^{\Delta'}$ pour tous $\Delta, \Delta' \in A$, et donc que $S_\star \le S^\star$.
2. Montrer qu'il existe une suite de subdivisions $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $S_{\Delta_n} \to S_\star$ et $S^{\Delta_n} \to S^\star$ quand $n \to +\infty$.
3. Montrer que si f est continue, f est Riemann-intégrable.

4. On suppose maintenant que f est Riemann-intégrable. Soit $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite t.q. $S_{\Delta_n} \to S_\star$ et $S^{\Delta_n} \to S^\star$ quand $n \to +\infty$. Pour $\in \mathbb{N}$, on note $\Delta_n = \{x_O^{(n)}, \ldots, x_{N_n+1}^{(n)}\}$, et on pose:

$$\begin{aligned} g_n(x) &= \inf\{f(y), y \in [x_i^{(n)}, x_{i+1}^{(n)}]\}, x_i^{(n)} \le x < x_{i+1}^{(n)}, i = 0, \ldots, N_n + 1 && (5.11)\\ h_n(x) &= \sup\{f(y), y \in [x_i^{(n)}, x_{i+1}^{(n)}]\}, x_i^{(n)} \le x < x_{i+1}^{(n)}, i = 0, \ldots, N_n + 1 && (5.12)\\ g_n(b) &= h_n(b) = 0. && (5.13)\end{aligned}$$

(a) Montrer que g_n et $h_n \in \mathcal{M} \cap \mathcal{L}^1$, où $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\{[a,b], \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda\})$ et $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1(\{[a,b], \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda\})$, et que $\int (h_n - g_n) d\lambda \to 0$ quand $n \to +\infty$.

(b) Montrer que $g_n \le g_{n+1} \le f \le g_{n+1} \le h_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(c) On pose $g = \lim_{n\to+\infty} g_n$ et $h = \lim_{n\to+\infty} h_n$; montrer que $g = h$ p.p. . En déduire que $f \in L^1$ et que $\int f d\lambda = R \int_a^b f(x) dx$.

(d) Soit f définie par:

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q}, && (5.14)\\ f(x) &= 0 \text{ si } x \notin \mathbb{Q}. && (5.15)\end{aligned}$$

Montrer que f n'est pas Riemann intégrable, mais que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([a,b], \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

Exercice 5.4 *Corrigé 87 page 366*
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^1(]0,1[, \mathbb{R})$ convergeant simplement vers la fonction $f :]0,1[\to \mathbb{R}$; on suppose que la suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(\subset C(]0,1[, \mathbb{R})$) converge simplement vers la fonction constante et égale à 1.

1. A-t-on $f \in C^1(]0,1[, \mathbb{R})$ et $f' = 1$?

2. On suppose maintenant que la suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la fonction constante et égale à 1 dans $L^1_{\mathbb{R}}(]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda)$. A-t-on $f \in C^1(]0,1[, \mathbb{R})$ et $f' = 1$?

Exercice 5.5 (Intégrale impropre) *Corrigé 88 page 367*
On définit l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} &f(x) = 0, \text{ si } x \le 0,\\ &f(x) = x^2 \sin \tfrac{1}{x^2}, \text{ si } x > 0.\end{aligned}$$

1. Montrer que f est continue et dérivable en tout point de $\mathbb{R}$.

2. Soit $0 < a < b < \infty$. Montrer que $f' 1_{]a,b[} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. On pose $\int_a^b f'(t) dt = \int f' 1_{]a,b[} d\lambda$. Montrer que :
$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt.$$

3. Soit $a > 0$.

(a) Montrer $f' 1_{]0,a[} \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

(b) Pour $0 < x < a$, on pose $g(x) = \int_x^a f'(t) dt$. Montrer que $g(x)$ a une limite (dans $\mathbb{R}$) quand $x \to 0$, avec $x > 0$, et que cette limite est égale à $f(a) - f(0)$. (Cette limite est aussi notée $\int_0^a f'(t) dt$, improprement... car $f' 1_{]0,a[} \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, la restriction de f' à $]0,a[$ n'est donc pas intégrable pour la mseure de Lebesgue sur $]0,a[$.)

Exercice 5.6
Soit (E,T,m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ et $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$. On suppose que $f_n \to f$ dans $L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ et qu'il existe $C \geq 0$ tel que $|f_n| \leq C$ p.p. et pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\int |f_n - f|^2 dm \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 5.7 *Corrigé 89 page 369*
Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. On définit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par: $F(x) = \int f 1_{[0,x]} d\lambda (= \int_0^x f(t)dt)$, pour $x \geq 0$, et $F(x) = -\int f 1_{[x,0]} d\lambda (= -\int_x^0 f(t)dt)$ pour $x < 0$. Montrer que F est uniformément continue.

Exercice 5.8 (Intégrabilité et limite à l'infini) *Corrigé 90 page 369*
Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda) = \mathcal{L}^1$.

1. On suppose que $f(x)$ admet une limite quand $x \to \infty$. Montrer que cette limite est nulle.
2. On suppose que $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; a-t-on : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$?
3. On suppose que f est uniformément continue ; a-t-on : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$? [*On pourra commencer par montrer que, pour $\eta > 0$ quelconque et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ t.q.* $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, on a :
$$\lim_{n\to+\infty} \int_{x_n-\eta}^{x_n+\eta} |f(x)| d\lambda(x) = 0.] \tag{5.16}$$
4. On suppose que $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $f' \in L^1$; a-t-on : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$?

Exercice 5.9

1. On considère l'espace mesuré $(E,T,m) = (]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[, \lambda)$. Soit $0 < \alpha < +\infty$. On pose, pour $x \in]0,1[$, $f(x) = (\frac{1}{x})^\alpha$. Pour quelles valeurs de α a-t-on $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$?
2. On considère l'espace mesuré $(E,T,m) = (\mathbb{R}^\star_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\star_+), \lambda)$. Soit f définie, pour $x \in]0,+\infty[$, par : $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Montrer que $f \notin L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$. On pose $f_n = f 1_{]0,n[}$. Montrer que $f_n \in L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$, que $f_n \to f$ p.p. (et même uniformément) et que $\displaystyle\int f_n dm$ a une limite dans $\mathbb{R}$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 5.10 On munit $\mathbb{R}^N$ de la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et de la mesure de Lebesgue λ_N. Soient f et $g \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ telles que $f = g$ pp. Montrer que $f = g$ partout. [*On dira donc que $f \in L^1(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_n)$ est continue si il existe $g \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ t.q. $f = g$ pp. Dans ce cas on identifie f avec g.*]

Exercice 5.11

1. On considère l'espace mesuré $(E,T,m) = (]0,1[, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$; soit $0 < \alpha < +\infty$; on pose, pour $x \in]0,1[$, $f(x) = (\frac{1}{x})^\alpha$. Pour quelles valeurs de α a-t-on $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$?
2. On considère l'espace mesuré $(E,T,m) = (\mathbb{R}^\star_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$; soit f définie, pour $x \in]0,+\infty[$, par : $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Montrer que $f \notin L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$. On pose $f_n = f 1_{]0,n[}$. Montrer que $f_n \in L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$, que $f_n \to f$ p.p. (et même uniformément) et que $\displaystyle\int f_n dm$ a une limite dans $\mathbb{R}$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 5.12 Soit μ et ν deux mesures finies sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, tribu borélienne sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si, pour toute fonction continue à support compact on a :
$$\int f d\mu = \int f d\nu, \tag{E}$$
alors $\mu = \nu$. [*On rappelle (cf. exercice 2.30) que si m est une mesure finie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, alors : $\forall A \in \mathbb{R}, m(A) = \inf\{m(O), O \supset A, O$ ouvert de $\mathbb{R}\}$.*]

2. On suppose maintenant que l'égalité (E) est vérifiée pour toute fonction f de $C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Le résultat précédent vous parait-il encore vrai ?

Exercice 5.13 (*Notation: Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on note f^2 la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par: $f^2(x) = (f(x))^2$.*) Soit $E = \{f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}); f \in L^1 = L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $f'^2 \in L^1\}$. Pour $f \in E$, on définit $\|f\| = \int |f| d\lambda + (\int |f'|^2 d\lambda)^{\frac{1}{2}}$

1. Montrer que $(E, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé. E est-il un espace de Banach ?

2. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $\delta \in \mathbb{R}_+^\star$. Montrer que $a \le \delta a^2 + \frac{1}{\delta}$.En déduire que pour $f \in E$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\delta \in \mathbb{R}_+^\star$, on a: $|f(x) - f(y)| \le \delta \int |f'|^2 d\lambda + \frac{1}{\delta}|x - y|$.

3. Montrer que si $f \in E$, alors:
   - f est uniformément continue.
   - f est bornée.
   - $f^2 \in L^1$.

Exercice 5.14 (Continuité en moyenne) *Corrigé 91 page 371*
Pour $f \in L^1 = L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $h \in \mathbb{R}$, on définit f_h ("translatée" de f) par : $f_h(x) = f(x + h)$, pour $x \in \mathbb{R}$. (noter que $f_h \in L^1$).

1. Soit $f \in C_c = C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, montrer que $\|f_h - f\|_1 \to 0$ lorsque $h \to 0$.

2. Soit $f \in L^1$, montrer que $\|f_h - f\|_1 \to 0$ lorsque $h \to 0$.

Exercice 5.15 On note $L^1 = L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$, et $C_b = C_b(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$.

1. Pour $f \in L^1$, $h \in \mathbb{R}_+^\star$ et $x \in \mathbb{R}^N$, on définit
$$f_h(x) = \frac{1}{\lambda_N(B(0, h))} \int_{B(x,h)} f(y) dy,$$
où $B(0, h)$ désigne la boule ouverte de centre 0 et de rayon h. Montrer que f_h est définie partout, que $f_h \in L^1$, et que $f_h \to f$ dans L^1 lorsque $h \to 0$. En déduire qu'il existe $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ t.q. $h_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$ et $f_{h_n} \to f$ p.p. lorsque $n \to +\infty$.

2. On considère maintenant une suite de mesures $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ finies sur $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$, t.q. $\mu_n \to \delta_0$ dans C_b' i.e. $\int \varphi d\mu_n \to \int \varphi d\mu, \forall \varphi \in C_b$. Soit f une fonction mesurable bornée de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$ et intégrable pour la mesure de Lebesgue, et $\nu = f\lambda$. Montrer que $\mu_n \star \nu$ est une mesure de densité $f_n \in L^1$ et montrer que $f_n \to f$ dans L^1.

3. Soit $A \in \mathbb{R}$ t.q. $A \subset [0,1]$; on dit que A est "bien équilibré" si pour tout intervalle I de $[0,1]$, on a : $\lambda(I \cap A) = \lambda(I \cap A^c) = \frac{\lambda(I)}{2}$. Montrer qu'il n'existe pas de borélien A de $[0,1]$ bien équilibré.

Exercice 5.16 (Non existence de borélien "bien équilibré")
Soit $N \geq 1$. On note $L^1 = L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}_N), \lambda_N)$.

1. Pour $f \in L^1$, $h \in \mathbb{R}_+^\star$ et $x \in \mathbb{R}^N$, on définit

$$f_h(x) = \frac{1}{\lambda_N(B(0,h))} \int_{B(x,h)} f(y)dy,$$

où $B(x,h)$ désigne la boule ouverte de centre x et de rayon h. Montrer que f_h est définie pour tout $x \in \mathbb{R}^N$. Montrer que $f_h \in L^1$ et que $f_h \to f$ dans L^1 lorsque $h \to 0$. [On pourra, par exemple, utiliser le théorème de continuité en moyenne dans L^1.]

En déduire qu'il existe $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.q. $h_n \to 0$, lorsque $n \to +\infty$, et $f_{h_n} \to f$ p.p. lorsque $n \to +\infty$.

2. Montrer qu'il n'existe pas de borélien A inclus dans [0,1] et t.q. $\lambda(I \cap A) = \lambda(I \cap A^c) = \frac{\lambda(I)}{2}$ pour tout intervalle I de $[0,1]$. [On pourra raisonner par l'absurde et utiliser la question précédente avec $N = 1$ et f convenablement choisi. Cette question est aussi une conséquence de l'exercice 5.17.]

Exercice 5.17 (Sur la concentration d'un borélien) *Corrigé 92 page 372*
Soit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $A \in \mathcal{B}(]a,b[)$ et $\rho \in]0,1[$. On suppose que $\lambda(A \cap]\alpha,\beta[) \leq \rho(\beta - \alpha)$ pour tout α, β t.q. $a \leq \alpha < \beta \leq b$. Montrer que $\lambda(A) = 0$. [On pourra, par exemple, commencer par montrer que $\lambda(A \cap O) \leq \rho\lambda(O)$ pour tout ouvert O de $]a,b[$.]

Conséquence de cet exercice : Soit $A \in \mathcal{B}(]a,b[)$ t.q. $\lambda(A) > 0$. Alors, pour tout $\rho < 1$, il existe α, β t.q. $a \leq \alpha < \beta \leq b$ et $\lambda(A \cap]\alpha,\beta[) \geq \rho(\beta - \alpha)$.

Exercice 5.18 (Points de Lebesgue) *Corrigé 93 page 373*
On désigne par λ la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}$, par L^1 l'espace $L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda)$ et par $\mathcal{L}^1$ l'espace $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda)$. On note $dt = d\lambda(t)$.

1. Soit $(I_1, \ldots, I_n)$ des intervalles ouverts non vides de $\mathbb{R}$ t.q. chaque intervalle n'est pas contenu dans la réunion des autres. On pose $I_k =]a_k, b_k[$ et on suppose que la suite $(a_k)_{k=1,\ldots,n}$ est croissante. Montrer que la suite $(b_k)_{k=1,\ldots,n}$ est croissante et que les intervalles d'indices impairs [resp. pairs] sont disjoints 2 à 2.

2. Soit J une famille finie d'intervalles ouverts non vide de $\mathbb{R}$ dont la réunion est notée A. Montrer qu'il existe une sous-famille finie de J, notée $(I_1, \ldots, I_m)$, formée d'intervalles disjoints 2 à 2 et t.q. $\lambda(A) \leq 2\sum_{k=1}^m \lambda(I_k)$. [Utiliser la question 1.]

On se donne maintenant $f \in L^1$ et on suppose qu'il existe $a > 0$ t.q. $f = 0$ p.p. sur $[-a,a]^c$. Le but de l'exercice est de montrer que :

$$\frac{n}{2} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f(x+t)dt \to f(x), \text{ pour presque tout } x \in \mathbb{R}, \text{ quand } n \to \infty. \tag{5.17}$$

Pour $\varepsilon > 0$, on définit $f_\varepsilon^\star$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f_\varepsilon^\star(x) = \sup_{h \geq \varepsilon} \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} |f(x+t)|dt. \tag{5.18}$$

3. (a) Montrer que $f_\varepsilon^\star$ est bornée.
   (b) Montrer que $f_\varepsilon^\star$ est borélienne. [On pourra montrer que $f_\varepsilon^\star$ est le sup de fonctions continues.]
   (c) Montrer que $f_\varepsilon^\star(x) \to 0$ quand $|x| \to \infty$.

4. Pour $y > 0$, on pose $B_{y,\varepsilon} = \{x \in \mathbb{R},\ f_\varepsilon^\star(x) > y\}$.

   (a) Montrer que tout $x \in B_{y,\varepsilon}$ est le centre d'un intervalle ouvert $I(x)$ t.q.
      i. $\lambda(I(x)) \geq 2\varepsilon$,
      ii. $\frac{1}{\lambda(I(x))}\int_{I(x)} |f| d\lambda > y$.

      Montrer que parmi les intervalles $I(x)$, $x \in B_{y,\varepsilon}$, ainsi obtenus, il en existe un nombre fini $I(x_1), \ldots I(x_n)$ dont la réunion recouvre $B_{y,\varepsilon}$. [On pourra d'abord remarquer que $B_{y,\varepsilon}$ est borné.]
   (b) Montrer que $\lambda(B_{y,\varepsilon}) \leq \frac{2}{y}\|f\|_1$. [Utiliser la question 2.]

   On définit maintenant $f^\star$ de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ par :

$$f^\star(x) = \sup_{h>0} \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} |f(x+t)| dt. \tag{5.19}$$

5. Montrer que $f^\star$ est borélienne et que $\lambda(\{f^\star > y\}) \leq \frac{2}{y}\|f\|_1$, pour tout $y > 0$.

6. Montrer (5.17) si f admet un représentant continu. [cette question n'utilise pas les questions précédentes.]

7. Montrer (5.17). [Approcher f, dans L^1 et p.p., par une suite d'éléments de $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$, notée $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$. On pourra utiliser $(f - f_p)^\star$.]

Exercice 5.19 (Convergence vague et convergence etroite) *Corrigé 94 page 376*
Soit $(m_n)n \in \mathbb{N}$ une suite de mesures (positives) finies sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ $(d \geq 1)$ et m une mesure (positive) finie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. On suppose que :

- $\int \varphi dm_n \to \int \varphi dm$, quand $n \to \infty$, pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$.
- $m_n(\mathbb{R}^d) \to m(\mathbb{R}^d)$ quand $n \to \infty$.

1. Soit $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Montrer que $\int \varphi dm_n \to \int \varphi dm$, quand $n \to \infty$. [On pourra utiliser le fait que φ est limite uniforme d'une suite d'élement de $C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$.]

2. Pour $p \in \mathbb{N}^\star$, on note B_p la boule fermée de centre 0 et de rayon p (pour la norme euclidienne de $\mathbb{R}^d$). Montrer qu'il existe une suite $(\varphi_p)_{p\in\mathbb{N}^\star} \subset C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ t.q., pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$, $0 \leq \varphi_p \leq 1$, $\varphi_p = 1$ sur B_p et $\varphi_p \leq \varphi_{p+1}$. On utilise cette suite $(\varphi_p)_{p\in\mathbb{N}^\star}$ dans les questions suivantes.

3. Soit $\varepsilon > 0$.

   (a) Montrer qu'il existe $p_0 \in \mathbb{N}^\star$ t.q. : $p \geq p_0 \Rightarrow \displaystyle\int (1 - \varphi_p) dm \leq \varepsilon$.

   (b) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$, $\displaystyle\int (1 - \varphi_p) dm_n \to \int (1 - \varphi_p) dm$ quand $n \to \infty$.

(c) Montrer qu'il existe $p_1 \in \mathbb{N}^\star$ t.q. : $n \in \mathbb{N}$, $p \geq p_1 \Rightarrow \displaystyle\int (1-\varphi_p) dm_n \leq \varepsilon$.

4. Montrer que $\int \varphi dm_n \to \int \varphi dm$, quand $n \to \infty$, pour tout $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ (on dit alors que la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge étroitement vers m).

5. Indiquer brièvement comment obtenir le même résultat (c'est-à-dire le résultat de la question 4) si on remplace "$\mathbb{R}^d$" (dans les hypothèses et dans la question 4) par "Ω ouvert de $\mathbb{R}^d$".

Exercice 5.20 (Unicité avec C_c^∞)
Soit m et μ deux mesures finies sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$). on suppose que $\int \varphi dm = \int \varphi d\mu$ pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Montrer que $m = \mu$.

Exercice 5.21 (Densité de C_c et C_c^∞ dans L^1)
Soit $d \geq 1$ et μ une mesure sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$. On suppose que μ vérifie les deux propriétés suivantes :

(p1) μ est est finie sur les compacts de $\mathbb{R}^d$, c'est-à-dire que $\mu(K) < +\infty$ si K est un compact de $\mathbb{R}^d$,

(p2) μ est régulière, c'est-à-dire que pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe O ouvert et F fermé t.q. $F \subset A \subset O$ et $\mu(O \setminus F) \leq \varepsilon$.

En fait, la propriété (p1) entraîne la propriété (p2) (cela est démontré au chapitre 7, proposition 7.5) mais cette démonstration n'est pas demandée ici.
On note $\mathcal{L}^1_\mu$ l'espace $\mathcal{L}^1_\mathbb{R}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mu)$. Pour $f \in \mathcal{L}^1_\mu$, on note $\|f\|_1 = \int |f| d\mu$. Enfin, pour $x \in \mathbb{R}^d$, on note $|x|$ la norme euclidienne de x.

1. Soit $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ (c'est-à-dire φ continue de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ et à support compact). Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}^1_\mu$.

2. Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$ et $\eta > 0$. Pour $x \in \mathbb{R}^d$, on pose $\varphi(x) = \frac{(\eta - d(x,K))^+}{\eta}$ avec $d(x,K) = \inf\{|x-y|, \, y \in K\}$. Montrer que $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ et que $\varphi(x) = 1$ si $x \in K$.

3. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ t.q. $\mu(A) < +\infty$.

   (a) Soit $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe O ouvert et K compact t.q. $K \subset A \subset O$ et $\mu(O \setminus K) \leq \varepsilon$.

   (b) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ t.q. $\|\varphi - 1_A\|_1 \leq \varepsilon$.

4. Soit f une fonction borélienne positive de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f \in \mathcal{L}^1_\mu$. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ t.q. $\|f - \varphi\|_1 \leq \varepsilon$. [On pourra approcher f par une fonction étagée.]

5. (Densité.) Soit $f \in \mathcal{L}^1_\mu$ et $\varepsilon > 0$.

   (a) Montrer qu'il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ t.q. $\|f - \varphi\|_1 \leq \varepsilon$.

   (b) Montrer qu'il existe $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ t.q. $\|f - \psi\|_1 \leq \varepsilon$. [On pourra montrer que, si $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, on a $\|\varphi - \varphi_n\|_1 \to 0$, quand $n \to \infty$, avec $\varphi_n = \varphi \star \rho_n$ et $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une famille régularisante, voir la définition 8.4. du polycopié de cours).]

6. (Continuité en moyenne ?)

   (a) Soit $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Montrer que $\|\varphi(\cdot + h) - \varphi\|_1 \to 0$ quand $h \to 0$.

(b) Montrer, en donnant un exemple (c'est-à-dire en choisissant convenablement f et μ) qu'on peut avoir $f \in \mathcal{L}^1_\mu$ et $\|f(\cdot + h) - f\|_1 \not\to 0$ quand $h \to 0$.

7. On suppose maintenant que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et que μ est une mesure sur les boréliens de Ω, finie sur les sous ensembles compacts de Ω. Indiquer brièvement comment on peut montrer la densité de $C_c(\Omega, \mathbb{R})$ et $C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ dans $L^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mu)$.

Exercice 5.22 (Loi d'une fonction linéaire de X)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et X une v.a.. On suppose que la loi de X a une densité par rapport à Lebesgue et on note g cette densité.

Soit a, $b \in \mathbb{R}$, montrer que la v.a. $aX + b$ a une densité par rapport à la mesure de Lebesgue et donner cette densité en fonction de g, a et b.

Chapter 6

Les espaces L^p

6.1 Définitions et premières propriétés

6.1.1 Les espaces L^p, avec $1 \le p < +\infty$

Soient (E, T, m) un espace mesuré, $1 \le p < \infty$ et $f \in \mathcal{M} = \mathcal{M}(E, T)$ (c'est-à-dire $f : E \to \mathbb{R}$, mesurable). On remarque que $|f|^p \in \mathcal{M}_+$, car $|f|^p = \varphi \circ f$ où φ est la fonction continue (donc borélienne) définie par $\varphi(s) = |s|^p$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. La quantité $\int |f|^p dm$ est donc bien définie et appartient à $\overline{\mathbb{R}}_+$. Ceci va nous permette de définir les espaces de fonctions de puissance p-ième intégrable. On retrouve, pour $p = 1$, la définition de l'espace des fonctions intégrables.

Définition 6.1 (Les espaces $\mathcal{L}^p$) *Soient (E, T, m) un espace mesuré, $1 \le p < \infty$ et f une fonction définie de E dans $\mathbb{R}$, mesurable. (On a donc $|f|^p \in \mathcal{M}_+$.)*

1. *On dit que $f \in \mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ si $\int |f|^p dm < \infty$. On pose alors :*

$$\|f\|_p = \Big(\int |f|^p dm \Big)^{\frac{1}{p}}. \tag{6.1}$$

2. *On dit que $f \notin \mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ si $\int |f|^p dm = \infty$ et on pose alors $\|f\|_p = +\infty$.*

De manière analogue au cas $p = 1$ on quotiente les espaces $\mathcal{L}^p$ par la relation d'équivalence "= p.p." afin que l'application $f \mapsto \|f\|_p$ définisse une norme sur l'espace vectoriel des classes d"equivalence (voir section 4.5).

Définition 6.2 (Les espaces L^p) *Soient (E, T, m) un espace mesuré et $1 \le p < +\infty$.*

1. *On définit l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ comme l'ensemble des classes d'équivalence des fonctions de $\mathcal{L}^p$ pour la relation d'équivalence (= pp). En l'absence d'ambiguïté on notera L^p l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.*
2. *Soit $F \in L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. On pose $\|F\|_p = \|f\|_p$ si $f \in F$. (Cette définition est cohérente car ne dépend pas du choix de f dans F. On rappelle aussi que $F = \tilde{f} = \{g \in \mathcal{L}^p;\ g = f$ p.p.$\}$.)*

Proposition 6.1 *Soient (E, T, m) un espace mesuré et $1 \le p < +\infty$. Alors :*

1. *$\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.*

2. $L^p_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$.

DÉMONSTRATION :

1. • Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{L}^p$. On a $\alpha f \in \mathcal{M}$ (car $\mathcal{M}$ est un espace vectoriel) et $\int |\alpha f|^p dm = |\alpha|^p \int |f|^p dm < \infty$. Donc, $\alpha f \in \mathcal{L}^p$.
   • Soit $f, g \in \mathcal{L}^p$. On veut montrer que $f+g \in \mathcal{L}^p$. On sait que $f+g \in \mathcal{M}$ (car $\mathcal{M}$ est un espace vectoriel) et on remarque que, pour tout $x \in E$,
   $$|f(x)+g(x)|^p \leq 2^p|f(x)|^p + 2^p|g(x)|^p,$$
   et donc
   $$\int |f+g|^p dm \leq 2^p \int |f|^p dm + 2^p \int |g|^p dm < \infty,$$
   ce qui montre que $f+g \in \mathcal{L}^p$.
2. La structure vectorielle de L^p s'obtient comme pour $p=1$. Soit $F, G \in L^p$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On choisit $f \in F$ et $g \in G$ et on définit $\alpha F + \beta G$ comme étant la classe d'équivalence de $\alpha f + \beta g$. Comme d'habitude, cette définition est cohérente car la classe d'équivalence de $\alpha f + \beta g$ ne dépend pas des choix de f et g dans F et G.

■

On va montrer maintenant que $f \mapsto \|f\|_p$ est une semi-norme sur λ^p et une norme sur L^p.

Lemme 6.1 (Inégalité de Young) *Soient* $a, b \in \mathbb{R}_+$ *et* $p, q \in \ ]1, +\infty[$ *t.q.* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. *Alors :*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{6.2}$$

DÉMONSTRATION :
La fonction exponentielle $\theta \mapsto \exp(\theta)$ est convexe (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$). On a donc, pour tout $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ et tout $t \in [0,1]$,
$$\exp(t\theta_1 + (1-t)\theta_2) \leq t\exp(\theta_1) + (1-t)\exp(\theta_2).$$
Soit $a, b > 0$ (les autres cas sont triviaux). On prend $t = \frac{1}{p}$ (de sorte que $(1-t) = \frac{1}{q}$), $\theta_1 = p\ln(a)$ et $\theta_2 = q\ln(b)$. On obtient bien $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

■

Lemme 6.2 (Inégalité de Hölder)
Soient (E,T,m) *un espace mesuré et* $p, q \in]1, +\infty[$ *t.q.* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. *Soient* $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ *et* $g \in \mathcal{L}^q_{\mathbb{R}}(E,T,m)$. *Alors,* $fg \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ *et*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q. \tag{6.3}$$

Le même résultat est vrai avec L^p, L^q *et* L^1 *au lieu de* $\mathcal{L}^p$, $\mathcal{L}^q$ *et* $\mathcal{L}^1$.

DÉMONSTRATION :
On remarque d'abord que $fg \in \mathcal{M}$ car $f, g \in \mathcal{M}$ (voir la proposition 3.5).
L'inégalité de Young donne $|f(x)g(x)| \leq \frac{|f(x)|^p}{p} + \frac{|g(x)|^q}{q}$ pour tout $x \in E$. On en déduit, en intégrant :

$$\int |fg|dm \leq \frac{1}{p} \int |f|^p dm + \frac{1}{q} \int |g|^q dm < \infty. \tag{6.4}$$

Donc, $fg \in \mathcal{L}^1$.
Pour montrer (6.3), on distingue maintenant 3 cas :

Cas 1. On suppose $\|f\|_p = 0$ ou $\|g\|_q = 0$. On a alors $f = 0$ p.p. ou $g = 0$ p.p.. On en déduit $fg = 0$ p.p., donc $\|fg\|_1 = 0$ et (6.3) est vraie.

Cas 2. On suppose $\|f\|_p = 1$ et $\|g\|_q = 1$. On a alors, avec (6.4),

$$\|fg\|_1 = \int |fg|dm \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|f\|_p \|g\|_q.$$

L'inégalité (6.3) est donc vraie.

Cas 3. On suppose $\|f\|_p > 0$ et $\|g\|_q > 0$. On pose alors $f_1 = \frac{f}{\|f\|_p}$ et $g_1 = \frac{g}{\|g\|_q}$, de sorte que $\|f_1\|_p = \|g_1\|_q = 1$. Le cas 2 donne alors

$$\frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p \|g\|_q} = \|f_1 g_1\|_{\leq} 1.$$

Ce qui donne (6.3).

Dans le cas où $f \in L^p$ et $g \in L^q$, on confond les classes f et g avec des répresentants, encore notés f et g. Le résultat précédent donne $fg \in \mathcal{L}^1$ et (6.3). On a alors $fg \in L^1$ au sens de la confusion habituelle, c'est-à-dire "il existe $h \in \mathcal{L}^1$ t.q. $fg = h$ p.p." (et fg ne dépend pas des représentants choisis), et (6.3) est vérifiée.

■

Lemme 6.3 (Inégalité de Minkowski) *Soient (E, T, m) un espace mesuré et $1 \leq p < \infty$. Soient $f, g \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Alors, $f + g \in \mathcal{L}^p$ et :*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p. \tag{6.5}$$

Le même résultat est vrai avec L^p au lieu de $\mathcal{L}^p$.

DÉMONSTRATION :
Le cas $p = 1$ à déjà été fait. On suppose donc $p > 1$. On a aussi déjà vu que $f + g \in \mathcal{L}^p$ (proposition 6.1). Il reste donc à montrer (6.5). On peut supposer que $\|f + g\|_p \neq 0$ (sinon (6.5) est trivial).
On remarque que

$$|f + g|^p \leq FH + GH, \tag{6.6}$$

avec $F = |f|$, $G = |g|$ et $H = |f + g|^{p-1}$.

On pose $q = \frac{p}{p-1}$, de sorte que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $F \in \mathcal{L}^p$, $G \in \mathcal{L}^p$ et $H \in \mathcal{L}^q$ (car $f + g \in \mathcal{L}^p$). On peut donc appliquer l'inégalité de Hölder (6.3), elle donne

$$\|FH\|_1 \leq \|F\|_p \|H\|_q,\ \|GH\|_1 \leq \|G\|_p \|H\|_q.$$

On en déduit, avec (6.6),

$$\int |f+g|^p dm \leq (\|f\|_p + \|g\|_p)(\int |f+g|^p dm)^{1-\frac{1}{p}},$$

D'où l'on déduit (6.5).

Il est clair que le lemme est vrai avec L^p au lieu de $\mathcal{L}^p$.

■

On en déduit la propriété suivante:

Proposition 6.2 *Soient (E, T, m) un espace mesuré et $1 \leq p < \infty$.*

1. *L'application $f \mapsto \|f\|_p$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}^p$.*
2. *L'application $f \mapsto \|f\|_p$ est une norme sur L^p. L^p, muni de cette norme, est donc une espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$) normé.*

DÉMONSTRATION :

- On a bien $\|f\|_p \in \mathbb{R}_+$ pour tout $f \in \mathcal{L}^p$.
- On a déjà vu que $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \|f\|_p$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout $f \in \mathcal{L}^p$.
- L'inégalité (6.5) donne $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ pour tout $f, g \in \mathcal{L}^p$.

L'application $f \mapsto \|f\|_p$ est donc une semi-norme sur $\mathcal{L}^p$. On remarque que, si $f \in \mathcal{L}^p$, on a

$$\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ p.p..}$$

Cette équivalence donne que l'application $f \mapsto \|f\|_p$ est une norme sur L^p. ■

Remarque 6.1 On reprend ici la remarque 4.9. Soient (E, T, m) un espace mesuré et $1 \leq p < \infty$. On confondra dans la suite un élement F de L^p avec un représentant f de F, c'est-à-dire avec un élément $f \in \mathcal{L}^p$ t.q. $f \in F$. De manière plus générale, soit $A \subset E$ t.q. A^c soit négligeable (c'est-à-dire $A^c \subset B$ avec $B \in T$ et $m(B) = 0$). On dira qu'une fonction f, définie de A dans $\mathbb{R}$, est un élément de L^p si il existe une fonction $g \in \mathcal{L}^p$ t.q. $f = g$ p.p.. On confond donc, en fait, la fonction f avec la classe d'équivalence de g, c'est-à-dire avec $\tilde{g} = \{h \in \mathcal{L}^p;\ h = g \text{ p.p. }\}$. D'ailleurs, cet ensemble est aussi égal à $\{h \in \mathcal{L}^p;\ h = f \text{ p.p. }\}$.
Avec cette confusion, si f et g sont des élements de L^p, $f = g$ signifie en fait $f = g$ p.p..

Théorème 6.1 (Convergence dominée) *Soient (E, T, m) un espace mesuré, $1 \leq p < \infty$, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p$ une suite t.q. :*

- *$f_n \to f$ pp,*

- $\exists \ F \in L^p$ *t.q.* $|f_n| \le F$ *pp,* $\forall \ \ n \in \mathbb{N}$ *;*

alors $f_n \to f$ *dans* L^p *(c.à.d* $\displaystyle\int |f_n - f|^p dm \to 0$ *quand* $n \to \infty$*).*

DÉMONSTRATION :
On se ramène au cas $p = 1$.

On peut choisir des représentants des f_n (encore notés f_n) de manière à ce que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente dans $\mathbb{R}$ pour tout $x \in E$. On pose $g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. On a donc $g \in \mathcal{M}$ et $g \le F$ p.p., ce qui montre que $g \in \mathcal{L}^p$. On a donc $f \in L^p$ (au sens $f = g$ p.p. avec $g \in \mathcal{L}^p$).
Puis, on remarque que
$$0 \le h_n = |f_n - f|^p \le (|f_n| + |f|)^p \le 2^p F^p \text{ p.p.},$$
pour tout $n \in \mathbb{N}$, et que $h_n \to 0$ p.p. quand $n \to \infty$. Comme $F^p \in L^1$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée, il donne $h_n \to 0$ dans L^1, c'est-à-dire $f_n \to f$ dans L^p.

■

Théorème 6.2 (Réciproque partielle) *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré,* $1 \le p < \infty$*,* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p$ *et* $f \in L^p$*. On suppose que* $f_n \to f$ *dans* L^p *quand* $n \to \infty$*. Alors il existe une sous-suite* $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *t.q. :*

- $f_{n_k} \to f$ *p.p. lorsque* $k \to +\infty$*,*
- $\exists \ F \in L^p$ *t.q.* $|f_{n_k}| \le F$ *p.p., pour tout* $k \in \mathbb{N}$ *.*

DÉMONSTRATION :
Comme dans le cas $p = 1$, Ce théorème est une conséquence de la proposition suivante sur les séries absolument convergentes. ■

Proposition 6.3 (Séries absolument convergentes dans L^p)
Soient (E, T, m) *un espace mesuré,* $1 \le p < \infty$ *et* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p$*. On suppose que* $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_p < +\infty$*. Alors :*

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(x)| < +\infty$ *pour presque tout* $x \in E$*. On pose* $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ *(la fonction* f *est donc définie p.p.).*
2. $f \in L^p$ *(au sens "il existe* $g \in \mathcal{L}^p$ *t.q.* $f = g$ *p.p.").*
3. $\sum_{k=0}^{n} f_k(x) \to f$ *p.p. et dans* L^p*, lorsque* $n \to +\infty$*. De plus, il existe* $F \in L^p$ *t.q.* $|\sum_{k=1}^{n} f_k(x)| \le F$ *p.p., pour tout* $n \in \mathbb{N}$*.*

DÉMONSTRATION : Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on choisit un représentant de f_n, encore noté f_n.
On pose, pour tout $x \in E$, $g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} |f_k(x)|$. On a $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$. Comme la suite est croissante, il existe $F \in \mathcal{M}_+$ t.q. $g_n \uparrow F$, quand $n \to \infty$. On a donc aussi $g_n^p \uparrow F^p$ quand $n \to \infty$ et le théorème de convergence monotone donne
$$\int g_n^p dm \to \int F^p dm, \text{ quand } n \to \infty. \tag{6.7}$$

On remarque maintenant que $\|g_n\|_p \leq \sum_{k=0}^n \|f_k\|_p \leq \sum_{k=0}^\infty \|f_k\|_p = A < \infty$. Donc $\|g_n\|_p^p \leq A^p$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et (6.7) donne alors

$$\int F^p dm \leq A^p < \infty. \tag{6.8}$$

L'inégalité (6.8) donne que $F < \infty$ p.p.. Il existe donc $B \in T$ t.q. $m(B) = 0$ et $F(x) < \infty$ pour tout $x \in B^c$. Pour tout $x \in B^c$, la série de terme général $f_n(x)$ est donc absolument convergente dans $\mathbb{R}$. Elle est donc convergente dans $\mathbb{R}$ et on peut définir, pour tout $x \in B^c$, $f(x) \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k(x).$$

La fonction f n'est pas forcément dans $\mathcal{M}$, mais elle est m-mesurable (voir la définition 4.3 page 78), il existe donc $g \in \mathcal{M}$ t.q. $f = g$ p.p.. Puis, comme $g \leq F$ p.p. (car $|\sum_{k=0}^n f_k(x)| \leq g_n \leq F$ p.p. et $\sum_{k=0}^n f_k(x) \to g$ p.p.) on a, grâce à (6.7), $g \in \mathcal{L}^p$, ce qui donne bien $f \in L^p$ (au sens "il existe $g \in \mathcal{L}^p$ t.q. $f = g$ p.p.")

Enfin, pour montrer le dernier item de la proposition, il suffit d'appliquer le théorème de convergence dominée dans L^p car $\sum_{k=0}^n f_k(x) \to f$ p.p. et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\sum_{k=0}^n f_k(x)| \leq g_n \leq F$ p.p. avec $\int F^p dm < \infty$. On obtient bien que $\sum_{k=0}^n f_k(x) \to f$ dans L^p. ■

Toute série absolument convergente de L^p est donc convergente dans L^p. On en déduit le résultat suivant:

Théorème 6.3 *Soient (E, T, m) un espace mesuré, et $1 \leq p < \infty$. L'espace vectoriel normé $(L^p, \|.\|_p)$ est complet.*

On peut maintenant se demander si les espaces L^p sont des espaces de Hilbert. Ceci est vrai pour $p = 2$, et, en général, faux pour $p \neq 2$ (voir à ce propos l'exercice 6.30). Le cas de L^2 sera étudié en détail dans la section 6.2

En général, les espaces L^p, avec $1 < p < +\infty$, autres que L^2 ne sont pas des espaces de Hilbert, mais nous verrons ultérieurement (section 6.3 que ce sont des espaces de Banach réflexifs (c'est-à-dire que l'injection canonique entre l'espace et son bi-dual est une bijection). Les espaces L^1 et L^∞ (que nous verrons au paragraphe suivant) sont des espaces de Banach non réflexifs (sauf cas particuliers).

Remarque 6.2 Soient (E, T, m) un espace mesuré et $1 < p < \infty$. On peut aussi définir $\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(E, T, m)$ et $L^p_{\mathbb{R}^N}(E, T, m)$ (avec $N > 1$) comme on a fait pour $p = 1$ (voir la section 4.10). On obtient aussi des espaces de Banach (complexes ou réels). Le cas $L^2_{\mathbb{C}}(E, T, m)$ est particulièrement intéressant. Il sera muni d'une structure hilbertienne (voir le théorème 6.4).

6.1.2 L'espace L^∞

Définition 6.3 (L'espace $\mathcal{L}^\infty$) *Soient (E, T, m) un espace mesuré et f une fonction mesurable (de E dans $\mathbb{R}$) ;*

1. *on dit que f est essentiellement bornée, ou encore que $f \in \mathcal{L}^\infty = \mathcal{L}^\infty_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ si il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que $|f| \leq C$ p.p. ;*
2. *si $f \in \mathcal{L}^\infty$, on pose $\|f\|_\infty = \inf\{C \in \mathbb{R}_+ \ ; \ |f| \leq C \text{ p.p.}\}$,*
3. *si $f \notin \mathcal{L}^\infty$, on pose $\|f\|_\infty = +\infty$.*

Remarque 6.3 (Rappels sur la définition de l'inf...) Soit $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. On rappelle que A est borné inférieurement si il existe un minorant de A, c'est-à-dire si il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $x \geq \alpha$ pour tout $x \in A$. Si A est borné inférieurement, on définit la borne inférieure de A comme le plus grand des minorants : $\overline{x} = \inf\{A\} = \max\{\alpha; \alpha \leq x \text{ pour tout } x \in A\}$. Si A n'est pas borné inférieurement, on pose $\inf A = -\infty$. Dans les manipulations sur les inf (et sur les sup...) il est utile de connaître le résultat suivant :

$$\overline{x} = \inf A \Rightarrow \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A; x_n \downarrow \overline{x} \text{ quand } n \to +\infty. \tag{6.9}$$

Ceci se démontre très facilement en écrivant :

1. Si A est non borné inférieurement, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $y_n \in A$ t.q. $y_n \leq -n$. En choisissant $x_0 = y_0$ et, par récurrence, $x_n = \min(x_{n-1}, y_n)$, on a donc $x_n \downarrow -\infty = \inf A$.

2. Si A est borné inférieurement, soit $\overline{x} = \inf A$. Alors, $\overline{x} + \frac{1}{n}$ n'est pas un minorant de A et donc, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, il existe $y_n \in A$ tel que $\overline{x} \leq y_n \leq \overline{x} + \frac{1}{n}$. En choisissant $x_0 = y_0$ et, par récurrence, $x_n = \min(x_{n-1}, y_n)$, on a clairement: $x_n \to \overline{x}$ lorsque $n \to +\infty$.

Le petit lemme suivant (dont la démonstration est immédiate en écrivant la définition de $\|f\|_\infty$, voir l'exercice corrigé 4.32) est parfois bien utile.

Lemme 6.4 Si $f \in \mathcal{L}^\infty$, alors $|f| \leq \|f\|_\infty$ p.p..

Démonstration :
Voir l'exercice corrigé 4.32. ■

On a égalité entre le sup essentiel et le sup pour les fonctions continues:

Proposition 6.4 *Si $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, alors $\|f\|_u = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| = \|f\|_\infty$.*

Démonstration :
On distingue 2 cas:
Cas 1. On suppose ici que $|f|$ est non bornée, c'est-à-dire $\|f\|_u = \infty$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Comme $|f|$ est non bornée, il existe $x \in \mathbb{R}$ t.q. $|f(x)| > \alpha$. Par continuité de f, il existe alors $\varepsilon > 0$ t.q. $|f(y)| > \alpha$ pour tout $y \in [x - \varepsilon, x + \varepsilon]$. On a donc $\{|f| > \alpha\} \supset [x - \varepsilon, x + \varepsilon]$ et donc $\lambda(\{|f| > \alpha\}) \geq 2\varepsilon$. Donc, $|f|$ n'est pas inférieure ou égale à α p.p.. On a donc $\{C \in \mathbb{R}_+; |f| \leq C \text{ p.p.}\} = \emptyset$, donc $\|f\|_\infty = \infty = \|f\|_u$.

Cas 2. On suppose maintenant que $\|f\|_u < \infty$. On a $|f(x)| \leq \|f\|_u$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $\|f\|_\infty \leq \|f\|_u$. D'autre part, on sait que $|f| \leq \|f\|_\infty$ p.p.. On a donc $\lambda\{|f| > \|f\|_\infty\}) = 0$. Or $\{|f| > \|f\|_\infty\}$ est ouvert (car f est continue), c'est donc un ouvert de mesure nulle, on a donc $\{|f| > \|f\|_\infty\} = \emptyset$ (la mesure de Lebesgue d'un ouvert non vide est toujours strictement positive). Ce qui prouve $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et donc $\|f\|_u \leq \|f\|_\infty$.
On obtient bien finalement $\|f\|_u = \|f\|_\infty$. ■

Définition 6.4 *Soient (E, T, m) un espace mesuré et $\mathcal{L}^\infty = \mathcal{L}^\infty_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.*

1. *On définit $L^\infty = L^\infty_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ comme l'ensemble des classes d'équivalence sur $\mathcal{L}^\infty$ pour la relation d'équivalence "= p.p.".*

2. *Soit $F \in L^\infty$. On pose $\|F\|_\infty = \|f\|_\infty$ avec $f \in F$, de sorte que $F = \{g \in \mathcal{L}^\infty; g = f \text{ p.p.}\}$. (Cette définition est cohérente car $\|f\|_\infty$ ne dépend pas du choix de f dans F.)*

Proposition 6.5 *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré,* $\mathcal{L}^\infty = \mathcal{L}^\infty_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *et* $L^\infty = L^\infty_{\mathbb{R}}(E, T, m)$*. Alors :*

1. $\mathcal{L}^\infty$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *et l'application définie de* $\mathcal{L}^\infty$ *dans* $\mathbb{R}$ *par* $f \mapsto \|f\|_\infty$ *est une semi-norme sur* $\mathcal{L}^\infty$*.*

2. L^∞ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *et l'application définie de* L^∞ *dans* $\mathbb{R}$ *par* $f \mapsto \|f\|_\infty$ *est une norme sur* $\mathcal{L}^\infty$*.* L^∞ *est donc un espace e.v.n. (réel).*

DÉMONSTRATION :

1. - Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{L}^\infty$, il est clair que $\alpha f \in \mathcal{L}^\infty$ et que $\|\alpha f\|_=|\alpha|\|f\|_\infty$.
   - Soit $f, g \in \mathcal{L}^\infty$. Comme $|f| \le \|f\|_\infty$ p.p. et $|g| \le \|g\|_\infty$ p.p., on montre facilement que $|f+g| \le |f| + |g| \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ p.p.. Ce qui prouve que $(f+g) \in \mathcal{L}^\infty$ et $\|f+g\|_\infty \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

   On a bien montré que $\mathcal{L}^\infty$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et comme $\|f\|_\infty \in \mathbb{R}_+$ pour tout $f \in \mathcal{L}^\infty$, l'application $f \mapsto \|f\|_\infty$ est bien une semi-norme sur $\mathcal{L}^\infty$.

2. la structure vectorielle de L^∞ s'obtient comme celle de L^p ($p < \infty$) et le fait que $f \mapsto \|f\|_\infty$ soit une norme découle du fait que
$$f = 0 \text{ p.p. } \Leftrightarrow \|f\|_\infty = 0.$$

■

Proposition 6.6 *Soit* (E, T, m) *un espace mesuré. L'espace* $L^\infty_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *est un espace de Banach (réel), c'est-à-dire un e.v.n. complet.*

DÉMONSTRATION :
On sait déjà que L^∞ est un e.v.n.. Le fait qu'il soit complet est la conséquence du fait que toute série absolument convergente dans L^∞ est convergente dans L^∞. Ce qui est une conséquence de la proposition suivante sur les séries absolument convergentes. ■

Proposition 6.7 (Séries absolument convergentes dans L^∞)
Soient (E, T, m) *un espace mesuré et* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^\infty_{\mathbb{R}}(E, T, m)$*. On suppose que* $\sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_\infty < +\infty$*. Alors :*

1. *Il existe* $C \in \mathbb{R}_+$ *t.q., pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* $\sum_{k=0}^{n} |f_k| < C$ *p.p..*

2. *La série de terme général* $f_n(x)$ *est, pour presque tout* $x \in E$*, absolument convergente dans* $\mathbb{R}$*. On définit, pour presque tout* x*,* $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$*.*

3. *On a* $f \in L^\infty$ *(au sens "il existe* $g \in \mathcal{L}^\infty$ *t.q.* $f = g$ *p.p.) et* $\|\sum_{k=0}^{n} f_k - f\|_\infty \to 0$ *lorsque* $n \to +\infty$*.*

DÉMONSTRATION : Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on choisit un représentant de f_n, encore noté f_n. Comme $|f_n| \le \|f_n\|_\infty$ p.p., il existe $A_n \in T$ t.q. $m(A_n) = 0$ et $|f_n| \le \|f_n\|_\infty$ sur A_n^c. On pose $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T$. On a $m(A) = 0$ (par σ-sous additivité de m) et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in A^c$, $|f_n(x)| \le \|f_n\|_\infty$.
Pour tout $x \in A^c$, on a donc

$$\sum_{k=0}^{n} |f_k(x)| \le \sum_{k=0}^{n} \|f_k\|_\infty \le \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_\infty = C < \infty. \tag{6.10}$$

Comme $m(A) = 0$, ceci montre le premier item.

Pour tout $x \in A^c$, la série de terme général $f_n(x)$ est absolument convergente dans $\mathbb{R}$, donc convergente. On pose donc

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \in \mathbb{R}.$$

f est donc définie p.p., elle est m-mesurable (voir la définition 4.3) car limite p.p. de fonctions mesurables. Il existe donc $g \in \mathcal{M}$ t.q. $f = g$ p.p. et (6.10) donne $|g| \leq C$ p.p.. On a donc $g \in \mathcal{L}^\infty$ et donc $f \in L^\infty$ (au sens "il existe $g \in \mathcal{L}^\infty$ t.q. $f = g$ p.p.").

Il reste à montrer que $\sum_{k=0}^{n} f_k \to f$ dans L^∞.
On remarque que, pour tout $x \in A^c$,

$$|\sum_{k=0}^{n} f_k(x) - f(x)| = |\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_\infty \to 0, \text{ quand } n \to \infty.$$

Comme $m(A) = 0$, on en déduit

$$\|\sum_{k=0}^{n} f_k - f\|_\infty \leq \sup_{x\in A^c} |\sum_{k=0}^{n} f_k(x) - f(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_\infty \to 0, \text{ quand } n \to \infty.$$

et donc $\sum_{k=0}^{n} f_k \to f$ dans L^∞, quand $n \to \infty$. ■

La proposition 6.7 permet de montrer que L^∞ est complet (théorème 6.6). Elle permet aussi de montrer ce que nous avons appelé précédemment (dans le cas $p < \infty$) "réciproque partielle du théorème de convergence dominée". Il est important par contre de savoir que le théorème de convergence dominée peut être faux dans L^∞, comme le montre la remarque suivante.

Remarque 6.4 (Sur la convergence dominée. . .) Attention : le résultat de convergence dominée qu'on a démontré pour les suites de fonctions de L^p, $1 \leq p < +\infty$, est <u>faux</u> pour les suites de fonctions de L^∞. Il suffit pour s'en convaincre de considérer l'exemple suivant : $(E, T, m) = ([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$, $f_n = 1_{[0,\frac{1}{n}]}$, pour $n \in \mathbb{N}$. On a bien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^\infty_\mathbb{R}([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$ et

$$\begin{aligned}
&f_n \to 0 \text{ p.p. , quand } n \to \infty,\\
&f_n \leq 1_{[0,1]} \text{ p.p., pour tout } n \in \mathbb{N},\ \ 1_{[0,1]} \in L^\infty_\mathbb{R}([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda).
\end{aligned}$$

Pourtant, $\|f_n\|_\infty = 1 \not\to 0$, quand $n \to \infty$.

Par contre, le résultat de réciproque partielle de la convergence dominée est vrai, comme conséquence du résultat que toute suite absolument convergente dans $\mathcal{L}^\infty$ est convergente (dans L^∞, proposition 6.7). La démonstration est similaire à la démonstration du théorème 4.7.

Remarque 6.5 Soit (E, T, m) un espace mesuré. On peut aussi définir $\mathcal{L}^\infty_\mathbb{C}(E, T, m)$ et $L^\infty_{\mathbb{R}^N}(E, T, m)$ (avec $N > 1$) comme on a fait pour $p = 1$ (voir la section 4.10). On obtient aussi des espaces de Banach (complexe ou réels).

6.1.3 Quelques propriétés des espaces $L^p, 1 \leq p \leq +\infty$

Proposition 6.8 (Comparaison entre les espaces L^p)
Soit (E, T, m) un espace mesuré fini, i.e. $m(E) < +\infty$. Soient $p, q \in \mathbb{R}_+$ tels que $1 \leq p < q \leq +\infty$. Alors, $L^q_{\mathbb{R}}(E, T, m) \subset L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. De plus, il existe C, ne dépendant que de p, q et $m(E)$, t.q. $\|f\|_p \leq C\|f\|_q$ pour tout $f \in L^q_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ (ceci montre que l'injection de L^q dans L^p est continue).

DÉMONSTRATION :
On distingue les cas $q < \infty$ et $q = \infty$.

Cas $q < \infty$. On suppose ici que $1 \leq p < q < +\infty$.

Soit $f \in L^q$. On choisit un représentant de f, encore noté f. Pour tout $x \in E$, on a $|f(x)|^p \leq |f(x)|^q$ si $|f(x)| \geq 1$. On a donc $|f(x)|^p \leq |f(x)|^q + 1$, pour tout $x \in E$. Ce qui donne, par monotonie de l'intégrale,

$$\int |f|^p dm \leq m(E) + \int |f|^q dm < \infty, \tag{6.11}$$

et donc que $f \in L^p$. On a ainsi montré $L^q \subset L^p$.

On veut montrer maintenant qu'il existe C, ne dépendant que de p, q et $m(E)$, t.q., pour tout $f \in L^q_{\mathbb{R}}(E, T, m)$,

$$\|f\|_p \leq C\|f\|_q. \tag{6.12}$$

En utilisant (6.11), on remarque que (6.12) est vraie avec $C = (m(E)+1)^{\frac{1}{p}}$, si $\|f\|_q = 1$. Ceci est suffisant pour dire que (6.12) est vraie avec $C = (m(E) + 1)^{\frac{1}{p}}$ pour tout $f \in L^q$. En effet, (6.12) est trivialement vraie pour $\|f\|_q = 0$ (car on a alors $f = 0$ p.p. et $\|f\|_p = 0$). Puis, si $\|f\|_q > 0$, on pose $f_1 = \frac{f}{\|f\|_q}$ de sorte que $\|f_1\|_q = 1$. On peut donc utiliser (6.12) avec f_1. On obtient $\frac{1}{\|f\|_q}\|f\|_p = \|f_1\|_p \leq C$, ce qui donne bien $\|f\|_p \leq C\|f\|_q$.

On a donc montré (6.12) avec un C ne dépendant que p et $m(E)$ (et non de q). Toutefois, le meilleur C possible dans (6.12) dépend de p, q et $m(E)$. Ce meilleur C peut être obtenu en utilisant l'inégalité de Hölder généralisée (proposition 6.9). Elle donne $\|f\|_p \leq C\|f\|_q$ avec $C = (m(E))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$ (voir la remarque 6.6).

Cas $q = \infty$. On suppose ici que $1 \leq p < q = +\infty$.

Soit $f \in L^\infty$. On choisit un représentant de f, encore noté f. On a $|f| \leq \|f\|_\infty$ p.p.. On en déduit $|f|^p \leq \|f\|^p_\infty$ p.p. et donc

$$\int |f|^p dm \leq m(E)\|f\|^p_\infty < \infty.$$

Ce qui donne $f \in L^p$ et $\|f\|_p \leq C\|f\|_\infty$ avec $C = (m(E))^{\frac{1}{p}}$.

On voit ici qu'on a obtenu le meilleur C possible (si $m(E) > 0$) car $\|f\|_p = (m(E))^{\frac{1}{p}} = (m(E))^{\frac{1}{p}}\|f\|_\infty$ si $f = 1_E$. ■

Proposition 6.9 (Inégalité de Hölder généralisée)
Soient (E, T, m) un espace mesuré et $p, q, r \in [1, +\infty]$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{r}$. Soient $f \in L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et $g \in L^q_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Alors, $fg \in L^r_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p\|g\|_q. \tag{6.13}$$

Démonstration : Comme d'habitude, on confond un élément de L^s ($s = p$, q ou r) avec un de ses représentants. On travaille donc avec $\mathcal{L}^s$ au lieu de L^s. On suppose donc que $f \in \mathcal{L}^p$ et $g \in \mathcal{L}^q$ et on veut montrer que $fg \in \mathcal{L}^r$ et que (6.13) est vraie. On remarque d'abord que $fg \in \mathcal{M}$.

Ici encore, on distingue plusieurs cas.

Cas 1. On suppose ici $1 \leq p, q, r < \infty$.

On pose $f_1 = |f|^r$ et $g_1 = |g|^r$ de sorte que $f_1 \in \mathcal{L}^{\frac{p}{r}}$ et $g_1 \in \mathcal{L}^{\frac{q}{r}}$. Comme $\frac{r}{p} + \frac{r}{q} = 1$, on peut appliquer le lemme 6.2 (donnant l'inégalité de Hölder) avec f_1, g_1 (au lieu de f, g) et $\frac{p}{r}$, $\frac{q}{r}$ (au lieu de p, q). Il donne que $f_1 g_1 \in \mathcal{L}^1$ et $\|f_1 g_1\|_1 \leq \|f_1\|_{\frac{p}{r}} \|g_1\|_{\frac{q}{r}}$. On en déduit que $fg \in L^r$ et

$$\int |fg|^r dm \leq \left(\int |f|^p dm\right)^{\frac{r}{p}} \left(\int |g|^q dm\right)^{\frac{r}{q}},$$

ce qui donne (6.13)

Cas 2. On suppose ici $q = \infty$ et $r = p < \infty$.

Comme $|g| \leq \|g\|_\infty$ p.p., On a $|fg|^p \leq |f|^p \|g\|_\infty^p$ p.p. et donc

$$\int |fg|^p dm \leq \|g\|_\infty^p \int |f|^p dm,$$

ce qui donne $fg \in \mathcal{L}^p$ et (6.13).

Cas 3. On suppose ici $p = q = r = \infty$.

Comme $|f| \leq \|f\|_\infty$ p.p. et $|g| \leq \|g\|_\infty$ p.p., on a $|fg| \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$ p.p., ce qui donne $fg \in \mathcal{L}^\infty$ et (6.13). ∎

Remarque 6.6

1. Par une récurrence facile sur $n \in \mathbb{N}^\star$, on peut encore généraliser la proposition 6.9. Soient (E, T, m) un espace mesuré, $p_1, \ldots, p_n \in [1, \infty]$ et $r \in [1, \infty]$ t.q. $\frac{1}{r} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i}$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, soit $f_i \in L^{p_i}_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Alors, $\prod_{i=1}^n f_i \in L^r_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et $\| \prod_{i=1}^n f_i\|_r \leq \prod_{i=1}^n \|f_i\|_{p_i}$.
2. L'inégalité (6.13) permet aussi de trouver le meilleur C possible dans la proposition 6.8 (Inégalité (6.12)) :

   Soit (E, T, m) un espace mesuré fini. Soient $p, q \in \mathbb{R}_+$ tels que $1 \leq p < q < +\infty$. Soit $f \in L^q_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Comme $1 \leq p < q < \infty$, il existe $r \in [1, \infty[$ t.q. $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$. On peut alors utiliser la proposition 6.9 avec $f \in L^q$ et $1_E \in L^r$. Elle donne que $f \in L^p$ et $\|f\|_p \leq C\|f\|_q$ avec $C = (m(E))^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}$. Cette valeur de C est la meilleure possible (si $m(E) > 0$) dans (6.12) car si $f = 1_E$ on obtient $\|f\|_p \leq (m(E))^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f\|_q$.

Remarque 6.7 Les espaces $L^p, p \in]0, 1[$ (que l'on peut définir comme dans le cas $1 \leq p < \infty$) sont des espaces vectoriels, mais l'application $f \mapsto \left(\int |f|^p dm\right)^{\frac{1}{p}}$ n'est pas une norme sur L^p si $p \in]0, 1[$ (sauf cas particulier).

Remarque 6.8 Soient (E,T,m) un espace mesuré, et $f \in \mathcal{M}(E,T)$. L'ensemble $J = \{p \in [1,+\infty], f \in \mathcal{L}^p\}$ est un intervalle de $[1,+\infty]$. L'application définie de $\overline{J}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ par $p \mapsto \|f\|_p$ est continue, voir à ce propos l'exercice 4.32, et dans le cas particulier des fonctions continues à support compact, l'exercice 6.10. En particulier, lorsque $p \in J$, $p \to +\infty$ on a $\|f\|_p \to \|f\|_\infty$. On en déduit le résultat suivant : si il existe $p_0 < +\infty$ tel que $f \in \mathcal{L}^p$ pour tout p tel que $p_0 \leq p < +\infty$, et si il existe C t.q. $\|f\|_p \leq C$, pour tout $p \in [p_0, +\infty[$, alors $f \in \mathcal{L}^\infty$ et $\|f\|_\infty \leq C$.

6.2 Analyse hilbertienne et espace L^2

6.2.1 Définitions et propriétés élémentaires

Définition 6.5 (Produit scalaire)

1. *Soit H un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On appelle "produit scalaire sur H" une application de $H \times H \to \mathbb{R}$, notée $(\cdot/\cdot)$ (ou $(\cdot/\cdot)_H$) t.q.*

   ps1 : $(u/u) > 0$ *pour tout* $u \in H \setminus \{0\}$,

   ps2 : $(u/v) = (v/u)$ *pour tout* $u, v \in H$,

   ps3 : $u \mapsto (u/v)$ *est une application linéaire de* H *dans* $\mathbb{R}$, *pour tout* $v \in H$.

2. *Soit H un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. On appelle "produit scalaire sur H" une application de $H \times H \to \mathbb{C}$, notée $(\cdot/\cdot)$ (ou $(\cdot/\cdot)_H$) t.q.*

   ps1 : $(u/u) \in \mathbb{R}_+^\star$ *pour tout* $u \in H \setminus \{0\}$,

   ps2 : $(u/v) = \overline{(v/u)}$ *pour tout* $u, v \in H$,

   ps3 : $u \mapsto (u/v)$ *est une application linéaire de* H *dans* $\mathbb{R}$, *pour tout* $v \in H$.

Remarque 6.9 (Exemple fondamental) Soit (E,T,m) un espace mesuré.

1. On prend $H = L^2_{\mathbb{R}}(E,T,m)$. H est un e.v. sur $\mathbb{R}$. On rappelle que $fg \in L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ si $f,g \in L^2_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ (lemme 6.2 pour $p = q = 2$). L'application $(f,g) \mapsto \int fg dm$ est un produit scalaire sur H.

2. On prend $H = L^2_{\mathbb{C}}(E,T,m)$ (voir le théorème 6.4 ci après). H est un e.v. sur $\mathbb{C}$. En utilisant le lemme 6.2, on montre facilement que $f\overline{g} \in L^1_{\mathbb{C}}(E,T,m)$ si $f,g \in L^2_{\mathbb{C}}(E,T,m)$ (lemme 6.2 pour $p = q = 2$). L'application $(f,g) \mapsto \int f\overline{g} dm$ est un produit scalaire sur H.

Proposition 6.10 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

1. *Soit H un e.v. sur $\mathbb{R}$ muni d'un produit scalaire, noté $(\cdot/\cdot)$. Alors :*

$$(u/v)^2 \leq (u/u)(v/v), \text{ pour tout } u, v \in H. \tag{6.14}$$

   De plus, $(u/v)^2 = (u/u)(v/v)$ si et seulement si u et v sont colinéaires.

2. *Soit H un e.v. sur $\mathbb{C}$ muni d'un produit scalaire, noté $(\cdot/\cdot)$. Alors :*

$$|(u/v)|^2 \leq (u/u)(v/v), \text{ pour tout } u, v \in H. \tag{6.15}$$

   De plus, $|(u/v)|^2 = (u/u)(v/v)$ si et seulement si u et v sont colinéaires.

DÉMONSTRATION :

1. On suppose ici $K = \mathbb{R}$. Soit $u, v \in H$. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ on pose $p(\alpha) = (u + \alpha v/u + \alpha v) = (v/v)\alpha^2 + 2\alpha(u/v) + (u/u)$. Comme $p(\alpha) \geq 0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on doit avoir $\Delta = (u/v)^2 - (v/v)(u/u) \leq 0$, ce qui donne (6.14).

   On s'intéresse maintenant au cas d'égalité dans (6.14).

   Si $u = 0$ ou $v = 0$, on a égalité dans (6.14) (et u et v sont colinéaires).

   Si $u \neq 0$ et $v \neq 0$, on a égalité dans (6.14) (c'est-à-dire $\Delta = 0$) si et seulement si il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ t.q. $p(\alpha) = 0$. Donc, on a égalité dans (6.14) si et seulement si il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ t.q. $u = -\alpha v$. On en déduit bien que $(u/v)^2 = (u/u)(v/v)$ si et seulement si u et v sont colinéaires.

2. On suppose maintenant $K = \mathbb{C}$. Soit $u, v \in H$. Pour $\alpha \in \mathbb{C}$ on pose $p(\alpha) = (u + \alpha v/u + \alpha v) = \alpha\overline{\alpha}(v/v) + \alpha(v/u) + \overline{\alpha}(u/v) + (u/u)$. On choisit de prendre $\alpha = \beta(u/v)$ avec $\beta \in \mathbb{R}$. On pose donc, pour tout $\beta \in \mathbb{R}$, $\varphi(\beta) = p(\beta(u/v)) = \beta^2|(u/v)|^2(v/v) + 2\beta|(u/v)|^2 + (u/u)$. Ici encore, comme $\varphi(\beta) \in \mathbb{R}_+$ pour tout $\beta \in \mathbb{R}$, on doit avoir $\Delta = |(u/v)|^4 - |(u/v)|^2(v/v)(u/u) \leq 0$, ce qui donne (6.15).

   On s'intéresse maintenant au cas d'égalité dans (6.15)

   Si $u = 0$ ou $v = 0$, on a égalité dans (6.15) (et u et v sont colinéaires).

   On suppose maintenant $u \neq 0$ et $v \neq 0$. On remarque d'abord que, si $(u/v) = 0$, on n'a pas égalité dans (6.15) et u et v ne sont pas colinéaires. On suppose donc maintenant que $(u/v) \neq 0$. On a alors égalité dans (6.15) si et seulement si $\Delta = 0$ et donc si et seulement si il existe $\beta \in \mathbb{R}$ t.q. $\varphi(\beta) = 0$. Donc, on a égalité dans (6.15) si et seulement si il existe $\beta \in \mathbb{R}$ t.q. $u = -\beta(u/v)v$, et donc si et seulement si il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ t.q. $u = -\alpha v$.

   Finalement, on en déduit bien que $|(u/v)|^2 = (u/u)(v/v)$ si et seulement si u et v sont colinéaires.

■

Proposition 6.11 (Norme induite par un produit scalaire)
Soit H un e.v. sur K, avec $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$, muni d'un produit scalaire, noté $(\cdot/\cdot)$. Pour tout $u \in H$, on pose $\|u\|_H = \sqrt{(u/u)}$. Alors, $\|\cdot\|_H$ est une norme sur H. On l'appelle norme induite par le produit scalaire $(\cdot/\cdot)$.

DÉMONSTRATION :

- Il est clair que $\|u\|_H \in \mathbb{R}_+$ pour tout $u \in H$ et que
$$\|u\|_H = 0 \Leftrightarrow (u/u) = 0 \Leftrightarrow u = 0.$$
- On a bien $\|\alpha u\|_H = |\alpha|\|u\|_H$ pour tout $\alpha \in K$ et tout $u \in H$.
- Enfin, pour montrer l'inégalité triangulaire, soit $u, v \in H$. On a $\|u + v\|_H^2 = (u + v/u + v) = (u/u) + (v/v) + (u/v) + (v/u)$. Comme, par (6.14) ou (6.15), $|(u/v)| \leq \sqrt{(u/u)}\sqrt{(v/v)} = \|u\|_H\|v\|_H$, on en déduit $\|u + v\|_H^2 \leq (\|u\|_H + \|v\|_H)^2$. Donc,
$$\|u + v\|_H \leq \|u\|_H + \|v\|_H.$$

$\blacksquare$

Définition 6.6 (espace de Hilbert)

1. *Un espace préhilbertien (réel ou complexe) est un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$) normé dont la norme est induite par un produit scalaire.*

2. *Un espace de Hilbert (réel ou complexe) est un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$) normé complet dont la norme est induite par un produit scalaire. C'est donc un espace de Banach dont la norme est induite par un produit scalaire.*

Théorème 6.4 (L'espace L^2) *Soit (E, T, m) un espace mesuré.*

1. *L'espace $L^2_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, muni de la norme $\|\cdot\|_2$, est un espace de Hilbert (réel) et le produit scalaire associé à la norme est défini par :*
$$(f/g)_2 = \int fg \ \ dm. \tag{6.16}$$

2. (a) *Soit f une application mesurable de E dans $\mathbb{C}$ (donc $|f| \in \mathcal{M}_+$). On dit que $f \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(E, T, m)$ si $|f|^2 \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Pour $f \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(E, T, m)$, on pose $\|f\|_2 = \sqrt{\||f|^2\|_1}$. Alors, $\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(E, T, m)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et $f \mapsto \|f\|_2$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(E, T, m)$.*

   (b) *On appelle $L^2_{\mathbb{C}}(E, T, m)$ l'espace $\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(E, T, m)$ quotienté par la relation d'équivalence "= p.p.". Pour $F \in L^2_{\mathbb{C}}(E, T, m)$, on pose $\|F\|_2 = \|f\|_2$ avec $f \in F$ (noter que $\|f\|_2$ ne dépend pas du choix de f dans F). Alors $L^2_{\mathbb{C}}(E, T, m)$, muni de $\|\cdot\|_2$, est un espace de Banach (complexe).*

   (c) *L'espace $L^2_{\mathbb{C}}(E, T, m)$, muni de la norme $\|\cdot\|_2$, est un espace de Hilbert (complexe) et le produit scalaire associé à la norme est défini par :*
$$(f/g)_2 = \int f\overline{g} \ \ dm. \tag{6.17}$$

Démonstration :

1. On sait déjà que $L^2_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, muni de la norme $\|\cdot\|_2$ est un espace de Banach (réel). Le lemme 6.2 pour $p = q = 2$ donne que $fg \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ si $f, g \in L^2_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. On peut donc poser $(f/g)_2 = \int fgdm$. Il est facile de voir que $(\cdot/\cdot)_2$ est un produit scalaire et que la norme induite par ce produit scalaire est bien la norme $\|\cdot\|_2$.

2. Soit $f : E \to \mathbb{C}$ mesurable. On rappelle (section 4.10) que les fonctions $\Re(f)$ et $\Im(f)$ sont mesurables de E dans $\mathbb{R}$ (i.e. appartiennent â $\mathcal{M}$). On a donc bien $|f| \in \mathcal{M}_+$ et $|f|^2 = (\Re(f))^2 + (\Im(f))^2 \in \mathcal{M}_+$.

   Comme $|f|^2 = (\Re(f))^2 + (\Im(f))^2 \in \mathcal{M}_+$, on remarque aussi que $f \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(E, T, m)$ si et seulement si $\Re(f)$, $\Im(f) \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Comme $\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ est un e.v. (sur $\mathbb{R}$), il est aors immédiat de voir que $\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(E, T, m)$ est un e.v. sur $\mathbb{C}$.

   On quotiente maintenant $\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(E, T, m)$ par la relation "= p.p.". On obtient ainsi l'espace $L^2_{\mathbb{C}}(E, T, m)$ que l'on munit facilement d'une structure vectorielle sur $\mathbb{C}$. L'espace $L^2_{\mathbb{C}}(E, T, m)$ est donc un e.v. sur $\mathbb{C}$.

En utilisant le lemme 6.2, on montre facilement que $f\overline{g} \in L^1_{\mathbb{C}}(E,T,m)$ si $f,g \in L^2_{\mathbb{C}}(E,T,m)$ (on utilise le fait que les parties réelles et imaginaires de f et g sont dans $L^2_{\mathbb{R}}(E,T,m)$). On peut donc poser $(f/g)_2 = \int f\overline{g}dm$. Il est aussi facile de voir que $(\cdot/\cdot)_2$ est alors un produit scalaire sur $L^2_{\mathbb{C}}(E,T,m)$ et que la norme induite par ce produit scalaire est justement $\|\cdot\|_2$ (car $|f|^2 = f\overline{f}$ et donc $\int f\overline{f}dm = \|f\|_2^2$). On a, en particulier, ainsi montré que $f \mapsto \|f\|_2$ est bien une norme sur $L^2_{\mathbb{R}}(E,T,m)$. On en déduit aussi que $f \mapsto \|f\|_2$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(E,T,m)$.

On a montré que l'espace $L^2_{\mathbb{C}}(E,T,m)$, muni de la norme $\|\cdot\|_2$, est un espace préhilbertien. il reste à montrer qu'il est complet (pour la norme $\|\cdot\|_2$). Ceci est facile. En effet, $\|f\|_2^2 = \|\Re(f)\|_2^2 + \|\Im(f)\|_2^2$ pour tout $f \in L^2_{\mathbb{C}}(E,T,m)$. Donc, une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2_{\mathbb{C}}(E,T,m)$ est de Cauchy si et seulement si les suites $(\Re(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\Im(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont de Cauchy dans $L^2_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ et cette même suite converge dans $L^2_{\mathbb{C}}(E,T,m)$ si et seulement si les suites $(\Re(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\Im(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent dans $L^2_{\mathbb{R}}(E,T,m)$. Le fait que $L^2_{\mathbb{C}}(E,T,m)$ soit complet découle alors du fait que $L^2_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ est complet.

■

Remarquons que dans le cas $p = 2$, l'inégalité de Hölder est en fait l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Proposition 6.12 (Continuité du produit scalaire)
Soit H est un Banach réel ou complexe. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ et $u,v \in H$ t.q. $u_n \to u$ et $v_n \to v$ dans H, quand $n \to \infty$. Alors, $(u_n/v_n) \to (u/v)$ quand $n \to \infty$.

Démonstration : Il suffit de remarquer que, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz (inégalités (6.14) et (6.15)), on a :

$$\begin{aligned}&|(u_n/v_n) - (u/v)| \le |(u_n/v_n) - (u_n/v)| + |(u_n/v) - (u/v)|\\&\le \|u_n\|\|v_n - v\| + \|u_n - u\|\|v\|.\end{aligned}$$

On conclut en utilisant le fait que $u_n \to u$, $v_n \to v$ et en remarquant que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée car convergente. ■

Définition 6.7 Soit H est un Banach réel ou complexe. On note H' (ou $\mathcal{L}(H,K)$) l'ensemble des applications linéaires continues de H dans K (avec $K = \mathbb{R}$ pour un Banach réel et $K = \mathbb{C}$ pour un Banach complexe). Si $T \in H'$, on pose

$$\|T\|_{H'} = \sup_{u \in H\setminus\{0\}} \frac{|T(u)|}{\|u\|_H}.$$

On rappelle que $\|\cdot\|_{H'}$ est bien une norme sur H' et que H', muni de cette norme, est aussi un espace de Banach (sur K).

Enfin, si $T \in H'$ et $u \in H$, on a $|T(u)| \le \|T\|_{H'}\|u\|_H$.

Remarque 6.10 Soit H un espace de Hilbert (réel ou complexe). Pour $v \in H$, on pose $\varphi_v(u) = (u/v)$ pour tout $u \in H$. Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz ((6.14) ou (6.15)), on voit que $\varphi_v \in H'$ et $\|\varphi_v\|_{H'} \le \|v\|_H$. Il est facile alors de voir que $\|\varphi_v\|_{H'} = \|v\|_H$. Ceci montre que $v \mapsto \varphi_v$ est une application injective de H dans H'. le théorème de représentation de Riesz (théorème 6.8), fondamental, montrera que cette application est surjective.

Proposition 6.13
Soit H un espace de Hilbert (réel ou complexe). Alors, pour tout $u,v \in H$ On a

$$\|u+v\|_H^2 + \|u-v\|_H^2 = 2\|u\|_H^2 + 2\|v\|_H^2. \tag{6.18}$$

Cette identité s'appelle " identité du parallélogramme".

Démonstration : Il suffit d'écrire $\|u+v\|_H^2 + \|u-v\|_H^2 = (u+v/u+v) + (u-v/u-v)$ et de développer les produits scalaires. ∎

Remarque 6.11

1. On peut se demander si deux produits scalaires (sur un même espace vectoriel) peuvent induire la même norme. La réponse est " non". En effet, le produit scalaire est entièrement déterminé par la norme qu'il induit. Par exemple, dans le cas d'un e.v. réel, si le produit scalaire $(\cdot/\cdot)$ induit la norme $\|\cdot\|$, on a, pour tout u, v, $(u/v) = \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2)$.
2. On se donne maintenant un e.v.n. noté H. Comment savoir si la norme est induite ou non par un produit scalaire ? On peut montrer que la norme est induite par un produit scalaire si et seulement si l'identité du parallélogramme (6.18) est vraie pour tout $u, v \in H$. Ceci est surtout utile pour montrer qu'une norme n'est pas induite par un produit scalaire (on cherche $u, v \in H$ ne vérifiant pas (6.18)).

Définition 6.8 (Orthogonal) *Soit H un espace de Hilbert (réel ou complexe).*

1. *Soit $u, v \in H$. On dit que u et v sont orthogonaux (et on note $u \perp v$) si $(u/v) = 0$.*
2. *Soit $A \subset H$. On appelle "orthogonal de A" l'ensemble $A^\perp = \{u \in H;\ (u/v) = 0$ pour tout $v \in A\}$.*

Proposition 6.14 *Soient H un espace de Hilbert (réel ou complexe) et $A \subset H$. Alors :*

1. *$A^\perp$ est un s.e.v. fermé de H,*
2. *$A^\perp = \overline{A}^\perp$,*
3. *$A \subset (A^\perp)^\perp$ (que l'on note aussi $A^{\perp\perp}$).*

Démonstration :

1. Soit $u_1, u_2 \in A^\perp$ et $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ ($K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$ selon que H est un hilbert réel ou complexe). Pour tout $v \in A$, on a $(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2/v) = \alpha_1(u_1/v) + \alpha_2(u_2/v) = 0$. Donc, $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \in A^\perp$. Ce qui montre que $A^\perp$ est un s.e.v. de H.

   Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A^\perp$ t.q. $u_n \to u$ dans H, quand $n \to \infty$. L'application $w \mapsto (w/v)$ est continue de H dans K (voir la remarque (6.10)) pour tout $v \in H$. Soit $v \in A$, de $(u_n/v) = 0$ on déduit donc que $(u/v) = 0$. Ce qui montre que $u \in A^\perp$ et donc que $A^\perp$ est fermé.

2.
   - Comme $A \subset \overline{A}$, on a $\overline{A}^\perp \subset A^\perp$.
   - Soit maintenant $u \in A^\perp$. On veut montrer que $u \in \overline{A}^\perp$.

     Soit $v \in \overline{A}$, il existe $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ t.q. $v_n \to v$ dans H quand $n \to \infty$. Comme $(u/v_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit, par continuité de $w \mapsto (u/w)$, que $(u/v) = 0$. Donc $u \in \overline{A}^\perp$. ce qui donne $A^\perp \subset \overline{A}^\perp$.

   Finalement, on a bien montré $A^\perp = \overline{A}^\perp$.

3. Soit $v \in A$. On a $(u/v) = 0$ pour tout $u \in A^\perp$, donc $(v/u) = 0$ pour tout $u \in A^\perp$, ce qui donne $v \in (A^\perp)^\perp$

■

Remarque 6.12 dans le dernier item de la proposition précédente, on peut se demander si $A = A^{\perp\perp}$. On montrera, dans la section suivante que ceci est vrai si A est s.e.v. fermé (ce qui est aussi une condition nécessaire).

On termine cette section avec le théorème de Pythagore.

Théorème 6.5 (Pythagore)
Soient H un espace de Hilbert (réel ou complexe) et $u_1, \ldots, u_n \in H$ t.q. $(u_i/u_j) = 0$ si $i \neq j$. Alors :

$$\|\sum_{i=1}^{n} u_i\|_H^2 = \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|_H^2. \tag{6.19}$$

Démonstration :
La démonstration de ce résultat est immédiate, par récurrence sur n :

L'égalité (6.19) est vraie pour $n = 1$ (et tout $u_1 \in H$).

Soit $n \in N$. On suppose que (6.19) est vraie (pour tout $u_1, \ldots, u_n \in H$). Soit $u_1, \ldots, u_{n+1} \in H$. On pose $y = \sum_{i=1}^{n} u_i$, de sorte que

$$\|\sum_{i=1}^{n+1} u_i\|_H^2 = \|y + u_{n+1}\|_H^2 = (y + u_{n+1}/y + u_{n+1}) = (y/y) + (y/u_{n+1}) + (u_{n+1}/y) + (u_{n+1}/u_{n+1}).$$

Comme $(y/u_{n+1}) = 0 = (u_{n+1}/y)$, on en déduit, avec l'hypothèse de récurrence, que $\|\sum_{i=1}^{n+1} u_i\|_H^2 = \sum_{i=1}^{n+1} \|u_i\|_H^2$. ■

6.2.2 Projection sur un convexe fermé non vide

Remarque 6.13 Soit E un ensemble muni d'une distance, notée d (E est alors un espace métrique). Soit $A \subset E$. On pose $d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)$. Il n'existe pas toujours de $x_0 \in A$ t.q. $d(x, x_0) = d(x, A)$ et, si un tel x_0 existe, il peut être non unique. Par exemple, dans le cas où A est compact (pour la topologie induite par d), x_0 existe mais peut être non unique.

Dans le cas où il existe un et un seul $x_0 \in A$ t.q. $d(x, x_0) = d(x, A)$, x_0 est appelé "projection de x sur A".

L'objectif de cette section est de montrer l'existence et l'unicité de x_0 dans le cas où A est une partie convexe fermée non vide d'un espace de Hilbert (et d la distance induite par la norme de l'espace de Hilbert).

Définition 6.9 (Partie convexe) *Soit E un e.v. sur K, avec $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$. Soit $C \subset E$. On dit que C est convexe si :*

$$u, v \in C,\ t \in [0, 1] \Rightarrow tu + (1 - t)v \in C.$$

Théorème 6.6 (Projection sur un convexe fermé non vide)
Soient H un espace de Hilbert (réel ou complexe) et $C \subset H$ une partie convexe fermée non vide. Soit $x \in H$. Alors, il existe un et un seul $x_0 \in C$ t.q. $d(x, x_0) = d(x, C) = \inf_{y \in C} d(x, y)$ (avec $d(x, y) = \|x - y\|_H$). On note $x_0 = P_C(x)$. P_C est donc une application de H dans H (dont l'image est égale à C). On écrit souvent $P_C x$ au lieu de $P_C(x)$.

Démonstration :
Existence de x_0.
On pose $d = d(x, C) = \inf_{y \in C} d(x, y)$. Comme $C \neq \emptyset$, il existe une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C$ t.q. $d(x, y_n) \to d$ quand $n \to \infty$. On va montrer que $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy en utilisant l'identité du parallélogramme (6.18) (ce qui utilise la structure hilbertienne de H) et la convexité de C.
L'identité du parallélogramme donne

$$\|y_n - y_m\|_H^2 = \|(y_n - x) - (y_m - x)\|_H^2 = -\|(y_n - x) + (y_m - x)\|_H^2 + 2\|y_n - x\|_H^2 + 2\|y_m - x\|_H^2,$$

et donc

$$\|y_n - y_m\|_H^2 = -4\|\frac{y_n + y_m}{2} - x\|_H^2 + 2\|y_n - x\|_H^2 + 2\|y_m - x\|_H^2. \tag{6.20}$$

Comme C est convexe, on a $\frac{y_n + y_m}{2} \in C$ et donc $d \leq \|\frac{y_n+y_m}{2} - x\|_H$. On déduit alors de (6.20) :

$$\|y_n - y_m\|_H^2 \leq -4d^2 + 2\|y_n - x\|_H^2 + 2\|y_m - x\|_H^2. \tag{6.21}$$

Comme $d(y_n, x) = \|y_n - x\|_H \to d$ quand $n \to \infty$, on déduit de (6.21) que la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy.
Comme H est complet, il existe donc $x_0 \in H$ t.q. $y_n \to x_0$ quand $n \to \infty$. Comme C est fermée, on a $x_0 \in C$. Enfin, comme $\|x - y_n\|_H \to d$ quand $n \to \infty$, on a, par continuité (dans H) de $z \mapsto \|z\|_H$, $d(x, x_0) = \|x - x_0\|_H = d = d(x, C)$. Ce qui termine la partie "existence".

Unicité de x_0. Soit $y_1, y_2 \in C$ t.q. $d(x, y_1) = d(x, y_2) = d(x, C) = d$. On utilise encore l'identité du parallélogramme. Elle donne (voir (6.20)) :

$$\|y_1 - y_2\|_H^2 = -4\|\frac{y_1 + y_2}{2} - x\|_H^2 + 2\|y_1 - x\|_H^2 + 2\|y_2 - x\|_H^2 = -4\|\frac{y_1 + y_2}{2} - x\|_H^2 + 4d^2.$$

Comme $\frac{y_1+y_2}{2} \in C$ On a donc $d \leq \|\frac{y_1+y_2}{2} - x\|_H$ et donc $\|y_1 - y_2\|_H^2 \leq -4d^2 + 4d^2 = 0$. Donc $y_1 = y_2$.
Ce qui termine la partie "unicité".

■

Remarque 6.14 Le théorème précédent est, en général, faux si on remplace "Hilbert" par "Banach". Un exemple de non existence est donné à l'exercice 6.24 (et il est facile de trouver des exemples de non unicité).

On donne maintenant deux caractérisations importantes de la projection. La première est valable pour tout convexe fermé non vide alors que la deuxième ne concerne que les s.e.v. fermés.

Proposition 6.15 (Première caractérisation de la projection)
Soient H un espace de Hilbert (réel ou complexe) et $C \subset H$ une partie convexe fermée non vide. Soient $x \in H$ et $x_0 \in C$.

1. *On suppose que H est un Hilbert réel. Alors :*

$$x_0 = P_C x \Leftrightarrow (x - x_0/x_0 - y) \geq 0, \text{ pour tout } y \in C. \tag{6.22}$$

2. *On suppose que H est un Hilbert complexe. Alors :*

$$x_0 = P_C x \Leftrightarrow \Re(x - x_0/x_0 - y) \geq 0, \text{ pour tout } y \in C. \tag{6.23}$$

DÉMONSTRATION :

Cas d'un Hilbert réel

- **Sens ($\Rightarrow$)**

  On veut montrer que $(x - x_0/x_0 - y) \geq 0, \text{ pour tout } y \in C$. Comme $x_0 = P_C x$, on a $\|x - x_0\|_H^2 \leq \|x - z\|_H^2$ pour tout $z \in C$. Soit $y \in C$. On prend $z = ty + (1-t)x_0$ avec $t \in]0,1]$. Comme C est convexe, on a $z \in C$ et donc

$$\begin{aligned} \|x - x_0\|_H^2 \leq \|x - z\|_H^2 &= (x - x_0 - t(y - x_0)/x - x_0 - t(y - x_0)) \\ &= \|x - x_0\|_H^2 + t^2\|y - x_0\|_H^2 - 2t(x - x_0/y - x_0). \end{aligned}$$

  On en déduit

$$2t(x - x_0/y - x_0) - t^2\|y - x_0\|_H^2 \leq 0.$$

  On divise cette inégalité par t (on rappelle que $t > 0$) pour obtenir

$$2(x - x_0/y - x_0) - t\|y - x_0\|_H^2 \leq 0,$$

  ce qui donne, en faisant tendre t vers 0 :

$$(x - x_0/x_0 - y) \geq 0.$$

- **Sens ($\Leftarrow$)**

  On veut montrer que $x_0 = P_C x$, c'est-à-dire $\|x - x_0\|_H^2 \leq \|x - y\|_H^2$ pour tout $y \in C$.

  Soit $y \in C$, on a $\|x-y\|_H^2 = \|x-x_0+x_0-y\|_H^2 = \|x-x_0\|_H^2+\|x_0-y\|_H^2+2(x-x_0/x_0-y) \geq \|x-x_0\|_H^2$ car $\|x_0 - y\|_H^2 \geq 0$ et $2(x - x_0/x_0 - y) \geq 0$.

Cas d'un Hilbert complexe

La démonstration est très voisine.

- **Sens ($\Rightarrow$)**

  On veut montrer que $\Re(x - x_0/x_0 - y) \geq 0, \text{ pour tout } y \in C$.

  En reprenant les mêmes notations que dans le cas "Hilbert réel" et en suivant la même démarche, on obtient :

$$\begin{aligned} \|x - x_0\|_H^2 \leq \|x - z\|_H^2 &= (x - x_0 - t(y - x_0)/x - x_0 - t(y - x_0)) \\ &= \|x - x_0\|_H^2 + t^2\|y - x_0\|_H^2 - 2t\Re(x - x_0/y - x_0). \end{aligned}$$

  On en déduit

$$2t\Re(x - x_0/y - x_0) - t^2\|y - x_0\|_H^2 \leq 0.$$

  On divise cette inégalité par t (on rappelle que $t > 0$) pour obtenir

$$2\Re(x - x_0/y - x_0) - t\|y - x_0\|_H^2 \leq 0,$$

  ce qui donne, en faisant tendre t vers 0 :

$$\Re(x - x_0/x_0 - y) \geq 0.$$

- **Sens ($\Leftarrow$)**

  On veut montrer que $x_0 = P_C x$, c'est-à-dire $\|x - x_0\|_H^2 \le \|x - y\|_H^2$ pour tout $y \in C$.

  Soit $y \in C$, on a $\|x-y\|_H^2 = \|x-x_0+x_0-y\|_H^2 = \|x-x_0\|_H^2+\|x_0-y\|_H^2+2\Re(x-x_0/x_0-y) \ge \|x-x_0\|_H^2$ car $\|x_0 - y\|_H^2 \ge 0$ et $2\Re(x - x_0/x_0 - y) \ge 0$.

■

Remarque 6.15 On prend comme espace de Hilbert réel $H = L^2_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ (avec $E \ne \emptyset$) et on prend $C = \{f \in H\colon\ f \ge 0 \text{ p.p.}\}$. On peut montrer que C est une partie convexe fermée non vide et que $P_C f = f^+$ pour tout $f \in H$. Ceci est fait dans l'exercice 6.23.

Un s.e.v. fermé est, en particulier, un convexe fermé non vide. On peut donc définir la projection sur un s.e.v. fermé. On donne maintenant une caractérisation de la projection dans ce cas particulier.

Proposition 6.16 (Deuxième caractérisation de la projection)
Soient H un espace de Hilbert (réel ou complexe) et F un s.e.v. fermé de H. Soient $x \in H$ et $x_0 \in F$. Alors :

$$x_0 = P_F x \Leftrightarrow (x - x_0) \in F^\perp. \tag{6.24}$$

DÉMONSTRATION :

Cas d'un Hilbert réel

- **Sens ($\Leftarrow$)**

  On veut montrer que $x_0 = P_F x$. On utilise la première caractérisation. Soit $y \in F$. Comme $(x - x_0) \in F^\perp$, on a $(x - x_0/x_0 - y) = 0 \ge 0$ (car $x_0 - y \in F$). Donc, la proposition 6.15 donne $x_0 = P_F x$.

- **Sens ($\Rightarrow$)**

  On veut montrer que $(x - x_0) \in F^\perp$. La première caractérisation (proposition 6.15) donne $(x - x_0/x_0 - y) \ge 0$ pour tout $y \in F$. Soit $z \in F$. On choisit $y = x_0 + z \in F$ (car F est un s.e.v.) pour obtenir $(x - x_0/z) \le 0$ et $y = x_0 - z \in F$ pour obtenir $(x - x_0/z) \ge 0$. On en déduit $(x - x_0/z) = 0$. Ce qui donne que $(x - x_0) \in F^\perp$.

Cas d'un Hilbert complexe

La démonstration est très voisine.

- **Sens ($\Leftarrow$)**

  On veut montrer que $x_0 = P_F x$. Soit $y \in F$. Comme $(x - x_0) \in F^\perp$, on a $(x - x_0/x_0 - y) = 0$ (car $x_0 - y \in F$). On a donc $\Re(x - x_0/x_0 - y) = 0$. Donc, la proposition 6.15 donne $x_0 = P_F x$.

- **Sens ($\Rightarrow$)**

  On veut montrer que $(x - x_0) \in F^\perp$. La première caractérisation (proposition 6.15) donne $\Re(x - x_0/x_0 - y) \ge 0$ pour tout $y \in F$. Soit $z \in F$. On choisit $y = x_0 - \alpha z \in F$ (car F est un s.e.v.) avec $\alpha = (x - x_0/z)$ pour obtenir $\Re(x - x_0/\alpha z) \le 0$. Mais $(x - x_0/\alpha z) = \overline{\alpha}(x - x_0/z) = |(x - x_0/z)|^2$. Donc, $0 \ge \Re(x - x_0/\alpha z) = |(x - x_0/z)|^2$. On en déduit $(x - x_0/z) = 0$. Ce qui donne que $(x - x_0) \in F^\perp$.

■

Définition 6.10 (Projection orthogonale et projecteurs algébriques)

1. *Soient H un espace de Hilbert (réel ou complexe) et $F \subset H$ un s.e.v. fermé de H. L'opérateur P_F s'appelle "projecteur orthogonal sur F". Si $u \in H$, $P_F u$ s'appelle la projection orthogonale de u sur F.*

2. *(Rappel algébrique) Soit E un e.v. sur K ($K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$). Soient F, G deux s.e.v. de E t.q. $E = F \oplus G$. Pour $x \in E$, il existe donc un et un seul couple $(y, z) \in F \times G$ t.q. $x = y + z$. On pose $y = Px$ et donc $z = (I - P)x$ (où I est l'application identité). P et $I - P$ sont les projecteurs associés à la décomposition $E = F \oplus G$. Ce sont des applications linéaires de E dans E. L'image de P est égale à F et L'image de $I - P$ est égale à G. Dans le prochain théorème, on va comparer la projection orthogonale et des projecteurs algébriques particuliers.*

Théorème 6.7
Soient H un espace de Hilbert (réel ou complexe) et F un s.e.v. fermé de H. Alors :

1. $H = F \oplus F^{\perp}$,

2. *P_F (projecteur orthogonal sur F) est égal au projecteur algébrique sur F associé à la décomposition $H = F \oplus F^{\perp}$.*

3. $F = F^{\perp\perp}$.

Démonstration : On rappelle que l'on a déjà vu que $F^{\perp}$ est un s.e.v. fermé.

1. Soit $u \in H$. On a $u = (u - P_F u) + P_F u$. La 2eme caractérisation (proposition 6.16) donne $(u - P_F u) \in F^{\perp}$. Comme $P_F u \in F$, on en déduit que $H = F + F^{\perp}$.

   Soit maintenant $u \in F \cap F^{\perp}$. On doit donc avoir $(u/u) = 0$, ce qui donne $u = 0$ et donc $F \cap F^{\perp} = \{0\}$.

   On a donc $H = F \oplus F^{\perp}$.

2. Soit $u \in H$. Comme $u = P_F u + (u - P_F u)$, avec $P_F u \in F$ et $(u - P_F u) \in F^{\perp}$, on voit que P_F est égal au projecteur algébrique sur F associé à la décomposition $H = F \oplus F^{\perp}$. (Noter aussi que $(I - P_F)$ est égal au projecteur algébrique sur $F^{\perp}$ associé à la décomposition $H = F \oplus F^{\perp}$.)

3. Il reste à montrer que $F = F^{\perp\perp}$.

   - On a déjà vu que $F \subset F^{\perp\perp}$.
   - Soit $u \in F^{\perp\perp}$. On a $u = (u - P_F u) + P_F u$. La 2eme caractérisation (proposition 6.16) donne $(u - P_F u) \in F^{\perp}$ et on a aussi $(u - P_F u) \in F^{\perp\perp}$ car $u \in F^{\perp\perp}$ et $P_F u \in F \subset F^{\perp\perp}$. On a donc $(u - P_F u) \in F^{\perp} \cap F^{\perp\perp} = \{0\}$. Donc $u = P_F u \in F$. On a donc montré que $F^{\perp\perp} \subset F$.

   Finalement, on a bien montré que $F = F^{\perp\perp}$.

■

Le théorème 6.7 a un corollaire très utile :

Corollaire 6.1
Soient H un espace de Hilbert (réel ou complexe) et F un s.e.v. de H. Alors :

$$\overline{F} = H \Leftrightarrow F^{\perp} = \{0\}.$$

Démonstration : $\overline{F}$ est un s.e.v. fermé de H. Le théorème 6.7 donne donc $H = \overline{F} \oplus (\overline{F})^{\perp}$. On a déjà vu que $(\overline{F})^{\perp} = F^{\perp}$, on a donc

$$H = \overline{F} \oplus F^{\perp},$$

d'où l'on déduit

$$\overline{F} = H \Leftrightarrow F^{\perp} = \{0\}.$$

■

6.2.3 Théorème de Représentation de Riesz

Remarque 6.16 On rappelle ici la définition 6.7 et la remarque 6.10. Soit H est un Banach réel ou complexe. On note H' (ou $\mathcal{L}(H,K)$) l'ensemble des applications linéaires continues de H dans K (avec $K = \mathbb{R}$ pour un Banach réel et $K = \mathbb{C}$ pour un Banach complexe). On rappelle que $H^{\star}$ est l'ensemble des applications linéaires de H dans K. On a donc $H' \subset H^{\star}$. Si H est de dimension finie, on a $H' = H^{\star}$, mais si H est de dimension infinie, on peut montrer que $H' \neq H^{\star}$.

1. Si $T \in H^{\star}$, on rappelle que T est continue si seulement si il existe $k \in \mathbb{R}$ t.q. $|T(u)| \leq k\|u\|_H$, pour tout $u \in H$.
2. Si $T \in H'$, on pose $\|T\|_{H'} = \sup_{u \in H \setminus \{0\}} \frac{|T(u)|}{\|u\|_H}$. On rappelle que $\|\cdot\|_{H'}$ est bien une norme sur H' et que H', muni de cette norme, est aussi un espace de Banach (sur K). Noter que ceci est aussi vrai si H est un e.v.n. non complet. Noter aussi que, si $T \in H'$ et $u \in H$, on a $|T(u)| \leq \|T\|_{H'}\|u\|_H$.
3. On suppose maintenant que H un espace de Hilbert (réel ou complexe). Pour $v \in H$, on pose $\varphi_v(u) = (u/v)$ pour tout $u \in H$. Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz ((6.14) ou (6.15)), on a $|\varphi_v(u)| \leq \|u\|_H\|v\|_H$. On a donc $\varphi_v \in H'$ et $\|\varphi_v\|_{H'} \leq \|v\|_H$. En remarquant que $\varphi_v(v) = \|v\|_H^2$, on montre alors que $\|\varphi_v\|_{H'} = \|v\|_H$.

   On considère maintenant l'application $\varphi : H \to H'$ définie par $\varphi(v) = \varphi_v$ pour tout $v \in H$.

   - Si $K = \mathbb{R}$, φ est une application linéaire de H dans H' car, pour tout $v, w \in H$ et tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

     $$\varphi_{\alpha v + \beta w}(u) = (u/\alpha v + \beta w) = \alpha(u/v) + \beta(u/w) = \alpha\varphi_v(u) + \beta\varphi_w(u), \text{pour tout } u \in H,$$

     ce qui donne $\varphi_{\alpha v + \beta w} = \alpha\varphi_v + \beta\varphi_w$. L'application φ est donc une isométrie (linéaire) de H sur $\mathrm{Im}(\varphi) \subset H'$. (En particulier φ est donc injective.)
   - Si $K = \mathbb{C}$, φ est une application "anti-linéaire" de H dans H' car, pour tout $v, w \in H$ et tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

     $$\varphi_{\alpha v + \beta w}(u) = (u/\alpha v + \beta w) = \alpha(u/v) + \beta(u/w) = \overline{\alpha}\varphi_v(u) + \overline{\beta}\varphi_w(u), \text{pour tout } u \in H,$$

     ce qui donne $\varphi_{\alpha v + \beta w} = \overline{\alpha}\varphi_v + \overline{\beta}\varphi_w$. L'application φ est donc une isométrie (anti-linéaire) de H sur $\mathrm{Im}(\varphi) \subset H'$. (En particulier φ est donc, ici aussi, injective.)

L'objectif du théorème de représentation de Riesz (théorème 6.8) est de montrer que l'application φ est surjective, c'est-à-dire que $\text{Im}(\varphi) = H'$.

Théorème 6.8
Soit H un espace de Hilbert (réel ou complexe). Soit $T \in H'$. Alors, il existe un et un seul $v \in H$ t.q.

$$T(u) = (u/v), \text{ pour tout } u \in H. \tag{6.25}$$

L'application φ définie dans la remarque 6.16 est donc surjective (le résultat ci dessus donne $T = \varphi_v$).

DÉMONSTRATION :
Existence de v
On pose $F = \text{Ker}(T)$. Comme T est linéaire et continue, F est un s.e.v. fermé de H. Le théorème 6.7 donne donc $H = F \oplus F^\perp$. On distingue deux cas :

- **Cas 1.** On suppose ici que $T = 0$. On a alors $F = E$ et il suffit de prendre $v = 0$ pour avoir (6.25).
- **Cas 2.** On suppose maintenant que $T \neq 0$. On a donc $F \neq H$ et donc $F^\perp \neq \{0\}$ (car $H = F \oplus F^\perp$). Il existe donc $v_0 \in F^\perp$, $v_0 \neq 0$. Comme $v_0 \notin F$, on a $T(v_0) \neq 0$.

  Pour $u \in H$, on a alors
  $$u = u - \frac{T(u)}{T(v_0)}v_0 + \frac{T(u)}{T(v_0)}v_0. \tag{6.26}$$
  On remarque que $u - \frac{T(u)}{T(v_0)}v_0 \in F$ car
  $$T(u - \frac{T(u)}{T(v_0)}v_0) = T(u) - \frac{T(u)}{T(v_0)}T(v_0) = 0.$$
  Donc, comme $v_0 \in F^\perp$, $(u - \frac{T(u)}{T(v_0)}v_0/v_0) = 0$ et (6.26) donne
  $$(u/v_0) = (\frac{T(u)}{T(v_0)}v_0/v_0) = \frac{T(u)}{T(v_0)}(v_0/v_0),$$
  d'où l'on déduit
  $$T(u) = \frac{T(v_0)}{(v_0/v_0)}(u/v_0).$$
  On pose $v = \frac{T(v_0)}{(v_0/v_0)}v_0$ si $K = \mathbb{R}$ et $v = \frac{\overline{T(v_0)}}{(v_0/v_0)}v_0$ si $K = \mathbb{C}$. On a bien
  $$T(u) = (u/v), \text{ pour tout } u \in H,$$
  c'est-à-dire $T = \varphi_v$ (avec les notations de la remarque 6.16).

Dans les 2 cas on a bien trouvé $v \in H$ vérifiant (6.25).

Unicité de v
Soit $v_1, v_2 \in H$ t.q. $T = \varphi_{v_1} = \varphi_{v_2}$ (avec les notations de la remarque 6.16). Comme φ est linéaire (si $K = \mathbb{R}$) ou anti-linéaire (si $K = \mathbb{C}$), on en déduit $\varphi_{v_1 - v_2} = \varphi_{v_1} - \varphi_{v_2} = 0$. Comme φ est une isométrie, on a donc $v_1 = v_2$, ce qui donne la partie unicité du théorème. ∎

Remarque 6.17 Soit H un espace de Hilbert (réel ou complexe). Soit $T \in H^\star \setminus H'$. T est donc une application linéaire de H dans $K(= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, non continue. On pose $F = \mathrm{Ker}(T)$. La démonstration du théorème 6.8 permet alors de montrer que $F^\perp = \{0\}$ et donc $\overline{F} = H$ (dans un Hilbert H, le noyau d'une forme linéaire non continue est donc toujours dense dans H). En effet, on raisonne par l'absurde :

si $F^\perp \neq \{0\}$, il existe $v_0 \in F^\perp$, $v_0 \neq 0$. le raisonnement fait pour démontrer le théorème 6.8 donne alors $T(u) = (u/v)$ pour tout $u \in H$, avec $v = \frac{T(v_0)}{(v_0/v_0)} v_0$ si $K = \mathbb{R}$ et $v = \frac{\overline{T(v_0)}}{(v_0/v_0)} v_0$ si $K = \mathbb{C}$. On en déduit que T est continu, contrairement à l'hypothèse de départ.

On a donc $F^\perp = \{0\}$ et donc $\overline{F}^\perp = F^\perp = \{0\}$. On en déduit, comme $H = \overline{F} \oplus \overline{F}^\perp$ (par le théorème 6.7, car $\overline{F}$ est toujours un s.e.v. fermé), que $H = \overline{F}$.

Remarque 6.18 (Structure hilbertienne de H') Soit H un espace de Hilbert (réel ou complexe). On sait déjà que H' (avec la norme habituelle, voir la remarque 6.16) est un espace de Banach. Le théorème 6.8 permet aussi de montrer que H' est un espace de Hilbert. En effet, en prenant les notations de la remarque 6.16, l'application φ est un isométrie bijective, linéaire ou anti-linéaire de H dans H'. Cela suffit pour montrer que l'identité du parallélogramme (identité (6.18)) est vraie sur H' et donc que H' est une espace de Hilbert (voir la remarque (6.11)). Mais on peut même construire le produit scalaire sur H' (induisant la norme usuelle de H') :

Soient $T_1, T_2 \in H'$. Par le théorème 6.8, il existe $v_1, v_2 \in H$ t.q. $T_1 = \varphi_{v_1}$ et $T_2 = \varphi_{v_2}$. On pose $(T_1/T_2)_{H'} = (v_2/v_1)_H$ (où $(\cdot/\cdot)_H$ désigne ici le produit scalaire dans H). Il est facile de voir que $(\cdot/\cdot)_{H'}$ est un produit scalaire sur H'. Il induit bien la norme usuelle de H' car $(T_1/T_1)_{H'} = (v_1/v_1)_H = \|v_1\|_H^2 = \|\varphi_{v_1}\|_{H'}^2 = \|T_1\|_{H'}^2$ car φ est une isométrie.

6.2.4 Bases hilbertiennes

Soient E un e.v. sur K, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $B = \{e_i, \, i \in I\} \subset E$ une famille d'éléments de E (l'ensemble I est quelconque, il peut être fini, dénombrable ou non dénombrable). On rappelle que $B = \{e_i, \, i \in I\} \subset E$ est une base (algébrique) de E si B vérifie les deux propriétés suivantes :

1. B est libre, c'est-à-dire :

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i \in J} \alpha_i e_i = 0, \text{ avec} \\ J \subset I, \, \mathrm{card}(J) < \infty, \\ \alpha_i \in K \text{ pour tout } i \in J, \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_i = 0 \text{ pour tout } i \in J,$$

2. B est génératrice, c'est-à-dire que pour tout $u \in E$, il existe $J \subset I$, $\mathrm{card}(J) < \infty$, et il existe $(\alpha_i)_{i \in J} \subset K$ t.q. $u = \sum_{i \in J} \alpha_i e_i$.

En notant $\mathrm{vect}\{e_i, \, i \in I\}$ l'espace vectoriel engendré par la famille $\{e_i, \, i \in I\}$, le fait que B soit génératrice s'écrit donc : $E = \mathrm{vect}\{e_i, \, i \in I\}$.

On rappelle aussi que tout espace vectoriel admet des bases (algébriques). Cette propriété se démontre à partir de l'axiome du choix.

Dans le cas d'un espace de Hilbert, on va définir maintenant une nouvelle notion de base : la notion de base hilbertienne.

Définition 6.11 *Soient H un espace de Hilbert sur K, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $B = \{e_i, \, i \in I\} \subset H$ une famille d'éléments de H (l'ensemble I est quelconque). La famille B est une base hilbertienne de H si elle vérifie les deux propriétés suivantes :*

1. $(e_i/e_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j, \\ 0 \text{ si } i \neq j, \end{cases}$ *pour tout* $i, j \in I$.

2. $\overline{\mathrm{vect}\{e_i,\, i \in I\}} = H$. *On rappelle que* $\mathrm{vect}\{e_i,\, i \in I\} = \{\sum_{i\in J} \alpha_i e_i,\ J \subset I,\ \mathrm{card}(J) < \infty,\ (\alpha_i)_{i\in J} \subset K\}$.

Remarque 6.19 Soit H un espace de Hilbert sur K, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Si H est de dimension finie, il existe des bases hilbertiennes (qui sont alors aussi des bases algébriques). Le cardinal d'une base hilbertienne est alors égal à la dimension de H puisque, par définition, la dimension de H est égal au cardinal d'une base algébrique (ce cardinal ne dépendant pas de la base choisie). La démonstration de l'existence de bases hilbertiennes suit celle de la proposition 6.17 (la récurrence dans la construction de la famille des e_n s'arrête pour $n = \dim(H) - 1$, voir la preuve de la proposition 6.17).

2. Si H est de dimension infinie et que H est séparable (voir la définition 6.12), il existe des bases hilbertiennes dénombrables (voir la proposition 6.17).

3. Si H est de dimension infinie et que H est non séparable, il existe toujours des bases hilbertiennes (ceci se démontre avec l'axiome du choix), mais elles ne sont plus dénombrables.

Définition 6.12 *Soit E un e.v.n. sur K, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On dit que E est séparable si il existe $A \subset E$ t.q. $\overline{A} = E$ et A au plus dénombrable.*

Proposition 6.17 *Soit H un espace de Hilbert sur K, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, de dimension infinie. On suppose que H est séparable . Alors, il existe $B = \{e_i,\, i \in \mathbb{N}\} \subset H$, base hilbertienne de H.*

Démonstration : Comme H est séparable, il existe une famille $\{f_n,\, n \in \mathbb{N}\} \subset H$ dense dans H, c'est-à-dire t.q. $\overline{\{f_n,\, n \in \mathbb{N}\}} = H$.
On va construire, par une récurrence sur n, une famille $\{e_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ t.q. :

1. $(e_n/e_m) = \delta_{n,m}$ pour tout $n, m \in \mathbb{N}$,

2. $\{f_0, \ldots, f_n\} \subset \mathrm{vect}\{e_0, \ldots, e_n\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On aura alors trouvé une base hilbertienne car on aura $f_i \in \mathrm{vect}\{e_n,\, n \in \mathbb{N}\}$, pour tout $i \in \mathbb{N}$, et donc $H = \overline{\{f_n,\, n \in \mathbb{N}\}} \subset \overline{\{e_n,\, n \in \mathbb{N}\}} \subset H$, d'où $H = \overline{\{e_n,\, n \in \mathbb{N}\}}$. Avec la propriété $(e_n/e_m) = \delta_{n,m}$ pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, ceci donne bien que $\{e_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ est une base hilbertienne de H.

On construit maintenant la famille $\{e_n,\, n \in \mathbb{N}\}$.

Construction de e_0
Soit $\varphi(0) = \min\{i \in \mathbb{N};\ f_i \neq 0\}$ (les f_i ne sont pas tous nuls car $H \neq \{0\}$). On prend $e_0 = \frac{f_{\varphi(0)}}{\|f_{\varphi(0)}\|}$, de sorte que $(e_0/e_0) = 1$ et $f_0 \in \mathrm{vect}\{e_0\}$ (car $f_0 = \|f_0\| e_0$, même si $\varphi(0) \neq 0$).

Construction de e_{n+1}
Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose construits $e_0, \ldots, e_n$ t.q.

- $(e_p/e_m) = \delta_{p,m}$ pour tout $p, m \in \{0, \ldots, n\}$,
- $\{f_0, \ldots, f_p\} \subset \mathrm{vect}\{e_0, \ldots, e_p\}$ pour tout $p \in \{0, \ldots, n\}$.

(Ce qui est vérifié pour $n = 0$ grâce à la construction de e_0.)

On construit maintenant e_{n+1} t.q. les deux assertions précédentes soient encore vraies avec $n+1$ au lieu de n.

Un sous espace vectoriel de dimension finie est toujours fermé, donc $\overline{\text{vect}\{e_0,\ldots,e_n\}} = \text{vect}\{e_0,\ldots,e_n\}$. Si $f_i \in \text{vect}\{e_0,\ldots,e_n\}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a alors $\{f_i,\ i \in \mathbb{N}\} \subset \text{vect}\{e_0,\ldots,e_n\}$ et donc $H = \overline{\text{vect}\{f_i,\ i \in \mathbb{N}\}} \subset \overline{\text{vect}\{e_0,\ldots,e_n\}} = \text{vect}\{e_0,\ldots,e_n\}$. Ce qui prouve que H est de dimension finie (et $\dim(H) = n+1$). Comme H est de dimension infinie, il existe donc $i \in \mathbb{N}$ t.q. $f_i \notin \text{vect}\{e_0,\ldots,e_n\}$ (dans le cas où H est dimension finie, la construction de la famille des e_n s'arrête pour $n = \dim(H)-1$ et on obtient une base hilbertienne avec $\{e_0,\ldots,e_n\}$). On pose alors $\varphi(n+1) = \min\{i \in \mathbb{N};\ f_i \notin \text{vect}\{e_0,\ldots,e_n\}\}$. On a donc, en particulier, $\varphi(n+1) \geq n+1$. En prenant $\tilde{e}_{n+1} = f_{\varphi(n+1)} - \sum_{i=0}^{n} \alpha_i e_i$ avec $\alpha_i = (f_{\varphi(n+1)}/e_i)$ pour tout $i \in \{0,\ldots,n\}$, on remarque que $\tilde{e}_{n+1} \neq 0$ (car $f_{\varphi(n+1)} \notin \text{vect}\{e_0,\ldots,e_n\}$) et que $(\tilde{e}_{n+1}/e_i) = 0$ pour tout $i \in \{0,\ldots,n\}$. Il suffit alors de prendre $e_{n+1} = \frac{\tilde{e}_{n+1}}{\|\tilde{e}_{n+1}\|}$ pour avoir $(e_p/e_m) = \delta_{p,m}$ pour tout $p,m \in \{0,\ldots,n+1\}$. Enfin, il est clair que $f_{n+1} \in \text{vect}\{e_0,\ldots,e_{n+1}\}$ car on a $f_{n+1} = \|\tilde{e}_{n+1}\| e_{n+1} + \sum_{i=0}^{n} \alpha_i e_i \in \text{vect}\{e_0,\ldots,e_{n+1}\}$ si $\varphi(n+1) = n+1$ et $f_{n+1} \in \text{vect}\{e_0,\ldots,e_n\}$ si $\varphi(n+1) > n+1$.

On a donc bien trouvé e_{n+1} t.q.

- $(e_p/e_m) = \delta_{p,m}$ pour tout $p,m \in \{0,\ldots,n+1\}$,
- $\{f_0,\ldots,f_p\} \subset \text{vect}\{e_0,\ldots,e_p\}$ pour tout $p \in \{0,\ldots,n+1\}$.

Ce qui conclut la construction de la famille $\{e_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ vérifiant les deux assertions demandées. Comme cela a déjà été dit, la famille $\{e_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est alors une base hilbertienne de H. ■

La proposition 6.17 montre donc que tout espace de Hilbert séparable, et de dimension infinie, admet une base hilbertienne dénombrable. On peut aussi démontrer la réciproque de ce résultat, c'est-à-dire que tout espace de Hilbert admettant une base hilbertienne dénombrable est séparable et de dimension infinie (cf. exercice 6.22). La proposition suivante s'adresse donc uniquement aux espaces de Hilbert séparables.

Proposition 6.18 *Soient H un espace de Hilbert sur K, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. et $\{e_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ une base hilbertienne de H (l'espace H est donc séparable et de dimension infinie (cf. exercice 6.22) et, dans ce cas, une telle base existe d'après la proposition 6.17). Alors :*

1. *(Identité de Bessel) $\|u\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |(u/e_n)|^2$, pour tout $u \in H$,*
2. *$u = \sum_{n\in\mathbb{N}} (u/e_n)e_n$, pour tout $u \in H$, c'est-à-dire $\sum_{i=0}^{n} (u/e_i)e_i \to u$ dans H, quand $n \to \infty$,*
3. *soient $u \in H$ et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ t.q. $u = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n e_n$ (c'est-à-dire $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i e_i \to u$ dans H quand $n \to \infty$), alors $\alpha_i = (u/e_i)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$,*
4. *(identité de Parseval) $(u/v) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (u/e_n)\overline{(v/e_n)}$, pour tout $u,v \in H$.*

Démonstration : Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $F_n = \text{vect}\{e_0,\ldots,e_n\}$. F_n est donc un s.e.v. fermé de H (on a $\dim(F_n) = n+1$ et on rappelle qu'un espace de dimension finie est toujours complet, F_n est donc fermé dans H).

On remarque que $F_n \subset F_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, que $\cup_{n\in\mathbb{N}} F_n = \text{vect}\{e_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ et donc que $\overline{\cup_{n\in\mathbb{N}} F_n} = H$ (car $\{e_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ est une base hilbertienne de H).

Soit $u \in H$. La suite $(d(u,F_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (car $F_n \subset F_{n+1}$), on a donc $d(u,F_n) \downarrow l$ quand $n \to \infty$, avec $l \geq 0$. On va montrer que $l = 0$. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $v \in \cup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ t.q.

$d(v,u) \le \varepsilon$ (car $\overline{\cup_{n\in\mathbb{N}} F_n} = H$). Il existe donc $n \in \mathbb{N}$ t.q. $v \in F_n$. On a alors $d(u, F_n) \le \varepsilon$, ce qui prouve que $l \le \varepsilon$. Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on a bien montré que $l = 0$.

On utilise maintenant le théorème d'existence et d'unicité de la projection sur un convexe fermé non vide (théorème 6.6). Il donne l'existence (et l'unicité) de $u_n = P_{F_n} u \in F_n$ t.q. $d(u_n, u) = d(u, F_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a alors $u = (u - u_n) + u_n$ et la deuxième caractérisation de la projection (proposition 6.16) donne que $(u - u_n) \in F_n^\perp$. Le théorème de Pythagore (théorème 6.5) donne enfin que $\|u\|^2 = \|u_n\|^2 + \|u - u_n\|^2$. Comme $\|u - u_n\| = d(u, u_n) = d(u, F_n) \downarrow 0$ quand $n \to \infty$, on en déduit que

$$\|u_n\|^2 \to 0, \text{ quand } n \to \infty. \tag{6.27}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $u_n \in F_n = \text{vect}\{e_0, \ldots, e_n\}$, on a $u_n = \sum_{i=0}^n \alpha_i e_i$ avec $\alpha_i = (u_n/e_i)$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$ (car $(e_i/e_j) = \delta_{i,j}$ pour tout i, j). Puis, comme $(u - u_n) \in F_n^\perp$, on a $(u - u_n/e_i) = 0$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, d'où l'on déduit que $\alpha_i = (u/e_i)$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$. On a donc montré que $u_n = \sum_{i=0}^n (u/e_i)e_i$. Ce qui, avec le théorème de Pythagore, donne $\|u_n\|^2 = \sum_{i=0}^n |(u/e_i)|^2$. On obtient donc, avec (6.27) le premier item de la proposition, c'est-à-dire l'identité de Bessel.

On montre maintenant le deuxième item de la proposition. En reprenant les notations précédentes, on a, pour $u \in H$, $u = (u - u_n) + u_n$ et $(u - u_n) \to 0$ dans H quand $n \to \infty$ (car $\|u - u_n\| = d(u, F_n)$). On a donc $u_n \to u$ dans H quand $n \to \infty$. Ceci donne bien le deuxième item de la proposition car on a vu que $u_n = \sum_{i=0}^n (u/e_i)e_i$.

Pour montrer le troisième item de la proposition, on suppose que $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset K$ est t.q. $\sum_{i=0}^n \alpha_i e_i \to u$ dans H quand $n \to \infty$. Soit $j \in \mathbb{N}$. On remarque que $(\sum_{i=0}^n \alpha_i e_i/e_j) = \sum_{i=0}^n \alpha_i (e_i/e_j) = \alpha_j$ pour $n \ge j$. En utilisant la continuité du produit scalaire par rapport à son premier argument (ce qui est une conséquence simple de l'inégalité de Cauchy-Schwarz), on en déduit (faisant $n \to \infty$) que $(u/e_j) = \alpha_j$. Ce qui prouve bien le troisième item de la proposition.

Enfin, pour montrer l'identité de Parseval, on utilise la continuité du produit scalaire par rapport à ses deux arguments (ce qui est aussi une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz), c'est-à-dire le fait que

$$\left.\begin{array}{l} u_n \to u \text{ dans } H, \text{ quand } n \to \infty, \\ v_n \to v \text{ dans } H, \text{ quand } n \to \infty, \end{array}\right\} \Rightarrow (u_n/v_n) \to (u/v) \text{ quand } n \to \infty. \tag{6.28}$$

Pour $u, v \in H$, on utilise (6.28) avec $u_n = \sum_{i=0}^n (u/e_i)e_i$ et $v_n = \sum_{i=0}^n (v/e_i)e_i$. On a bien $u_n \to u$ et $v_n \to v$ (d'après le deuxième item) et on conclut en remarquant que $(u_n/v_n) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n (u/e_i)\overline{(v/e_j)}(e_i/e_j) = \sum_{i=0}^n (u/e_i)\overline{(v/e_i)}$. ■

Remarque 6.20 Soit H un espace de Hilbert sur K, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, séparable et de dimension infinie.

1. Soit $\{e_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ une base hilbertienne de H et soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijective. On pose $\tilde{e}_n = e_{\varphi(n)}$. Comme $\{e_n,\, n \in \mathbb{N}\} = \{\tilde{e}_n,\, n \in \mathbb{N}\}$, la famille $\{\tilde{e}_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ est donc aussi une base hilbertienne de H. On peut donc appliquer la proposition 6.18 avec la famille $\{e_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ ou avec la famille $\{\tilde{e}_n,\, n \in \mathbb{N}\}$. Le deuxième item de la proposition 6.18 donne alors, pour tout $u \in H$,
$$u = \sum_{n\in\mathbb{N}} (u/e_n)e_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} (u/e_{\varphi(n)})e_{\varphi(n)}.$$

Ceci montre que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}(u/e_n)e_n$ est "commutativement convergente" (c'est-à-dire qu'elle est convergente, dans H, quel que soit l'ordre dans lequel on prend les termes de la série et la somme de la série ne dépend pas de l'ordre dans lequel les termes ont été pris). Noter pourtant que cette série peut ne pas être absolument convergente. On peut remarquer, pour donner un exemple, que la suite $(\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i+1}e_i)_{n\in\mathbb{N}}\subset H$ est de Cauchy, donc converge, dans H, quand $n\to\infty$, vers un certain u. Pour cet élément u de H, on a $(u/e_i)=\frac{1}{i+1}$ pour tout $i\in\mathbb{N}$. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}}(u/e_n)e_n$ est donc commutativement convergente mais n'est pas absolument convergente car $\sum_{n\in\mathbb{N}}\|(u/e_n)e_n\|=\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n+1}=\infty$ (voir à ce propos le corrigé 107). L'exercice 6.32 complète cet exemple en construisant une isométrie bijective naturelle entre H et l^2.

Par contre, on rappelle que, dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, une série est commutativement convergente si et seulement si elle est absolument convergente (voir l'exercice 2.29). On peut d'ailleurs remarquer que la série donnée à l'item 4 de la proposition 6.18 est commutativement convergente (pour la même raison que pour la série de l'item 2, donnée ci dessus) et est aussi absolument convergente. En effet, pour $u,v\in H$, on a $|(u/e_i)\overline{(v/e_i)}|\le|(u/e_i)|^2+|\overline{(v/e_i)}|^2$ pour tout $i\in\mathbb{N}$, ce qui montre bien (grâce à l'identité de Bessel) que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}(u/e_n)\overline{(v/e_n)}$ est absolument convergente (dans K).

2. Soit I un ensemble dénombrable (un exemple intéressant pour la suite est $I=\mathbb{Z}$) et $\{e_i,\, i\in I\}\subset H$.

   Soit $\varphi\ :\ \mathbb{N}\to I$ bijective. On pose, pour $n\in\mathbb{N}$, $\tilde{e}_n=e_{\varphi(n)}$. On a alors $\{e_i,\, i\in I\}=\{\tilde{e}_n,\, n\in\mathbb{N}\}$. La famille $\{e_i,\, i\in I\}$ est donc une base hilbertienne si et seulement si la famille $\{\tilde{e}_n,\, n\in\mathbb{N}\}$ est une base hilbertienne.

   Si la famille $\{e_i,\, i\in I\}$ est une base hilbertienne, on peut donc appliquer la proposition 6.18 avec la famille $\{\tilde{e}_n,\, n\in\mathbb{N}\}$. On obtient, par exemple, que pour tout $u\in H$:

$$u=\sum_{n\in\mathbb{N}}(u/e_{\varphi(n)})e_{\varphi(n)}.$$

   La somme de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}(u/e_{\varphi(n)})e_{\varphi(n)}$ ne dépend donc pas du choix de la bijection φ entre $\mathbb{N}$ et I et il est alors légitime de la noter simplement $\sum_{i\in I}(u/e_i)e_i$. Ceci est détaillé dans la définition 6.13 et permet d'énoncer la proposition 6.19.

Définition 6.13 *Soient H un espace de Hilbert (réel ou complexe) et I un ensemble dénombrable. Soit $(u_i)_{i\in I}\subset H$. On dit que la série $\sum_{i\in I}u_i$ est commutativement convergente si il existe $u\in H$ t.q., pour tout $\varphi\ :\ \mathbb{N}\to I$ bijective, on ait :*

$$\sum_{p=0}^{n}u_{\varphi(p)}\to u,\ \textit{quand}\ n\to\infty.$$

On note alors $u=\sum_{i\in I}u_i$.

Proposition 6.19 *Soit H un espace de Hilbert sur K, $K=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient I dénombrable et $\{e_i,\, i\in I\}$ une base hilbertienne de H (l'espace H est donc séparable et de dimension infinie). Alors :*

1. *(Identité de Bessel) Pour tout $u\in H$, la série $\sum_{i\in I}|(u/e_i)|^2$ est commutativement convergente et $\|u\|^2=\sum_{i\in I}|(u/e_i)|^2$,*
2. *Pour tout $u\in H$, la série $\sum_{i\in I}(u/e_i)e_i$ est commutativement convergente et $u=\sum_{i\in I}(u/e_i)e_i$,*

3. *soient $u \in H$ et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ t.q. la série $\sum_{i\in I} \alpha_i e_i$ est commutativement convergente et $u = \sum_{i\in I} \alpha_i e_i$, alors $\alpha_i = (u/e_i)$ pour tout $i \in I$,*

4. *(identité de Parseval) Pour tout $u, v \in H$, la série $\sum_{i\in I}(u/e_i)\overline{(v/e_i)}$ est commutativement convergente et $(u/v) = \sum_{i\in I}(u/e_i)\overline{(v/e_i)}$*

Démonstration : La démonstration est immédiate à partir de la proposition 6.18 et de la définition des séries commutativement convergentes (définition 6.13). Il suffit de remarquer que $\{e_{\varphi(n)}, n \in \mathbb{N}\}$ est une base hilbertienne de H pour toute application $\varphi : \mathbb{N} \to I$ bijective (et d'appliquer la proposition 6.18), comme cela est indiqué dans la remarque 6.20 (deuxième item). ■

La proposition suivante donne une caractérisation très utile des bases hilbertiennes.

Proposition 6.20 (Caractérisation des bases hilbertiennes)
Soit H un espace de Hilbert réel ou complexe. Soit $\{e_i, i \in I\} \subset H$ t.q. $(e_i/e_j) = \delta_{i,j}$ pour tout $i, j \in I$. Alors, $\{e_i, i \in I\}$ est une base hilbertienne si et seulement si :

$$u \in H, \ (u/e_i) = 0 \, \forall i \in I \Rightarrow u = 0.$$

Démonstration : On pose $F = \mathrm{vect}\{e_i, i \in I\}$. F est s.e.v. de H.
On sait que $\{e_i, i \in I\}$ est une base hilbertienne si et seulement si $\overline{F} = H$. Or, on a déjà vu (proposition 6.1) que $\overline{F} = H \Leftrightarrow F^\perp = \{0\}$. Donc, $\{e_i, i \in I\}$ est une base hilbertienne si et seulement si

$$u \in H, \, u \in F^\perp \Rightarrow u = 0.$$

Comme $u \in F^\perp$ si et seulement si $(u/e_i) = 0$ pour tout $i \in I$, on en déduit que $\{e_i, i \in I\}$ est une base hilbertienne si et seulement si

$$u \in H, \ (u/e_i) = 0 \, \forall i \in I \Rightarrow u = 0.$$

■

On donne maintenant un exemple de base hilbertienne, cet exemple donne un résultat de convergence de la série de Fourier d'une fonction périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.
Pour cet exemple, on prend $H = L^2_{\mathbb{C}}(]0, 2\pi[, \mathcal{B}(]0, 2\pi[), \lambda)$, où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(]0, 2\pi[)$. On rappelle que H est un espace de Hilbert complexe et que le produit scalaire sur H est donné par $(f/g)_2 = \int f\overline{g}d\lambda = \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g}(x)dx$ pour $f, g \in H$.
Pour $n \in \mathbb{Z}$, on définit $e_n \in H$ par (en confondant e_n avec son représentant continu) :

$$e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(inx), \ x \in]0, 2\pi[. \tag{6.29}$$

La convergence dans H de la série de Fourier de $f \in H$ est alors donnée par la proposition suivante (noter que cette proposition ne donne pas de convergence ponctuelle de la série de Fourier, même si f est continue).

Proposition 6.21 (Séries de Fourier) *Soit $H = L^2_{\mathbb{C}}(]0, 2\pi[, \mathcal{B}(]0, 2\pi[), \lambda)$. Alors :*

1. *La famille $\{e_n, n \in \mathbb{Z}\}$, où e_n est donnée par (6.29), est une base hilbertienne de H.*

2. *Pour tout $f \in H$, la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}}(f/e_n)_2 e_n$ est commutativement convergente et*

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(f/e_n)_2 e_n.$$

En particulier, on a

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - \sum_{p=-n}^{n}(f/e_p)_2 e_p(x)|^2 dx \to 0, \text{ quand } n \to \infty.$$

Démonstration : Pour démontrer que $\{e_n,\, n \in \mathbb{Z}\}$ est une base hilbertienne, on utilise la proposition 6.20. Il suffit donc de montrer :

1. $(e_n/e_m)_2 = \delta_{n,m}$ pour tout $n, m \in \mathbb{Z}$,
2. $f \in H$, $(f/e_n)_2 = 0\ \forall n \in \mathbb{Z} \Rightarrow f = 0$.

L'assertion 1 est immédiate car $(e_n/e_m)_2 = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\exp(i(n-m)x)dx$. Ce qui donne bien 0 si $n \neq m$ et 1 si $n = m$.

Pour montrer l'assertion 2, soit $f \in H$ t.q. $(f/e_n)_2 = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On va montrer que $f = 0$ (c'est-à-dire $f = 0$ p.p.) en raisonnant en plusieurs étapes.

Etape 1. On note $P = \mathrm{vect}\{e_n,\, n \in \mathbb{Z}\}$ (P est donc l'ensemble des polynômes trigonométriques). Par antilinéarité du produit scalaire de H par rapport à son deuxième argument, on a $(f/g) = 0$ pour tout $g \in P$.

Etape 2. On note $C_p = \{g \in C([0,2\pi],\mathbb{C});\ g(0) = g(2\pi)\}$. On peut montrer que P est dense dans C_p pour la norme de la convergence uniforme (définie par $\|g\|_u = \max\{g(x),\ x \in [0,2\pi]\}$). On admet ce résultat ici (c'est une conséquence du théorème de Stone-Weierstrass). Soit $g \in C_p$, il existe donc $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in P$ t.q. $g_n \to g$ uniformément sur $[0,2\pi]$. On a donc $\|g_n - g\|_u = \|g_n - g\|_\infty \to 0$ quand $n \to \infty$. Comme $\lambda([0,2\pi]) < \infty$, on en déduit que $\|g_n - g\|_2 \to 0$ quand $n \to \infty$. (Plus précisément, on a ici $\|\cdot\|_2 \leq \sqrt{2\pi}\|\cdot\|_\infty$). Comme $(f/g_n)_2 = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (par l'étape 1), on en déduit (avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz) que $(f/g)_2 = 0$. On a donc $(f/g)_2 = 0$ pour tout $g \in C_p$.

Etape 3. Soit $g \in C([0,2\pi],\mathbb{C})$. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ on définit g_n par :

$$\begin{aligned}&g_n(x) = g(x), \text{ si } x \in [\tfrac{1}{n}, 2\pi],\\ &g_n(x) = g(2\pi) + (g(\tfrac{1}{n}) - g(2\pi))(nx), \text{ si } x \in [0, \tfrac{1}{n}[,\end{aligned}$$

de sorte que $g_n \in C_p$ (noter que g_n est affine entre 0 et $\frac{1}{n}$ et vérifie $g_n(0) = g(2\pi)$ et $g_n(\frac{1}{n}) = g(\frac{1}{n})$).

Par l'étape 2, on a $(f/g_n)_2 = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. D'autre part, le théorème de convergence dominée dans L^p donne que $g_n \to g$ dans H quand $n \to \infty$ (noter en effet que $g_n \to g$ p.p. et que $g_n \leq \|g\|_\infty \in H$, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$). On en déduit donc que $(f/g)_2 = 0$. On a donc $(f/g)_2 = 0$ pour tout $g \in C([0,2\pi],\mathbb{C})$.

Etape 4. On prend maintenant $g \in H = L^2_{\mathbb{C}}(]0,2\pi[,\mathcal{B}(]0,2\pi[),\lambda)$. On définit $\tilde{g}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ par $\tilde{g} = g$ sur $[0,2\pi]$ et $\tilde{g} = 0$ sur $\mathbb{R}\setminus[0,2\pi]$. On obtient ainsi $g \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ (On a, comme d'habitude, confondu un élément de L^2 avec l'un de ses représentants; et λ désigne maintenant la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$). On montre dans l'exercice (corrigé) 6.4 que $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est dense dans $L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$. On en déduit facilement que $C_c(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est dense dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$. Il existe donc $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c(\mathbb{R},\mathbb{C})$ t.q. $h_n \to \tilde{g}$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$, quand $n \to \infty$. On en déduit que

$$\int_0^{2\pi} |h_n(x) - g(x)|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}} |h_n(x) - \tilde{g}(x)|^2 dx \to 0, \text{ quand } n \to \infty.$$

En posant $g_n = (h_n)_{|_{[0,2\pi]}}$, on a donc $g_n \in C([0,2\pi],\mathbb{C})$ et $g_n \to g$ dans H, quand $n \to \infty$. Comme l'étape 3 donne $(f/g_n)_2 = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que $(f/g)_2 = 0$.

Pour conclure, il suffit maintenant de prendre $g = f$. On obtient $(f/f)_2 = 0$ et donc $f = 0$ p.p..

On a bien ainsi montré (grâce à la proposition 6.20) que $\{e_n,\, n \in \mathbb{Z}\}$ est une base hilbertienne de H.

On montre maintenant le deuxième item de la proposition.

Soit $f \in H$. La proposition 6.19 donne que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}}(f/e_n)_2 e_n$ est commutativement convergente et que

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(f/e_n)_2 e_n.$$

En utilisant la définition 6.13 et la bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$ donnée par $\varphi(0) = 0$, et, pour $n \geq 1$, $\varphi(2n-1) = n$, $\varphi(2n) = -n$, on a donc, en particulier, $\sum_{i=0}^{m}(f/e_{\varphi(m)})_2 e_{\varphi(m)} \to f$, dans H, quand $m \to \infty$. en prenant $m = 2n$, ceci donne exactement

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - \sum_{p=-n}^{n}(f/e_p)e_p(x)|^2 dx \to 0, \text{ quand } n \to \infty.$$

■

6.3 Dualité dans les espaces L^p, $1 \leq p \leq \infty$

6.3.1 Dualité pour $p = 2$

Soit (E, T, m) un espace mesuré. On note $H = L^2_K(E, T, m)$, avec $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soit $f \in L^2_K(E, T, m)$. On note $\varphi_f \;:\; H \to K$, l'application définie par $\varphi_f(g) = (g/f)_2$. On a déjà vu (remarque 6.10) que $\varphi_f \in H'$ (dual topologique de H). On remarque aussi que $\|\varphi_f\|_{H'} = \|f\|_H = \|f\|_2$. En effet $|\varphi_f(g)| \leq \|f\|_H\|g\|_H$ (par l'inégalité de Cauchy-Schwarz) et $|\varphi_f(f)| \leq \|f\|^2_H$. Donc :

$$\|\varphi_f\|_{H'} = \sup\{\frac{|\varphi_f(g)|}{\|g\|_H},\; g \in H \setminus \{0\}\} = \|f\|_H.$$

Le théorème de représentation de Riesz (théorème 6.8 page 151) appliqué à l'espace de Hilbert $H = L^2_K(E, T, m)$ donne que pour tout $T \in H'$, il existe un et un seul $f \in H$ t.q. $T(g) = (g/f)_2$ pour tout $g \in H$, c'est-à-dire un et un seul $f \in H$ t.q. $T = \varphi_f$.

L'application $\varphi \;: f \mapsto \varphi_f$ est donc une isométrie bijective de $L^2_K(E, T, m)$ sur $L^2_K(E, T, m)$. (Noter que φ est linéaire si $K = \mathbb{R}$ et antilinéaire si $K = \mathbb{C}$.)

Cette situation est spécifique au cas $p = 2$. Nous examinons ci-après le cas général $1 \leq p \leq \infty$.

6.3.2 Dualité pour $1 \leq p \leq \infty$

Soit (E, T, m) un espace mesuré. Soit $p \in [1, +\infty]$, on pose $q = \frac{p}{p-1} \in [1, +\infty]$ (de sorte que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, q s'appelle le conjugué de p). Dans toute cette section, on note $L^r_K = L^r_K(E, T, m)$, avec $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (et $r \in [1, \infty]$).

On cherche à caractériser le dual de L^p_K, de manière semblable à ce qui a été fait à la section précédente dans le cas $p = 2$.

Soit $f \in L^q_K$, on considère l'application :

$$\varphi_f \; : g \mapsto \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int g f dm \text{ si } K = \mathbb{R}, \\ \displaystyle\int g \overline{f} dm \text{ si } K = \mathbb{C}. \end{array} \right. \tag{6.30}$$

L'inégalité de Hölder (proposition 6.9) montre que $\varphi_f(g)$ est bien définie si $g \in L^p_K$ et que $\varphi_f \in (L^p_K)'$ (dual topologique de L^p_K). On peut aussi obtenir un majorant de la norme de φ_f car l'inégalité de Hölder donne

$$|\varphi_f(g)| \leq \|f\|_q \|g\|_p, \text{ pour tout } g \in L^p_K,$$

d'où l'on déduit que

$$\|\varphi_f\|_{(L^p_K)'} = \sup\{\frac{|\varphi_f(g)|}{\|g\|_p}, \; g \in L^p_K \setminus \{0\}\} \leq \|f\|_q. \tag{6.31}$$

On définit donc une application $\varphi \; : f \mapsto \varphi_f$ de L^q_K dans $(L^p_K)'$. La définition de φ_f (formule (6.30)) montre que cette application est linéaire dans le cas $K = \mathbb{R}$ et antilinéaire dans le cas $K = \mathbb{C}$. Elle est toujours continue, grâce à (6.31). On montre maintenant que c'est, en général, une isométrie.

Proposition 6.22
Soit (E, T, m) un espace mesuré. Soient $p \in [1, +\infty]$ et $q = \frac{p}{p-1}$. Si $p = 1$, la mesure m est supposée de plus σ-finie. L'application $\varphi \; : f \mapsto \varphi_f$, où φ_f est définie par (6.30) est une application de L^q_K dans $(L^p_K)'$, linéaire dans le cas $K = \mathbb{R}$ et antilinéaire dans le cas $K = \mathbb{C}$. De plus , c'est une isométrie, c'est-à-dire que $\|\varphi_f\|_{(L^p_K)'} = \|f\|_q$ pour tout $f \in L^q_K$. (L'application φ est donc nécessairement injective, mais pas forcément surjective.)

Démonstration : on sait déjà que φ est une application de L^q_K dans $(L^p_K)'$, linéaire dans le cas $K = \mathbb{R}$ et antilinéaire dans le cas $K = \mathbb{C}$. On sait aussi que $\|\varphi_f\|_{(L^p_K)'} \leq \|f\|_q$ pour tout $f \in L^q_K$ (voir (6.31)). Pour terminer la démonstration de cette proposition, Il suffit donc de montrer que, pour tout $f \in L^q_K$,

$$\|\varphi_f\|_{(L^p_K)'} \geq \|f\|_q. \tag{6.32}$$

On se limite au cas $K = \mathbb{R}$ (les adaptations pour traiter le cas $K = \mathbb{C}$ sont faciles à deviner).

Soit $f \in L^q_{\mathbb{R}}$. On suppose $f \neq 0$ (sinon (6.32) est immédiat). On confond f avec l'un de ses représentants, de sorte que $f \in \mathcal{L}^q = \mathcal{L}^q_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Pour montrer 6.32, on va chercher $g \in L^p_K \setminus \{0\}$ t.q. $\frac{|\varphi_f(g)|}{\|g\|_p} = \|f\|_q$.

On distingue maintenant trois cas.

Cas 1 : $1 < p < \infty$**.** On définit $g \; : \; E \to \mathbb{R}$ par $g(x) = |f(x)|^{q-1}\text{sign}(f(x))$ pour tout $x \in E$, avec la fonction sign $: \; \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\text{sign}(s) = -1$ si $s < 0$, $\text{sign}(s) = 1$ si $s > 0$ et (par exemple) $\text{sign}(0) = 0$. La fonction g est mesurable (comme composée d'applications mesurables) et on a (en notant que $p = \frac{q}{q-1}$) :

$$\int |g|^p dm = \int (|f|^{q-1})^{\frac{q}{q-1}} dm = \int |f|^q dm < \infty.$$

Donc, $g \in L^p_{\mathbb{R}}$ (plus précisément, $g \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}$) et $\|g\|_p = \|f\|_q^{\frac{q}{p}} \neq 0$. Pour ce choix de g, on a donc

$$\frac{|\varphi_f(g)|}{\|g\|_p} = \frac{1}{\|f\|_q^{\frac{q}{p}}} \int f g dm = \frac{1}{\|f\|_q^{\frac{q}{p}}} \|f\|_q^q = \|f\|_q,$$

car $q - \frac{q}{p} = 1$.
On en déduit que

$$\|\varphi_f\|_{(L^p_K)'} = \sup\{\frac{|\varphi_f(h)|}{\|h\|_p},\ h \in L^p_K \setminus \{0\}\} \geq \frac{|\varphi_f(g)|}{\|g\|_p} = \|f\|_q,$$

ce qui donne (6.32).

Cas 2 : $p = \infty$. On a, dans ce cas, $q = 1$. On prend, comme pour le premier cas, $g = \mathrm{sign}(f)$. On a ici $g \in L^\infty_{\mathbb{R}}$ et $\|g\|_\infty = 1$ (car $m(E) \neq 0$, sinon $L^1_{\mathbb{R}} = \{0\}$ et il n'y a pas de $f \in L^1_{\mathbb{R}}$, $f \neq 0$). Pour ce choix de g, on a $\varphi_f(g) = \|f\|_1$, donc $\frac{|\varphi_f(g)|}{\|g\|_\infty} = \|f\|_1$ et, comme dans le premier cas, ceci donne (6.32).

Cas 3 : $p = 1$. On a, dans ce cas, $q = \infty$. Ce cas est un peu plus délicat que les précédents. On ne peut pas toujours trouver $g \in L^1_K \setminus \{0\}$ t.q. $\frac{|\varphi_f(g)|}{\|g\|_1} = \|f\|_\infty$. En utilisant le caractère σ-fini de m, on va, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, trouver $g_n \in L^1_K \setminus \{0\}$ t.q. $\frac{|\varphi_f(g_n)|}{\|g\|_1} \geq \|f\|_\infty - \frac{1}{n}$. Ce qui permet aussi de montrer (6.32).

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On pose $\alpha_n = \|f\|_\infty - \frac{1}{n}$ et $A_n = \{|f| \geq \alpha_n\}$. On a $m(A_n) > 0$ (car $m(A_n) = 0$ donnerait $\|f\|_\infty \leq \alpha_n$).
Si $m(A_n) < \infty$, on peut prendre $g_n = \mathrm{sign}(f)1_{A_n}$ qui est mesurable (car $\mathrm{sign}(f)$ et 1_{A_n} sont mesurables) et intégrable car $m(A_n) < \infty$. On a alors $g_n \in L^1_{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$, $\|g_n\|_1 = m(A_n)$ et $\varphi_f(g_n) = \int_{A_n} |f| dm \geq \alpha_n m(A_n)$.
Donc :

$$\|\varphi_f\|_{(L^1_K)'} \geq \frac{|\varphi_f(g_n)|}{\|g_n\|_1} \geq \alpha_n = \|f\|_\infty - \frac{1}{n}.$$

En faisant tendre n vers l'infini, on en déduit (6.32).
Si $m(A_n) = \infty$, le choix de $g_n = \mathrm{sign}(f)1_{A_n}$ ne convient pas car $\mathrm{sign}(f)1_{A_n} \notin L^1_{\mathbb{R}}$. On utilise alors le fait que m est σ-finie. Comme m est σ-finie, il existe une suite $(E_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset T$ t.q. $m(E_p) < \infty$, $E_p \subset E_{p+1}$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, et $E = \cup_{p\in\mathbb{N}} E_p$. Par continuité croissante de m, on a donc $m(A_n \cap E_p) \uparrow m(A_n)$ quand $p \to \infty$. Comme $m(A_n) > 0$ il existe donc $p \in \mathbb{N}$ (dépendant de n, on ne note pas cette dépendance) t.q. $m(A_n \cap E_p) > 0$. On prend alors $g_n = \mathrm{sign}(f)1_{A_n \cap E_p}$. On a bien alors $g_n \in L^1_{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$, $\|g_n\|_1 = m(A_n \cap E_p) \leq m(E_p) < \infty$ et $\varphi_f(g_n) = \int_{A_n \cap E_p} |f| dm \geq \alpha_n m(A_n \cap E_p)$. Donc :

$$\|\varphi_f\|_{(L^1_K)'} \geq \frac{|\varphi_f(g_n)|}{\|g_n\|_1} \geq \alpha_n = \|f\|_\infty - \frac{1}{n}.$$

En faisant tendre n vers l'infini, on en déduit (6.32). ce qui conclut la preuve de la proposition. ■

La proposition 6.22 montre que l'application $\varphi\ : f \mapsto \varphi_f$, où φ_f est définie par (6.30) est une application de L^q_K dans $(L^p_K)'$, linéaire dans le cas $K = \mathbb{R}$ et antilinéaire dans le cas $K = \mathbb{C}$. De plus, c'est une isométrie, c'est-à-dire que $\|\varphi_f\|_{(L^p_K)'} = \|f\|_q$ pour tout $f \in L^q_K$. Comme cela a déjà été dit, l'application φ est donc nécessairement injective car $\varphi_f = \varphi_h$ implique $\varphi_{f-h} = 0$ et donc $\|f - h\|_q = \|\varphi_{f-h}\|_{(L^p_K)'} = 0$, ce qui donne $f = h$ p.p.. Mais l'application φ n'est pas forcément surjective. On sait qu'elle est surjective si $p = 2$ (c'était l'objet de la section précédente). Le théorème suivant montre qu'elle est surjective si m est σ-finie et $p \in [1, +\infty[$ (de sorte qu'on identifie souvent, dans ce cas, $(L^p_K)'$ à L^q_K).

Théorème 6.9 (Dualité $L^p - L^q$) *Soient (E, T, m) un espace mesuré σ-fini, $1 \leq p < +\infty$, $q = \frac{p}{p-1}$ et $T \in (L^p_K)'$. Alors, il existe un unique $f \in L^q_K$ t.q.*

$$T(g) = \begin{cases} \displaystyle\int gf dm \text{ si } K = \mathbb{R}, \\ \displaystyle\int g\overline{f} dm \text{ si } K = \mathbb{C}, \end{cases}$$

c'est-à-dire t.q. $T = \varphi_f$ *donné par (6.30) (on a donc montré la surjectivité de l'application* $\varphi\ :\ L^q_K \to (L^p_K)'$ *définie par* $\varphi(f) = \varphi_f$ *pour* $f \in L^q_K$*).*

Remarque 6.21 (Dual de L^∞) Noter que le théorème précédent est, en général, faux pour $p = \infty$. L'application $\varphi\ : f \mapsto \varphi_f$, où φ_f est donnée par (6.30) est donc une isométrie (linéaire ou antilinéaire, selon que $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de L^1_K dans $(L^\infty_K)'$ mais l'image de φ est, sauf cas très particuliers, différente de $(L^\infty_K)'$. L'application φ ne permet donc pas d'identifier le dual de L^∞_K à L^1_K.

Démonstration du théorème 6.9:
La démonstration de ce théorème est faite dans l'exercice 6.38. Elle consiste essentiellement à se ramener directement à appliquer le théorème de représentation de Riesz (théorème 6.8) dans un espace L^2 approprié.

Une autre démonstration, probablement plus classique, consiste à appliquer le théorème de Radon-Nikodym, qui lui-même se démontre en se ramenant au théorème de représentation de Riesz. Cette démonstration est donnée, dans un cas particulier, dans l'exercice 6.35. Nous verrons le théorème de Radon-Nikodym dans la section suivante, voir les théorèmes 6.10 et 6.11.

Enfin, on propose dans l'exercice 6.37 une autre démonstration de ce théorème dans le cas $p < 2$ (utilisant toujours le théorème de représentation de Riesz). ■

Une conséquence intéressante du théorème de dualité (théorème 6.9) est le caractère réflexif des espaces L^p pour $1 < p < \infty$, ce que l'on détaille maintenant.

Soit F un espace de Banach réel (mais il est possible de traiter aussi les Banach complexes). On note F' le dual (topologique) de F et F'' le dual (topologique) de F'. On dit aussi que F'' est le bidual de F. Pour $u \in F$, on définit $J_u\ :\ F' \to \mathbb{R}$ par

$$J_u(T) = T(u) \text{ pour tout } T \in F'. \tag{6.33}$$

Il est facile de voir que $J_u \in F''$ et $\|J_u\|_{F''} \le \|u\|_F$. On peut en fait montrer que $\|J_u\|_{F''} = \|u\|_F$ (c'est une conséquence du théorème de Hahn-Banach, non démontré ici). Comme l'application $J\ : u \mapsto J_u$ est linéaire, c'est donc une isométrie linéaire de F dans F''. Il est alors immédiat que J est injective. On l'appelle "'injection canonique" de F dans F''. Par contre, J n'est pas toujours surjective.

Définition 6.14 *Soit F un espace de Banach, F' son dual (topologique) et F'' son bidual (c'est-à-dire le dual topologique de F'). Pour $u \in F$, on définit $J_u \in F''$ par (6.33). On dit que l'espace F est réflexif si l'application $J\ : u \mapsto J_u$ (de F dans F'') est surjective (l'application J est toujours injective).*

Un espace de Hilbert H est toujours réflexif car l'application J est alors simplement la composée des deux bijections de H dans H' et de H' dans H'' données par le théorème de représentation de Riesz (Théorème 6.8). Ce qui montre que J est surjective. L'espace $L^2_R(E,T,m)$ est donc réflexif. Plus généralement, une conséquence directe du théorème 6.9 est que les espaces L^p, sont réflexifs pour $p \in]1,+\infty[$.

Proposition 6.23 *Soient (E,T,m) un espace mesuré et $1 < p < +\infty$. Alors, l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ est réflexif.*

Démonstration : On pose $q = \frac{p}{p-1}$, $L^p = L^p_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ et $L^q = L^q_{\mathbb{R}}(E,T,m)$.
On note Φ l'application de L^p dans $(L^q)'$ définie par $\Phi(f) = \varphi_f$, où φ_f est donnée par (6.30), et on note Ψ l'application de L^q dans $(L^p)'$ définie par $\Psi(f) = \varphi_f$.

Comme $p \neq \infty$ et $q \neq \infty$, le théorème 6.9 donne que Φ est une bijection de L^p dans $(L^q)'$ et Ψ est une bijection de L^q dans $(L^p)'$. On rappelle aussi que Φ et Ψ sont des isométries linéaires.

Soit $s \in (L^p)''$. Pour montrer que L^p est réflexif, il suffit de montrer qu'il existe $u \in L^p$ t.q. $J_u = s$ (où J_u est défini par 6.33), c'est-à-dire t.q. $s(T) = T(u)$ pour tout $T \in (L^p)'$.

On va montrer que $u = \Phi^{-1}(s \circ \Psi)$ convient. En effet, soit $T \in (L^p)'$. On a :

$$T(u) = \int u\Psi^{-1}(T)dm,$$

et :

$$s(T) = (s \circ \Psi)(\Psi^{-1}(T)) = \Phi(u)(\Psi^{-1}(T)) = \int u\Psi^{-1}(T)dm = T(u).$$

On a donc bien montré que l'application $J : u \mapsto J_u$ (de L^p dans $(L^p)''$) est surjective, c'est-à-dire que L^p est réflexif.

On peut aussi noter que la démonstration de cette proposition donne en fait que $J_u = \Phi(u) \circ \Psi^{-1}$ pour tout $u \in L^p$. ■

6.3.3 Théorème de Radon-Nikodym

La définition 4.4 donnait la définition d'une mesure de densité. On reprend ici cette définition et on donne aussi la définition de mesure "signée" de densité.

Définition 6.15 (Mesure de densité) *Soit (E, T, m) un espace mesuré.*

1. *Soit μ une mesure sur T. On dit que μ est une mesure de densité par rapport à m si il existe $f \in \mathcal{M}_+$ t.q. $\mu(A) = \int_A f dm$, pour tout $A \in T$. On pose alors $\mu = fm$ (on dit aussi que f est la densité de μ par rapport à m).*
2. *Soit μ une mesure signée sur T. On dit que μ est une mesure signée de densité par rapport à m si il existe $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ t.q. $\mu(A) = \int_A f dm$, pour tout $A \in T$. On pose alors $\mu = fm$ (on dit aussi que f est la densité de μ par rapport à m).*

Remarque 6.22 (Sur les mesures de densité) Soient (E, T, m) un espace mesuré et μ une mesure sur T.

1. (Unicité de la densité) Soit $f, g \in \mathcal{M}_+$. On suppose que $\mu = fm$ et $\mu = gm$. On a alors $f = g$ m-p.p.. En effet, on doit avoir $\int_A f dm = \int_A g dm$ pour tout $A \in T$. En choisissant $A = \{f > g\}$ puis $A = \{f < g\}$, on en déduit que $\int_{\{f>g\}}(f - g)dm + \int_{\{f<g\}}(g - f)dm = 0$. Ce qui donne $\int |f - g|dm = 0$ et donc $f = g$ m-p.p..
2. (Espace $\mathcal{L}^1$ pour une mesure de densité) Soit $f \in \mathcal{M}_+$ t.q. $\mu = fm$. Soit $g \in \mathcal{M}$, l'exercice (corrigé) 4.22 donne alors les assertions suivantes :
   (a) $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, \mu) \Leftrightarrow fg \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$,
   (b) $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, \mu) \Rightarrow \int g d\mu = \int fg dm$.
3. (Absolue continuité d'une mesure de densité) Soit $f \in \mathcal{M}_+$ t.q. $\mu = fm$. Soit $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$. On a alors $f1_A = 0$ m-p.p. et donc $\mu(A) = \int f1_A dm = 0$. Selon la définition 6.16 ci-après, ceci montre que la mesure μ est absolument continue par rapport à la mesure m. L'objectif du théorème de Radon-Nikodym (théorème 6.10) sera de démontrer la réciproque de ce résultat (si μ est finie et m est σ-finie).

Rappelons la définition d'une mesure absolument continue :

Définition 6.16 (Mesure absolument continue) *Soient (E, T, m) un espace mesuré et μ une mesure (positive ou signée) sur T. On dit que μ est absolument continue par rapport à m, et on note $\mu << m$, si :*

$$A \in T, m(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0.$$

Remarque 6.23 *On donne ici un exemple de mesure non absolument continue : on prend $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $\mu = \delta_0$ (mesure de Dirac en 0 sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$). Comme $\lambda(\{0\} = 0$ et $\delta_0(\{0\} = 1$, la mesure δ_0 n'est pas absolument continue par rapport à λ.*

On donne maintenant le théorème de Radon-Nikodym pour les mesures (positives).

Théorème 6.10 (Radon-Nikodym) *Soient (E, T, m) un espace mesuré σ-fini et μ une mesure finie sur T. Alors, μ est absolument continue par rapport à m si et seulement si μ est une mesure de densité par rapport à m.*

DÉMONSTRATION :
Sens ($\Leftarrow$). Ce sens a été montré dans le troisième item de la remarque 6.22 (et les hypoth eses "μ finie" et "m σ-finie" sont inutiles. (Noter aussi que le premier item de cette même remarque donne l'unicité m-p.p. de la densité de μ par rapport à m.)

Sens ($\Rightarrow$). Pour toute mesure ν sur T et pour tout $1 \leq p \leq \infty$, on note $\mathcal{L}^p(\nu) = \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(E, T, \nu)$ et $L^p(\nu) = L^p_{\mathbb{R}}(E, T, \nu)$.

Pour démontrer que μ est absolument continue par rapport à m, on va appliquer le théorème de représentation de Riesz (théorème 6.8) dans l'espace de Hilbert $H = L^2_{\mathbb{R}}(\mu + m)$.
On rappelle d'abord que l'exercice (corrigé) 4.2 donne que $\mu + m$ est une mesure sur T (définie par $(\mu+m)(A) = \mu(A)+m(A)$ pour tout $A \in T$) et que les deux propriétés suivantes sont vérifiées (questions 1 et 2 de l'exercice 4.2) :

$$g \in \mathcal{L}^1(\mu + m) \Leftrightarrow g \in \mathcal{L}^1(\mu) \cap \mathcal{L}^1(\mu),$$
$$g \in \mathcal{L}^1(\mu + m) \Rightarrow \int g d(\mu + m) = \int g d\mu + \int g dm. \tag{6.34}$$

Il est aussi clair que $\int f d(\mu + m) = \int f d\mu + \int f dm$ pour tout $f \in \mathcal{M}_+$ (voir le corrigé 56 de l'exercice 4.2). Pour $g \in \mathcal{M}$, on a donc $\int g^2 d(\mu+m) = \int g^2 d\mu + \int g^2 dm$, ce qui donne $\mathcal{L}^2(\mu+m) = \mathcal{L}^2(\mu) \cap \mathcal{L}^2(m)$.
Enfin, pour $A \in T$, on a $(\mu + m)(A) = 0$ si et seulement si $\mu(A) = m(A) = 0$. On a donc, pour $f, g : E \to \mathbb{R}$:

$$f = g \ (\mu + m)\text{-p.p.} \Leftrightarrow \begin{cases} f = g \ \mu\text{-p.p.}, \\ f = g \ m\text{-p.p.}. \end{cases}$$

On décompose maintenant la démonstration en 3 étapes.

Etape 1. Utilisation du théorème de Riesz.
On pose $H = L^2(\mu + m)$ (H est donc un espace de Hilbert). On veut définir $T : H \to \mathbb{R}$ par :

$$T(g) = \int g d\mu \text{ pour tout } g \in H. \tag{6.35}$$

On montre tout d'abord que cette définition est correcte. Soit $g \in H = L^2(\mu + m)$. On choisit un représentant de g, encore noté g, de sorte que $g \in \mathcal{L}^2(\mu + m) = \mathcal{L}^2(\mu) \cap L^2(m)$. Comm μ est finie, on a $\mathcal{L}^2(\mu) \subset \mathcal{L}^1(\mu)$. Donc $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $\int g d\mu$ existe et appartient à $\mathbb{R}$. Puis, on remarque que $\int g d\mu$ ne dépend pas du représentant choisi car $g_1 = g_2$ $(\mu + m)$-p.p. implique $g_1 = g_2$ μ-p.p.. L'application T est donc bien définie de H dans $\mathbb{R}$ par (6.35).

On montre maintenant que $T \in H'$. Il est immédiat que T est linéaire. On remarque ensuite que, pour tout $g \in H$, on a, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec g et 1_E, $|T(g)| = |\int g d\mu| \leq \|g\|_{L^2(\mu)} \sqrt{\mu(E)}$ $\leq \|g\|_{L^2(\mu+m)} \sqrt{\mu(E))} = \|g\|_H \sqrt{\mu(E)}$. On a donc $T \in H'$ (et $\|T\|_{H'} \leq \sqrt{\mu(E)}$).

On peut maintenant appliquer le théorème de représentation de Riesz (théorème 6.8). Il donne qu'il existe $\varphi \in H = L^2(\mu + m)$ t.q. $T(g) = \int g\varphi d(\mu + m)$ pour tout $g \in L^2(\mu + m)$. On choisit un représentant de φ, encore noté φ. On a alors $\varphi \in \mathcal{L}^2(\mu + m)$ et

$$\int g d\mu = \int g\varphi d(\mu + m) \text{ pour tout } g \in \mathcal{L}^2(\mu + m). \tag{6.36}$$

Pour $g \in \mathcal{L}^2(\mu + m)$, on a $g\varphi \in \mathcal{L}^1(\mu + m)$ et donc $\int g\varphi d(\mu + m) = \int g\varphi d\mu + \int g\varphi dm$ (d'après (6.34)). On déduit donc de (6.36) :

$$\int g(1 - \varphi) d\mu = \int g\varphi dm, \text{ pour tout } g \in \mathcal{L}^2(\mu + m). \tag{6.37}$$

Etape 2. On cherche dans cette étape des bornes sur φ.

On montre tout d'abord que $\varphi \geq 0$ m-p.p. et μ-p.p. (ce qui est équivalent a dire que $\varphi \geq 0$ $(\mu+m)$-p.p.). Comme m est σ-finie, il existe une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ t.q. $m(A_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $E = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $B_n = \{\varphi < 0\} \cap A_n \in T$. Dans (6.37), on prend $g = 1_{B_n}$ (on a bien $g \in \mathcal{L}^2(\mu + m)$ car $(\mu + m)(B_n) \leq \mu(E) + m(A_n) < \infty$). On obtient

$$\int (1 - \varphi) 1_{B_n} d\mu = \int \varphi 1_{B_n} dm.$$

Comme $(1 - \varphi) > 0$ et $\varphi < 0$ sur B_n, on en déduit que $(1 - \varphi)1_{B_n} = 0$ μ-p.p. et $\varphi 1_{B_n} = 0$ m-p.p. et donc $\mu(B_n) = m(B_n) = 0$.
Par σ-additivité d'une mesure, comme $\{\varphi < 0\} = \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n$, on en déduit $(\mu + m)(\{\varphi < 0\}) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} (\mu + m)(B_n) = 0$ et donc $\varphi \geq 0$ $(\mu + m)$-p.p..

On montre maintenant que $\varphi < 1$ $(\mu + m)$-p.p..
On prend dans (6.37) $g = 1_{C_n}$, avec $C_n = \{\varphi \geq 1\} \cap A_n$ (on a bien $g \in \mathcal{L}^2(\mu + m)$ car $(\mu + m)(C_n) \leq \mu(E) + m(A_n) < \infty$). On obtient

$$\int (1 - \varphi) 1_{C_n} d\mu = \int \varphi 1_{C_n} dm.$$

Comme $(1 - \varphi) \leq 0$ et $\varphi > 0$ sur C_n, on en déduit que $(1 - \varphi)1_{C_n} = 0$ μ-p.p. et $\varphi 1_{C_n} = 0$ m-p.p. et donc $m(C_n) = 0$. Mais on ne peut en déduire $\mu(C_n) = 0$ (car on a seulement $(1 - \varphi) \leq 0$ sur C_n et non $(1 - \varphi) < 0$). C'est ici (et seulement ici) qu'on utilise l'hypothèse d'absolue continuité de μ par rapport à m. Comme $m(C_n) = 0$, l'hypothèse $\mu << m$ donne $\mu(C_n) = 0$. Comme $\{\varphi \geq 1\} = \cup_{n\in\mathbb{N}} C_n$, on en déduit $(\mu + m)(\{\varphi \geq 1\}) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} (\mu + m)(C_n) = 0$ et donc $\varphi < 1$ $(\mu + m)$-p.p..

On a donc montré que $0 \le \varphi < 1$ $(\mu+m)$-p.p.. En changeant φ sur un ensemble de mesure $(\mu+m)$ nulle, on peut donc supposer $0 \le \varphi(x) < 1$ pour tout $x \in E$. On a toujours $\varphi \in \mathcal{L}^2(\mu+m)$ et (6.37) reste vraie.

Etape 3. On montre maintenant que $\mu = fm$ avec $f = \frac{\varphi}{1-\varphi}$.

On montre tout d'abord que (6.37) est vraie pour tout $g \in \mathcal{M}_+$:

- On remarque d'abord que (6.37) est vraie si $g = 1_A$ avec $A \in T$ t.q. $m(A) < \infty$ car, dans ce cas, $g \in \mathcal{L}^2(\mu+m)$.
- On suppose maintenant que $A \in T$. Comme m est σ-finie, il existe une suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ t.q. $m(E_n) < \infty$, $E_n \subset E_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $E = \cup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. On prend $g_n = 1_{B_n}$ avec $B_n = A \cap E_n$, de sorte que $g_n \uparrow 1_A$ et donc $(1-\varphi)g_n \uparrow (1-\varphi)1_A$ et $\varphi g_n \uparrow \varphi 1_A$. Comme (6.37) est vraie pour $g = g_n$ (car $m(B_n) < \infty$), le théorème de convergence monotone (théorème 4.1) appliqué aux mesures μ et m donne (6.37) pour $g = 1_A$.
- Si $g \in \mathcal{E}_+$, il est alors facile de montrer que (6.37) est vraie. C'est une conséquence immédiate de la linéarité positive de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$.
- On prend enfin $g \in \mathcal{M}_+$. Il existe $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}_+$ t.q. $g_n \uparrow g$. On a donc $(1-\varphi)g_n \uparrow (1-\varphi)g$ et $\varphi g_n \uparrow \varphi g$. On écrit (6.37) pour g_n au lieu de g. En passant à la limite quand $n \to \infty$, le théorème de convergence monotone (théorème 4.1) appliqué aux mesures μ et m donne (6.37) pour g.

On a donc maintenant φ mesurable, $0 \le \varphi(x) < 1$ pour tout $x \in E$ et (6.37) pour tout $g \in \mathcal{M}_+$.

Soit $h \in \mathcal{M}_+$. On pose $g = \frac{h}{1-\varphi}$. On a $g \in \mathcal{M}_+$ (car $0 \le \varphi(x) < 1$ pour tout $x \in E$). (6.37) donne alors

$$\int h d\mu = \int h \frac{\varphi}{1-\varphi} dm. \tag{6.38}$$

En posant $f = \frac{\varphi}{1-\varphi}$, on a $f \in \mathcal{M}_+$ et (6.38) avec $h = 1_A$ donne $\mu(A) = \int f 1_A dm$ pour tout $A \in T$, c'est-à-dire $\mu = fm$. ■

Théorème 6.11 (Radon-Nikodym, mesures signées) *Soit (E, T, m) un espace mesuré et soit μ une mesure signée sur T, alors :*

$$\mu << m \Longleftrightarrow \exists f \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m) \quad \mu = fm. \tag{6.39}$$

Démonstration : La démonstration n'est pas détaillée ici, elle consiste essentiellement à se ramener au théorème 6.10 en décomposant μ sous la forme $\mu = \mu_+ - \mu_-$ comme cela est fait dans la proposition 2.6. ■

6.4 Convergence faible, faible-$\star$, étroite, en loi...

6.4.1 Convergence faible et faible-$\star$

On limite ce paragraphe au cas des espaces de Banach réels. L'extension au cas des Banach complexes est simple (!).

Définition 6.17 (Convergence faible dans un espace de Banach)
Soit F un espace de Banach (réel) et F' son dual topologique (i.e. l'espace des applications linéaires continues sur F dans $\mathbb{R}$). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F$ et $u \in F$. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers u si pour tout élement T de F', on a : $T(u_n) \to T(u)$ (dans $\mathbb{R}$) quand $n \to \infty$.

Par le théorème 6.9, on a donc la proposition suivante sur la convergence faible dans $L^p_{\mathbb{R}}(E,T,m)$, pour $1 \le p < +\infty$:

Proposition 6.24 (Convergence faible dans L^p)
Soit (E,T,m) un espace mesuré, $p \in [1,+\infty[$ et q le conjugué de p, $L^p = L^p_{\mathbb{R}}(E,T,m)$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p$ et $u \in L^p$. Alors, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers f si et seulement si on a, pour tout $g \in L^q_{\mathbb{R}}(E,T,m)$, $\int f_n g dm \to \int f g dm$ quand $n \to \infty$.

Démonstration :
On note Φ l'application de L^q dans $(L^p)'$ définie par $\Phi(f) = \varphi_f$, où φ_f est donnée par (6.30), La démonstration de cette proposition est alors immédiate quand on remarque que le théorème 6.9 donne que Φ est une bijection de L^q dans $(L^p)'$. ■

Définition 6.18 (Convergence faible $\star$ dans le dual d'un espace de Banach)
Soit F un espace de Banach (réel) et F' son dual topologique ; soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F'$ et $T \in F'$. On dit que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers T dans F' pour la topologie faible $\star$ si pour tout élement u de F, on a : $T_n(u) \to T(u)$ (dans $\mathbb{R}$) quand $n \to \infty$.

Remarque 6.24 (Convergence forte, faible et faible $\star$) Soit F un espace de Banach (réel).

1. Soient $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F'$ et $T \in F'$. Les implications suivantes sont alors immédiates :
$$T_n \to T \text{ dans } F' \Rightarrow T_n \to T \text{ faiblement dans } F' \Rightarrow T_n \to T \ \star\text{-faiblement dans } F'.$$
La deuxième implication est une conséquence de l'injection canonique de F dans F'' (construite avec (6.33)).

2. Pour $u \in F$, on définit $J_u \in F''$ avec (6.33). Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F$ et $u \in F$. On a alors :
$$u_n \to u \text{ faiblement dans } F \Leftrightarrow J_{u_n} \to J_u \ \star\text{-faiblement dans } F''.$$
Mais, si F n'est pas réflexif, l'application $J\ : u \mapsto J_u$, de F dans F'', n'est pas surjective et on peut avoir une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non faiblement convergente dans F alors que la suite $(J_{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est $\star$-faiblement convergente dans F''. Dans ce cas, la limite de $(J_{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ pour la topologie faible-$\star$ de F'' n'est pas dans l'image de J.

Dans le cas où F est un espace de Banach réflexif, l'application $J\ : u \mapsto J_u$ est surjective de F dans F'' et on a alors :

1. Soient $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F'$ et $T \in F'$. Alors :
$$T_n \to T \text{ faiblement dans } F' \Leftrightarrow T_n \to T \ \star\text{-faiblement dans } F'.$$

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est faiblement convergente dans F si et seulement si la suite $(J_{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est $\star$-faiblement convergente dans F''.

Soit $1 < p \leq \infty$, donc $1 \leq q = \frac{p}{p-1} < \infty$. On note $L^p = L^p_{\mathbb{R}}(E,T,m)$, $L^q = L^q_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ et Φ l'application de L^p dans $(L^q)'$ définie par $\Phi(f) = \varphi_f$, où φ_f est donnée par (6.30). Le théorème 6.9 donne que Φ est une bijection de L^p dans $(L^q)'$. On confond (ou on identifie) fréquemment $u \in L^p$ avec $\Phi(u) \in (L^q)'$. On a alors une notion de convergence faible-$\star$ dans L^p. Si $1 < p < \infty$ (on a alors aussi $1 < q < \infty$), les notions de convergente faible et faible-$\star$ dans L^p sont équivalentes. Dans le cas de L^∞, que l'on identifie fréquemment avec le dual (topologique) de L^1, les notions de convergente faible et faible-$\star$ sont différentes. La convergence faible est plus forte que la convergence faible-$\star$. On donne ci dessous la définition de convergence faible-$\star$ quand on considère L^∞ comme le dual de L^1.

Définition 6.19 (Convergence faible $\star$ dans L^∞)
Soient (E,T,m) un espace mesuré et $L^\infty = L^\infty_{\mathbb{R}}(E,T,m)$. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^\infty$ et $f \in L^\infty$. On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans L^∞ pour la topologie faible $\star$ si pour tout élement g de $L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$, on a : $\int f_n g dm \to \int f g dm$.

6.4.2 Convergence étroite et convergence en loi

Si m est une mesure finie sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$, on note L_m l'application de $C_b(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par $L_m(\varphi) = \int \varphi dm$ (cette application caractérise m, d'après la proposition 5.4). On a vu au chapitre 5 que $L_m \in C_b(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})'$. Soit $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures finies sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$) et m une mesure finie sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$. La convergence faible-$\star$ dans $(C_b(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})'$ de L_{m_n} vers L_m, quand $n \to \infty$, signifie donc que $\lim_{n\to\infty} \int \varphi dm_n = \int \varphi dm$, pour tout $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$. Ceci s'appelle la convergence étroite de m_n vers m.

Définition 6.20 (Convergence étroite et vague) *Soit $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures finies sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$) et m une mesure finie sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$.*

1. *On dit que $m_n \to m$ étroitement, quand $n \to \infty$, si :*
$$\int \varphi dm_n \to \int \varphi dm \text{ pour tout } \varphi \in C_b(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})).$$
2. *On dit que $m_n \to m$ vaguement, quand $n \to \infty$, si :*
$$\int \varphi dm_n \to \int \varphi dm \text{ pour tout } \varphi \in C_c(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})).$$

La proposition suivante montre que la convergence vague et la convergence des masses totales donnent la convergence étroite. Si m et les mesures m_n sont des probabilités, la convergence étroite de m_n vers m (quand $n \to \infty$) est donc équivalente à la convergence vague.

Proposition 6.25 *Soit $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures finies sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$) et m une mesure finie sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$. On suppose que $m_n \to m$ vaguement et que $m_n(\mathbb{R}) \to m(\mathbb{R})$ (quand $n \to \infty$). On a alors $m_n \to m$ étroitement. (La réciproque de cette proposition est immédiate.)*

Démonstration : La démonstration de cette proposition est contenue dans l'exercice 5.19. ∎

La convergence en loi d'une suite de v.a.r. est définie par la convergence étroite (ou vague, puisque c'est équivalent) des lois des v.a.r.

Définition 6.21 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, p)$*un espace probabilisé,* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de v.a.r. sur* $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ *et* X *une v.a.r. sur* $(\Omega, \mathcal{A}, p)$*. On dit que* $X_n \to X$ *en loi, quand* $n \to \infty$*, si :*

$$\int \varphi(X_n)dp \to \int \varphi(X)dp \text{ pour tout } \varphi \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

(Ce que est équivalent à dire que $P_{X_n} \to P_X$ *étroitement.)*

6.4.3 Lois des grands nombres, théorème central limite

Dans ce paragraphe, on donne des résultats de convergence (en probabilité, p.s., en loi) pour des sommes de v.a.r. indépendantes. Nous commençons ce paragraphe par un résutat (simple) sur la variance de la somme de v.a.r. indépendantes, dont on déduit la loi faible des grands nombre qui donne non seulement un résultat de convergence (en probabilité) mais aussi des estimations précises sur cette convergence. Puis, on éenonce la loi forte des grands nombres et le théorème central limite.

Proposition 6.26 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ *un espace probabilisé et* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ *une suite de v.a.r. indépendantes 2 à 2 et de carré intégrable. On a alors, pour tout* $n \in \mathbb{N}^\star$*,*

$$Var(X_1 + \ldots + X_n) = Var(X_1) + \ldots + Var(X_n).$$

Démonstration : On pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ et $E_i = E(X_i)$. On a alors, par linéarité de l'intégrale, $E(S_n) = \sum_{i=1}^n E_i$ et :

$$\mathrm{Var}(S_n) = E((S_n - E(S_n))^2) = E(\sum_{i=1}^n (X_i - E_i) \sum_{i=j}^n (X_j - E_j)) = \sum_{i,j=1}^n E((X_i - E_i)(X_j - E_j)).$$

Pour $i \neq j$, on a, comme X_i et X_j sont indépendantes, $E((X_i-E_i)(X_j-E_j)) = E(X_i-E_i)E(X_j-E_j) = 0$. On en déduit :

$$\mathrm{Var}(S_n) = \sum_{i=1}^n E((X_i - E_i)^2) = \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(X_i).$$

■

Proposition 6.27 (Loi faible des grands nombres) *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ *un espace probabilisé et* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ *une suite de v.a.r. indépendantes 2 à 2 et de carré intégrable. On suppose que ces v.a.r. sont de même moyenne* m *et de même variance* σ^2*. On pose* $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ *(ce sont les "moyenne de Césaro" de la suite* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$*), alors* Y_n *converge stochastiquement (ou en probabilité) vers la v.a.r constante et égale à* m*, c'est-à-dire que l'on a :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ p(|X_n - m| > \varepsilon) \to 0 \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

Plus précisément, on a pour tout $\varepsilon > 0$ *et* $n \in \mathbb{N}^\star$*,*

$$p(|Y_n - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. En utilisant l'inégalité de Bienaymé Tchebychev (lemme 4.10), on a :

$$p(|Y_n - m| \geq \varepsilon) = p((Y_n - m)^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} E((Y_n - m)^2).$$

Puis, en posant $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, on a $E((Y_n - m)^2) = \frac{1}{n^2}E((S_n - nm)^2) = \frac{\text{Var}(S_n)}{n^2}$. La proposition 6.26 donne $\text{Var}(S_n) = n\text{Var}(X_1) = n\sigma^2$. On en déduit finalement

$$p(|Y_n - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

■

On donne maintenant, sans démonstration, la loi forte des grands nombres.

Proposition 6.28 (Loi forte des grands nombres) *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace probabilisé et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite de v.a.r. indépendantes.*

1. *On suppose ici que les X_n sont de carré intégrable, que $E(X_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et que $\sum_{n\in\mathbb{N}^\star} E(X_n^2)/(n^2) < \infty$. Alors :*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \to 0 \text{ p.s., quand } n \to \infty.$$

2. *On suppose ici que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de v.a.r.i.i.d. et que $E(|X_1|) < \infty$. Alors :*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \to E(X_1) \text{ p.s., quand } n \to \infty.$$

On donne enfin, sans démonstration, le théorème central limite.

Théorème 6.12 *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace probabilisé et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite de v.a.r.i.i.d. de carrés intégrables. On note $m = E(X_1)$ et $\sigma^2 = \text{Var}(X_1)$. On pose*

$$Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n (X_i - m).$$

La suite $(P_{Y_n})_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge alors étroitement vers la loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ (où $\mathcal{N}(0, 0) = \delta_0$ et la loi normale, ou loi de Gauss, $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, est définie au chapitre 4, section 4.4, dans le cas $\sigma^2 \neq 0$).

6.5 Exercices

6.5.1 Espaces L^p, $1 \leq p \leq \infty$

Exercice 6.1 *Corrigé 95 page 380*
Soit (E, T, m) un espace mesuré, $p \in [1, \infty[$ et $A \in T$. On pose $F = \{f \in L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m);\ f = 0$ p.p. sur $A\}$. Montrer que F est fermé (dans $L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$).

Exercice 6.2 *Corrigé 96 page 380*
Soit $p \in [1, \infty]$ et $C = \{f \in L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda);\ f \geq 0$ p.p.$\}$. Montrer que C est d'intérieur vide pour $p < \infty$ et d'intérieur non vide pour $p = \infty$.

Exercice 6.3 (Convergence essentiellement uniforme) *Corrigé 97 page 381*

Soit (E,T,m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$ et f une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$.

Montrer que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$, quand $n \to \infty$, si et seulement si il existe $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et $f_n \to f$ uniformément sur A^c, quand $n \to \infty$.

Exercice 6.4 (Densité et continuité en moyenne) *Corrigé 98 page 381*

1. Soit $p \in [1,\infty[$. Montrer que $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est dense dans $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$. Soit $f \in L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$, montrer que $\|f - f(\cdot + h)\|_p \to 0$ quand $h \to 0$.
2. Les assertions précédentes sont-elles vraies pour $p = \infty$?

Exercice 6.5 (Sur la séparabilité. . .)

1. Montrer que $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ est séparable pour $p \in [1,\infty[$ et n'est pas séparable pour $p = \infty$.
2. On munit $C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de la norme de la convergence uniforme. Montrer que $C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est séparable et que $C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ n'est pas séparable.

Exercice 6.6 Soient (E,T,m) un espace mesuré, et f, g, h des fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$. Soient $p,q,r \in\ ]1,+\infty[$, tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{r} = 1$, montrer que :

$$\int |fgh|dm \leq \Big(\int |f|^p dm\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int |g|^q dm\Big)^{\frac{1}{q}} \Big(\int |h|^r dm\Big)^{\frac{1}{r}}.$$

Exercice 6.7 (Produit $L^p - L^q$) *Corrigé 99 page 383*
Soient (E,T,m) un espace mesuré, $p \in [1,+\infty]$ et q le conjugué de p (i.e. $q = \frac{p}{p-1}$). Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p_{\mathbb{R}}(E,T,m)$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^q_{\mathbb{R}}(E,T,m)$, $f \in L^p_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ et $g \in L^q_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ t.q. $f_n \to f$ dans $L^p_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ et $g_n \to g$ dans $L^q_{\mathbb{R}}(E,T,m)$. Montrer que $\int f_n g_n dm \to \int fg dm$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 6.8 (Caractérisation de $\mathcal{L}^p$)
Soit (E,T,m) un espace mesuré, $p \in [1,\infty]$ et $q = \frac{p}{p-1}$. On note $\mathcal{L}^r$ l'espace $\mathcal{L}^r_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ (pour $r \in [1,\infty]$).

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une application mesurable. On suppose que $fg \in \mathcal{L}^1$ pour tout $g \in \mathcal{L}^q$. Le but de l'exercice est de montrer (si possible. . .) que $f \in \mathcal{L}^p$.

1. On suppose, dans cette question, que $p = 1$. Montrer que $f \in \mathcal{L}^1$.
2. On suppose, dans cette question, que $p = \infty$. Pour montrer que $f \in \mathcal{L}^\infty$, on raisonne par l'absurde en supposant que $f \notin \mathcal{L}^\infty$.
   (a) Soit $\alpha \geq 0$. Montrer qu'il existe $\beta > \alpha$ t.q. $m(\{\alpha \leq |f| < \beta\}) > 0$. En déduire qu'il existe une suite croissante $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.q. $\alpha_0 = 0$, $\alpha_n \geq n$ et $m(A_n) > 0$ avec $A_n = \{\alpha_n \leq |f| < \alpha_{n+1}\}$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$).
   (b) Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. On pose $g = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n 1_{A_n}$ (les A_n étant définis à la question précédente). Montrer qu'un choix convenable de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donne $g \in \mathcal{L}^1$ et $fg \notin \mathcal{L}^1$.
   (c) Conclure.
3. On suppose, dans cette question, que $p \in]1,\infty[$ et que $m(E) < \infty$. Pour montrer que $f \in \mathcal{L}^p$, on raisonne une nouvelle fois par l'absurde en supposant que $f \notin \mathcal{L}^p$.

(a) Soit $\alpha \geq 0$. Montrer qu'il existe $\beta > \alpha$ t.q. $1 \leq \int_A |f|^p dm < \infty$ avec $A = \{\alpha \leq |f| < \beta\}$. En déduire qu'il existe une suite croissante $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.q. $\alpha_0 = 0$ et $1 \leq \int_{A_n} |f|^p dm < \infty$ avec $A_n = \{\alpha_n \leq |f| < \alpha_{n+1}\}$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$).

(b) Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. On pose $g = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n |f|^{p-1} 1_{A_n}$ (les A_n étant définis à la question précédente). Montrer qu'un choix convenable de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donne $g \in \mathcal{L}^q$ et $fg \notin \mathcal{L}^1$.

(c) Conclure.

4. On suppose, dans cette question, que $p \in]1, \infty[$ et que m est σ-finie. Montrer que $f \in \mathcal{L}^p$.

Exercice 6.9 (un peu de calcul diff...)
Soient (E, T, m) un espace mesuré fini, et $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $1 \leq p < +\infty$; pour $u \in L^p = L^p(E, T, m)$, on note $g(u)$ la (classe de) fonction(s): $x \mapsto g(u(x))$, et G la fonction qui à u associe $g(u)$.

1. Soit $1 \leq q < +\infty$; montrer que $G \in C(L^p, L^q)$ ssi il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $|g(s)| \leq C|s|^{\frac{p}{q}} + C$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.

2. Montrer que $G \in C^1(L^p, L^p)$ ssi il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $g(s) = as + b$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.

Exercice 6.10 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue à support compact, montrer que :

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)} \to \|f\|_\infty \text{ lorsque } p \to +\infty.$$

[*Pour montrer que* $\liminf_{p\to+\infty} \|f\|_{L^p(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)} \geq \|f\|_\infty$, *on pourra introduire, pour* $0 < \varepsilon < \|f\|_\infty$, *un ensemble* A_ε *tel que* $\forall\, x \in A_\varepsilon$, $|f(x)| > \|f\|_\infty - \varepsilon$.]

Exercice 6.11 *Corrigé 100 page 383*
Soient (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^\infty_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et $g \in L^\infty_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. On suppose que $f_n \to f$ dans $L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

1. On suppose que $g_n \to g$ dans $L^\infty_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Montrer que $f_n g_n \to fg$ dans $L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

2. On suppose maintenant que $g_n \to g$ p.p.. Montrer par un contre exemple qu'on peut ne pas avoir $f_n g_n \to fg$ dans $L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

3. On suppose maintenant que $g_n \to g$ p.p. et qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ t.q. $\|g_n\|_\infty \leq M$. Montrer qu'on a alors $f_n g_n \to fg$ dans $L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

Exercice 6.12 Soit (E, T, m) un espace mesuré et μ une mesure de densité $f \in \mathcal{M}_+$ par rapport à m, montrer que :

$$\begin{aligned} &(i) \quad \int g d\mu = \int f\, g\, dm,\ \forall\, g \in \mathcal{M}_+ \\ &(ii) \quad \text{Soit } g \in \mathcal{M},\ \text{alors } g \in L^1(\mu) \Leftrightarrow fg \in L^1(m), \\ &\qquad \text{et si } g \in L^1(\mu),\ \text{alors } \int g d\mu = \int f\, g\, dm \end{aligned} \tag{6.40}$$

Exercice 6.13
Soit $K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable (on a donc $K \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$). On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ t.q. $\int K(x,t)dt \leq M$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $\int K(t,y)dt \leq M$, pour tout $y \in \mathbb{R}$.

Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, on note $\mathcal{L}^p$ l'espace $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et L^p l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction mesurable, on pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$ t.q. $K(x,\cdot)f(\cdot) \in \mathcal{L}^1$, $T(f)(x) = \int K(x,t)f(t)dt$.

Soit $1 \leq p \leq \infty$. [On conseille de considérer séparément les cas $p = 1$, $p = \infty$ et $1 < p < \infty$.]

1. Soit $f \in L^p$ (on identifie f, comme d'habitude, avec l'un de ses représentants, on a donc $f \in \mathcal{L}^p$). Montrer que $T(f)(x)$ est définie pour presque tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $T(f) \in L^p$ (au sens "il existe $g \in \mathcal{L}^p$ t.q. $T(f) = g$ p.p.").

2. Montrer que T est une application linéaire continue de L^p dans L^p.

Exercice 6.14 (Inégalité de Hardy) *Corrigé 101 page 384*
Soit $p \in]1, \infty[$. On note $\mathcal{L}^p$ l'espace $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(]0, \infty[, \mathcal{B}(]0, \infty[), \lambda)$ (λ est donc ici la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $]0, \infty[$).

Soit $f \in \mathcal{L}^p$. Pour $x \in]0, \infty[$, on pose $F(x) = \frac{1}{x} \int f 1_{]0,x[} d\lambda$. Le but de l'exercice est de montrer que $F \in \mathcal{L}^p$ et $\|F\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_p$.

1. On suppose, dans cette question, que $f \in C_c(]0, \infty[)$ (c'est-à-dire que f est continue et à support compact dans $]0, \infty[$).

   (a) Montrer $F \in C^1(]0, \infty[) \cap \mathcal{L}^p$. Montrer que $xF'(x) = -F(x) + f(x)$ pour tout $x > 0$.

   (b) On suppose, dans cette question, que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in]0, \infty[$.

   Montrer que $\int_0^\infty F^p(x) dx = \frac{p}{p-1} \int_0^\infty F^{p-1}(x) f(x) dx$. [On pourra utiliser une intégration par parties.]

   Montrer que $\|F\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_p$.

   (c) Monter que $\|F\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_p$ (on ne suppose plus que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in]0, \infty[$).

2. On ne suppose plus que $f \in C_c(]0, \infty[)$.

   (a) Montrer qu'il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c(]0, \infty[)$ t.q $\|f_n - f\|_p \to 0$ quand $n \to \infty$. [On pourra utiliser la densité de $C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, exercice 6.4.]

   (b) Montrer que $F \in C(]0, \infty[) \cap \mathcal{L}^p$ et que $\|F\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_p$.

3. Montrer que $\sup\{\frac{\|F\|_p}{\|f\|_p}, \; f \in \mathcal{L}^p, \; \|f\|_p \neq 0\} = \frac{p}{p-1}$ (dans cette formule, F est donné comme précédemment à partir de f). [On pourra considérer la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par $f_n(t) = t^{-\frac{1}{p}} 1_{]1,n[}(t)$ pour $t \in]0, \infty[$).]

Exercice 6.15 (Continuité d'une application de L^p dans L^q) *Corrigé 102 page 387*
Soit (E, T, m) un espace mesuré fini, $p, q \in [1, \infty[$ et g une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ t.q. :

$$\exists\, C \in \mathbb{R}_+^\star \, ; \; |g(s)| \leq C|s|^{\frac{p}{q}} + C, \; \forall s \in \mathbb{R}. \tag{6.41}$$

1. Soit $u \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Montrer que $g \circ u \in \mathcal{L}^q_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

   On pose $L^r = L^r_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, pour $r = p$ et $r = q$. Pour $u \in L^p$, on pose $G(u) = \{h \in \mathcal{L}^q_{\mathbb{R}}(E, T, m); h = g \circ v$ p.p.$\}$, avec $v \in u$. On a donc $G(u) \in L^q$ et cette définition a bien un sens, c'est à dire que $G(u)$ ne dépend pas du choix de v dans u.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p$. On suppose que $u_n \to u$ p.p., quand $n \to \infty$, et qu'il existe $F \in L^p$ t.q. $|u_n| \leq F$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $G(u_n) \to G(u)$ dans L^q.

3. Montrer que G est continue de L^p dans L^q.

4. On considère ici $(E, T, m) = ([0,1], \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et on prend $p = q = 1$. On suppose que g ne vérifie pas (6.41). On va construire $u \in L^1$ t.q. $G(u) \notin L^1$.

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, montrer qu'il existe $\alpha_n \in \mathbb{R}$ tel que : $|g(\alpha_n)| \geq n|\alpha_n|$ et $|\alpha_n| \geq n$.

   (b) On choisit une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les conditions données à la question précédente. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ t.q.
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha}{|\alpha_n|n^2} = 1.$$

   (c) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par : $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = a_n - \dfrac{\alpha}{|\alpha_n|n^2}$ (où α_n et α sont définies dans les 2 questions précédentes). On pose $u = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n 1_{[a_{n+1}, a_n[}$. Montrer que $u \in L^1$ et $G(u) \notin L^1$.

Exercice 6.16 (Conv. p.p. et conv. des normes, par Egorov) *Corrigé 103 page 389*
Soit (E, T, m) un espace mesuré et $1 \leq p \leq \infty$. On note L^p l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Soit $(f_n)_n$ une suite d'éléments de L^p et $f \in L^p$. On suppose que $f_n \to f$ p.p., quand $n \to \infty$.

1. Montrer que $\|f\|_p \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_p$. [Traiter séparément le cas $1 \leq p < \infty$ et $p = \infty$.]

2. En prenant $(E, T, m) = (]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda)$ (où λ est la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $]0,1[$), donner un exemple pour lequel la suite $(\|f_n\|_p)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$ et $\|f\|_p < \lim_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_p$. [On pourra aussi traiter séparément les cas $1 \leq p < \infty$ et $p = \infty$.]

   Pour la suite de l'exercice, on suppose que $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$, quand $n \to \infty$.

3. Dans cette question, on suppose que $p = 1$.

   (a) On suppose que $m(E) < \infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on choisit un représentant de f_n, encore noté f_n. On choisit aussi un représentant de f, encore noté f. Soit $A \in T$ et $\varepsilon > 0$. On suppose que $f_n \to f$ uniformément sur A^c. Montrer qu'il existe n_0 t.q. :
$$n \geq n_0 \Rightarrow \int_A |f_n| dm \leq \varepsilon + \int_A |f| dm.$$

   (b) On suppose que $m(E) < \infty$. Montrer que $f_n \to f$ dans L^1, quand $n \to \infty$. [On pourra utiliser le théorème d'Egorov.]

   (c) On suppose que $m(E) = \infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $C \in T$ t.q. :
$$m(C) < \infty \text{ et } \int_{C^c} |f| dm \leq \varepsilon.$$

   (d) On suppose que $m(E) = \infty$. Montrer que $f_n \to f$ dans L^1, quand $n \to \infty$.

4. Dans cette question, on suppose que $1 < p < \infty$. Montrer que $f_n \to f$ dans L^p, quand $n \to \infty$. [S'inspirer de la méthode suggérée pour le cas $p = 1$.]

5. Dans cette question, on suppose que $p = \infty$ et que $(E, T, m) = (]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda)$. Donner un exemple pour lequel $f_n \not\to f$ dans L^∞, quand $n \to \infty$.

Exercice 6.17 (Conv. p.p. et conv. des normes, par Fatou) *Corrigé 104 page 393*
Soit (E, T, m) un espace mesuré. Pour $p \in [1, \infty]$, on note L^p l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

Soit $p \in [1, \infty[$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de L^p et $f \in L^p$. On suppose que $f_n \to f$ p.p. et que $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$, quand $n \to \infty$.

1. On suppose que $p = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $g_n = |f_n| + |f| - |f_n - f|$ (en ayant choisi des représentants de f_n et f). Montrer que $g_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En utilisant le lemme de Fatou, montrer que $f_n \to f$ dans L^1.

2. On suppose maintenant que $p \in]1, \infty[$. En utilisant le lemme de Fatou pour une suite convenable, montrer que $f_n \to f$ dans L^p.

Exercice 6.18 (Compacité $L^p - L^q$) *Corrigé 105 page 394*
Dans cet exercice, (E, T, m) est un espace mesuré. Pour tout $1 \leq r \leq \infty$, on note L^r l'espace $L^r_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ (et $\mathcal{L}^r$ l'espace $\mathcal{L}^r_{\mathbb{R}}(E, T, m)$).

1. Soit $r > 1$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de L^r. Montrer que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-intégrable, c'est-à-dire que :
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ t.q. } n \in \mathbb{N},\ A \in T,\ m(A) \leq \delta \Rightarrow \int_A |g_n| dm \leq \varepsilon.$$
[Utiliser l'inégalité de Hölder.]

   Soit $1 \leq p < q \leq \infty$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de L^q. On suppose dans toute la suite que $f_n \to f$ p.p. quand $n \to \infty$.

2. (Compacité $L^p - L^q$.) On suppose que $m(E) < \infty$.
   (a) Montrer que $f \in L^q$ (au sens "il existe $g \in \mathcal{L}^q$ t.q. $f = g$ p.p.").
   (b) Montrer que $f_n \to f$ dans L^p quand $n \to \infty$. [Utiliser la question 1 avec $g_n = |f_n - f|^p$ et un théorème du cours.]

3. On suppose que $m(E) = \infty$.
   (a) Soit $B \in T$ t.q. $m(B) < \infty$. Montrer que$f_n 1_B \to f 1_B$ dans L^p quand $n \to \infty$.
   (b) On prend ici $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, $q = 2$, $p = 1$, $f = 0$. Donner un exemple pour lequel $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$, $f_n \not\to 0$ dans L^1 quand $n \to \infty$ (et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée dans L^2, $f_n \to 0$ p.p. quand $n \to \infty$).

Exercice 6.19 (Exemples de v.a. appartenant à L^q) *Corrigé 106 page 395*
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilités et X une v.a. (réelle). Dans les trois cas suivants, donner les valeurs de $q \in [1, \infty]$ pour lesquels la variable aléatoire X appartient à l'espace $L^q(\Omega, \mathcal{A}, P)$:

1. X suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ $(\lambda > 0)$ (c'est-à-dire que la loi de X a une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue, avec $f(x) = \lambda \exp(-\lambda x) 1_{]0,+\infty[}$ pour $x \in \mathbb{R}$).

2. X suit une loi de Cauchy de paramètre $c > 0$ (la loi de X a une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue, avec $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{c}{x^2+c^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$).

3. X suit une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ $(p \in]0, 1[)$ (c'est-à-dire que $P(\{X = k\}) = p(1 - p)^{k-1}$, pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$).

6.5.2 Espaces de Hilbert, Espace L^2

Exercice 6.20 *Corrigé 107 page 397*
Soit (E, T, m) un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'élements de $L^2_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ deux à deux orthogonaux. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge (dans L^2) si et seulement si $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_2^2$ est convergente (dans $\mathbb{R}$).

Exercice 6.21 (L^p n'est pas un espace de Hilbert si $p \neq 2$) *Corrigé 108 page 397*
Montrer que $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ (muni de sa norme usuelle) n'est pas un espace de Hilbert si $1 \le p \le \infty$, $p \neq 2$. [Pour $p \neq 2$, chercher des fonctions f et g mettant en défaut l'identité du parallèlogramme, c'est-à-dire l'identité (6.18) page 143.]

Exercice 6.22 (Caractérisation des espaces de Hilbert séparables)
Soit E un espace de Hilbert (réel) de dimension infinie. Montrer que E est séparable si et seulement si il existe une base hilbertienne dénombrable de E [l'une des implications a d'ejà été vue…].

Exercice 6.23 (projection sur le cône positif de L^2) *Corrigé 109 page 397*
Soit (X, T, m) un espace mesuré et $E = L^2_{\mathbb{R}}(X, T, m)$. On pose $C = \{f \in E,\ f \ge 0 \text{ p.p.}\}$.

1. Montrer que C est une partie convexe fermée non vide de E.
2. Soit $f \in E$. Montrer que $P_C f = f^+$.

Exercice 6.24 (Exemple de non existence de la projection) *Corrigé 110 page 398*
Dans cet exercice, on donne un exemple t.q. :
E est un espace de Banach réel, F est un sous espace vectoriel fermé de E, $g \in E \setminus F$ (et donc $d(g, F) = \inf\{\|g - f\|_E,\ f \in F\} > 0\ldots$) et il n'existe pas d'élément $f \in E$ t.q. $d(g, F) = \|g - f\|_E$.

On prend $E = C([0, 1], \mathbb{R})$, on munit E de la norme habituelle, $\|f\|_E = \max\{|f(x)|,\ x \in [0, 1]\}$. On pose $F = \{f \in E;\ f(0) = 0,\ \int_0^1 f(x)dx = 0\}$. Enfin, on prend $g \in E$ défini par $g(x) = x$, pour tout $x \in [0, 1]$.

1. Montrer que E est un espace de Banach (réel).
2. Montrer que F est un sous espace vectoriel fermé de E.
3. Soit $f \in F$. Montrer que $\|g - f\|_E \ge 1/2$. [On pourra remarquer que $\int_0^1 |(g - f)(x)|dx \ge \int_0^1 (g - f)(x)dx = 1/2$.]
4. Montrer qu'il n'existe pas d'élément $f \in F$ t.q. $\|g - f\|_E = 1/2$.
5. Montrer que $d(g, F) = 1/2$. [On pourra, par exemple, montrer que $\|g - f_n\|_E \to 1/2$, avec f_n défini par $f_n(x) = -\beta_n x$, pour $x \in [0, 1/n]$, $f_n(x) = (x - 1/n) - \beta_n/n$, pour $x \in [1/n, 1]$, et β_n choisi pour que $f_n \in F$.]

Exercice 6.25 (Lemme de Lax-Milgram) *Corrigé 111 page 400*
Soit E est un espace de Hilbert réel et a une application bilinéaire de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$. On note $(\cdot/\cdot)$ le produit scalaire dans E et $\|\cdot\|$ la norme dans E. On suppose qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$ t.q. :

$$|a(u, v)| \le C\|u\|\|v\|,\ \forall u, v \in E \text{ (continuité de } a),$$

$$a(u, u) \ge \alpha\|u\|^2,\ \forall u \in E \text{ (coercivité de } a).$$

Soit $T \in E'$. On va montrer, dans cet exercice, qu'il existe un et un seul $u \in E$ t.q. $T(v) = a(u, v)$ pour tout $v \in E$ (ceci est le lemme de Lax-Milgram).

1. On suppose, dans cette question, que a est symétrique. On définit une application bilinéaire, notée $(\cdot/\cdot)_a$ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ par $(u/v)_a = a(u,v)$. Montrer que $(\cdot/\cdot)_a$ est un produit scalaire sur E et que la norme induite par ce produit scalaire est équivalente à la norme $\|\cdot\|$. En déduire qu'il existe un et un seul $u \in E$ t.q. $T(v) = a(u,v)$ pour tout $v \in E$. [Utiliser le théorème de représentation de Riesz.]

2. On ne suppose plus que a est symétrique.

   (a) Soit $u \in E$, Montrer que l'application $v \mapsto a(u,v)$ est un élément de E'. En déduire qu'il existe un et un seul élément de E, notée Au, t.q. $(Au/v) = a(u,v)$ pour tout $v \in E$.

   On note, dans la suite A l'application qui à $u \in E$ associe $Au \in E$.

   (b) Montrer que A est linéaire continue de E dans E.

   (c) Montrer que $\text{Im}(A)$ est fermé

   (d) Montrer que $(\text{Im}(A))^\perp = \{0\}$.

   (e) Montrer que A est bijective et en déduire qu'il existe un et un seul $u \in E$ t.q. $T(v) = a(u,v)$ pour tout $v \in E$.

Exercice 6.26 (Exemple de projection dans L^2) *Corrigé 112 page 402*
On désigne par λ la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $]0,1[$, par L^p l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(]0,1[, B(]0,1[), \lambda)$ et par $\mathcal{L}^p$ l'espace $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(]0,1[, B(]0,1[), \lambda)$.

Soit $g \in L^2$.

1. Soit $v \in L^2$ et $\phi \in C_c^\infty(]0,1[,\mathbb{R})$ (on rappelle que $\phi \in C_c^\infty(]0,1[,\mathbb{R})$ signifie que ϕ est une application de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^∞, et qu'il existe $K \subset]0,1[$, K compact, t.q. $\phi(x) = 0$ pour tout $x \in]0,1[\setminus K)$. Montrer que $vg\phi' \in L^1$.

   On pose $\mathcal{C} = \{v \in L^2;\ v \le 1$ p.p., $\int vg\phi' d\lambda \le \int \phi d\lambda$, pour tout $\phi \in C_c^\infty(]0,1[,\mathbb{R})$, $\phi \ge 0\}$. (On rappelle que $\phi \ge 0$ signifie $\phi(x) \ge 0$ pour tout $x \in]0,1[$.)

2. Montrer que $\mathcal{C}$ est un convexe fermé non vide de L^2.

3. On désigne par $\mathbf{1}$ la fonction constante et égale à 1 sur $]0,1[$. Soit $u \in \mathcal{C}$. Montrer que :
   $(\|u - \mathbf{1}\|_2 \le \|v - \mathbf{1}\|_2$ pour tout $v \in \mathcal{C}) \Leftrightarrow (\int (\mathbf{1} - u)(u - v) d\lambda \ge 0$ pour tout $v \in \mathcal{C})$.

4. Soit $u \in \mathcal{C}$ t.q. $\|u - \mathbf{1}\|_2 \le \|v - \mathbf{1}\|_2$ pour tout $v \in \mathcal{C}$. On suppose que $u, g \in C^1(]0,1[,\mathbb{R})$.

   (a) Montrer que $(ug)'(x) \ge -1$ pour tout $x \in]0,1[$.

   (b) Soit $x \in]0,1[$ t.q. $u(x) < 1$. Montrer que $(ug)'(x) = -1$.

   (c) Montrer que u est solution du problème suivant:
   $(ug)'(x) \ge -1$, pour tout $x \in]0,1[$,
   $u(x) \le 1$, pour tout $x \in]0,1[$,
   $(1 + (ug)'(x))(u(x) - 1) = 0$, pour tout $x \in]0,1[$.

Exercice 6.27 (Approximation dans L^2) *Corrigé 113 page 406*

On désigne par λ la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}$, par L^p l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda)$ et par $\mathcal{L}^p$ l'espace $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda)$. On note $dt = d\lambda(t)$.
Pour $f \in L^2$ et $k \in \mathbb{N}^\star$, on définit $T_k f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$T_k f(x) = k \int_{\frac{n(x)}{k}}^{\frac{n(x)+1}{k}} f(t)dt, \tag{6.42}$$

où $n(x)$ est l'entier de $\mathbb{Z}$ tel que $\dfrac{n(x)}{k} \leq x < \dfrac{n(x)+1}{k}$ (l'entier n dépend donc de x).

1. Soit $k \in \mathbb{N}^\star$ et $f \in L^2$. Montrer que $T_k f \in L^2$ (plus précisément, $T_k f \in \mathcal{L}^2$ et on confond alors, comme d'habitude, $T_k f$ avec $\{g \in \mathcal{L}^2,\ g = T_k f \text{ p.p.}\}$) et que $\|T_k f\|_2 \leq \|f\|_2$, pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$.

2. Soit $f \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (i.e. f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et à support compact). Montrer que $T_k f \to f$ dans L^2 quand $k \to \infty$.

3. Soit $f \in L^2$. Montrer que $T_k f \to f$ dans L^2 quand $k \to \infty$.

Exercice 6.28 (Projections orthogonales) *Corrigé 114 page 407*
On pose $H = L^2_{\mathbb{R}}(]-1,+1[, \mathcal{B}(]-1,+1[), \lambda)$. (On rappelle que $\mathcal{B}(]-1,+1[)$ est la tribu borélienne de $]-1,1[$ et λ la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(]-1,+1[)$.) Soit $F = \{f \in H \text{ t.q. } \int_{]-1,+1[} f\, d\lambda = 0\}$. Soit $G = \{f \in H \text{ t.q. } \int_{]-1,0[} f\, d\lambda = \int_{]0,1[} f\, d\lambda\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels fermés de H. Déterminer les sous-espaces $F^\perp$, $G^\perp$ et $F \cap G$.

2. Calculer, pour $g \in H$, les projections orthogonales $P_F(g)$ et $P_G(g)$ de g sur F et G.

Exercice 6.29 (Projection orthogonale dans L^2) *Corrigé 115 page 408*
On pose $L^2 = L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ (muni de sa structure hilbertienne habituelle) et, pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ donnés, $\alpha < \beta$, $\mathcal{C} = \{f \in L^2;\ \alpha \leq f \leq \beta \text{ p.p.}\}$.

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est vide si et seulement si $\alpha\beta > 0$.

2. On suppose maintenant que $\alpha\beta \leq 0$. Montrer que $\mathcal{C}$ est une partie convexe fermée non vide de L^2. Soit $f \in L^2$, montrer que $P_{\mathcal{C}} f(x) = \max\{\min\{f(x), \beta\}, \alpha\}$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$. ($P_{\mathcal{C}} f$ désigne la projection de f sur $\mathcal{C}$.)

Exercice 6.30 *Corrigé 116 page 409*
Soit (E, T, m) un espace mesuré, et $L^p = L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

1. On suppose ici qu' il existe A et $B \in T$ t.q. $A \cap B = \emptyset$, et $0 < m(B) < +\infty$, $0 < m(A) < +\infty$. Montrer que L^p est un Hilbert si et seulement si $p = 2$. [On pourra utiliser l'identité du parallèlogramme avec des fonctions de L^p bien choisies.]

2. Montrer que pour $m = \delta_0$ (mesure de Dirac en 0), $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$ est un Hilbert pour tout $p \in [1, +\infty]$.

Exercice 6.31 (Espace l^2) *Corrigé 117 page 410*

On note m la mesure du dénombrement sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, c'est-à-dire $m(A) = \text{card}(A)$ si A est fini et $m(A) = \infty$ si A n'est pas fini.

On note $l^2 = L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$.

1. Montrer que chaque élément de l^2 ne contient qu'un seul élément de l'espace $\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$.
2. Montrer que l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur l^2 donne :
$$(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n)^2 \le \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^2 \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n^2$$
pour toutes suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ t.q. $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^2 < \infty$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n^2 < \infty$.
3. Soit $\varphi : \mathbb{N}^\star \to \mathbb{N}^\star$, bijective. Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}^\star} \frac{\varphi(n)}{n^2} = \infty$. [On pourra commencer par montrer que $\sum_{p=1}^n \frac{1}{\varphi(p)} \le \sum_{p=1}^n \frac{1}{p}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ puis utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.]

Exercice 6.32 (Isométrie d'un espace de Hilbert avec l^2) *Corrigé 118 page 411*

Soit H un espace de Hilbert réel, de dimension infinie et séparable. Soit $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ une base hilbertienne de H (une telle base existe, cf. proposition 6.17).

Pour $u \in H$, on définit $a_u \in l^2$ (l^2 est défini à l'exercice 6.31) par $a_u(n) = (u/e_n)_H$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. (On montrera tout d'abord que a_u est bien un élément de l^2.)

Montrer que l'application $A : u \mapsto a_u$ (est linéaire et) est une isométrie de H dans l^2, c'est-à-dire que $\|a_u\|_{l^2} = \|u\|_H$ pour tout $u \in H$.

Montrer que A est bijective (il faut donc montrer que, pour tout $a \in l^2$, il existe $u \in H$ t.q. $a = a_u$).

Exercice 6.33 (Tribu et partition, suite et fin)

Cet exercice est la suite de l'exercice 3.35. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et a une partition de Ω On note $\tau(a)$ la tribu engendrée par a (voir l'exercice 3.35). On suppose que la partition a est mesurable, c'est-à-dire que ses atomes sont des éléments de $\mathcal{A}$ (on a donc $\tau(a) \subset \mathcal{A}$).

Donner une base hilbertienne de $L^2(\Omega, \tau(a), P)$ construite à partir des atomes de a.

En déduire l'expression de la projection orthogonale d'une variable aléatoire X appartenant à $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sur le sous espace $L^2(\Omega, \tau(a), P)$.

6.5.3 Théorème de Radon-Nikodym et Dualité dans les espaces L^p

Exercice 6.34 (Fonctions absolument continues) *Corrigé (partiel) 119 page 412*

Soit $-\infty < a < b < +\infty$. On admet les 2 résultats suivant :

- Toute fonction monotone définie sur $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, est dérivable en presque tout point de $]a, b[$.
- Soit $f \in L^1_{\mathbb{R}}(]a, b[, \mathcal{B}(]a, b[), \lambda)$. Pour $x \in [a, b]$, on pose $F(x) = \int f 1_{]a,x[} d\lambda$. La fonction F est alors dérivable en presque tout point de $]a, b[$ et on a $F' = f$ p.p..

1. (Fonctions monotones.) Soit f une fonction monotone croissante définie sur $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

(a) Montrer que $f' \in L^1_{\mathbb{R}}(]a,b[,\mathcal{B}(]a,b[),\lambda)$ et que

$$\int f' 1_{]a,b[} d\lambda \leq f(b) - f(a).$$

[On pourra poser $f(x) = f(b)$ pour $x > b$, considérer $f_n(x) = n(f(x+\frac{1}{n}) - f(x))$ et remarquer que $f_n \to f'$ p.p. sur $]a,b[$.]

(b) Donner un exemple pour lequel l'inégalité de la question précédente est stricte. (Les courageux pourront chercher un exemple pour lequel f est continue...)

2. (Fonctions absolument continues.)

Une fonction définie sur $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est dite *absolument continue* si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour toute famille finie d'intervalles deux à deux disjoints $(]a_k,b_k[)_{1\leq k\leq n}$ dont la somme des longueurs est inférieure à δ, on a $\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$.

(a) Montrer que "absolue continuité" implique "uniforme continuité".

(b) Montrer que l'ensemble des fonctions absolument continues sur $[a,b]$ forme un espace vectoriel.

3. (Fonctions absolument continues et fonctions monotones.) Une fonction f définie sur $[a,b]$ (et à valeurs dans $\mathbb{R}$) est dite *à variation bornée* s'il existe C t.q. pour toute subdivision du segment $[a,b]$, $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$, on ait $\sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq C$. Pour une fonction f à variation bornée, on peut définir, pour $a < x \leq b$, $V_a^x[f]$ par :

$$V_a^x[f] = \sup\{\sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})|\,,\ a = x_0 < x_1 < ... < x_n = x,\ n \in \mathbb{N}^\star\}.$$

On pose aussi $V_a^a[f] = 0$.

(a) Montrer que toute fonction absolument continue est à variation bornée.

(b) Montrer pour toute fonction f (définie sur $[a,b]$ et) absolument continue, la fonction $x \mapsto V_a^x[f]$ est absolument continue sur $[a,b]$. En déduire que toute fonction absolument continue (définie sur $[a,b]$) est la différence de deux fonctions absolument continues monotones croissantes (et est donc dérivable en presque tout point de $]a,b[$).

4. Soit $f \in L^1_{\mathbb{R}}(]a,b[,\mathcal{B}(]a,b[),\lambda)$. Pour $x \in [a,b]$, on pose $F(x) = \int f 1_{]a,x]} d\lambda$. Montrer que F absolument continue.

5. Soit F une fonction absolument continue et monotone croissante de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On prolonge cette fonction sur $\mathbb{R}$ en posant $F(x) = F(a)$ si $x < a$ et $F(x) = F(b)$ si $x > b$. Une version étendue du théorème de Carathéodory (cette version étendue est donnée par le théorème 2.5, pour ce résultat il suffit de F continue croissante) donne l'existence d'une (et une seule) mesure m_F sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $m_F(]\alpha,\beta[) = F(\beta) - F(\alpha)$ pour tout $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$.

(a) Montrer que m_F est absolument continue par rapport à λ. [Utiliser la régularité de λ et l'absolue continuité de F.]

(b) Montrer qu'il existe $g \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ t.q. $F(\beta) - F(\alpha) = \int g 1_{]\alpha,\beta[} d\lambda$, pour tout $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$. Montrer que $g = F'$ p.p. sur $]a,b[$.

6. Soit F une fonction absolument continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que F est dérivable en presque tout point de $]a, b[$, que $F' \in L^1_{\mathbb{R}}(]a, b[, \mathcal{B}(]a, b[), \lambda)$ et que pour tout $x \in [a, b]$ on a

$$F(x) - F(a) = \int F' 1_{]a,x[} d\lambda.$$

Exercice 6.35 (Dualité L^1-L^∞ par le théorème de Radon-Nikodym) *Corrigé 120 page 416*
Soit (E, T, m) un espace mesuré fini et $T \in (L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m))'$. On suppose que T est positive, c'est à dire que, pour $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, $f \geq 0$ p.p. implique $T(f) \geq 0$.

1. Pour $A \in T$, on pose $\mu(A) = T(1_A)$. Montrer que μ est bien définie et que μ est une mesure finie sur T.
2. En utilisant le théorème de Radon-Nikodym, montrer qu'il existe $g \in \mathcal{M}_+$ t.q. $T(1_A) = \int g 1_A dm$ pour tout $A \in T$.
3. Montrer que $g \in L^\infty_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ (plus précisément, il existe $h \in \mathcal{L}^\infty_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ t.q. $h = g$ p.p.). [On pourra montrer que $\|g\|_\infty \leq \|T\|_{(L^1)'}$ en choisissant bien A dans la formule trouvée à la question précédente.]
4. Montrer que $T(f) = \int g f dm$ pour tout $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

Exercice 6.36 (Une démonstration de la dualité $L^p - L^q$ pour $p < 2$) *Corrigé 121 page 418*
Soit (E, T, m) un espace mesuré $\sigma-$fini et $1 \leq p < 2$. On pose $q = p/(p-1)$ et on note L^r l'espace $L^r_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ (pour $r = p$, $r = q$ et $r = 2$). Soit $T \in (L^p)'$.

1. On considére d'abord le cas où $m(E) < +\infty$.
   (a) Montrer que $L^2 \subset L^p$ et que l'injection canonique de L^2 dans L^p est continue.
   (b) Montrer qu'il existe $g \in L^2$ t.q. $T(f) = \int f g dm$ pour tout $f \in L^2$.
   (c) Montrer que la fonction g, trouvée à la question précédente, appartient à L^q [distinguer les cas $p > 1$ et $p = 1$. Dans le cas $p > 1$, on pourra considérer les fonctions $f_n = |g|^{(q-2)} g 1_{\{|g| \leq n\}}$. Dans le cas $p = 1$, prendre $f = sgn(g) 1_A$ où $A = \{|g| > \|T\|_{(L^p)'}\}$.]
   (d) Si $f \in L^p$, montrer que $f_n = f 1_{\{|f| \leq n\}} \in L^2$. En déduire que il existe $g \in L^q$ t.q. $T(f) = \int f g dm$, pour tout $f \in L^p$.
2. On considére maintenant le cas où $m(E) = +\infty$. Comme m est σ-finie, on peut écrire $E = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, avec $An \subset A_{n+1}$ et $m(A_n) < +\infty$. On note $T_n = \{A \in T,\ A \subset A_n\}$, $m_n = m_{|T_n}$ et $L^r(m_n) = L^r_{\mathbb{R}}(A_n, T_n, m_n)$ ($r = p$ ou q).
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $f \in L^p(m_n)$, on pose $T_n(f) = T(\tilde{f})$ avec $\tilde{f} = f$ p.p. sur A_n et $\tilde{f} = 0$ p.p. sur $(A_n)^c$. Montrer que $T_n \in (L^p(m_n))'$ et qu'il existe $g_n \in L^q(m_n)$ t.q. :

   $$T_n(f) = \int f g_n dm_n,\ \forall f \in L^p(m_n).$$

   On utilise $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans les questions suivantes.
   (b) Montrer que si $m \geq n$, $g_n = g_m$ p.p. sur A_n.
   (c) On définit $g : E \to \mathbb{R}$ par $g = g_n$ sur A_n.

i. Montrer que $g \in L^q(E)$. (Distinguer les cas $q < +\infty$ et $q = +\infty$.)
ii. Montrer que $T(f) = \int fgdm$, pour tout $f \in L^p$.

Exercice 6.37 (Dualité $L^p - L^q$)
Lorsque $p < 2$, on propose d'étudier la démonstration suivante de la dualité $L^p - L^q$: soit $T \in (L^p)'$;

1. On considére d'abord le cas où $m(E) < +\infty$:
   (a) Montrer que $L^2 \subset L^p$ et que l'injection canonique de L^2 dans L^p est continue.
   (b) En déduire que il existe $g \in L^2$ t.q. $T(f) = \displaystyle\int fgdm, \quad \forall \ f \in L^2$.
   (c) Montrer que $g \in L^q$ (distinguer les cas $p > 1$ et $p = 1$. Dans le cas $p > 1$, on pourra considérer les fonctions $f_n = |g|^{(q-2)} g 1_{\{|g| \le n\}}$. Dans le cas $p = 1$, prendre $f = sgn(g) 1_A$ où $A = \{|g| > \|T\|_{(L^p)'}\}$.
   (d) Si $f \in L^p$, montrer que $f_n = f 1_{\{|f| \le n\}} \in L^2$. En déduire que il existe $g \in L^q$ t.q. $T(f) = \displaystyle\int fgdm, \quad \forall \ f \in L^p$.
2. On considére maintenant le cas où $m(E) = +\infty$. Comme m est σ-finie, on peut écrire $E = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, avec $An \subset A_{n+1}$ et $m(A_n) < +\infty$.
   (a) A n fixé, définir à partir de T une application linéaire continue $T_n \in \Big(L^p(A_n)\Big)'$ t.q. : $\exists g_n \in L^q(A_n)$; $T_n(f) = \displaystyle\int_{A_n} fgdm, \quad \forall f \in L^p(A_n)$.
   (b) Montrer que si $m \ge n$, $g_n = g_m$ pp sur A_n.
   (c) On définit $g : E \to \mathbb{R}$ par $g = g_n$ sur A_n.
   (i) Montrer que $g \in L^q(E)$. (Distinguer les cas $q < +\infty$ et $q = +\infty$.)
   (ii) Montrer que $T(f) = \displaystyle\int fgdm, \quad \forall \ f \in L^p$.

Exercice 6.38 (Démonstration du théorème de dualité $L^p - L^q$)
Soient (E, T, m) un espace mesuré σ-fini : il existe une famille dénombrable $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ensembles A_n qu'on peut prendre disjoints deux à deux tels que $m(A_n) < +\infty$ et $E = \displaystyle\bigcup_{n \in N} A_n$. Soient $p \in [1, +\infty[$ et T une forme linéaire continue sur $L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m) = L^p$.

Partie 1. (Rappel du cours.) On considère d'abord le cas $p = 2$, montrer qu'il existe un unique $g \in L^2$ t.q. $T(f) = \displaystyle\int fgdm, \quad \forall \ f \in L^2$.

Partie 2. On s'intéresse maintenant au cas $p \in [1, 2]$

1. Soit ψ, une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$. Montrer que si $\psi \in L^r$, où $r = \dfrac{2p}{2-p}$, alors, pour toute fonction f de L^2, la fonction $f\psi$ est dans L^p.
   Montrer qu'il existe une fonction $\psi \in L^r$ de la forme : $\psi = \displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n 1_{A_n}, \ \ \alpha_n > 0$.
   Dans toute la suite, ψ désignera une fonction particulière de la forme précédente.

2. Déduire des questions précédentes l'existence d'une unique fonction $G \in L^2$ t.q., pour toute fonction f de L^p t.q. $\dfrac{f}{\psi} \in L^2$, on a $T(f) = \displaystyle\int f \frac{G}{\psi} dm$.

3. Soient $p \in]1,2[$, et q tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$; on définit les fonctions f_n, de E dans $\mathbb{R}$, par :

$$f_n = |g|^{(q-2)} g 1_{\{|g| \le n\}} 1_{B_n} \text{ où } g = \frac{G}{\psi} \text{ et } B_n = \bigcup_{p=1}^{n} A_p. \tag{6.43}$$

   (a) Montrer que : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{f_n}{\psi} \in L^2$.

   (b) En déduire que $g = \dfrac{G}{\psi} \in L^q$. [*Il est fortement conseillé d'utiliser la continuité de T de L^p dans $\mathbb{R}$.*]

4. Soient $p = 1$ et $f \in L^1$. On définit : $f_n = \mathrm{sgn}(g) 1_A 1_{B_n}$ où $A = \{|g| > \|T\|_{(L^p)'}\}$.

   (a) Montrer que : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{f_n}{\psi} \in L^2$.

   (b) En déduire que $m(A \cap B_n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, et que $g\ (= \dfrac{G}{\psi}) \in L^\infty$.

5. Soient $p \in [1,2[$ et $f \in L^p$, on définit $f_n = f 1_{\{|f| \le n\}} 1_{B_n}$. Montrer que $\dfrac{f_n}{\psi} \in L^2$ et que f_n tend vers f dans L^p. En déduire que il existe $g \in L^q$ t.q. $T(f) = \displaystyle\int fg dm$, $\ \forall\ f \in L^p$.

Partie 3. On s'intéresse maintenant au cas $p > 2$, et on suppose ici que $T \ge 0$, i.e. $T(f) \ge 0$ pour toute fonction $f \ge 0$ p.p. Soit q tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

1. On suppose dans cette question que la forme linéaire T est, de plus, continue pour la norme $\|.\|_{L^1}$.

   (a) Montrer qu'il existe $g \in L^\infty$ t.q. $T(f) = \displaystyle\int fg dm$ pour toute fonction $f \in L^1 \cap L^p$.

   (b) Montrer que $g \in L^q$. [*On pourra utiliser un raisonnement similaire à celui de la question 3 de la partie 2*].

   (c) En déduire qu'il existe $g \in L^q$ t.q. $T(f) = \displaystyle\int fg dm$ pour toute fonction $f \in L^p$ et que $\|g\|_{L^q} = \|T\|_{(L^p)'}$. [*On pourra utiliser un raisonnement similaire à celui de la question 5 de la partie 2*].

2. On suppose ici qu'il existe une suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de formes linéaires sur L^p vérifiant les quatre propriétés suivantes :

$$\forall\ f \in L^p; f \ge 0,\quad 0 \le T_n(f) \le T(f) \tag{6.44}$$
$$\forall\ f \in L^p; f \ge 0,\quad T_n(f) \le T_{n+1}(f) \tag{6.45}$$
$$\forall\ f \in L^p; f \ge 0,\quad T_n(f) \le n \int f dm \tag{6.46}$$
$$\forall\ f \in L^p; f \ge 0,\quad T_n(f) \text{ converge vers } T(f) \text{ lorsque } n \text{ tend vers } +\infty. \tag{6.47}$$

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $g_n \in L^q$ tel que $T_n(f) = \int g_n f dm$, pour tout $f \in L^p$. Montrer que $\|g_n\|_{L^q} \le \|T\|_{(L^p)'}$

(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \le g_n \le n$ p.p. et $g_n \le g_{n+1}$ p.p..

(c) Montrer qu'il existe $g \in L^q$ t.q. $T(f) = \int g f dm$, pour toute fonction $f \in L^p$.

3. Soit T_n l'application de L^p dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{aligned} \text{Si } f \in L^p \text{ et } f \ge 0, \qquad & T_n(f) = \inf_{\varphi \in L^p, 0 \le \varphi \le f} \Big(T(\varphi) + n \int (f - \varphi) dm \Big), \\ \text{si } f \in L^p \text{ est quelconque,} \quad & T_n(f) = T_n(f^+) - T_n(f^-) \end{aligned}$$

Montrer que T_n vérifie les propriétés (1) à (4).

4. Montrer que T_n est linéaire .

5. En déduire que, pour toute forme linéaire continue positive T sur L^p, il existe une fonction g de L^q t.q. $T(f) = \int f g dm$.

6. Montrer que, pour toute forme linéaire continue T sur L^p, il existe une fonction g de L^q t.q. $T(f) = \int f g dm$. [*Décomposer T en une partie positive et une partie négative*].

6.5.4 Convergence faible, faible-$\star$, étroite, en loi...

Exercice 6.39 *Corrigé 122 page 421*
Soient (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2 = L^2(E, T, m)$ et $f \in L^2$ t.q. la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende faiblement vers f dans L^2, c'est-à-dire : $\int f_n \varphi dm \to \int f \varphi dm$ pour toute fonction $\varphi \in L^2$.

1. Montrer que $\|f\|_2 \le \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_2$.
2. On suppose de plus que $\|f_n\|_2 \to \|f\|_2$ lorsque $n \to +\infty$. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers f dans L^2.

Exercice 6.40 (Convergence faible) *Corrigé 123 page 422*
Soit (E, T, m) un espace mesuré $\sigma-$fini. Pour $1 \le r \le \infty$, on note L^r l'espace $L^r_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Soit $1 \le p < \infty$ et $q = p/(p-1)$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p$ et $f \in L^p$.

1. Montrer que $f_n \to f$ faiblement dans L^p quand $n \to \infty$ (voir la dénition 6.17) si et seulement si

$$\int f_n g dm \to \int f g dm, \ \forall g \in L^q. \tag{6.48}$$

2. Montrer que $\|f\|_p \le \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_p$ si $f_n \to f$ faiblement dans L^p, quand $n \to \infty$. [Utiliser (6.48) avec un choix convenable de g.]

   On suppose dans les questions suivantes (questions 3 à 7) que:

$$m(E) < \infty, \ f_n \to f \text{ p.p.}, \ \exists C \text{ t.q. } \|f_n\|_p \le C, \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{6.49}$$

3. On suppose, dans cette question, que $p > 1$.

   (a) Soit $N \in \mathbb{N}$ et $g \in L^q$ t.q. $g = 0$ p.p. sur E_N^c avec $E_N = \cap_{n \geq N}\{x \in E;\, |f_n(x) - f(x)| \leq 1\}$. Montrer que $\int f_n g dm \to \int f g dm$, quand $n \to \infty$.

   (b) Montrer que $f_n \to f$ faiblement dans L^p. [Pour $g \in L^q$, introduire $g_N = g 1_{E_N}$.]

   (c) Donner un exemple avec $(E, T, m) = (]0, 1[, \mathcal{B}(]0, 1[), \lambda)$ pour lequel $f_n \not\to f$ dans L^p.

4. On suppose, dans cette question, que $p = 1$. Montrer que $\|f\|_1 \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_1$. Donner un exemple avec $(E, T, m) = (]0, 1[, \mathcal{B}(]0, 1[), \lambda)$ pour lequel $f_n \not\to f$ faiblement dans L^1, quand $n \to \infty$.

5. On suppose, dans cette question, que $p > 1$ et on prend $1 \leq r < p$. Montrer que $f_n \to f$ dans L^r, quand $n \to \infty$. [On pourra, par exemple, utiliser le théorème de Vitali pour la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $g_n = |f_n - f|^r$.]

6. Pour cette question, on retire dans (6.49) l'hypothèse $m(E) < \infty$ et on suppose que $p > 1$. Montrer que $f_n \to f$ faiblement dans L^p.

7. Dans cette question, on conserve l'hypothèse (6.49) mais on ne suppose plus que $f \in L^p$. Montrer que f appartient nécessairement à L^p.

8. On prend maintenant $(E, T, m) = (]0, 1[, \mathcal{B}(]0, 1[), \lambda)$ et on définit f_n, pour $n \in \mathbb{N}$ par $f_n = 1$ p.p. sur $]2k/n, (2k + 1)/n[$ pour $k \in \mathbb{N}$, $(2k + 1)/n \leq 1$ et $f_n = -1$ p.p. sur $]2k - 1/n, 2k/n[$ pour $k \in \mathbb{N}^\star$, $2k/n \leq 1$. Montrer que $f_n \to 0$ faiblement dans L^p, pour tout $1 \leq p < \infty$. [On pourra, par exemple, utiliser la densité de $C([0, 1], \mathbb{R})$ dans L^1.]

Exercice 6.41 Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions de $]0, 1[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = (n - n^2x)^+$. On note λ la mesure de Lebesgue sur la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ des boréliens de $]0, 1[$, et $L^p = L^p_{\mathbb{R}}(]0, 1[, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ pour $p \in [1, +\infty]$.

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans L^1.

2. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée dans L^p pour $p > 1$.

3. Y-a-t'il convergence simple, convergence presque partout, convergence uniforme, convergence en mesure, convergence dans L^p ($p \in [1, +\infty]$) de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (justifier vos réponses...) ?

4. Montrer que pour toute fonction $\varphi \in C([0, 1], \mathbb{R})$, on a $\int f_n \varphi d\lambda \to \varphi(0)$. En déduire que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas faiblement dans L^1 (utiliser le fait que la mesure de Dirac n'est pas une mesure de densité, cf exercice 5.2).

Exercice 6.42 Soient (E, T, m) un espace mesuré t.q. $m(E) < +\infty$, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $L^2 = L^2(E, T, m)$ t.q. :

(i) la suite $(\|f_n\|_2)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée,

(ii) $f_n \to f$ $\displaystyle\int f_n g dm \to \int f g dm$ quand $n \to +\infty$.

1. Montrer que $f \in L^2$ et $\|f\|_2 \leq \sup\limits_{n\geq 1} \|f_n\|_2$.

2. Soit $\varepsilon > 0$, on note $B_n = \{x \in E; |f(x) - f_n(x)| > \varepsilon\}$. Montrer que $m(B_n) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. [*On pourra introduire* $A_p = \bigcup_{n \geq p} B_n$ *et montrer que* $m(A_p) \to 0$ *quand* $p \to +\infty$.]

3. Montrer que $f_n \to f$ dans L^1 quand $n \to +\infty$. [*On pourra écrire* $\int |f_n - f| dm = \int_{|f_n - f| > \varepsilon} |f_n - f| dm + \int_{|f_n - f| \leq \varepsilon} |f_n - f| dm$.]

4. Montrer, en donnant un exemple, que f_n peut ne pas converger dans L^2, quand $n \to +\infty$.

5. Montrer que, pour tout $g \in L^2$, on a :

$$\int f_n g \, dm \to \int f g \, dm \text{ quand } n \to +\infty \tag{6.50}$$

(on dit que $f_n \to f$ "faiblement" dans L^2). [*Décomposer* $\int (f - f_n) g dm$ *de manière semblable à la question 3.*]

Exercice 6.43 Soient (E, T, m) un espace mesuré t.q. $m(E) < +\infty$ et $p \in [1, +\infty]$. Pour $r \in [1, +\infty]$, on note $L^r = L^r_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et $\|.\|_r$ la norme usuelle sur L^r. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p$, t.q. :

(i) la suite $(\|f_n\|_p)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée,

(ii) $f_n \to f$ pp quand $n \to +\infty$.

1. Montrer que $f \in L^p$ et $\|f\|_p \leq \sup_{n \geq 1} \|f_n\|_p$.

2. On suppose (dans cette question seulement) que $p > 1$. Soit $r \in [1, p[$, montrer que $f_n \to f$ dans L^r quand $n \to +\infty$.

3. Soit q le conjugué de p (i.e. tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), montrer que, pour tout $g \in L^q$, on a :

$$\int f_n g \, dm \to \int f g \, dm \text{ quand } n \to +\infty.$$

Peut-on dire que $f_n \to f$ "faiblement" dans L^p ?

Exercice 6.44 (Convergence forte contre convergence faible)
Soit (E, T, m) un espace mesuré. Pour $r \in [1, +\infty]$, on note L^r l'espace $L^r_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.
Soit $p \in [1, \infty[$ et q l'exposant conjugué de p. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p$, $u \in L^p$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^q$ et $v \in L^q$.

1. On suppose que $u_n \to u$ faiblement dans L^p et $v_n \to v$ dans L^q, quand $n \to \infty$. Montrer que $u_n v_n \to uv$ faiblement dans L^1, quand $n \to \infty$.

2. On suppose que $p = 1$, $u_n \to u$ faiblement dans L^1, $v_n \to v$ p.p., quand $n \to \infty$, et qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ t.q., pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq C$ p.p.. Montrer que $u_n v_n \to uv$ faiblement dans L^1, quand $n \to \infty$.

Exercice 6.45 (Convergence faible et non linéarité) *Corrigé 124 page 425*

On désigne par λ la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $]0,1[$, par L^p l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(]0,1[,B(]0,1[),\lambda)$ et par $\mathcal{L}^p$ l'espace $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(]0,1[,B(]0,1[),\lambda)$.

1. (Unicité de la limite faible). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ et $u, v \in L^1$. On suppose que $u_n \to u$ faiblement dans L^1, quand $n \to \infty$, (c'est-à-dire que $T(u_n) \to T(u)$ pour toute application T linéaire continue de L^1 dans $\mathbb{R}$) et que $u_n \to v$ faiblement dans L^1.
   (a) Montrer que $\int (u-v)\phi d\lambda = 0$, pour tout $\phi \in L^\infty$.
   (b) Montrer que $u = v$ p.p.. [Choisir convenablement ϕ dans l'égalité précécente.]
2. (Convergence forte contre convergence faible) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^\infty$ et $v \in L^\infty$. On suppose qu'il existe $C > 0$ t.q. $\|v_n\|_\infty \le C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $v_n \to v$ p.p., quand $n \to \infty$.
   (a) Montrer que $v_n \to v$ dans L^p, quand $n \to \infty$, pour tout $1 \le p < \infty$.
   (b) Donner un exemple pour lequel $v_n \not\to v$ dans L^∞.
   (c) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ et $u \in L^1$. On suppose que $\|u_n\|_\infty \le C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $u_n \to u$ faiblement dans L^1, quand $n \to \infty$. Montrer que $\int u_n v_n d\lambda \to \int uv d\lambda$, quand $n \to \infty$. [Ecrire $v_n = v + (v_n - v)$.]

   On se donne maintenant une fonction $\varphi \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
3. Soit $u \in \mathcal{L}^\infty$. Montrer que $\varphi \circ u \in \mathcal{L}^\infty$.
4. Soit $u \in L^\infty$ et $v, w \in u$. Montrer que $\{h \in \mathcal{L}^\infty;\, h = \varphi \circ v \text{ p.p.}\} = \{h \in \mathcal{L}^\infty;\, h = \varphi \circ w \text{ p.p.}\}$.

   Grâce aux 2 questions précédentes, pour $u \in L^\infty$, on pose, si $v \in u$:
   $\underline{\varphi}(u) = \{h \in \mathcal{L}^\infty;\, h = \varphi \circ v \text{ p.p.}\}$, de sorte que $\underline{\varphi}(u) \in L^\infty$.

   On se donne maintenant $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^\infty$. On suppose qu'il existe $C > 0$ t.q. $\|u_n\|_\infty \le C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et qu'il existe $u \in L^1$ et $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ t.q. :

   - $u_n \to u$ faiblement dans L^1, quand $n \to \infty$,
   - $\underline{\varphi}(u_n) \to f$ p.p., quand $n \to \infty$.

   Le but de l'exercice est de comparer f et $\underline{\varphi}(u)$.
5. Montrer que $|\int u 1_A d\lambda| \le C\lambda(A)$ pour tout $A \in B(]0,1[)$. Montrer que $u \in L^\infty$ que $\|u\|_\infty \le C$.
6. On suppose, dans cette question, que φ est affine (c'est-à-dire qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.q. $\varphi(s) = \alpha s + \beta$ pour tout $s \in \mathbb{R}$). Montrer que $f = \underline{\varphi}(u)$ p.p.. [Utiliser, en particulier, la question 1.]
7. On suppose, dans cette question, que φ est injective. Montrer qu'il existe $v \in L^\infty$ t.q. $u_n \to v$ p.p. quand $n \to \infty$. En déduire que $v = u$ et $f = \underline{\varphi}(u)$ p.p..
8. (Astuce de Minty) On suppose, dans cette question, que φ est croissante.
   (a) Soit $v \in L^\infty$. Montrer que $\int (f - \underline{\varphi}(v))(u - v) d\lambda \ge 0$. [Utiliser la croissance de φ et la question 2 (c).]

(b) Soit $w \in L^\infty$. Montrer que $\int (f - \underline{\varphi}(u))wd\lambda \leq 0$. [Utiliser la question précédente avec $v = u + (1/n)w$.]

(c) Montrer que $f = \underline{\varphi}(u)$ p.p..

9. On définit u_n, pour $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = 1$ p.p. sur $]2k/2n, (2k+1)/2n[$ pour $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, et $u_n = -1$ p.p. sur $]2k - 1/2n, 2k/2n[$ pour $k \in \{1, \ldots, n\}$.

   (a) Montrer que $\int u_n \phi d\lambda \to 0$, quand $n \to \infty$, pour tout $\phi \in C([0,1], \mathbb{R})$.

   (b) Montrer que $u_n \to 0$ faiblement dans L^1, quand $n \to \infty$. [On pourra, par exemple, utiliser la densité de $C([0,1], \mathbb{R})$ dans L^1.] Montrer que $u_n \not\to 0$ dans L^1, quand $n \to \infty$.

   (c) Donner un exemple de fonction $\varphi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ pour lequel $\underline{\varphi}(u_n) \to f$ p.p. et $f \neq \underline{\varphi}(0)$ p.p.. (et donc φ n'est pas croissante et n'est pas injective).

   (d) Donner un exemple de fonction $\varphi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ croissante pour lequel $\underline{\varphi}(u_n) \to f$ p.p. (et donc $f = \underline{\varphi}(0)$ p.p., par la question 8, et φ est non injective, par les questions 7 et 9 (b)).

Exercice 6.46 (Convergence étroite de mesures) *Corrigé 125 page 431*
Soit $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures finies sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (on rappelle que "m_n finie" signifie que "$m_n(\mathbb{R}) < \infty$") et m une mesure finie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On rappelle que $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1_\mathbb{R}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et que $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1_\mathbb{R}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$.
On suppose que :

$$\int g dm_n \to \int g dm, \text{ pour tout } g \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

Soit $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On ne suppose pas que f est bornée, mais on suppose que $f \in \mathcal{L}^1_\mathbb{R}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. On pose $\alpha = \sup_{n\in\mathbb{N}} m_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\alpha < \infty$.

2. On suppose, dans cette question, que :

$$\beta = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int |f|^2 dm_n < \infty.$$

   (a) Soit φ une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, à support compact et t.q. $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$, ne dépendant que de α et β (définis ci dessus), t.q. :

$$\int |f| \varphi dm \leq C.$$

   (b) Montrer que $f \in \mathcal{L}^1_\mathbb{R}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$

   (c) Montrer que $\displaystyle\int f dm_n \to \int f dm$, quand $n \to \infty$.

3. On ne suppose plus que $\displaystyle\sup_{n\in\mathbb{N}} \int |f|^2 dm_n < \infty$.

   Montrer (en choisissant convenablement $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$, m et f) que l'on peut avoir $f \notin \mathcal{L}^1_\mathbb{R}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$.

Exercice 6.47 (Convergence faible et convexité) *Corrigé 126 page 433*

Dans cet exercice (E, T, m) est un espace mesuré et on suppose que la mesure m est $\sigma-$finie.. Pour tout $1 \le r \le \infty$, on note L^r l'espace $L^r(E, T, m)$ (et $\mathcal{L}^r$ l'espace $\mathcal{L}^r(E, T, m)$). Soit $1 \le p < \infty$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de L^p et $u \in L^p$ t.q. $u_n \to u$ faiblement dans L^p quand $n \to \infty$ (on rappelle que ceci signifie $T(u_n) \to T(u)$, quand $n \to \infty$, pour tout T dans $(L^p)'$, c'est-à-dire dans le dual topologique de L^p).

1. On pose $r = p/(p-1)$ si $p > 1$ et $r = \infty$, si $p = 1$. Montrer que, pour tout $v \in L^r$:

$$\int u_n v dm \to \int uvdm.$$

   Soit $\varphi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que φ est strictement convexe (ce qui est équivalent à dire que φ' est strictement croissante).

2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $h_a(x) = \varphi(x) - \varphi(a) - \varphi'(a)(x - a)$.
   (a) Montrer que $h_a(x) > 0$ si $x \ne a$.
   (b) Montrer que h_a est décroissante sur $]-\infty, a[$ et croissante sur $]a, \infty($.

   Soit $1 \le q < \infty$. On suppose maintenant que la suite $(\varphi(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans L^q et qu'elle converge faiblement dans L^q, quand $n \to \infty$, vers une (classe de) fonction(s) $\overline{\varphi} \in L^q$.

   Précision de notation : On choisit un représentant pour u_n. On désigne alors par $\varphi(u_n)$ la fonction (de E dans $\mathbb{R}$) $x \mapsto \varphi(u_n(x))$. Cette fonction est supposée être dans $\mathcal{L}^q$ et on l'identifie, comme d'habitude, avec l'élément de L^q qu'elle représente.

   Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n = [\varphi(u_n) - \varphi(u) - \varphi'(u)(u_n - u)]$.

   Précision de notation : Ici aussi, pour définir f_n, on choisit un représentant pour u. On désigne alors par $\varphi(u)$ et $\varphi'(u)$ les fonctions $x \mapsto \varphi(u(x))$ et $x \mapsto \varphi'(u(x))$.

3. Soit $k \in \mathbb{R}_+^\star$ et $B \in T$ t.q. $m(B) < \infty$. On pose $A_k = \{|u| \le k\}$ (c'est-à-dire $A_k = \{x \in E$ t.q. $|u(x)| \le k\}$.

   Montrer que $\int f_n 1_{A_k} 1_B dm \to \int (\overline{\varphi} - \varphi(u)) 1_{A_k} 1_B dm$, quand $n \to \infty$.

4. Montrer $\overline{\varphi} \ge \varphi(u)$ p.p.. [Utiliser les questions 2(a) et 3.]

   On suppose maintenant que $\overline{\varphi} = \varphi(u)$ p.p..

5. Soit $B \in T$ t.q. $m(B) < \infty$, $k \in \mathbb{R}_+^\star$ et $A_k = \{|u| \le k\}$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous suite convergeant p.p. vers 0 sur $A_k \cap B$.

6. (Question plus difficile.) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous suite convergeant p.p. vers 0 sur E. [Utiliser le fait que la mesure m est $\sigma-$finie et un "procédé diagonal".]

7. Soit $x \in E$ t.q. $f_n(x) \to 0$, montrer que $u_n(x) \to u(x)$. [Soit $b \in \overline{\mathbb{R}}$, limite d'une sous suite de la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$. Utiliser la question 2 pour montrer que $b = u(x)$.]

8. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous suite convergeant p.p. vers u.

9. On suppose ici que $p > 1$. Montrer que $u_n 1_B \to u 1_B$ dans L^r pour tout $r \in [1, p[$ et tout $B \in T$ t.q. $m(B) < \infty$. [Utiliser l'exercice 6.18.]

10. En prenant $(E,T,m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $\varphi(s) = s^2$, donner un exemple pour lequel $u_n \not\to u$ p.p. sur E (toutefois, d'après la question 8, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous suite convergeant p.p. vers u).

Exercice 6.48 (Produit de convergences faibles) *Corrigé 127 page 437*
Soit (E,T,m) un espace mesuré fini. Pour $p \in [1,\infty]$, on note L^p l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(E,T,m)$.
Soit $\alpha, \beta > 0$. Pour $a \in \mathbb{R}_+$, on définit ψ_a de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ par $\psi_a(t) = (t^\alpha - a^\alpha)(t^\beta - a^\beta)$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $\psi_a(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $t \neq a$.

   Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions positives appartenant à L^∞ et $l_\alpha, l_\beta, l_{\alpha+\beta} \in L^\infty$. On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans L^∞ et que $f_n^\gamma \to l_\gamma$ $\star-$faiblement dans L^∞, quand $n \to \infty$, pour $\gamma = \alpha$, $\gamma = \beta$ et $\gamma = \alpha + \beta$.

   On rappelle que $f_n^\gamma \to l_\gamma$ $\star-$faiblement dans L^∞ signifie que $\int f_n^\gamma \varphi dm \to \int l_\gamma \varphi dm$, quand $n \to \infty$, pour tout $\varphi \in L^1$.

2. Soit $\varphi \in L^1$ t.q. $\varphi \geq 0$ p.p.. Montrer que $\int l_a \varphi dm \geq 0$.
3. Montrer que $l_\alpha \geq 0$ p.p..
4. Montrer que $l_{\alpha+\beta} \geq l_\alpha l_\beta$ p.p.. [On pourra utiliser $\psi_a(t) \geq 0$ avec $t = f_n(x)$ et $a = (l_\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha}}$.]
5. On suppose maintenant que $l_{\alpha+\beta} = l_\alpha l_\beta$ p.p.. On pose $f = l_\alpha^{\frac{1}{\alpha}}$ et $g_n = (f_n^\alpha - f^\alpha)(f_n^\beta - f^\beta)$.
   (a) Montrer que $g_n \to 0$ dans L^1, quand $n \to \infty$.
   (b) Montrer qu'il existe $\varphi\ :\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante t.q. $g_{\varphi(n)} \to 0$ p.p., quand $n \to \infty$. Montrer que $f_{\varphi(n)} \to f$ p.p., quand $n \to \infty$. [Utiliser la question 1.]
   (c) Montrer que $f_n \to f$ dans L^q, quand $n \to \infty$, pour tout $q \in [1,\infty[$.

Exercice 6.49 (Convergence faible contre convergence forte)
Soit (E,T,m) un espace mesuré. On suppose que m est σ-finie. Pour $r \in [1,\infty]$, on note L^r l'espace $L^r_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ (et L^r est muni de sa norme usuelle). Soit $p,q \in [1,\infty]$ t.q. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de L^p et $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de L^q.

1. On suppose ici que $p \in [1,\infty[$ (et donc $q \in]1,\infty]$), $\varphi_n \to \varphi$ dans L^q, quand $n \to \infty$, et $f_n \to f$ faiblement dans L^p, quand $n \to \infty$ (c'est-à-dire que $T(f_n) \to T(f)$ pour toute application linéaire continue T de L^p dans $\mathbb{R}$).
   (a) Montrer que $\int f_n \psi dm \to \int f \psi dm$, pour tout $\psi \in L^q$.
   (b) Montrer que $\int f_n \varphi_n dm \to \int f \varphi dm$.
2. On suppose ici que $p = \infty$ (et donc $q = 1$), $\varphi_n \to \varphi$ dans L^1, quand $n \to \infty$, et $f_n \to f$ $\star-$faiblement dans L^∞, quand $n \to \infty$ (c'est-à-dire que $\int f_n \psi dm \to \int f \psi dm$ pour tout $\psi \in L^1$). Montrer que $\int f_n \varphi_n dm \to \int f \varphi dm$.

On suppose pour la suite de l'exercice que $p = 1$ (et donc $q = \infty$) et $m(E) < \infty$.

3. Montrer que $\varphi_n \to \varphi$ dans L^∞, quand $n \to \infty$, implique :

   (p1) $\varphi_n \to \varphi$ p.p. quand $n \to \infty$.

4. Montrer, en prenant (par exemple) $(E, T, m) = (]0, 1[, \mathcal{B}(]0, 1[), \lambda)$ que (p1) n'implique pas $\varphi_n \to \varphi$ dans L^∞ quand $n \to \infty$. [Il faut donc trouver une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée de L^∞ et $\varphi \in L^\infty$ t.q. $\varphi_n \to \varphi$ p.p., quand $n \to \infty$, et $\|\varphi_n - \varphi\|_\infty \not\to 0$, quand $n \to \infty$.]

On suppose maintenant que la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie (p1) et que :

(p2) $f_n \to f$ faiblement dans L^1, quand $n \to \infty$,

5. Montrer que $\varphi \in L^\infty$ (au sens "il existe $\bar{\varphi} \in \mathcal{L}^\infty(E, T, m)$ t.q. $\varphi = \bar{\varphi}$ p.p."). [On rappelle que la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est, par hypothèse, bornée dans L^∞.]

6. On admet que (p2) implique l'équi-intégrabilité de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est-à-dire :

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0 \text{ t.q. } A \in T,\ m(A) \leq \delta,\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow \int_A |f_n| dm \leq \varepsilon.$$

Montrer que $\int f_n\varphi_n dm \to \int f\varphi dm$. [On pourra utiliser le théorème d'Egorov.]

Exercice 6.50 (Dunford-Pettis)
En attente

Exercice 6.51 (Conv. étroite et conv. des mesures des intervalles) *Corrigé 128 page 437*
Soit $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et m une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On suppose que $m_n \to m$ étroitement, quand $n \to \infty$, et que m est diffuse (c'est-à-dire que $m(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, montrer que $m_n(I) \to m(I)$ quand $n \to \infty$. Montrer (en donnant un contre-exemple) que cette propriété peut être fausse si m n'est pas diffuse.

Exercice 6.52 (Convergence en loi) *Corrigé 129 page 438*
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilités et X une v.a. réelle de loi uniforme sur $[-1, 1]$.

1. Montrer que $-X$ est une v.a. de même loi que X.
2. Donner un exemple de suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de v.a. t.q. :
   (a) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X,
   (b) $(X_n - X)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas en loi vers 0.
3. Donner un exemple de trois v.a. X, Y, Z t.q. X et Y aient la même loi, mais sans que XZ et YZ aient la même loi.

Exercice 6.53 (Convergence en loi + convergence en probabilité) *Corrigé 130 page 439*
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace de probabilité, X une v.a. réelle et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de v.a. réelles t.q. :

$$X_n \to X \text{ en loi, } Y_n \to 0 \text{ en probabilité, quand } n \to \infty.$$

Montrer que

$$X_n + Y_n \to X \text{ en loi, quand } n \to \infty.$$

[On pourra utiliser la convergence vague.]

Exercice 6.54 (Convergence en loi versus convergence en probabilité) *Corrigé 131 page 440*

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité, X une v.a. réelle et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. réelles.

1. On suppose, dans cette question, que $X_n \to X$ en probabilité, quand $n \to \infty$. Montrer que :

$$X_n \to X \text{ en loi, quand } n \to \infty.$$

   [Remarquer qu'il suffit de démontrer une convergence vague de P_{X_n} vers P_X.]

2. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ t.q. $X = a$ p.s.. On suppose aussi que $X_n \to X$ en loi, quand $n \to \infty$. Montrer que :

$$X_n \to X \text{ en probabilité, quand } n \to \infty.$$

Chapter 7

Produits d'espaces mesurés

7.1 Motivation

Au chapitre 1, on a introduit la mesure de Lebesgue sur la tribu des boréliens de $\mathbb{R}$ (notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$), ce qui nous a permis d'exprimer la notion de longueur d'une partie (borélienne) de $\mathbb{R}$. On peut se poser la question de savoir s'il existe une mesure sur une tribu convenable de $\mathbb{R}^2$ qui exprimerait la notion de surface (et une mesure sur une tribu convenable de $\mathbb{R}^3$ qui exprimerait la notion de volume...).
La question est donc : existe-t-il une mesure λ_2 sur une tribu de $\mathbb{R}^2$ contenant $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$, vérifiant :

$$\lambda_2(A \times B) = \lambda(A)\lambda(B),\ \forall A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \ ? \tag{7.1}$$

La tribu T_2, sur laquelle on veut définir λ_2, doit donc contenir $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On remarque tout d'abord que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \{A \times B, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ n'est pas une tribu. En effet, $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ n'est pas stable par passage au complémentaire ni par union (par contre, $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ est stable par intersection dénombrable). On définit alors T_2 comme la tribu engendrée par $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$, qu'on note $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

On cherche alors une mesure $\lambda_2 : T_2 \to \overline{\mathbb{R}}_+$ t.q. $\lambda_2(A \times B) = \lambda(A)\lambda(B)$ pour tout $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On peut montrer l'existence et l'unicité de la mesure λ_2 (voir le théorème 7.1). On peut aussi montrer que la tribu T_2 est la tribu borélienne sur $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire la tribu engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}^2$ (voir la proposition 7.1).

Une autre question qu'on abordera dans ce chapitre concerne l'intégration des fonctions à plusieurs variables. Considérons par exemple une fonction f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Sous quelles hypothèses (faciles à vérifier...) peut-on écrire :

$$\int \Big(\int f(x,y)dy\Big)dx = \int \Big(\int f(x,y)dx\Big)dy \quad ? \tag{7.2}$$

Une réponse à cette question est apportée par le théorème de Fubini, que nous verrons dans ce chapitre.

On introduira aussi le produit de convolution de deux fonctions, qui sera utile, par exemple, pour démontrer des théorèmes de densité. Mais la convolution est un notion utile pour beaucoup d'autres raisons (elle est utile, par exemple, en théorie du signal).

7.2 Mesure produit

On rappelle ici qu'un espace mesuré (E, T, m) est σ-fini (on dit aussi que m est σ-finie) si il existe une famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ t.q. $E = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et $m(A_n) < +\infty$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ est σ-fini (prendre, par exemple, $A_n = [-n, n]$). Il existe, par contre, des mesures non finies. L'exemple le plus simple sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ consiste à prendre $m(A) = \infty$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $A \neq \emptyset$. Un exemple plus intéressant (intervenant pour certains problèmes) consiste à se donner un borélien non vide B de $\mathbb{R}$ (B peut être, par exemple, réduit à un point) et à définir m_B par $m_B(A) = \infty$ si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $A \cap B \neq \emptyset$ et $m_B(A) = 0$ si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $A \cap B = \emptyset$.

Définition 7.1 (Tribu produit) *Soient (E_1, T_1) et (E_2, T_2) des espaces mesurables. On pose $E = E_1 \times E_2$. On appelle tribu produit la tribu sur E engendrée par $T_1 \times T_2 = \{A_1 \times A_2,\ A_1 \in T_1,\ A_2 \in T_2\}$. Cette tribu produit est notée $T_1 \otimes T_2$.*

Un exemple fondamental est $(E_1, T_1) = (E_2, T_2) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On va montrer que, dans ce cas, $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

Proposition 7.1 (Tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$)
Pour tout $N \geq 2$, on a $\mathcal{B}(R^{N-1}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(R^N)$.

Démonstration : La démonstration est faite pour $N = 2$ dans l'exercice 2.5 (corrigé 13). Elle s'adapte facilement pour traiter aussi le cas $N > 2$ (exercice 7.1). ■

Théorème 7.1 (Mesure produit)
Soient (E_1, T_1, m_1) et (E_2, T_2, m_2) deux espaces mesurés σ-finis, $E = E_1 \times E_2$ et $T = T_1 \otimes T_2$. Alors, il existe une et une seule mesure m sur T vérifiant :

$$m(A_1 \times A_2) = m_1(A_1)m_2(A_2) \text{ pour tout } A_1 \in T_1, \text{ et } A_2 \in T_2 \text{ t.q. } m_1(A_1) < \infty \text{ et } m(A_2) < \infty. \quad (7.3)$$

Cette mesure est notée $m = m_1 \otimes m_2$. De plus, m est σ-finie.

Démonstration :
Existence de m. On va construire une mesure m sur T vérifiant (7.3).
Soit $A \in T$. On va montrer, à l'étape 1, que, pour tout $x_1 \in E_1$, on a $1_A(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}_+(E_2, T_2)$. On pourra donc poser $f_A(x_1) = \int 1_A(x_1, \cdot)dm_2$, pour tout $x_1 \in E_1$. L'application f_A sera donc une application de E_1 dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. On va montrer, à l'étape 2, que $f_A \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$. On posera alors $m(A) = \int f_A dm_1$. Enfin, il restera à l'étape 3 à montrer que m est bien une mesure vérifiant (7.3) et que m est σ-finie.

Etape 1. Pour $A \in \mathcal{P}(E)$ et $x_1 \in E_1$, on note $S(x_1, A) = \{x_2 \in E_2;\ (x_1, x_2) \in A\} \subset E_2$, de sorte que $1_A(x_1, \cdot) = 1_{S(x_1,A)}$.
Soit $x_1 \in E_1$. On pose $\Theta = \{A \in \mathcal{P}(E);\ S(x_1, A) \in T_2\}$.
On remarque tout d'abord que $\Theta \supset T_1 \times T_2$. En effet, si $A = A_1 \times A_2$ avec $A_1 \in T_1$ et $A_2 \in T_2$, on a $S(x_1, A) = A_2 \in T_2$ si $x_1 \in A_1$ et $S(x_1, A) = \emptyset \in T_2$ si $x_1 \notin A_1$.
On remarque ensuite que Θ est une tribu. En effet :

- $\emptyset \in \Theta$ car $S(x_1, \emptyset) = \emptyset \in T_2$,

- Θ est stable par passage au complémentaire. En effet :
  $S(x_1, A^c) = (S(x_1, A))^c$ (c'est-à-dire $S(x_1, E \setminus A) = E_2 \setminus S(x_1, A)$). On a donc $S(x_1, A^c) \in T_2$ si $A \in \Theta$, ce qui prouve que $A^c \in \Theta$.

- Θ est stable par union dénombrable. Il suffit de remarquer que :
  $S(x_1, \cup_{n\in\mathbb{N}} A^{(n)}) = \cup_{n\in\mathbb{N}} S(x_1, A^{(n)}) \in T_2$ si $(A^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset \Theta$.

Θ est donc une tribu contenant $T_1 \times T_2$, ceci prouve que Θ contient $\mathcal{T}_1 \otimes T_2 = T$. On a donc $S(x_1, A) \in T_2$ pour tout $A \in T$.

Pour tout $A \in T$, on peut donc définir une application $f_A \ : \ E_1 \to \overline{\mathbb{R}}_+$ en posant :

$$f_A(x_1) = m_2(S(x_1, A)) = \int 1_{S(x_1,A)} dm_2 = \int 1_A(x_1, \cdot) dm_2 \in \overline{\mathbb{R}}_+, \text{ pour tout } x_1 \in E_1. \tag{7.4}$$

Etape 2. Dans cette étape, on démontre que $f_A \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$ pour tout $A \in T$. Cette étape est plus difficile que la précédente.

On note $\Sigma = \{A \in T;\ f_A \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)\}$ et on va montrer que $\Sigma \supset T$ et donc que $\Sigma = T$.

On suppose d'abord que m_2 est finie.

Il est facile de voir que Σ contient $T_1 \times T_2$. En effet, si $A = A_1 \times A_2$ avec $A_1 \in T_1$ et $A_2 \in T_2$, on a alors $f_A = m_2(A_2) 1_{A_1} \in \mathcal{E}_+(E_1, T_1) \subset \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$.

On note maintenant $\mathcal{A}$ l'ensemble des réunions finies disjointes d'éléments de $T_1 \times T_2$ ($\mathcal{A}$ s'appelle l'algèbre engendrée par $T_1 \times T_2$, voir l'exercice 7.2). Si $A \in \mathcal{A}$, il existe donc $(A^{(p)})_{p=1,\ldots,n} \subset T_1 \times T_2$ t.q. $A^{(p)} \cap A^{(q)} = \emptyset$ si $p \neq q$ et $A = \cup_{p=1}^n A^{(p)}$. On a alors $f_A(x_1) = m_2(S(x_1, A)) = \sum_{p=1}^n m_2(S(x_1, A^{(p)})) = \sum_{p=1}^n f_{A^{(p)}} \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$ car $A^{(p)} \in T_1 \times T_2 \subset \Sigma$. On a donc $\mathcal{A} \subset \Sigma$.

On montre maintenant que Σ est une classe monotone, c'est-à-dire que :

$$(A^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma,\ A^{(n)} \subset A^{(n+1)}\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \cup_{n\in\mathbb{N}} A^{(n)} \in \Sigma \tag{7.5}$$

et

$$(A^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma,\ A^{(n)} \supset A^{(n+1)}\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \cap_{n\in\mathbb{N}} A^{(n)} \in \Sigma. \tag{7.6}$$

Pour montrer (7.5), soit $(A^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$ t.q. $A^{(n)} \subset A^{(n+1)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A^{(n)}$. Soit $x_1 \in E_1$. On a alors $(S(x_1, A^{(n)}))_{n\in\mathbb{N}} \subset T_2$ (par l'étape 1, car $\Sigma \subset T$), $S(x_1, A^{(n)}) \subset S(x_1, A^{(n+1)})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $S(x_1, \cup_{n\in\mathbb{N}} A^{(n)}) = \cup_{n\in\mathbb{N}} S(x_1, A^{(n)})$. On en déduit, par continuité croissante de m_2, que $m_2(S(x_1, A)) = \sup_{n\in\mathbb{N}} m_2(S(x_1, A^{(n)}))$ et donc que $f_A = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_{A^{(n)}}$. Ce qui prouve que $f_A \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$ car $f_{A^{(n)}} \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a donc $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A^{(n)} \in \Sigma$.

La démonstration de (7.6) est similaire, il faut utiliser la continuité décroissante de m_2 au lieu de la continuité croissante. C'est pour utiliser la continuité décroissante de m_2 qu'on a besoin de m_2 finie.

On a ainsi montré que Σ est une classe monotone contenant l'algèbre $\mathcal{A}$. On peut en déduire, cela fait l'objet de l'exercice 2.12 (corrigé 17), que Σ contient la tribu engendrée par $\mathcal{A}$ et donc aussi la tribu engendrée par $T_1 \times T_2$ (car $T_1 \times T_2 \subset \mathcal{A}$), c'est-à-dire que Σ contient $T = T_1 \otimes T_2$. On a bien montré, finalement, que $\Sigma = T$.

Il reste maintenant à montrer que $\Sigma = T$ sans l'hypothèse m_2 finie. Comme m_2 est σ-finie, on peut construire une suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T_2$ t.q. $F_n \subset F_{n+1}$ et $m_2(F_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit alors la mesure $m_2^{(n)}$ par $m_2^{(n)}(A_2) = m_2(A_2 \cap F_n)$ pour tout $A_2 \in T_2$. La mesure $m_2^{(n)}$ est finie, l'étape 1 et la première partie de l'étape 2 donne donc que, pour tout $A \in T$, $f_A^{(n)} \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$ où $f_A^{(n)}$ est définie par 7.4 avec $m_2^{(n)}$ au lieu de m_2 (c'est-à-dire $f_A^{(n)}(x_1) = m_2^{(n)}(S(x_1, A))$ pour tout $x_1 \in E_1$). On conclut alors en remarquant que $f_A^{(n)} \uparrow f_A$ quand $n \to \infty$, ce qui donne que $f_A \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$.

On a donc montré que $f_A \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$ pour tout $A \in T$. Ceci nous permet de définir $m : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ par :

$$m(A) = \int f_A dm_1, \text{ pour tout } A \in T. \tag{7.7}$$

Etape 3. Dans cette étape, on montre que m, définie par (7.7), est une mesure sur T et que m vérifie (7.3) et est σ-finie.
On montre d'abord que m est bien une mesure sur T :

1. $m(\emptyset) = 0$ car $f_\emptyset(x_1) = m_2(S(x_1, \emptyset)) = m_2(\emptyset) = 0$.
2. (σ-additivité de m) Soit $(A^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ t.q. $A^{(n)} \cap A^{(m)} = \emptyset$ si $n \neq m$. On pose $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A^{(n)}$. Pour $x_1 \in E_1$, on a :

   $$S(x_1, A) = \cup_{n\in\mathbb{N}} S(x_1, A^{(n)}) \text{ et } S(x_1, A^{(n)}) \cap S(x_1, A^{(m)}) = \emptyset \text{ si } n \neq m.$$

   La σ-additivité de m_2 donne alors $m_2(S(x_1, A)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m_2(S(x_1, A^{(n)}))$, c'est-à-dire $f_A(x_1) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_{A^{(n)}}(x_1)$. Le premier corollaire du théorème de convergence monotone (corollaire 4.1) donne alors:

   $$m(A) = \int f_A dm_1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int f_{A^{(n)}} dm_1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A^{(n)}),$$

   ce qui donne la σ-additivité de m.

On montre maintenant que m vérifie (7.3). Soient $A_1 \in T_1$ et $A_2 \in T_2$ t.q. $m_1(A_1) < \infty$ et $m(A_2) < \infty$. On pose $A = A_1 \times A_2$. On a alors $f_A = m_2(A_2)1_{A_1}$ et donc $m(A) = \int f_A dm_1 = m_2(A_2)m_1(A_1)$.

Il reste à vérifier que m est σ-finie. Comme m_1 et m_2 sont σ-finies, il existe $(B_1^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset T_1$ et $(B_2^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset T_2$ t.q. $E_1 = \cup_{n\in\mathbb{N}} B_1^{(n)}$, $E_2 = \cup_{n\in\mathbb{N}} B_2^{(n)}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m_1(B_1^{(n)}) < \infty$ et $m_2(B_2^{(n)}) < \infty$. Pour $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, on pose $C_{n,m} = B_1^{(n)} \times B_2^{(m)}$, de sorte que $E = \cup_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} C_{n,m}$ et $m(C_{n,m}) = m_1(B_1^{(n)}) \times m_2(B_2^{(m)}) < \infty$. Comme $\mathbb{N}^2$ est dénombrable, on en déduit que m est σ-finie.

Unicité de m.
La partie "existence" de la démonstration donne une mesure m sur T vérifiant (7.3). La partie "unicité" du théorème peut se montrer avec la proposition 2.5, nous développons cette méthode ci-après, ou avec le lemme des classes monotones (exercice 2.12) comme cela est expliqué dans la remarque 7.1.

Soit m et μ deux mesures sur T vérifiant (7.3). Pour montrer que $m = \mu$, on va apliquer la proposition 2.5. On pose :

$$\mathcal{C} = \{A_1 \times A_2,\, A_1 \in T_1,\, A_2 \in T_2,\, m_1(A_1) < \infty,\, m_2(A_2) < \infty\}.$$

Comme m_1 et m_2 sont $\sigma-$finies, il est facile de montrer que tout élément de $T_1 \times T_2$ est une réunion dénombrable d'éléments de $\mathcal{C}$. On en déduit que $\mathcal{C}$ engendre T. Il est clair que $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie et, par (7.3), on a $m = \mu$ sur $\mathcal{C}$. Puis, comme m_1 et m_2 sont $\sigma-$finies, il existe deux suites

$(E_{1,n})_{n\in\mathbb{N}} \subset T_1$ et $(E_{2,n})_{n\in\mathbb{N}} \subset T_2$ d'éléments de T_1 et T_2, disjoints deux à deux et t.q. $E_1 = \cup_{n\in\mathbb{N}} E_{1,n}$, $E_2 = \cup_{n\in\mathbb{N}} E_{2,n}$ et $m_i(E_{i,n}) < \infty$ pour tout $i \in \{1, 2\}$ et tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $n, m \in \mathbb{N}$, on pose $F_{n,m} = E_{1,n} \times E_{2,m}$. La famille $(F_{n,m})_{n,m\in\mathbb{N}}$ est une famille dénombrable déléments de $\mathcal{C}$, disjoints deux à deux et t.q. $E = \cup_{n,m\in\mathbb{N}} F_{n,m}$ et $m(F_{n,m}) = m_1(E_{1,n})m_2(E_{1,m}) < \infty$. On peut alors utiliser la Proposition 2.5. Elle donne $m = \mu$ sur T et termine la démonstration du théorème. ■

Remarque 7.1 Comme cela a été dit, un autre moyen de montrer la partie "unicité" du théorème précédent est d'utiliser le lemme des classes monotones (exercice 2.12). Supposons tout d'abord que m_1 et m_2 sont finies. On a alors (par (7.3)) :

$$m(E) = \mu(E) = m_1(E_1)m_2(E_2) < \infty.$$

La condition (7.3) donne également que $m = \mu$ sur $T_1 \times T_2$. On a alors aussi $m = \mu$ sur l'algèbre engendrée par $T_1 \times T_2$, notée $\mathcal{A}$ (cette algèbre a été définie dans la partie "existence" de la démonstration). En effet, si $A \in \mathcal{A}$, il existe $(A^{(p)})_{p=1,\ldots,n} \subset T_1 \times T_2$ t.q. $A^{(p)} \cap A^{(q)} = \emptyset$ si $p \neq q$ et $A = \cup_{p=1}^{n} A^{(p)}$. On a alors, par additivité de m et μ, $m(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A^{(n)}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A^{(n)}) = \mu(A)$.
On pose maintenant $\Sigma = \{A \in T;\ m(A) = \mu(A)\}$. On vient de montrer que $\Sigma \supset \mathcal{A}$. Il est d'autre part facile de voir que Σ est une classe monotone. En effet, les propriétés de continuité croissante et de continuité décroissante appliquées à m et μ permettent facilement de vérifier (7.5) et (7.6) (on utilise ici, pour montrer (7.6), que m et μ sont des mesures finies). Comme dans la partie "existence" de la démonstration, l'exercice 2.12 donne alors que Σ contient la tribu engendrée par $\mathcal{A}$ et donc que Σ contient $T = T_1 \otimes T_2$. Ce qui donne $\Sigma = T$ et donc $m = \mu$.

Dans le cas où m_1 et m_2 ne sont pas finies, mais σ-finies, il existe $(B_1^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset T_1$ et $(B_2^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset T_2$ t.q. $E_1 = \cup_{n\in\mathbb{N}} B_1^{(n)}$, $E_2 = \cup_{n\in\mathbb{N}} B_2^{(n)}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m_1(B_1^{(n)}) < \infty$ et $m_2(B_2^{(n)}) < \infty$. On peut également supposer que $B_1^{(n)} \subset B_1^{(n+1)}$ et $B_2^{(n)} \subset B_2^{(n+1)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (il suffit, par exemple, de remplaçer $B_i^{(n)}$ par $\cup_{p=0}^{n} B_i^{(p)}$). Par un raisonnement analogue à celui fait dans le cas où m_1 et m_2 sont finies, on peut montrer que $m = \mu$ sur $\{A \in T;\ A \subset B_1^{(n)} \times B_2^{(n)}\}$. On conclut alors, en utilisant la propriété de continuité croissante, que $m = \mu$ sur T. ■

Remarque 7.2 Dans le théorème précédente (théorème 7.1), on peut aussi remarquer que :

1. $m(A_1 \times A_2) = m_1(A_1)m_2(A_2) = \infty$ si $A_1 \in T_1$ et $A_2 \in T_2$ avec $m_1(A_1) \neq 0$ et $m(A_2) = \infty$ (ou avec $m_1(A_1) = \infty$ et $m_2(A_2) \neq 0$),
2. $m(A_1 \times A_2) = 0$ si $A_1 \in T_1$ et $A_2 \in T_2$ avec $m_1(A_1) = 0$ et $m(A_2) = \infty$ (ou avec $m_1(A_1) = \infty$ et $m_2(A_2) = 0$).

En effet, on suppose par exemple que $m_1(A_1) = 0$ et $m(A_2) = \infty$. Comme m_2 est σ-finie, on peut construire une suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T_2$ t.q. $F_n \subset F_{n+1}$ et $m_2(F_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a alors, par continuité croissante de m, $m(A_1 \times A_2) = \lim_{n\to\infty} m(A_1 \times (A_2 \cap F_n)) = \lim_{n\to\infty} m_1(A_1)m_2(A_2 \cap F_n) = 0$ (on a d'ailleurs aussi $m_2(A_2 \cap F_n) \uparrow \infty$, ce qui permet de conclure si $0 < m_1(A_1) < \infty$ que $m(A_1 \times A_2) = \infty$). Les autres cas se traitent de manière analogue.

Définition 7.2 (Espace produit)
L'espace (E, T, m)*, construit dans le théorème 7.1, s'appelle l'espace (mesuré) produit des espaces* (E_1, T_1, m_1) *et* (E_2, T_2, m_2)*.*

Un exemple fondamental d'espace produit est l'espace $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ pour $N \geq 2$ que nous verrons dans la section 7.4.

7.3 Théorèmes de Fubini-Tonelli et Fubini

Théorème 7.2 (Fubini-Tonelli) *Soient (E_1, T_1, m_1) et (E_2, T_2, m_2) des espaces mesurés σ-finis. On note (E, T, m) l'espace produit (donc, $T = T_1 \otimes T_2$ et $m = m_1 \otimes m_2$). Soit $f : E \to \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction mesurable positive (i.e. T-mesurable positive). Alors :*

1. *$f(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}_+(E_2, T_2)$ pour tout $x_1 \in E_1$,*

   on pose
$$\varphi_f(x_1) = \int f(x_1, \cdot)dm_2 = \int f(x_1, x_2)dm_2(x_2) \text{ pour tout } x_1 \in E_1,$$
   de sorte que $\varphi_f : E_1 \to \overline{\mathbb{R}}_+$,
2. *$\varphi_f \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$,*
3. *$\displaystyle\int f dm = \int \varphi_f dm_1 = \int \Big(\int f(x_1, x_2)dm_2(x_2)\Big)dm_1(x_1)$,*
4. *les mêmes résultats sont vrais en inversant les rôles de m_1 et m_2, de sorte que :*
$$\int \Big(\int f(x_1, x_2)dm_2(x_2)\Big)dm_1(x_1) = \int \Big(\int f(x_1, x_2)dm_1(x_1)\Big)dm_2(x_2).$$

Démonstration : la démonstration se fait en plusieurs étapes.

Etape 1. Soit $f = 1_A$, $A \in T$. La partie "existence de m" de la démonstration du théorème 7.1 donne alors que $\int f dm = m(A) = \int \varphi_f dm_1$.
Plus précisément, on a, pour tout $x_1 \in E_1$, $f(x_1, \cdot) = 1_A(x_1, \cdot) = 1_{S(x_1,A)}$, avec $S(x_1, A) = \{x_2 \in E_2;$ $(x_1, x_2) \in A\} \subset E_2$ (comme dans la démonstration du théorème 7.1). L'étape 1 de la démonstration (de la partie existence) du théorème 7.1 donne que $S(x_1, A) \in T_2$ pour tout $x_1 \in E_1$, et donc $f(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}_+(E_2, T_2)$. Ceci donne le premier item (pour $f = 1_A$) de la conclusion du théorème 7.2.
On pose $\varphi_f(x_1) = \int f(x_1, \cdot)dm_2 = m_2(S(x_1, A))$ pour tout $x_1 \in E_1$. (Cette fonction φ_f était notée f_A dans la démonstration du théorème 7.1). L'étape 2 de la démonstration du théorème 7.1 donne que $\varphi_f \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$. Ceci donne le deuxième item (pour $f = 1_A$) de la conclusion du théorème 7.2.
On a alors posé, dans la démonstration du théorème 7.1, $m(A) = \int \varphi_f dm_1$ et l'étape 3 a montré que m était une mesure sur T vérifiant (7.3) (et la seule mesure sur T vérifiant (7.3), d'après la partie "unicité" de la démonstration du théorème 7.1). Ceci donne le troisième item (pour $f = 1_A$) de la conclusion du théorème 7.2.

Pour avoir le quatrième item (pour $f = 1_A$) de la conclusion du théorème 7.2, il suffit de remarquer que l'on peut inverser les rôles de m_1 et m_2 dans la démonstration du théorème 7.2. On obtient ainsi que $f(\cdot, x_2) \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$ pour tout $x_2 \in E_2$. On pose alors $\psi_f(x_2) = \int f(\cdot, x_2)dm_1$. On obtient que $\psi_f \in \mathcal{M}_+(E_2, T_2)$. Enfin, on pose $\tilde{m}(A) = \int \psi_f dm_2$ et on obtient que $\tilde{m}$ est une mesure sur T vérifiant (7.3). La partie "unicité" de la démonstration du théorème 7.1 donne alors que $m = \tilde{m}$, ce qui est exactement le quatrième item (pour $f = 1_A$) de la conclusion du théorème 7.2.

Etape 2. On prend maintenant $f \in \mathcal{E}_+(E, T)$. Il existe donc $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+^\star$ et $A_1, \ldots, A_n \in T$ t.q. $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$.

On a alors, pour tout $x_1 \in E_1$, $f(x_1,\cdot) = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}(x_1,\cdot) \in \mathcal{M}_+(E_2,T_2)$ car l'étape 1 donne $1_{A_i}(x_1,\cdot) \in \mathcal{M}_+(E_2,T_2)$ pour tout i. Ce qui donne le premier item de la conclusion du théorème 7.2.

On pose $\varphi_f(x_1) = \int f(x_1,\cdot)dm_2$ pour tout $x_1 \in E_1$. On a $\varphi_f \in \mathcal{M}_+(E_1,T_1)$ car $\varphi_f = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_{1_{A_i}}$ et que $\varphi_{1_{A_i}} \in \mathcal{M}_+(E_1,T_1)$ pour tout i (d'après l'étape 1). Ce qui donne le deuxième item de la conclusion du théorème 7.2.

Enfin, on utilise la linéarité de l'intégrale et l'étape 1 pour $f = 1_{A_i}$, on obtient :

$$\int f dm = \sum_{i=1}^n a_i m(A_i) = \sum_{i=1}^n a_i \int \varphi_{1_{A_i}} dm_1 = \int (\sum_{i=1}^n a_i \varphi_{1_{A_i}}) dm_1$$
$$= \int (\sum_{i=1}^n a_i \int 1_{A_i}(x_1,\cdot)dm_2) dm_1(x_1) = \int \Big(\int f(x_1,\cdot)dm_2\Big) dm_1(x_1) = \int \varphi_f dm_1.$$

Ce qui donne le troisième item de la conclusion du théorème 7.2.

Pour avoir le quatrième item de la conclusion du théorème 7.2, il suffit de changer les rôles de m_1 et m_2.

Etape 3. On peut enfin prendre $f \in \mathcal{M}_+(E,T)$. Il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}_+(E,T)$ t.q. $f_n \uparrow f$ quand $n \to \infty$.

On a donc, pour tout $x_1 \in E_1$, $f_n(x_1,\cdot) \uparrow f(x_1,\cdot)$ quand $n \to \infty$. On en déduit que $f(x_1,\cdot) \in \mathcal{M}_+(E_2,T_2)$ car (d'après l'étape 2) $f_n(x_1,\cdot) \in \mathcal{M}_+(E_2,T_2)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ce qui donne le premier item).

Le théorème de convergence monotone (pour m_2) donne que $\varphi_{f_n}(x_1) = \int f_n(x_1,\cdot)dm_2 \uparrow \int f(x_1,\cdot)dm_2 = \varphi_f(x_1)$ pour tout $x_1 \in E_1$. Donc, $\varphi_{f_n} \uparrow \varphi_f$. Comme $\varphi_{f_n} \in \mathcal{M}_+(E_1,T_1)$ (d'après l'étape 2), on en déduit que $\varphi_f \in \mathcal{M}_+(E_1,T_1)$ (ce qui donne le deuxième item).

On applique maintenant le théorème de convergence monotone pour m_1 et pour m, ils donnent :

$$\int \varphi_{f_n} dm_1 \uparrow \int \varphi_f dm_1 \text{ et } \int f_n dm \uparrow \int f dm \text{ quand } n \to \infty.$$

L'étape 2 donne $\int f_n dm = \int \varphi_{f_n} dm_1$, on en déduit donc que $\int f dm = \int \varphi_f dm_1$. Ce qui donne le troisième item de la conclusion du théorème 7.2.

Enfin, ici encore, pour avoir le quatrième item de la conclusion du théorème 7.2, il suffit de changer les rôles de m_1 et m_2. ■

Corollaire 7.1 *Soient (E_1,T_1,m_1) et (E_2,T_2,m_2) des espaces mesurés σ-finis. On note (E,T,m) l'espace produit. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction T-mesurable. Alors :*

$$f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m) \iff \int \Big(\int |f|dm_2\Big)dm_1 < +\infty \iff \int \Big(\int |f|dm_1\Big)dm_2 < +\infty. \tag{7.8}$$

Démonstration : Le corollaire découle immédiatement du théorème 7.2 appliqué à la fonction $|f| \in \mathcal{M}_+(E,T)$. Dans (7.8), la notation $(\int |f|dm_2)dm_1$ signifie :

$$\Big(\int |f(x_1,x_2)|dm_2(x_2)\Big)dm_1(x_1).$$

La notation est similaire en inversant les rôles de m_1 et m_2. ■

Voici une conséquence immédiate du théorème 7.2 pour la mesurabilité :

Proposition 7.2 *Soient* (E_1, T_1) *et* (E_2, T_2) *deux espaces mesurables. On pose* $E = E_1 \times E_2$ *et* $T = T_1 \otimes T_2$*. Soit* $f \in \mathcal{M}(E, T)$ *(c'est-à-dire* $f : E \to \mathbb{R}$*,* T*-mesurable). Alors :*

1. $f(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}(E_2, T_2)$*, pour tout* $x_1 \in E_1$*,*
2. $f(\cdot, x_2) \in \mathcal{M}(E_1, T_1)$*, pour tout* $x_2 \in E_2$*.*

DÉMONSTRATION : La démonstration est facile, il suffit de remarquer que $f = f^+ - f^-$ et que $f^+, f^- \in \mathcal{M}_+(E, T)$. Le premier item de la conclusion du théorème 7.2 donne alors, pour tout $x_1 \in E_1$, $f^+(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}_+(E_2, T_2)$ et $f^-(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}_+(E_2, T_2)$. Comme $f(x_1, \cdot) = f^+(x_1, \cdot) - f^-(x_1, \cdot)$, on en déduit que $f(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}(E_2, T_2)$. En changeant les rôles de (E_1, T_1) et (E_2, T_2), on montre aussi que $f(\cdot, x_2) \in \mathcal{M}(E_1, T_1)$, pour tout $x_2 \in E_2$. ■

Remarque 7.3 La réciproque de la proposition précédente est fausse. Soient (E_1, T_1) et (E_2, T_2) deux espaces mesurables, $E = E_1 \times E_2$ et $T = T_1 \otimes T_2$. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ t.q.

1. $f(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}(E_2, T_2)$, pour tout $x_1 \in E_1$,
2. $f(\cdot, x_2) \in \mathcal{M}(E_1, T_1)$, pour tout $x_2 \in E_2$.

Alors, f n'est pas forcément T-mesurable. Un exemple est donné dans l'exercice 7.4. Un cas particulier intéressant pour laquelle cette réciproque est vraie est donné par la proposition 7.3.

Proposition 7.3 *Soient* (E_1, T_1) *et* (E_2, T_2) *deux espaces mesurables. On pose* $E = E_1 \times E_2$ *et* $T = T_1 \otimes T_2$*. Soient* $F_1 \in \mathcal{M}(E_1, T_1)$ *et* $F_2 \in \mathcal{M}(E_2, T_2)$*. On définit* $f : E \to \mathbb{R}$ *par* $f(x_1, x_2) = F_1(x_1)F_2(x_2)$ *pour tout* $(x_1, x_2) \in E$*. Alors* f *est* T*-mesurable (c'est-à-dire* $f \in \mathcal{M}(E, T)$*).*

DÉMONSTRATION : On procède en 3 étapes.
Etape 1. On prend d'abord $F_1 = 1_{A_1}$ et $F_2 = 1_{A_2}$ avec $A_1 \in T_1$ et $A_2 \in T_2$. On a alors $f = 1_{A_1 \times A_2} \in \mathcal{M}(E, T)$ car $A_1 \times A_2 \in T_1 \times T_2 \subset T_1 \otimes T_2 = T$.

Etape 2. On prend maintenant $F_1 \in \mathcal{E}(E_1, T_1)$ et $F_2 \in \mathcal{E}(E_2, T_2)$. Il existe alors $a_1^{(1)}, \ldots, a_n^{(1)} \in \mathbb{R}$, $A_1^{(1)}, \ldots, A_n^{(1)} \in T_1$, $a_1^{(2)}, \ldots, a_m^{(2)} \in \mathbb{R}$ et $A_1^{(2)}, \ldots, A_m^{(2)} \in T_2$ t.q. :

$$F_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i^{(1)} A_i^{(1)} \text{ et } A_i^{(1)} \cap A_k^{(1)} = \emptyset \text{ si } i \neq k,$$

$$F_2 = \sum_{j=1}^{m} a_j^{(2)} A_j^{(2)} \text{ et } A_j^{(2)} \cap A_k^{(1)} = \emptyset \text{ si } j \neq k.$$

On a alors $f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i^{(1)} a_j^{(2)} 1_{A_i^{(1)} \times A_j^{(2)}} \in \mathcal{E}(E, T) \subset \mathcal{M}(E, T)$.

Etape 3. On prend enfin $F_1 \in \mathcal{M}(E_1, T_1)$ et $F_2 \in \mathcal{M}(E_2, T_2)$. Il existe $(F_n^{(1)})_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{E}(E_1, T_1)$ et $(F_n^{(2)})_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{E}(E_2, T_2)$ t.q. $F_n^{(1)}(x_1) \to F_1(x_1)$ pour tout $x_1 \in E_1$ et $F_n^{(2)}(x_2) \to F_2(x_2)$ pour tout $x_2 \in E_2$. On en déduit que $f_n(x_1, x_2) = F_n^{(1)}(x_1) F_n^{(2)}(x_2) \to f(x_1, x_2)$ pour tout $(x_1, x_2) \in E$ et donc que $f \in \mathcal{M}(E, T)$ car $f_n \in \mathcal{M}(E, T)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (étape 2). ■

Théorème 7.3 (Fubini)
Soient (E_1, T_1, m_1) et (E_2, T_2, m_2) des espaces mesurés σ-finis. On note (E, T, m) l'espace produit. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction T-mesurable (c'est-à-dire $f \in \mathcal{M}(E, T)$) et intégrable pour la mesure m, c'est-à-dire $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Alors :

1. *$f(x_1, \cdot) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E_2, T_2, m_2)$ pour presque tout $x_1 \in E_1$,*

   on pose $\varphi_f(x_1) = \int f(x_1, \cdot)dm_2$ pour $x_1 \in E_1$ t.q. $f(x_1, \cdot) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E_2, T_2, m_2)$. La fonction φ_f est donc définie p.p. sur E_1 (et à valeurs dans $\mathbb{R}$).

2. *$\varphi_f \in L^1_{\mathbb{R}}(E_1, T_1, m_1)$ (au sens : il existe $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E_1, T_1, m_1)$ t.q. $f = g$ p.p.).*

3. *$\displaystyle\int f dm = \int \varphi_f dm_1 = \int \Big(\int f(x_1, x_2)dm_2(x_2)\Big)dm_1(x_1)$,*

4. *les mêmes résultats sont vrais en inversant les rôles de m_1 et m_2, de sorte que :*

$$\int \Big(\int f(x_1, x_2)dm_2(x_2)\Big)dm_1(x_1) = \int \Big(\int f(x_1, x_2)dm_1(x_1)\Big)dm_2(x_2).$$

Démonstration : Comme $f \in \mathcal{M}(E, T)$, on a $f^+, f^- \in \mathcal{M}_+(E, T)$. On peut donc appliquer le théorème de Fubini-Tonelli (théorème 7.2) à f^+ et f^-. Il donne :

1. $f^+(x_1, \cdot), f^-(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}_+(E_2, T_2)$, pour tout $x_1 \in E_1$,
2. φ_{f^+}, $\varphi_{f^-} \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$ avec $\varphi_{f^\pm}(x_1) = \int f^\pm(x_1, \cdot)dm_2$ pour tout $x_1 \in E_1$.
3. $\int f^\pm dm = \int \varphi_{f^\pm} dm_1$.

Le premier item donne que $f(x_1, \cdot) = f^+(x_1, \cdot) - f^-(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}(E_2, T_2)$ (noter que f, f^+ et f^- sont à valeurs dans $\mathbb{R}$).
Comme $\int f^+ dm < \infty$ et $\int f^- dm < \infty$ (car $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$), le troisième item donne que $\varphi_{f^+} < \infty$ p.p. (sur E_1) et que $\varphi_{f^-} < \infty$ p.p. (sur E_1). On a donc $f^+(x_1, \cdot) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E_2, T_2, m_2)$ et $f^-(x_1, \cdot) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E_2, T_2, m_2)$ pour presque tout $x_1 \in E_1$. On en déduit donc que $f(x_1, \cdot) = f^+(x_1, \cdot) - f^-(x_1, \cdot) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E_2, T_2, m_2)$ pour presque tout $x_1 \in E_1$. Ce qui donne le premier item de la conclusion.
La fonction φ_f est donc définie p.p. sur E_1 et on a $\varphi_f = \varphi_{f^+} - \varphi_{f^-}$ p.p. (on a $\varphi_f(x_1) = \varphi_{f^+}(x_1) - \varphi_{f^-}(x_1)$ en tout point x_1 t.q. $\varphi_{f^+}(x_1) < \infty$ et $\varphi_{f^-}(x_1) < \infty$). Comme $\varphi_{f^+} < \infty$ et $\varphi_{f^-} < \infty$ p.p, on peut trouver $A \in T_1$ t.q. $m_1(A) = 0$ et $\varphi_{f^+} < \infty$ et $\varphi_{f^-} < \infty$ sur $A^c = E_1 \setminus A$. En posant $g = \varphi_{f^+} - \varphi_{f^-}$ sur A^c et $g = 0$ sur A, on a donc $g \in \mathcal{M}(E_1, T_1)$, $g = \varphi_f$ p.p. et $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E_1, T_1, m_1)$ car $\int |g| dm_1 \leq \int \varphi_{f^+} dm_1 + \int \varphi_{f^-} dm_1 < \infty$. Ceci donne le deuxième item de la conclusion (le fait que φ_f appartienne à $L^1_{\mathbb{R}}(E_1, T_1, m_1)$) et donne aussi le troisième item car :

$$\int \varphi_f dm_1 = \int g dm_1 = \int \varphi_{f^+} dm_1 - \int \varphi_{f^-} dm_1 = \int f^+ dm - \int f^- dm = \int f dm.$$

Enfin, comme pour le théorème de Fubini-Tonelli, le quatrième item de la conclusion s'obtient en changeant les rôles de m_1 et m_2. ■

Le théorème de Fubini est souvent utilisé sous la forme du corollaire suivant :

Corollaire 7.2 *Soient (E_1, T_1, m_1) et (E_2, T_2, m_2) des espaces mesurés σ-finis, (E,T,m) l'espace produit et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction T-mesurable t.q. :*

$$\int \Big(\int |f(x_1, x_2)| dm_2(x_2) \Big) dm_1(x_1) < +\infty$$

ou

$$\int \Big(\int |f(x_1, x_2)| dm_1(x_1) \Big) dm_2(x_2) < +\infty.$$

Alors :

$$\int \Big(\int f(x_1, x_2) dm_2(x_2) \Big) dm_1(x_1) = \int \Big(\int f(x_1, x_2) dm_1(x_1) \Big) dm_2(x_2). \tag{7.9}$$

(Toutes les intégrales ayant bien un sens.)

Démonstration : Le corollaire est une conséquence immédiate du théorème 7.3 et de l'équivalence (7.8). ■

Remarque 7.4 (contre-exemple lié au théorème de Fubini) On cherche ici à construire une fonction pour laquelle la conclusion du théorème de Fubini n'est pas vérifiée : soient a une fonction (continue) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = a(x)$ si $x \geq 0$ et $x \leq y < 2x$, $f(x, y) = -a(x)$ si $x \geq 0$ et $2x \leq y < 3x$, $f(x, y) = 0$ si $x < 0$ ou $x \geq 0$ et $y \notin [x, 3x]$. On pose $b(x) = x\,a(x)$. On peut montrer que les hypothèses du théorème de Fubini ne sont vérifiées que si $b \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. En prenant par exemple $a(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$, on montre que : $\displaystyle\int \Big(\int f(x, y) dy \Big) dx \neq \int \Big(\int f(x, y) dx \Big) dy$ (voir l'exercice 7.5).

7.4 Mesure de Lebesgue sur la tribu des boréliens de $\mathbb{R}^N$

On a déjà vu que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{N-1}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour tout $N \geq 1$ (exercice 2.5 pour $N = 2$ et exercice 7.1). Le paragraphe précédent permet alors de définir la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}^N$ (c'est-à-dire sur la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}^N$) pour tout $N \geq 1$.

Définition 7.3 (Mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$)

1. *La mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ est la mesure $\lambda \otimes \lambda$, on la note λ_2.*
2. *Par récurrence sur N, la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, $N \geq 3$, est la mesure $\lambda_{N-1} \otimes \lambda$, on la note λ_N.*

On note $L^1(\mathbb{R}^N) = L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$, et pour $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, on note $\displaystyle\int f(x) d\lambda_N(x) = \int f(x) dx$.

On donne maintenant quelques propriétés de la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. Il s'agit de propriétés élémentaires ou de généralisations simples de propriétés vues pour la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Les démonstrations seront proposées en exercices.

Proposition 7.4 (Propriétés élémentaires de λ_N)
Soit $N \geq 2$. On rappelle que λ_N est la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

1. *La mesure λ_N est σ-finie.*
2. *Soit $A_1, \ldots, A_N \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Alors, $\prod_{i=1}^N A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et $\lambda_N(\prod_{i=1}^N A_i) = \prod_{i=1}^N \lambda(A_i)$.*

3. *Soient* $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{R}$ *et* $\beta_1, \ldots, \beta_N \in \mathbb{R}$ *t.q.* $\alpha_i < \beta_i$ *pour tout* $i \in \{1, \ldots, N\}$. *Alors :*

$$\lambda_N(\prod_{i=1}^{N}]\alpha_i, \beta_i[) = \prod_{i=1}^{N} \lambda(]\alpha_i, \beta_i[) = \prod_{i=1}^{N} (\beta_i - \alpha_i).$$

4. *Soit* K *un compact de* $\mathbb{R}^N$ *(noter que* $K \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$*). Alors,* $\lambda_N(K) < +\infty$.
5. *Soit* O *un ouvert non vide de* $\mathbb{R}^N$. *Alors,* $\lambda_N(O) > 0$.
6. *Soit* $f, g \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. *Alors* $f = g$ *p.p. (c'est-à-dire* λ_N*-p.p.) implique* $f(x) = g(x)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}^N$.
7. $C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$. *(En confondant* f *avec sa classe, on écrira donc souvent* $C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \subset L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N)$.*)*

Démonstration : Comme λ_N est une mesure produit, le fait que λ_N est σ-finie est (par récurrence sur N) une conséquence du théorème donnant l'existence (et l'unicité) de la mesure produit (théorème 7.1) car ce théorème donne que le produit de mesures σ-finies est σ-finie.

La démonstration des autres propriétés fait l'objet de l'exercice 7.10. ■

Une propriété très importante de λ_N est sa "régularité", c'est-à-dire que pour tout élément A de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe O ouvert de $\mathbb{R}^N$ et F fermé de $\mathbb{R}^N$ tels que

$$F \subset A \subset O \text{ et } \lambda_N(O \setminus F) \leq \varepsilon.$$

Cette propriété est une conséquence du fait que toute mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, finie sur les compacts, est régulière (proposition 7.5).

Proposition 7.5 (Régularité d'une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, finie sur les compacts)
Soit m *une mesure sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ *t.q.* $m(K) < \infty$ *pour tout compact* K *de* $\mathbb{R}^N$. *(Noter que ceci est vrai pour* $m = \lambda_N$.*) Alors :*

1. *Pour tout* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ *et pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* O *ouvert de* $\mathbb{R}^N$ *et* F *fermé de* $\mathbb{R}^N$ *tels que :*

$$F \subset A \subset O \text{ et } m(O \setminus F) \leq \varepsilon. \tag{7.10}$$

2. *Pour tout* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, *on a* $m(A) = \inf\{m(O),\ O \text{ ouvert t.q. } A \subset O\}$.

Démonstration : Cette proposition fait l'objet de l'exercice 7.11. ■

On donne maintenant des généralisations au cas de λ_N de propriétés déjà vues pour λ.

Proposition 7.6 (Densité de C_c dans $L^1(\mathbb{R}^N)$) *Pour tout* $N \geq 1$, *l'espace* $C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ *est dense dans* $L^1(\mathbb{R}^N)$ *(c'est-à-dire que, pour tout* $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ *et tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ *t.q.* $\|f - \varphi\|_1 \leq \varepsilon$*).*

Démonstration : La démonstration de cette proposition fait l'objet de l'exercice 7.12, elle découle essentiellement de la régularité de λ_N. Cette démonstration est très voisine de celle faite pour le cas $N = 1$, théorème 5.5. ■

Comme cela a déjà été dit après le théorème 5.5, le résultat de densité que nous venons d'énoncer n'est pas limité à la mesure de Lebesgue. Il est vrai pour toute mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, finie sur les compacts. Il est aussi vrai en remplaçant C_c par C_c^∞. On obtient donc le théorème suivant :

Théorème 7.4 (Densité de C_c^∞ dans $L^1(\mathbb{R}^N)$) *Soit $N \geq 1$ et μ sur une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, finie sur les compacts. Alors, l'espace $C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \mu)$ (c'est-à-dire que, pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \mu)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ t.q. $\|f - \varphi\|_1 \leq \varepsilon$).*

DÉMONSTRATION : La démonstration de ce théorème fait l'objet de l'exercice 7.13. ■

Proposition 7.7 (Invariance par translation)
Soient $N \geq 1$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{R}^\star$ et $\beta_1, \ldots, \beta_N \in \mathbb{R}$. Pour $x = (x_1, \ldots, x_N)^t \in \mathbb{R}^N$. On pose $\varphi(x) = (\alpha_1 x_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_N x_N + \beta_N)^t$ (de sorte que φ est une bijection de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$). Pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, on a alors $\varphi(A) = \{\varphi(x),\ x \in A\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et $\lambda_N(\varphi(A)) = \prod_{i=1}^N |\alpha_i| \lambda_N(A)$.

Pour $\alpha_i = 1$ pour tout i, cette propriété s'appelle "invariance par translation de λ_N".

DÉMONSTRATION : Cette proposition a déjà été vue pour $N = 1$, proposition 2.9. La démonstration de la proposition 2.9 utilisait , par exemple, le fait que tout ouvert est réunion dénombrable d'intervalles ouverts disjoints 2 à 2 (et la régularité de λ). La démonstration proposée ici pour $N \geq 1$ utilise une récurrence sur N et la partie "unicité" du théorème 7.1 sur la mesure produit. Elle fait l'objet de l'exercice 7.14.

On peut aussi noter que la partie "unicité" du théorème 7.1 peut être faite (voir la remarque 7.1) avec le lemme des classes monotones (exercice 2.12). Ce lemme pourrait aussi être utilisé pour démontrer la proposition 2.9 (au lieu du théorème de régularité et du fait que tout ouvert est réunion dénombrable d'intervalles ouverts disjoints 2 à 2). ■

Proposition 7.8 (Changement de variables simple)
Soient $N \geq 1$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{R}^\star$ et $\beta_1, \ldots, \beta_N \in \mathbb{R}$. Pour $x = (x_1, \ldots, x_N)^t \in \mathbb{R}^N$. On pose $\varphi(x) = (\alpha_1 x_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_N x_N + \beta_N)^t$ (de sorte que φ est une bijection de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$). Alors :

1. *Pour tout $f \in \mathcal{M}_+ = \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$, on a $f \circ \varphi \in \mathcal{M}_+$ et :*
$$\int f d\lambda_N = \prod_{i=1}^N |\alpha_i| \int (f \circ \varphi) d\lambda_N.$$

2. *Pour tout $f \in \mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$, on a $f \circ \varphi \in \mathcal{L}^1$ et :*
$$\int f d\lambda_N = \prod_{i=1}^N |\alpha_i| \int (f \circ \varphi) d\lambda_N.$$

DÉMONSTRATION : La démonstration est une conséquence simple de la proposition 7.7. Elle fait l'objet de l'exercice 7.15.

Noter aussi que $\prod_{i=1}^N |\alpha_i|$ est la valeur absolue du déterminant de la matrice jacobienne de φ au point x. Cette matrice est notée $D\varphi(x)$, elle ne dépend pas de x pour les applications considérées dans cette proposition. Cette proposition sera généralisée au théorème 7.5. ■

7.5 Convolution

On rappelle que $L^1(\mathbb{R}^N) = L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ et que, pour $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $\int f d\lambda_N = \int f(x) d\lambda_N(x) = \int f(x)dx$ (c'est-à-dire que dx signifie toujours $d\lambda_N(x)$).
On note aussi $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N) = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$.
Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$. On souhaite définir la fonction "convoluée" de f et g, c'est-à-dire définir $f \star g$ par :

$$f \star g(x) = \int f(t) g(x-t) dt. \tag{7.11}$$

La définition de cette fonction nécessite les deux conditions suivantes :

1. Il faut que la définition ne dépende pas des représentants choisis pour f et g.
2. Il faut que, ayant choisi des représentants pour f et g, encore notés f et g, la fonction $g(x - \cdot)f(\cdot)$ appartienne à $L^1(\mathbb{R}^N)$ (au sens "il existe $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ t.q. $g(x-\cdot)f(\cdot) = h$ p.p."). Ceci n'est pas immédiat car, en général, le produit deux fonctions intégrables n'est pas une fonction intégrable.

La condition 1 est satisfaite, car, pour $x \in \mathbb{R}^N$, si f, f_1, g et g_1 sont des fonctions de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$, on a :

$$f = f_1 \text{ p.p.}, \; g = g_1 \text{ p.p.} \;\Rightarrow f(\cdot)g(x-\cdot) = f_1(\cdot)g_1(x-\cdot) \text{ p.p.}. \tag{7.12}$$

(p.p. signifiant ici λ_N-p.p..) En effet, il suffit de remarquer que si $f = f_1$ p.p. et $g = g_1$ p.p., il existe $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ t.q. $\lambda_N(A) = \lambda_N(B) = 0$, $f = f_1$ sur A^c et $g = g_1$ sur B^c. Pour $x \in \mathbb{R}^N$, on a alors $f(\cdot)g(x-\cdot) = f_1(\cdot)g_1(x-\cdot)$ sur $A^c \cap B_x^c = (A \cup B_x)^c$ avec $B_x = \{x - z, \, z \in B\}$. On en déduit bien $f(\cdot)g(x-\cdot) = f_1(\cdot)g_1(x-\cdot)$ p.p. car $\lambda_N(A \cup B_x) \le \lambda_N(A) + \lambda_N(B_x) = \lambda_N(A) + \lambda_N(B) = 0$ (on utilise ici la propriété d'invariance par translation donnée dans la proposition 7.7).
On en déduit que, si Si f et f_1 [resp. g et g_1] sont des représentants d'un même élément de $L^1(\mathbb{R}^N)$, on a $f(.)g(x-.) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ si et seulement si $f_1(.)g_1(x-.) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et, si $f(.)g(x-.) \in L^1(\mathbb{R}^N)$, on a $\int f(t)g(x-t)dt = \int f_1(t)g_1(x-t)dt$.

On montre dans la proposition suivante que la condition 2 est satisfaite pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$.

Proposition 7.9 (Convolution) *Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ (que l'on confond avec l'un de leurs représentants). Alors :*

- *Pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$, la fonction $g(x-\cdot)f(\cdot)$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^N)$ (en la confondant avec sa classe). On pose donc : $f \star g(x) = \displaystyle\int f(t)g(x-t)dt$. La fonction $f \star g$ est donc définie p.p. sur $\mathbb{R}^N$.*
- *$f \star g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ (au sens "il existe $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ t.q. $f \star g = h$ p.p.").*
- *$\|f \star g\|_1 \le \|f\|_1 \|g\|_1$.*

Démonstration : On donne la démonstration pour $N = 1$ (le cas $N > 1$ est similaire, en ayant d'abord montré que $\lambda_{2N} = \lambda_N \otimes \lambda_N$).
On choisit des représentants de f et g, de sorte que $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. On souhaite appliquer le théorème de Fubini (théorème 7.3) à $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par $H(x,y) = f(y)g(x-y)$, avec les espaces mesurés $(E_i, T_i, m_i) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ pour $i = 1, 2$.

Comme λ est σ-finie, pour appliquer le théorème de Fubini, il suffit de vérifier que H est $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$-mesurable et que $\int(\int |H(x,y)|dx)dy < \infty$.

On montre d'abord que H est $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$-mesurable. On a $H = H_1 \circ \psi$ avec :

$$H_1 \ : \ (x,y) \mapsto f(x)g(y), \quad \psi \ : \ (x,y) \mapsto (y, x-y).$$

La fonction H_1 est mesurable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ (car f et g sont mesurables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on applique ici la proposition 7.3) et ψ est mesurable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ car continue ($\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ sont toujours munis de leur tribu borélienne). La fonction H est donc mesurable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions mesurables.

On peut maintenant calculer l'intégrale de $|H|$:

$$\int(\int |H(x,y)|dx)dy = \int(\int |f(y)g(x-y)|dx)dy = \int |f(y)|(\int |g(x-y)|dx)dy.$$

La proposition 7.8 donne $\int |g(x-y)|dx = \int |g(x)|dx = \|g\|_1$, Donc :

$$\int(\int |H(x,y)|dx)dy = \|g\|_1 \int |f(y)|dy = \|g\|_1\|f\|_1 < \infty.$$

Le théorème de Fubini peut donc s'appliquer. Il donne que $H(x,\cdot) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$. Donc, $g(x-\cdot)f(\cdot) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$. Ceci montre bien que $f \star g$ est définie p.p.. Le théorème de Fubini donne alors aussi que $f \star g \in L^1(\mathbb{R})$ (au sens "il existe $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ t.q. $f \star g = h$ p.p.").

Enfin pour montrer que $\|f \star g\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_1$, il suffit de remarquer que :

$$\|f \star g\|_1 = \int |\int f(y)g(x-y)dy|dx \leq \int(\int |H(x,y)|dx)dy = \|g\|_1\|f\|_1.$$

■

Remarque 7.5 On a vu précédemment que $L^1(\mathbb{R}^N)$ muni de l'addition (loi de composition interne), de la multiplication par un scalaire (loi de composition externe) et de la norme $\|\cdot\|_1$ est un espace de Banach. L'ajout de la convolution (loi de composition interne) confère à $L^1(\mathbb{R}^N)$ la structure d'algèbre de Banach.

On sait aussi que $C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ muni de l'addition, de la multiplication interne, de la multiplication par un scalaire et de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_u$ est aussi une algèbre de Banach. En fait, nous montrerons par la suite qu'il existe un isomorphisme d'algèbre, appelé transformation de Fourier, entre $L^1(\mathbb{R}^N)$ et son image (par cette transformation) dans $C_b(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$.

Remarque 7.6 On donne ici quelques propriétés supplémentaires de la convolution.

Soit $N \geq 1$. Pour $p \in [1,\infty]$, on pose $L^p(\mathbb{R}^N) = L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda)$.

1. Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$. On a alors $f \star g = g \star f$ p.p.. Ceci découle de l'invariance par translation de la mesure de Lebesgue (propositions 7.7 et 7.8) et est démontré dans l'exercice 7.19.

2. Soit$1 < p < \infty$. Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Alors, $f \star g$ est définie p.p. sur $\mathbb{R}^N$, $f \star g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et $\|f \star g\|_p \leq \|f\|_p\|g\|_1$. Cette propriété fait l'objet de l'exercice 7.21.

3. Soit $p, q \in [1,\infty]$ t.q. $(1/p) + (1/q) = 1$. Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^N)$. Alors, $f \star g$ est définie partout sur $\mathbb{R}^N$ et $f \star g \in C_b(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$, voir l'exercice 8.6.

4. Soit $p \in [1, \infty]$. Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Alors, $f \star g$ est définie partout sur $\mathbb{R}^N$ et $f \star g \in C_\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, voir l'exercice 7.20.

5. (Régularisation par convolution) Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. On dit que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ si $f 1_K \in L^1(\mathbb{R}^N)$ pour tout compact K de R^N. On suppose que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $g \in C_c^k(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Alors, $f \star g$ est définie partout sur $\mathbb{R}^N$ et $f \star g \in C^k(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ (voir l'exercice 7.20, noter que $L^p(\mathbb{R}^N) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$).

6. Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$. On suppose que f et g sont à support compact (f à support compact signifie qu'il existe K, compact de $\mathbb{R}^N$ t.q. $f = 0$ p.p. sur K^c). Alors, la fonction $f \star g$ est aussi à support compact. Ceci fait partie de l'exercice 7.19.

La convolution est un outil très utile pour "régulariser" des fonctions. Elle est à la base de résultats de densité fondamentaux que nous verrons dans le chapitre suivant (densité de $C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ pour $p < \infty$, par exemple).

Il est aussi intéressant de généraliser la convolution de fonctions en convolution de mesures. On commence par remarquer qu'un fonction f dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ (voir la remarque 7.6) est entièrement déterminée par la mesure qu'elle induit sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, c'est-à-dire par la mesure m définie par $m = f\lambda_N$. Ceci est précisé dans le lemme suivant (en remarquant que $\int \varphi dm = \int \varphi f d\lambda_N$ pour tout $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$).

Lemme 7.1 *Soit $N \geq 1$ et $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ t.q. $\int f\varphi d\lambda_N = \int g\varphi d\lambda_N$, pour tout $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Alors, $f = g$ p.p..*

Démonstration : Soit $M \in \mathbb{N}^\star$. On note B_M la boule (fermée) de centre 0 et rayon M dans $\mathbb{R}^N$ et h_M la fonction défnie par :

$$
\begin{aligned}
&h_M(x) = f(x) - g(x) \text{ si } x \in B_M \text{ et } |f(x) - g(x)| \leq M,\\
&h_M(x) = 0 \text{ si } x \in B_M \text{ ou } |f(x) - g(x)| > M,\\
&h_M(x) = 0 \text{ si } x \notin B_M.
\end{aligned}
$$

On a $h_M \in L^1(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ (car B_M est un compact de $\mathbb{R}^N$). Comme $C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ (théorème 5.5 pour $d = 1$ et théorème 7.6 pour $N \geq 1$), il existe une suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ t.q. $\varphi_n \to h_M$ dans $L^1(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ quand $n \to \infty$. On peut aussi supposer (quitte à extraire une sous suite) que $\varphi_n \to h_M$ p.p. (théorème 6.2). Enfin, en remplaçant φ_n par $\max(\min(\varphi_n, M), -M)$ on obtient :

$$
\begin{aligned}
&\varphi_n \in C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N},\\
&\varphi_n \to h_M \text{ p.p.},\\
&|\varphi_n| \leq M \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

Comme $\varphi_n \in C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, on a $\int (f - g)\varphi_n d\lambda_N = 0$. Le théorème de convergence dominée (la domination est par $M 1_{B_M} |f - g|$) donne alors $\int h_M (f - g) d\lambda_N = 0$. En faisant maintenant tendre M vers l'infini, le théorème de convergence monotone donne $\int |f - g| d\lambda_N = 0$, et donc $f = g$ p.p. ■

Pour que la convolution de mesures soit une généralisation de la convolution de fonctions, on souhaite que $m \star \mu = (f \star g)\lambda_N$, lorsque $m = f\lambda_N$ et $g = g\lambda_N$ avec $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ (et donc $f \star g \in L^1(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$). Noter que m, μ et $m \star \mu$ sont des mesures signées.

Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$. On pose $m = f\lambda_N$ et $g = g\lambda_N$. On a, pour tout φ borélienne bornée de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$ (par exemple, $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$),

$$
\int (f \star g)\varphi d\lambda_N = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x - y) g(y) dy \right) \varphi(x) dx.
$$

(On rapelle que dx désigne $d\lambda_N(x)$). En utilisant le théorème de Fubini (qui s'applique bien ici car $\int\int |f(x-y)g(y)\varphi(x)|dxdy \leq \|\varphi\|_\infty \|f\|_1 \|g\|_1$), puis avec le changement de variable $z = x - y$ (pour y fixé) on obtient :

$$\int (f \star g)\varphi d\lambda_N = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\varphi(x)dx \right) g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(z)\varphi(z+y)dz \right) g(y)dy.$$

On a donc :

$$\int (f \star g)\varphi d\lambda_N = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(z+y)dm(z) \right) d\mu(y) = \int_{\mathbb{R}^{2N}} \varphi(y+z)d(m \otimes \mu)(z,y), \tag{7.13}$$

où la dernière égalité découle de la définition de $m \otimes \mu$. Plus précisément, si m et μ sont des mesures finies (c'est-à-dire des applications σ-additives de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ dans $\mathbb{R}^+$), la dernière égalité de 7.13 est donnée par le troisième item du théorème de Fubini (théorème 7.3). Si m et μ sont des mesures signées, on se ramène au cas précédent avec la décomposition de Hahn (proposition 2.6) qui donne $m = m^+ - m^-$ et $\mu = \mu^* - \mu^-$. La mesure $m \otimes \mu$ est alors définie à partir de $m^\pm \otimes \mu^\pm$.

On est ainsi amené à définir $m \star \mu$ en utilisant le deuxième membre de (7.13) pour définir $\int \varphi d(m \star \mu)$.

Définition 7.4 *Soit $N \geq 1$ et m, μ des mesures signées sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. On définit la mesure signée $\mu \star \nu$ sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ par :*

$$m \star \mu(A) = \int_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^{2N})} 1_A(x+y)d(m \otimes \mu)(x,y) \text{ pour tout } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N).$$

où $m \otimes \nu = m^+ \otimes \mu^+ + m^- \otimes \mu^- - m^- \otimes \mu^+ - m^+ \otimes \mu^-$ et $m^\pm$ $\mu^\pm$ sont données par la décomposition de Hahn de m et μ (proposition 2.6).

Le fait que $m \star \mu$ est une mesure signée sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ est facile (la σ-additivité de $m \star \mu$ découle, par exemple, du théorème de convergence dominée). On déduit de cette définition la proposition suivante.

Proposition 7.10 *Soit $N \geq 1$ et m, μ des mesures signées sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.*

1. *On a alors, pour tout φ borélienne bornée de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$ (par exemple, $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$) :*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi d(m \star \mu) = \int_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^{2N})} \varphi(x+y)d(m \otimes \mu)(x,y).$$

2. *Si m et μ sont des probabilités, la mesure $m \star \mu$ est aussi une probabilité.*

3. *Si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$, $m = f\lambda_N$ et $\mu = g\lambda_N$, on a $m \star \mu = (f \star g)\lambda_N$.*

Démonstration : Le premier item se démontre, comme souvent, en considérant des fonctions étagées, puis en écrivant φ comme limite de fonctions étagées (bornées par la borne supérieure de $|\varphi|$, exercice 7.23). Le deuxième item est immédiat en remarquant que $m \star \mu(A) \geq 0$ si m et μ sont des mesures (positives) et $m \star \mu(\mathbb{R}^N) = m(\mathbb{R}^N)\mu(\mathbb{R}^N)$. Enfin, le troisième item a été vu avant la proposition 7.10. ■

Remarque 7.7 Il aurait aussi été possible de définir $m \star \mu$ grâce au théorème de Riesz dans $C_0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ (théorème 5.4 pour $N \geq 1$). Si m, μ sont des mesures signées sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ (ou, directement, des formes linéaires continues sur $C_0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$). On définit, l'application L de $C_0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$L(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x+y) dm(x) d\mu(y), \forall \varphi \in C_0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}). \tag{7.14}$$

L'application L est une forme linéaire continue sur $C_0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Par le théorème de Riesz, il existe donc une unique mesure de Radon, notée τ (c'est la mesure convoluée de m et μ) t.q. :

$$L(\varphi) = \int \varphi(s) d\tau(s). \tag{7.15}$$

7.6 Formules de changement de variables

La proposition 7.8 donne un résultat sur les changements de variables "simples". On donne maintenant une généralisation dans le cas où les intégrales portent sur des ouverts bornés de $\mathbb{R}^N$.

Théorème 7.5 (Formules de changement de variables)
Soient $N \geq 1$, U et V des ouverts bornés de $\mathbb{R}^N$ et φ un C^1-difféomorphisme de U dans V (i.e. φ est une bijection de U dans V, $\varphi \in C^1(U, V)$ et $\varphi^{-1} \in C^1(V, U)$). On note $D\varphi(y)$ la matrice jacobienne de φ en y et $Det(D\varphi)$ la fonction $y \mapsto Det(D\varphi(y))$.

1. *Soit $f \in \mathcal{M}_+ = \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$. Alors, $(f \circ \varphi)|Det(D\varphi)|1_U \in \mathcal{M}_+$ et :*
$$\int_V f(x) dx = \int_U f(\varphi(y))|Det(D\varphi(y))| dy.$$
2. *Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$ t.q. $f 1_V \in \mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$. Alors, $(f \circ \varphi)|Det(D\varphi)|1_U \in \mathcal{L}^1$ et :*
$$\int_V f(x) dx = \int_U f(\varphi(y))|Det(D\varphi(y))| dy.$$

Démonstration : Comme φ est de classe C^1, il est facile de voir que $(f \circ \varphi)|Det(D\varphi)|1_U$ est mesurable si f est mesurable. La démonstration de l'item 1 du théorème n'est pas faite ici. Elle consiste à se ramener par un procédé de localisation au cas de changements de variables affines.

Le deuxième item du théorème est une conséquence facile du premier. En effet, soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$ t.q. $f 1_V \in \mathcal{L}^1$. En appliquant le premier item à la fonction $|f| \in \mathcal{M}_+$, on obtient que $(f \circ \varphi)|Det(D\varphi)|1_U \in \mathcal{L}^1$. Puis en appliquant le premier item à f^+ et f^- et en faisant la différence, on obtient bien que $\int_V f(x) dx = \int_U f(\varphi(y))|Det(D\varphi(y))| dy$. ■

Un exemple de changement de variables

On conclut cette section en donnant l'exemple des coordonnées polaires pour $N = 2$.

La fonction f appartient à $\mathcal{M}_+(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ (ou à $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \lambda_2)$) et on veut calculer (par exemple) $\int_{B_1} f(x) dx$, où B_1 est la boule unité (ouverte) de $\mathbb{R}^2$, en passant en coordonnée polaires.

On a donc $B_1 = \{x \in \mathbb{R}^2; |x| < 1\}$, où $|\cdot|$ est la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2$ si $x = (x_1, x_2)^t \in \mathbb{R}^2$.

On pose $L = \{(x_1, 0)^t,\ x_1 \in [0, 1[\}$ et on remarque que $\lambda_2(L) = \lambda([0, 1[) \times \lambda(\{0\}) = 0$. Donc, en posant $V = B_1 \setminus L$, on a :

$$\int_{B_1} f(x) dx = \int_{B_1 \setminus L} f(x) dx = \int_V f(x) dx (= \int_V f d\lambda_2).$$

On pose aussi $U =]0,1[\times]0,2\pi[$, de sorte que U et V sont de ouverts bornés de $\mathbb{R}^2$. L'application $\varphi : (r,\theta)^t \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)^t$ est alors une bijection de U dans V. Elle est de classe C^1 et son inverse est de classe C^1 (φ et φ^{-1} sont même de classe C^∞). On peut calculer la matrice jacobienne de φ et son déterminant :

$$D\varphi(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}, \quad |Det(D\varphi(r,\theta))| = r.$$

On peut donc appliquer le théorème 7.5, il donne :

$$\int_{B_1} f(x)dx = \int_V f(x)dx = \int_U f(r\cos\theta, r\sin\theta) r d\lambda_2(r,\theta) = \int_{]0,1[\times]0,2\pi[} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r d\lambda_2(r,\theta)$$

En appliquant maintenant le théorème de Fubini-Tonelli pour évaluer la dernière intégrale (si $f \in \mathcal{L}^1$ au lieu de $f \in \mathcal{M}_+$, on raisonne d'abord sur $|f|$ puis on utilise le théorème de Fubini), on obtient :

$$\int_{B_1} f(x)dx = \int_0^{2\pi} (\int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr) d\theta.$$

Si $f(x)$ ne dépend que de $|x|$, c'est-à-dire si il existe ψ t.q. $f(x) = \psi(|x|)$, on obtient alors :

$$\int_{B_1} f(x)dx = 2\pi \int_0^1 \psi(r) r dr.$$

En particulier, on voit que $f1_{B_1} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2)$ si et seulement si $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(]0,1[, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, avec g définie par $g(r) = r\psi(r)$ pour $r \in]0,1[$.

Prenons toujours $f \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ (ou bien $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \lambda_2)$). Le raisonnement que nous venons de faire pour B_1 peut être fait pour $B_a = \{x \in \mathbb{R}^2; |x| < a\}$ avec $a > 0$. On obtient alors, pour tout $a > 0$:

$$\int_{B_a} f(x)dx = \int_0^{2\pi} (\int_0^a f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr) d\theta. \tag{7.16}$$

En prenant $a = n$, $n \in \mathbb{N}^\star$, dans (7.16), on obtient aussi, quand $n \to \infty$ (avec le théorème de convergence monotone si $f \in \mathcal{M}_+$ et en raisonnement avec $f^\pm$ si $f \in \mathcal{L}^1$) :

$$\int f(x)dx = \int_0^{2\pi} (\int_0^\infty f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr) d\theta. \tag{7.17}$$

7.7 Exercices

7.7.1 Mesure produit

Exercice 7.1 *Corrigé 132 page 441*
Montrer que, pour tout $n \geq 2$, on a $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$. [S'inspirer de la démonstration faite pour $n = 2$ dans l'exercice 2.5.]

Exercice 7.2 *Corrigé 133 page 442*

Soient E_1, E_2 deux ensembles, T_1 une tribu sur E_1 et T_2 une tribu sur E_2. On note $E = E_1 \times E_2$ et on rappelle que $T_1 \times T_2 = \{A_1 \times A_2,\ A_1 \in T_1,\ A_2 \in T_2\}$.

Montrer que l'algèbre engendrée par $T_1 \times T_2$ est égale à l'ensemble des réunions finies disjointes d'éléments de $T_1 \times T_2$ c'est-à-dire que, pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, A appartient à l'algèbre engendrée par $T_1 \times T_2$ si et seulement si il existe $(A^{(p)})_{p=1,\ldots,n} \subset T_1 \times T_2$ t.q. $A^{(p)} \cap A^{(q)} = \emptyset$ si $p \neq q$ et $A = \cup_{p=1}^{n} A^{(p)}$.

Exercice 7.3 (Exemple de mesure produit) *Corrigé 134 page 443*
Soit m_1 et m_2 des mesures $\sigma-$finies, non nulles, sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et t.q. $m_1 \otimes m_2(\mathbb{R}^2 \setminus D) = 0$, où $D = \{(x, x), x \in \mathbb{R}\}$. Montrer qu'il existe a, α, $\beta \in \mathbb{R}$ t.q. $m_1 = \alpha\delta_a$ et $m_2 = \beta\delta_a$, où δ_a est la mesure de Dirac en a.

Exercice 7.4 (Fonction non borélienne dont les traces sont boréliennes) *Corrigé 135 page 444*
Pour $B \subset \mathbb{R}^2$, on note $t(B)$ l'ensemble des $x_1 \in \mathbb{R}$ t.q. $(x_1, 0) \in B$. On pose $T = \{B \subset \mathbb{R}^2; t(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$.
Soit $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Pour $x = (x_1, x_2)^t \in \mathbb{R}^2$, on pose $g(x) = (x_1 \cos\theta - x_2 \sin\theta, x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta)^t$.

1. Montrer que T est une tribu contenant $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.
2. Soit $A \subset \mathbb{R}$ t.q. $A \notin \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On pose $B = A \times \{0\}$.
   (a) Montrer que $B \notin \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.
   (b) On pose $f = 1_B \circ g$. Montrer que la fonction f n'est pas une fonction borélienne de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ mais que les fonctions $f(x_1, \cdot)$ et $f(\cdot; x_2)$ sont boréliennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, pour tout $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

7.7.2 Fubini-Tonelli et Fubini

Exercice 7.5 (Contre-exemple au théorème de Fubini) *Corrigé 136 page 444*
Soit $L^1 = L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{(x+1)^2} & \text{si } x > 0 \text{ et } x < y \leq 2x \\ -\frac{1}{(x+1)^2} & \text{si } x > 0 \text{ et } 2x < y \leq 3x \\ 0 & \text{si } x > 0 \text{ et } y \notin]x, 3x[\\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases} \tag{7.18}$$

1. Montrer que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$- mesurable.
2. Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f(.,y) \in L^1$; on pose $\phi(y) = \int f(x,y)d\lambda(x)$. Montrer que $\phi \in L^1$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x,.) \in L^1$; on pose $\psi(x) = \int f(x,y)d\lambda(y)$. Montrer que $\psi \in L^1$.
4. Montrer que $\int \phi d\lambda \neq \int \psi d\lambda$ (ϕ et ψ sont définies dans les questions précédentes).
5. Pourquoi le théorème de Fubini ne s'applique-t-il pas ici ?

Exercice 7.6 (Intégrale d'une fonction positive) *Corrigé 137 page 446*
Soit (E, T, m) un espace mesuré σ-fini, et $f : E \to \mathbb{R}_+$ une application mesurable. On pose $F = 1_A$ avec $A = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times E; 0 < t < f(x)\}$.

1. Montrer que F est $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes T$- mesurable

2. Montrer que $\int f dm = \int_0^{+\infty} m(\{x \in E; f(x) > t\})dt$ et que $\int f dm = \int_0^{+\infty} m(\{x \in E; f(x) \geq t\})dt$. [Utiliser le théorème de Fubini-Tonelli.]

Exercice 7.7 (Une caractérisation de L^p) *Corrigé 138 page 447*
On munit $\mathbb{R}$ [resp. $\mathbb{R}^2$] de sa tribu borélienne, notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ [resp. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$].

Soit f une application mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, on pose $A_y = \{x \in \mathbb{R};\ |f(x)| > y\}$. Pour tout $y \in \mathbb{R}_-^\star$, on pose $A_y = \emptyset$.

1. Montrer que l'application $(x, y)^t \mapsto 1_{A_y}(x)$ est mesurable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. [On pourra commencer par montrer que $\{(x, y)^t \in \mathbb{R}^2;\ |f(x)| > y\}$ est un borélien de $\mathbb{R}^2$.]

   Soit $p \in [1, \infty[$. Pour $y \in \mathbb{R}$, on pose $g_p(y) = |y|^{p-1}\lambda(A_y)$ (en convenant que $g_p(0) = 0$ si $\lambda(A_0) = \infty$).

2. (a) Montrer que l'application $(x, y)^t \mapsto |y|^{p-1} 1_{A_y}(x)$ est mesurable positive de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que g_p est intégrable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. [On pourra, par exemple, utiliser le théorème de Fubini-Tonelli.]

Exercice 7.8 (Mesure de boules de $\mathbb{R}^2$)
On considère ici l'espace mesuré $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \lambda_2)$. Montrer que $\lambda_2(\{x \in \mathbb{R}^2; |x| < R\}) = \pi R^2$ pour tout $R > 0$.

Exercice 7.9 (A propos de Fubini)
Soit, pour $n \geq 1$, $I_n = [1 - 1/n, 1 - 1/(n + 1)[$; on pose $\varphi_n = n(n + 1)\chi_{I_n}$ et $f(x, y) = \sum_{n\geq 1}(\varphi_n(x) - \varphi_{n+1}(x))\varphi_n(y)$.

1. Montrer que $f : [0, 1]^2 \to \mathbb{R}$ est bien définie et mesurable,
2. Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$, $y \mapsto f(x, y)$ est intégrable sur $[0, 1]$et que, pour tout $y \in [0, 1]$, $x \mapsto f(x, y)$ est intégrable sur $[0, 1]$,
3. Montrer que $F : x \mapsto \int_{[0,1]} f(x, y)\, dy$ et $G : y \mapsto \int_{[0,1]} f(x, y)\, dx$ sont intégrables sur $[0, 1]$. Calculer alors $\int_{[0,1]} F(x)\, dx$ et $\int_{[0,1]} G(y)\, dy$. Peut on appliquer à f le théorème de Fubini ?

7.7.3 Mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$

Exercice 7.10 (Propriétés élémentaires de λ_N) *Corrigé 139 page 448*
Soit $N \geq 2$. On rappelle que λ_N est la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

1. Soit $A_1, \ldots, A_N \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Montrer que $\prod_{i=1}^N A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et $\lambda_N(\prod_{i=1}^N A_i) = \prod_{i=1}^N \lambda(A_i)$.
2. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{R}$ et $\beta_1, \ldots, \beta_N \in \mathbb{R}$ t.q. $\alpha_i < \beta_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$. Montrer que $\lambda_N(\prod_{i=1}^N]\alpha_i, \beta_i[) = \prod_{i=1}^N \lambda(]\alpha_i, \beta_i[)$.
3. Soit K est un compact de $\mathbb{R}^N$ (noter que $K \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$). Montrer que $\lambda_N(K) < +\infty$.
4. Soit O un ouvert non vide de $\mathbb{R}^N$. Montrer que $\lambda_N(O) > 0$.
5. Soit $f, g \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Montrer que $f = g$ p.p. (c'est-à-dire λ_N-p.p.) implique $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$.

6. Montrer que $C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$.

Exercice 7.11 (Régularité de λ_N) *Corrigé 140 page 450*
Soit m une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ t.q. $m(K) < \infty$ pour tout compact K de $\mathbb{R}^N$. (noter que ceci est vrai pour $m = \lambda_N$.)

1. Soient$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe O ouvert de $\mathbb{R}^N$ et F fermé de $\mathbb{R}^N$ tels que :
$$F \subset A \subset O \text{ et } m(O \setminus F) \leq \varepsilon.$$
2. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. Déduire de la question précédente que $m(A) = \inf\{m(O),\, O \text{ ouvert t.q. } A \subset O\}$.

[On pourra s'inspirer de la démonstration de la régularité d'une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, finie sur les compacts (théorème 2.3).]

Exercice 7.12 (Densité de C_c dans $L^1(\mathbb{R}^N)$)
Soit $N \geq 1$. Montrer que l'espace $C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ (c'est-à-dire que, pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^N)$ t.q. $\|f - \varphi\|_1 \leq \varepsilon$). [S'inspirer de la démonstration faite pour le cas $N = 1$, théorème 5.5.]

Exercice 7.13 (Densité de C_c et C_c^∞ dans L^1) *Corrigé 141 page 452*
Soit $d \geq 1$ et μ une mesure sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$. On suppose que μ vérifie les deux propriétés suivantes :

(p1) μ est est finie sur les compacts de $\mathbb{R}^d$, c'est-à-dire que $\mu(K) < +\infty$ si K est un compact de $\mathbb{R}^d$,

(p2) μ est régulière, c'est-à-dire que pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe O ouvert et F fermé t.q. $F \subset A \subset O$ et $\mu(O \setminus F) \leq \varepsilon$.

En fait, la propriété (p1) entraîne la propriété (p2) (voir la proposition 7.5) mais cette démonstration n'est pas demandée ici.
On note $\mathcal{L}^1_\mu$ l'espace $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mu)$. Pour $f \in \mathcal{L}^1_\mu$, on note $\|f\|_1 = \int |f| d\mu$. Enfin, pour $x \in \mathbb{R}^d$, on note $|x|$ la norme euclidienne de x.

1. Soit $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ (c'est-à-dire φ continue de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ et à support compact). Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}^1_\mu$.
2. Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$ et $\eta > 0$. Pour $x \in \mathbb{R}^d$, on pose $\varphi(x) = \frac{(\eta - d(x,K))^+}{\eta}$ avec $d(x, K) = \inf\{|x - y|,\, y \in K\}$. Montrer que $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ et que $\varphi(x) = 1$ si $x \in K$.
3. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ t.q. $\mu(A) < +\infty$.
   (a) Soit $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe O ouvert et K compact t.q. $K \subset A \subset O$ et $\mu(O \setminus K) \leq \varepsilon$.
   (b) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ t.q. $\|\varphi - 1_A\|_1 \leq \varepsilon$.
4. Soit f une fonction borélienne positive de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f \in \mathcal{L}^1_\mu$. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ t.q. $\|f - \varphi\|_1 \leq \varepsilon$. [On pourra approcher f par une fonction étagée.]
5. (Densité.) Soit $f \in \mathcal{L}^1_\mu$ et $\varepsilon > 0$.
   (a) Montrer qu'il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ t.q. $\|f - \varphi\|_1 \leq \varepsilon$.

(b) Montrer qu'il existe $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ t.q. $\|f - \psi\|_1 \leq \varepsilon$. [On pourra montrer que, si $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, on a $\|\varphi - \varphi_n\|_1 \to 0$, quand $n \to \infty$, avec $\varphi_n = \varphi \star \rho_n$ et $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une famille régularisante, voir la définition 8.4.]

6. (Continuité en moyenne ?)

   (a) Soit $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Montrer que $\|\varphi(\cdot + h) - \varphi\|_1 \to 0$ quand $h \to 0$.

   (b) Montrer, en donnant un exemple (c'est-à-dire en choisissant convenablement f et μ) qu'on peut avoir $f \in \mathcal{L}^1_\mu$ et $\|f(\cdot + h) - f\|_1 \not\to 0$ quand $h \to 0$.

7. On suppose maintenant que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et que μ est une mesure sur les boréliens de Ω, finie sur les sous ensembles compacts de Ω. Indiquer brièvement comment on peut montrer la densité de $C_c(\Omega, \mathbb{R})$ et $C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ dans $L^1_\mathbb{R}(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mu)$.

Exercice 7.14 (Invariance par translation de λ_N) *Corrigé 142 page 453*
Soient $N \geq 1$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{R}^\star$ et $\beta_1, \ldots, \beta_N \in \mathbb{R}$. Pour $x = (x_1, \ldots, x_N)^t \in \mathbb{R}^N$, on pose $\varphi(x) = (\alpha_1 x_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_N x_N + \beta_N)^t$, de sorte que φ est une bijection de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$.

1. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, montrer que $\varphi(A) = \{\varphi(x), x \in A\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

2. Montrer que $\lambda_N(\varphi(A)) = \prod_{i=1}^N |\alpha_i| \lambda_N(A)$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. [On pourra faire une récurrence sur N : La proposition 2.9 donne le résultat pour la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, notée λ. On suppose que le résultat est vrai pour λ_{N-1} (et pour toute famille $\alpha_1, \ldots, \alpha_{N-1} \in \mathbb{R}^\star$, $\beta_1, \ldots, \beta_{N-1} \in \mathbb{R}$). On le démontre alors pour λ_N en posant $m(A) = (\prod_{i=1}^N |\alpha_i|)^{-1} \lambda_N(\varphi(A))$ et en montrant que m est une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ égale à λ_N sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{N-1}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On utilise pour conclure la partie "unicité" du théorème 7.1 sur la mesure produit.]

Exercice 7.15 (Changement de variables simple) *Corrigé 143 page 455*
Soient $N \geq 1$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{R}^\star$ et $\beta_1, \ldots, \beta_N \in \mathbb{R}$. Pour $x = (x_1, \ldots, x_N)^t \in \mathbb{R}^N$. On pose $\varphi(x) = (\alpha_1 x_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_N x_N + \beta_N)^t$ (de sorte que φ est une bijection de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$).

1. Soit $f \in \mathcal{E}_+ = \mathcal{E}_+(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$, montrer que $f \circ \varphi \in \mathcal{E}_+$ et que $\int f d\lambda_N = \prod_{i=1}^N |\alpha_i| \int (f \circ \varphi) d\lambda_N$. [Utiliser l'exercice 7.14.]

2. Soit $f \in \mathcal{M}_+ = \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$, montrer que $f \circ \varphi \in \mathcal{M}_+$ et que $\int f d\lambda_N = \prod_{i=1}^N |\alpha_i| \int (f \circ \varphi) d\lambda_N$.

3. Soit $f \in \mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1_\mathbb{R}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$, montrer que $f \circ \varphi \in \mathcal{L}^1$ et que $\int f d\lambda_N = \prod_{i=1}^N |\alpha_i| \int (f \circ \varphi) d\lambda_N$.

Exercice 7.16 (Primitives de fonctions L^p) *Corrigé 144 page 456*
Soit $p \in [1, \infty[$. On note $L^p = L^p_\mathbb{R}(]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda)$. Soit $f, g \in L^p$. On définit F et G de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt \ \ (= \int_{]0,x[} f d\lambda), \quad G(x) = \int_0^x g(t)dt \ \ (= \int_{]0,x[} g d\lambda), \quad \text{pour tout } x \in [0,1].$$

1. Montrer que F et G sont des fonctions continues et qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ t.q. $|F(y) - F(x)| \leq C|y - x|^{1-\frac{1}{p}}$ et $|G(y) - G(x)| \leq C|y - x|^{1-\frac{1}{p}}$, pour tous $x, y \in [0,1]$, $x < y$.

2. On suppose $p > 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. Montrer que, pour tout $x \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$, on a $(F(x), G(x)) \in A_{n,k} \times B_{n,k}$, où $A_{n,k}$ et $B_{n,k}$ sont des intervalles de $\mathbb{R}$ (indépendants de x) dont les longueurs tendent vers 0 quand $n \to \infty$. [Utiliser la question 1.]

3. On suppose $p > 2$. Montrer que $E = \{(F(x), G(x));\ x \in [0,1]\}$ est une partie négligeable de $\mathbb{R}^2$ (muni de la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}^2$). [En utilisant une majoration convenable des longueurs de $A_{n,k}$ et $B_{n,k}$, inclure E (pour tout $n \in \mathbb{N}$) dans une partie de $\mathbb{R}^2$ dont la mesure de Lebesgue tend vers 0 quand $n \to \infty$.]

Exercice 7.17 (Lemme de Comparaison)
Soit φ une fonction décroissante de $\mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}_+$, on définit l'application de $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ par:

$$\Phi(A,B) = \int\int_{A\times B} \varphi(|x-y|)dxdy.$$

Soient $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $a = \lambda(A)$, $b = \lambda(B)$ (λ est la mesure de Lebesgue) et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < b$ tels que $A \subset [\alpha, \beta]$ et $B \subset [\alpha, \beta]$. Montrer que

$$\Phi(A,B) \geq \Phi([\alpha, \alpha + a], [\beta - b, b]).$$

Exercice 7.18
Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$-mesurable. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose : $f_\varphi(x) = \varphi(x,x)$.

1. Montrer que f_φ est $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mesurable.

2. Soient φ et $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$-mesurables. Montrer que $\varphi = \psi$ λ_2-p.p. $\not\Rightarrow f_\varphi = f_\psi$ λ-p.p.. (λ_2 est la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ dont on suppose l'existence).

3. Soient φ et $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$-mesurables t.q. :

   (a) $\varphi(x, .)$ et $\psi(x, .)$ sont continues p.p. en $x \in \mathbb{R}$

   (b) $\varphi(, .y)$ et $\psi(., y)$ sont mesurables pour tout $y \in \mathbb{R}$

   (Ces fonctions sont dites de "Carathéodory".)

   (a) Montrer que φ et ψ sont $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$-mesurables.

   (b) Montrer que $\varphi = \psi$ λ_2-p.p. $\Rightarrow \varphi(x, .) = \psi(x, .)$ partout, p.p. en $x \in \mathbb{R}$. En déduire que si $\varphi = \psi$ λ_2-p.p, alors $f_\varphi = f_\psi$ λ-p.p..

7.7.4 Convolution

Exercice 7.19 (Propriétés élémentaires de la convolution) *Corrigé 145 page 457*
Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N) = L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$.

1. Montrer que $f \star g = g \star f$ p.p.. [Utiliser l'invariance par translation de la mesure de Lebesgue et sa conséquence pour les changements de variables simples (propositions 7.7 et 7.8).]

2. On suppose que f et g sont à support compact (f à support compact signifie qu'il existe K, compact de $\mathbb{R}^N$, t.q. $f = 0$ p.p. sur K^c). Montrer que la fonction $f \star g$ est alors aussi à support compact. [On désigne par $B(0, \alpha)$ la boule ouverte de centre 0 et de rayon α. Comme f et g sont à support compact, il existe a et $b \in \mathbb{R}_+$ tels que $f = 0$ p.p. sur $B(0, a)^c$ et $g = 0$ p.p. sur $B(0, b)^c$. Montrer que $f \star g = 0$ p.p. sur $B(0, a + b)^c$.]

Exercice 7.20 (Convolution $L^p - C_c^\infty$) *Corrigé 146 page 459*

Soit $1 \leq p \leq \infty$. Soit $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N) = \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, B(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ (ou $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$) et $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. On pourra se limiter au cas $N = 1$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, la fonction $f(\cdot)\rho(x - \cdot)$ appartient à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$. On pose alors
$$f \star \rho(x) = \int f(\cdot)\rho(x - \cdot) d\lambda_N.$$
2. Montrer que $f \star \rho \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$.
3. On suppose maintenant que f est à support compact, c'est à dire qu'il existe un compact de $\mathbb{R}$, noté K, t.q. $f = 0$ p.p. sur K^c, montrer que $f \star \rho$ est aussi à support compact.

Exercice 7.21 (Inégalité de Young) *Corrigé 147 page 460*
Soient $1 < p < +\infty$, $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ et $g \in L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$. Montrer que $f \star g$ est définie p.p., $f \star g \in L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ et $\|f \star g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$. [Ecrire $\int (\int |f(x-y)g(y)|dy)^p dx = \int (\int |f(x-y)|^{\frac{1}{q}} |f(x-y)|^{\frac{1}{p}} |g(y)|dy)^p dx$, avec $q = \frac{p}{p-1}$. Appliquer l'inégalité de Hölder puis le théorème de Fubini-Tonelli].

Exercice 7.22 (Itérations de convolution)
Soient $L^1 = L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $f \in L^1$ t.q. $f = 0$ p.p. sur $\mathbb{R}_-$. On définit, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $f^{\star n}$ par : $f^{\star 1} = f$ et $f^{\star n} = f^{\star(n-1)} \star f$ pour $n \geq 1$. Pour $\lambda \geq 0$, on pose : $g(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}|f(t)|dt$.

1. (a) Montrer que $f^{\star n}$ est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, et que $f^{\star n} = 0$ sur $\mathbb{R}_-$.
   (b) Montrer, par récurrence sur n, que $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}|f^{\star n}(t)|dt \leq (g(\alpha))^n$, pour tout $\alpha \geq 0$ et tout $n \geq 1$.
   (c) En déduire que $\int_0^x |f^{\star n}(t)|dt \leq e^{\alpha x}(g(\alpha))^n$, pour tout $\alpha \geq 0$ tout $n \geq 1$ et tout $x \geq 0$.
2. Soit $h \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que $h \star f(x)$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et que $h \star f \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Remarquer de même que $h \star f^{\star n} \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose maintenant que, $h = 0$ sur $\mathbb{R}_-$; montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h \star f^{\star n}(x) \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 7.23 Soient μ et ν des mesures sur l'espace mesurable $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On définit $\mu \star \nu$ par : $\mu \star \nu(A) = \int_{\mathbb{R}^2} 1_A(x+y) d\mu(x) d\nu(y)$.

1. Montrer que $\mu \star \nu$ est une mesure.
2. Montrer que si μ et ν sont des probabilités, alors $\mu \star \nu$ est une probabilité.
3. Montrer que si μ et ν sont des mesures de densités respectives f et g (par rapport à Lebesgue), alors $\mu \star \nu$ est une mesure de densité $f \star g$.

7.7.5 Changement de variables

Exercice 7.24 (Fonction Gamma)
Pour tout $x > 0$, on pose $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$.

1. Montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$. En déduire que $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour tout entier $n \geq 1$.
2. Calculer $\Gamma(\frac{1}{2})$. On pourra utiliser $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
3. Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $]0, \infty[$ et que $\Gamma^{(n)}(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} (\ln t)^n t^{x-1} e^{-t} dt$, pour tout $n \geq 1$.

Exercice 7.25 (Calcul d'un volume)
Calculer le volume de E où $E = \{(x, y, z) \in [0, 1]^3;\ z \geq 4xy\}$.

Exercice 7.26 *Corrigé 148 page 461*

1. Vérifier que si $n \geq 1$ $\displaystyle\int_0^n \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^n (\int_0^{\infty} e^{-xt} dt) \sin x dx$.
2. Calculer $F_n(t) = \displaystyle\int_0^n e^{-xt} \sin x dx$ $(t \geq 0)$.
3. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\infty} F_n(t) dt$. ($F_n$ est définie à la question précédente.)
4. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 7.27 (Coordonnées polaires) *Corrigé 149 page 463*

1. Calculer $\int_{(\mathbb{R}^+)^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$ (on rappelle que $dx\, dy$ désigne $d\lambda_2(x, y)$). [On pourra utiliser le passage en coordonnées polaires.]
2. Calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} e^{-x^2} dx$.

Exercice 7.28
Soient $\Omega = \{(x, y) \mid 1 < x^2 + 4y^2 < 4\,,\ x > 0\,,\ y > 0\}$, $G = \{(x, y) \in \Omega \mid y < x\}$, $\Omega' = \{(x', y') \mid 1 < x' < 4\,,\ 0 < y'\}$ et $G' = \Omega' \cap \{y' < 1\}$.

1. Montrer qu'il existe un difféomorphisme $T : \Omega \to \Omega'$ tel que $T(G) = G'$.
2. Soit $f(x, y) = \frac{x^2 - 4y^2}{4x^2}$ si $x \neq 0$ et $f(0, y) = 0$. Montrer que f est borélienne sur $\mathbb{R}^2$, intégrable sur G et calculer son intégrale. f est-elle intégrable sur Ω?

Exercice 7.29 (Sur volume de la boule unité dans $\mathbb{R}^N$)
On note C_N le volume de la boule unité dans $\mathbb{R}^N$. Montrer que, si $\rho > 0$ et $B^N(\rho)$ désigne la boule de centre 0 et de rayon ρ dans $\mathbb{R}^N$, on a $\lambda_N(B^N(\rho)) = \rho^N C_N$. En déduire la relation de récurrence suivante: $C_{N+1} = C_N \int_0^1 (1-u)^{N/2} u^{-1/2}\, du$.

Exercice 7.30 (Sur volume de la boule unité dans $\mathbb{R}^N$, suite)
On appelle fonction eulérienne de première espèce la fonction B $:]0, \infty[^2 \to \mathbb{R}$ définie par $B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1}\, dt$.

1. Montrer que B est bien définie et $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\infty[^2$.

2. Montrer que $B(p,q) = 2\int_0^{\pi/2} \sin(\varphi)^{2p-1}\cos(\varphi)^{2q-1}\,d\varphi = \int_0^\infty \frac{2u^{2p-1}}{(1+u^2)^{p+q}}\,du$. En déduire $B(1/2,1/2)$.

3. Montrer que $B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ [on pourra calculer $\Gamma(p)\Gamma(q)$ en introduisant le difféomorphisme $\varphi(t,v) = (tv, t(1-v))$]. En déduire $\Gamma(1/2)$.

4. Calculer, en fonction de Γ, les constantes C_N de l'exercice précédent.

Exercice 7.31 (Cordonnées polaires dans $\mathbb{R}^N$) *Corrigé 150 page 464*
On note S^{N-1} la sphère de centre 0 et rayon 1 dans $\mathbb{R}^N$ (i.e. $S^{N-1} = \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x| = 1\}$, où $|.|$ désigne la norme euclidienne usuelle). Pour $A \subset S^{N-1}$, on pose $\widetilde{A} = \{tx\,,\ t \in [0,1]\,,\ x \in A\}$.
Montrer que si A est un borélien de S^{N-1}, alors $\widetilde{A}$ est un borélien de $\mathbb{R}^N$.
On définit alors, quand A est un borélien de S^{N-1}, $\sigma(A) = N\lambda_N(\widetilde{A})$. Montrer que σ définit une mesure sur les borélien de S^{N-1}.
Montrer que, pour tout $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ mesurable positive ou intégrable on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,dx = \int_0^\infty \left(\int_{S^{N-1}} f(\rho\xi)\,d\sigma(\xi)\right)\rho^{N-1}\,d\rho.$$

Trouver alors les $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $x \to |x|^\alpha$ soit intégrable sur $\mathbb{R}^N \backslash B_1$ ou sur B_1, avec $B_1 = \{x \in \mathbb{R}^N;\ |x| \le 1\}$.

Exercice 7.32 (Changement de variables $W^{1,1}$ croissant) *Corrigé 151 page 466*
Soit $f \in \mathcal{L}^1_R(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ t.q. $f > 0$ p.p.. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$. (On rappelle que, pour $a < b$, $\int_a^b f(t)dt$ désigne $\int 1_{]a,b[} f d\lambda$.)

1. Montrer que $\varphi \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et que φ est strictement croissante.

   On note I_m l'image de φ (I_m est donc un intervalle dont les bornes sont 0 et $\int f d\lambda$) et on note $\psi\ :\ I_m \to \mathbb{R}$ la fonction inverse de φ (ψ est donc continue de I_m dans $\mathbb{R}$).

   On rappelle que si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{B}(I)$ est sa tribu borélienne, on a $\mathcal{B}(I) = \mathcal{P}(I) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

   Pour $A \subset \mathbb{R}$, on note $\varphi(A) = \{\varphi(x),\ x \in A\}$. Pour $A \subset I_m$, on note $\psi(A) = \{\psi(x),\ x \in A\}$.

2. Montrer que $\{\varphi(A),\ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} = \mathcal{B}(I_m)$ et que $\{\psi(A),\ A \in \mathcal{B}(I_m)\} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

3. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer que $\lambda(\varphi(I)) = \int_I f d\lambda$.

4. Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$. Montrer que $\lambda(\varphi(O)) = \int_O f d\lambda$. En déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ t.q. :
$$O \text{ ouvert},\ \lambda(O) \le \delta \Rightarrow \lambda(\varphi(O)) \le \varepsilon.$$

5. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Montrer que $\lambda(\varphi(A)) = \int_A f d\lambda$. [On pourra, par exemple, utiliser la régularité de λ et la question précédente.]

6. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ t.q. $a < b$.

(a) Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On pose $g = 1_B$. Montrer que :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t)dt = \int_a^b g(\varphi(s))f(s)ds. \tag{7.19}$$

[Prendre $A = \psi(B \cap I_m) \cap]a, b[$ et utiliser la question précédente.]

(b) Montrer que (7.19) est encore vraie pour $g \in \mathcal{E}_+(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, puis pour $g \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

(c) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable. On suppose que $g1_{]\varphi(a),\varphi(b)[} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Montrer $g \circ \varphi f 1_{]a,b[} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et que (7.19) est vraie.

NB: On peut montrer que φ est dérivable p.p. et que $\varphi' = f$ p.p.. La formule (7.19) est alors la formule habituelle de changement de variable. Noter aussi que la fonction φ, restreinte à l'intervalle $]a, b[$, appartient à un espace appelé $W^{1,1}(]a, b[)$ (ce qui explique le titre de l'exercice).

Chapter 8

Densité, séparabilité, et compacité dans les espaces $L^p(\Omega)$

Tout ce chapitre est consacré aux espaces $L^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \lambda_N)$ où Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, $\mathcal{B}(\Omega)$ est la tribu borélienne de Ω, λ_N désigne la restriction à $\mathcal{B}(\Omega)$ de la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ (aussi notée λ_N) et $1 \leq p \leq \infty$.
On notera toujours $L^p(\Omega) = L^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \lambda_N)$.

8.1 Théorèmes de densité pour les espaces $L^p(\Omega)$

8.1.1 Densité des fonctions $C_c(\Omega, \mathbb{R})$ dans $L^p(\Omega)$

Définition 8.1 *Soient $N \geq 1$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et f une fonction définie de Ω dans $\mathbb{R}$. On dit que f est à support compact (dans Ω) si il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que $f = 0$ sur $\Omega \setminus K$.*

On note souvent $\mathrm{supp}(f)$ l'adhérence dans Ω de l'ensemble des $x \in \Omega$ t.q. $f(x) \neq 0$. On peut montrer que f est à support compact si et seulement si $\mathrm{supp}(f)$ est compact.

Définition 8.2 *Soient $N \geq 1$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et f une fonction définie de Ω dans $\mathbb{R}$. On dit que $f \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ si*

1. *f est de classe C^∞ (de Ω dans $\mathbb{R}$).*
2. *f est à support compact (dans Ω).*

On note aussi $\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$.

Remarque 8.1 Si $N = 1$ et $\Omega =]0, 1[$, la fonction f définie par $f(x) = x(x - 1)$ est de classe C^∞ sur Ω, mais elle n'est pas à support compact. En effet, il n'existe pas de compact inclus dans $]0, 1[$ t.q. f soit nulle en dehors de ce compact.
Par contre, si f est de classe C^∞ sur $]0, 1[$ et si il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f(x) = 0$ pour $x \in]0, \varepsilon[$ et pour $x \in]1 - \varepsilon, 1[$, alors $f \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$.

Théorème 8.1 (Densité de $C_c(\Omega, \mathbb{R})$ dans $L^p(\Omega)$) *Soient $N \geq 1$, $p \in [1, +\infty[$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ (par exemple, $\Omega = \mathbb{R}^N$). Alors :*
$C_c(\Omega, \mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\Omega)$ c'est-à-dire :

$$\forall f \in L^p(\Omega),\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \varphi \in C_c(\Omega, \mathbb{R}) \text{ t.q. } \|f - \varphi\|_p \leq \varepsilon. \tag{8.1}$$

Démonstration : La démonstration de ce résultat est faite dans l'exercice 6.4 pour le cas $\Omega = \mathbb{R}$. La généralisation donnée ici se démontre de manière très voisine (grâce au résultat de régularité, proposition 7.5), voir l'exercice 8.1. ■

Une conséquence importante du théorème 8.1 est la "continuité en moyenne" que l'on donne maintenant.

Théorème 8.2 (Continuité en moyenne) *Soient $N \geq 1$, $p \in [1, +\infty[$,et $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Alors, $\|f(\cdot + h) - f\|_p \to 0$ quand $h \to 0$, c'est-à-dire :*

$$\int |f(x+h) - f(x)|^p dx \to 0, \text{ quand } h \to 0.$$

Démonstration : La démonstration est ici encore très similaire à la démonstration vue pour $N = 1$ dans l'exercice 6.4, elle est proposée dans l'exercice 8.2. ■

Remarque 8.2 (Attention à L^∞ !) Les deux résultats précédents sont faux dans L^∞. Considérer par exemple le cas $N = 1$ et la fonction $f = 1_{\mathbb{R}_+}$ (qui appartient à $L^\infty(\mathbb{R})$, en confondant f avec sa classe). On peut montrer que (voir l'exercice 8.3) :

1. $\forall \varphi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ \|f - \varphi\|_\infty \geq \dfrac{1}{2}$.
2. $\forall h > 0,\ \|f(\cdot + h) - f\|_\infty = 1$.

8.1.2 Régularisation par convolution

Si $a \in \mathbb{R}_+$, on note B_a la boule fermée de centre 0 et de rayon a de $\mathbb{R}^N$.

Définition 8.3 (L^1_{loc})
Soient $N \geq 1$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$. On définit que f est "localement intégrable sur Ω" si $f1_K \in L^1(\Omega)$ (au sens "il existe $g \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ t.q. $f = g$ p.p. sur K") pour tout compact $K \in \Omega$.
On note $L^1_{loc}(\Omega)(= L^1_{loc}(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \lambda_N))$ l'ensemble des fonctions localement intégrables sur Ω.

Remarque 8.3 Soient $N \geq 1$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Pour tout p tel que $1 \leq p \leq +\infty$, on a $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ (ceci est une conséquence immédiate du résultat d'inclusion entre les espaces L^p, proposition 6.8).

Définition 8.4 (Famille régularisante) *Soit $N \geq 1$ et soit $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ t.q. $\rho \geq 0$, $\{x \in \mathbb{R}^N;\ \rho(x) \neq 0\} \subset B_1$ et $\int \rho(x)dx = 1$. On appelle famille régularisante (ou famille de noyaux régularisants) la famille de fonctions $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}^\star} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ définie par : $\rho_n(x) = n^N \rho(nx), x \in \mathbb{R}^N$, $n \in \mathbb{N}^\star$.*

Remarque 8.4 Dans la définition précédente, il est facile de vérifier que $\{x \in \mathbb{R}^N;\ \rho_n(x) \neq 0\} \subset B_{\frac{1}{n}}$ et $\int \rho_n(x)dx = 1$
Il existe bien des fonctions vérifiant les propriétés demandées pour ρ dans la définition 8.4. Pour $N = 1$, par exemple, il suffit de prendre $\rho(x) = \alpha \exp(\frac{1}{x^2-1})$ pour $x \in]-1, 1[$ et $\rho(x) = 0$ pour $x \notin]-1, 1[$, avec $\alpha > 0$ choisi pour avoir $\int \rho(x)dx = 1$.

Lemme 8.1 *Soient $N \geq 1$, $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une famille régularisante et $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Alors, $f \star \rho_n$ est définie partout sur $\mathbb{R}^N$ et $f \star \rho_n \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. De plus, si il existe $a > 0$ t.q. $f = 0$ p.p. sur B_a^c, on a alors $f \star \rho_n = 0$ sur $B^c_{a+\frac{1}{n}}$ ($f \star \rho_n$ est donc à support compact).*

DÉMONSTRATION : La démonstration du fait que $f \star \rho_n \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ est donnée dans l'exercice 7.20. La seconde partie est donnée dans les exercices 7.20 et 7.19. L'indication de la seconde question de l'exercice 7.19 donne le support indiqué ici pour $f \star \rho_n$. ■

Proposition 8.1 *Soient $N \geq 1$, $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une famille régularisante. Soient $p \in [1, +\infty[$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Alors, $f \star \rho_n \to f$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ lorsque $n \to +\infty$.*

DÉMONSTRATION : La démonstration est une conséquence du théorème de continuité en moyenne (théo rème 8.2).

On choisit un représentant de f, encore noté f. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $f_n = f \star \rho_n$. Pour $x \in \mathbb{R}^N$, on a :

$$f_n(x) - f(x) = \int f(x-y)\rho_n(y)dy - f(x)\int \rho_n(y))dy = \int (f(x-y) - f(x))\rho_n(y)dy,$$

et donc :

$$|f_n(x) - f(x)|^p \leq (\int |f(x-y) - f(x)|\rho_n(y)dy)^p.$$

Pour $p > 1$, on utilise l'inégalité de Hölder en écrivant $\rho_n = \rho_n^{\frac{1}{p}}\rho_n^{\frac{1}{q}}$ (avec $q = p/(p-1)$) et on obtient (ce qui est aussi immédiatement vrai pour $p = 1$) :

$$|f_n(x) - f(x)|^p \leq \int |f(x-y) - f(x)|^p\rho_n(y)dy(\int \rho_n(y)dy)^{\frac{p}{q}} = \int |f(x-y) - f(x)|^p\rho_n(y)dy. \tag{8.2}$$

On remarque maintenant que l'application $(x, y)^t \mapsto (f(y) - f(x))$ est mesurable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ (munis de leur tribu borélienne), ceci est une conséquence (par exemple) de la proposition 7.3 et de la mesurabilité de la somme d'applications mesurables. L'application $(x, y)^t \mapsto (x, x - y)$ est mesurable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ (car continue). Par composition, l'application $(x, y)^t \mapsto (f(x - y) - f(x))$ est donc mesurable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On en déduit, en utilisant une nouvelle fois la mesurabilité de la composée d'applications mesurables (et du produit d'applications mesurables), que $(x, y)^t \mapsto |f(x-y) - f(x)|^p\rho_n(y)$ est mesurable (positive) de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

On peut donc appliquer le théorème de Fubini-Tonelli pour déduire de (8.2) que :

$$\int |f_n(x) - f(x)|^p dx \leq \int (\int |f(x-y) - f(x)|^p\rho_n(y)dy)dx = \int (\int |f(x-y) - f(x)|^p\rho_n(y)dx)dy = \int_{B_{\frac{1}{n}}} \|f(\cdot - y) - f\|_p^p\rho_n(y)dy. \tag{8.3}$$

On utilise maintenant le théorème 8.2. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ t.q. :

$$h \in \mathbb{R}^N,\ |h| \leq \eta \ \Rightarrow \|f(\cdot - h) - f\|_p \leq \varepsilon.$$

On déduit donc de (8.3) que :

$$\frac{1}{n} \leq \eta \Rightarrow \|f_n - f\|_p \leq \varepsilon.$$

Ce qui termine la démonstration. ■

Le deux résultats précédents permettent de démontrer le théorème de densité suivant :

Théorème 8.3 *Soient $N \geq 1$ et $p \in [1, +\infty[$, $C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^N)$.*

DÉMONSTRATION : La démonstration proposée ici utilise une méthode dite de "troncature et régularisation".

Pour $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, on dit que f est "à support compact" si il existe K compact de $\mathbb{R}^N$ t.q. $f = 0$ p.p. sur K^c. On note A l'ensemble des $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ à support compact.

Etape 1. On montre dans cette étape que A est dense dans $L^p(\mathbb{R}^N)$. Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n = f 1_{B_n}$. Comme $f_n \to f$ p.p. quand $n \to \infty$ et $|f_n| \leq |f|$ p.p. (pour tout $n \in \mathbb{N}$), on peut appliquer le théorème de convergence dominée dans L^p (on utilise ici le fait que $p < \infty$). Il donne que $f_n \to f$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ quand $n \to \infty$. Comme $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$, on a bien montré la densité de A dans $L^p(\mathbb{R}^N)$.

Etape 2. Soit maintenant $f \in A$. Pour conclure la démonstration, il suffit de montrer qu'il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^\star} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ t.q. $f_n \to f$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ quand $n \to \infty$. Or cette suite est donné avec $f_n = f \star \rho_n$ où $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ est une famille régularisante. En effet, le lemme 8.1 donne que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^\star} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ et la proposition 8.1 donne que $f_n \to f$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ quand $n \to \infty$. ■

On rappelle (remarque 8.2) que $C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ (et donc aussi $C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$) n'est pas dense dans $L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Il est intéressant aussi de remarquer que le théorème précédent (théorème 8.3) est encore vrai si on remplace la mesure de Lebesgue par une mesure sur les boréliens de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$), finie sur les compacts. Toutefois la démonstration donnée ici doit alors être modifiée. Ceci est fait dans l'exercice 7.13 pour $p = 1$ (et la généralisation pour traiter tous les cas $p \in [1, \infty[$ est assez simple).

8.1.3 Densité de $C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ dans $L^p(\Omega)$

On a aussi un résultat de densité pour les fonctions définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^N$.

Théorème 8.4 (Densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$) *Soient $N \geq 1$, $p \in [1, +\infty[$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Alors, $\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\Omega)$.*

DÉMONSTRATION : Pour $\Omega \neq \mathbb{R}^N$, on pose $K_n = \{x \in \mathbb{R}^N ;\, d(x, \Omega^c) \geq \frac{1}{n}\} \cap B_n$ si $n \in \mathbb{N}^\star$.

Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $\varepsilon > 0$. On remarque d'abord (en utilisant, comme pour le théorème précédent, le théorème de convergence dominée dans L^p) que $f 1_{K_n} \to f$ dans $L^p(\Omega)$ quand $n \to \infty$. On peut donc choisir $n_0 \in \mathbb{N}^\star$ t.q. $\|f - f_{n_0}\|_p \leq \varepsilon$.

On pose maintenant $g = f_{n_0}$. On peut considérer que $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et on a $g = 0$ p.p. sur K^c avec $K = K_{n_0}$. En prenant une famille régularisante, $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$, le lemme 8.1 et la proposition 8.1 donnent que $g \star \rho_n \to g$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ quand $n \to \infty$ et $(g \star \rho_n)_{n \in \mathbb{N}^\star} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Il suffit alors de remarquer que la restriction de $g \star \rho_n$ à Ω est à support compact dans Ω dès que $n > n_0$ pour conclure la démonstration.

■

Ici aussi, le théorème 8.4 est encore vrai si on remplace la mesure de Lebesgue par une mesure sur les boréliens de Ω, finie sur les compacts. La démonstration donnée ici doit alors être modifiée (voir l'exercice 7.13).

8.2 Séparabilité de $L^p(\Omega)$

Proposition 8.2 *Soient $N \geq 1$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et p tel que $1 \leq p < +\infty$. Alors, l'espace $L^p(\Omega)$ est séparable.*

DÉMONSTRATION : La démonstration est l'objet de l'exercice 8.4 (et de 6.5 pour le car $\Omega = \mathbb{R}$). ■

Les espaces du type L^∞ ne sont, en général, pas séparables. L'exercice 8.5 montre que, par exemple, $L^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ n'est pas séparable.

8.3 Compacité dans les espaces $L^p(\Omega)$

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E ; on rappelle que A est (séquentiellement) compact si de toute suite d'éléments de A on peut extraire une sous-suite qui converge. Notons que cette notion de compacité "séquentielle" est équivalente à la notion ce compacité "de Borel -Lebesgue" (i.e. de tout recouvrement de A par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini) dès que E est un espace métrique (ce qui est notre cas, car E est un espace vectoriel normé).

Une partie A de E est dite relativement compacte si son adhérence est compacte (ou encore si il existe un compact K de E tel que $A \subset K$).

Dans le cas où E est un espace de dimension finie, A est compacte si et seulement si A est fermée bornée, et A est relativement compacte si et seulement si A est bornée.

Ces deux caractérisations sont fausses si $\dim(E) = +\infty$. On sait par le théorème de Riesz que la boule unité fermée d'un evn E est compacte si et seulement si la dimension de E est finie.

On s'intéresse ici au cas $E = L^p(\Omega)$ (Ω ouvert non vide de $\mathbb{R}^N$), espace vectoriel normé de dimension infinie, et on voudrait caractériser les parties relativement compactes ; en particulier, étant donnée une suite de fonctions de $L^p(\Omega)$, sous quelles hypothèses peut-on en extraire une sous-suite qui converge ? Une condition nécessaire évidente est que la partie considérée soit bornée (une partie relativement compacte est toujours bornée). La deuxième condition est, pour $1 \leq p < +\infty$ et Ω bornée, que la partie soit équicontinue en moyenne, au sens précisé dans le théorème suivant :

Théorème 8.5 (Kolmogorov) *Soit $\Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et $1 \leq p < +\infty$; on considère ici l'espace mesuré $(E, T, m) = (\Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$. Soit $A \subset L^p(\Omega)$; A est relativement compacte si et seulement si :*

1. *Il existe $C \in \mathbb{R}$ t.q. $\|f\|_p \leq C$ pour tout $f \in A$,*
2. *la partie A est équicontinue en moyenne, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ t.q. :*
$$\text{pour tout } f \in A,\ |h| \leq \delta \Rightarrow \|\tilde{f}(\cdot + h) - \tilde{f}\|_p \leq \varepsilon,$$
3. *la partie A est "équi-petite" à l'infini", c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in \mathbb{R}_+$, t.q. $\displaystyle\int_{B_a^c} |\tilde{f}|^p dm \leq \varepsilon$ pour tout $f \in A$,*

où $\tilde{f}$ est la prolongée de f par 0 en dehors de Ω.

La démonstration de ce théorème se fait en utilisant la densité de l'espace de fonctions $C_c(\Omega, \mathbb{R})$ dans $L^p(\Omega)$, et le théorème d'Ascoli, que nous rappelons ici :

Théorème 8.6 (Ascoli) *Soient K une partie compacte de $\mathbb{R}$ et A une partie de l'espace vectoriel $C(K, \mathbb{R})$ muni de la norme uniforme ; A est relativement compacte si et seulement si A est bornée et uniformément équicontinue, i.e. $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$; $\forall\ x, y \in K$, $|x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$, $\forall\ f \in A$.*

Corollaire 8.1 *Soient $\Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p < +\infty$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$. On suppose que la famille $A = \{f_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ vérifie les conditions 1, 2 et 3 du théorème de Kolmogorov. On peut alors extraire de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite, notée $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, et il existe $f \in L^p(\Omega)$ t.q. $f_{\varphi(n)} \to f$ dans $L^p(\Omega)$ quand $n \to \infty$.*

8.4 Propriété de compacité faible

On a introduit au chapitre 6 la convergence faible $\star$ dans le dual d'un espace de Banach. On a une propriété de compacité très utile lorsque l'espace de Banach considéré est séparable :

Proposition 8.3 (Compacité faible-$\star$ séquentielle des bornés du dual d'un séparable)
Soit F un espace de Banach séparable et F' son dual topologique ; soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de F' ; alors il existe une sous-suite $(T_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ et $T \in F'$ t.q. la sous-suite $(T_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers T dans F' pour la topologie faible $\star$ (i.e. $T_{n_k}(u) \to T(u)$ (dans $\mathbb{R}$) pour tout élement u de F.)

Démonstration : procédé diagonal...
Cette propriété s'applique donc aux suites bornées de $L^\infty(\Omega)$; en effet, grâce au théorème 6.9 et à la proposition 8.2), l'espace $L^\infty(\Omega)$ peut être identifié au dual de l'espace $L^1(\Omega)$, qui est un espace séparable (Ω est ici un borélien de $\mathbb{R}^N$). On a donc, par exemple, le résultat suivant :

Proposition 8.4 (Compacité faible $\star$ séquentielle des bornés de L^∞)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de $L^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, i.e. telle qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ t.q. $\|u_n\|_\infty \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, il existe une sous suite, encore notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et il existe $u \in L^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ t.q. $u_n \to u$ dans $L^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ pour la topologie faible $\star$.

Dans le cas $p \in]1, +\infty[$, on peut écrire une propriété de compacité faible :

Proposition 8.5 (Compacité faible séquentielle des bornés de L^p)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, $p \in]1, +\infty[$, i.e. telle qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ t.q. $\|u_n\|_p \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, il existe une sous suite, encore notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et il existe $u \in L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ t.q. $u_n \to u$ dans L^p pour la topologie faible, c'est-à-dire t.q. $\int (u_n v - uv) dm \to 0$ pour tout $v \in L^q$, où $q = \frac{p}{p-1}$.

8.5 Exercices

Exercice 8.1 (Densité de $C_c(\Omega, \mathbb{R})$ dans $L^p(\Omega)$)
Soient, $N \geq 1$, $p \in [1, +\infty[$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Montrer que $C_c(\Omega, \mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\Omega)$, c'est-à-dire que pour tout $f \in L^p(\Omega)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi \in C_c(\Omega, \mathbb{R})$ t.q. $\|f - \varphi\|_p \leq \varepsilon$. [Reprendre la démonstration de l'exercice 6.4 qui traite le cas $\Omega = \mathbb{R}$. Utiliser le résultat de régularité, proposition 7.5.]

Exercice 8.2 (Continuité en moyenne)
Soient $N \geq 1$, $p \in [1, +\infty[$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Montrer que $\|f(\cdot + h) - f\|_p \to 0$ quand $h \to 0$. [Reprendre la démonstration vue pour $N = 1$ dans l'exercice 6.4]

Exercice 8.3 (Non densité de C_c dans L^∞) *Corrigé 152 page 468*
On considère $f = 1_{\mathbb{R}_+}$ (qui appartient à $L^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, en confondant f avec sa classe).

1. Montrer que $\|f - \varphi\|_\infty \geq \frac{1}{2}$ pour tout $\varphi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Montrer que $\|f(\cdot + h) - f\|_\infty = 1$ pour tout $h \in \mathbb{R}^\star$.

Exercice 8.4 (Séparabilité de $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$) *Corrigé 153 page 468*
Soient $N \geq 1$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et p tel que $1 \leq p < +\infty$. Montrer que l'espace $L^p(\Omega)$ est séparable.

On pourra se limiter au cas $\Omega = \mathbb{R}$ et raisonner ainsi : Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, pour $q = 0, 1, \ldots, 2n^2 - 1$, on note: $I^n_q = [-n + \frac{q}{n}, -n + \frac{q+1}{n}[$. On pose : $A_n = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f|_{I^n_q} = r$, où $r \in \mathbb{Q}$, et $f = 0$ sur $[-n, n[^c\}$. On pose $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^\star} A_n$.

1. Montrer que A est dénombrable.
2. Montrer que, pour tout $f \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in A$ t.q. $\|f - g\|_p \leq \varepsilon$.
3. Conclure par la densité de $C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans $L^p(\mathbb{R},)$ (théorème 8.1).

Exercice 8.5 (Non séparabilité de $L^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$) *Corrigé 154 page 469*
On note B l'ensemble des f appartenant à $L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ t.q., pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f = 0$ p.p. sur $]n, n+1[$ ou $f = 1$ p.p. sur $]n, n+1[$.

1. Montrer que B est non dénombrable. [Construire une injection de l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ dans B.]
2. Soit A une partie dense de $L^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Montrer que pour tout $f \in B$, il existe $g \in A$ t.q. $\|f - g\|_\infty \leq \frac{1}{4}$. En déduire qu'on peut construire une application injective de B dans A.
3. Montrer que $L^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ n'est pas séparable.

Exercice 8.6 (Convolution $L^p - L^q$) *Corrigé 155 page 470*
Pour $1 \leq p \leq \infty$, on note $\mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $L^p = L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

1. Soit $1 < p < +\infty$, $q = \frac{p}{p-1}$, $f \in \mathcal{L}^p$ et $g \in \mathcal{L}^q$.
   (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $f(\cdot)g(x - \cdot)$ est intégrable.
   On peut donc définir $(f \star g)(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (b) Montrer que $|(f \star g)(x)| \leq \|f\|_p \|g\|_q$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (c) Montrer que $f \star g$ est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $1 < p < +\infty$, $q = \frac{p}{p-1}$.
   (a) Soit $F \in L^p$ et $G \in L^q$. Montrer qu'on peut définir $F \star G$ sur $\mathbb{R}$ en posant $F \star G = f \star g$, avec $f \in F$ et $g \in G$. [Il suffit donc de démontrer que $f \star g$ ne dépend pas du choix de f dans F et g dans G.]
   (b) Montrer que l'application $(F, G) \mapsto F \star G$ est bilinéaire continue de $L^p \times L^q$ dans $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (on rappelle que $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme de la convergence uniforme).

(c) Soit $F \in L^p$ et $G \in L^q$. Montrer que $F \star G \in C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (c'est-à-dire que la fonction $F \star G$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et que $(F \star G)(x) \to 0$ quand $x \to \pm\infty$).

3. On prend maintenant $p = 1$ et $q = +\infty$.

(a) Soit $f \in \mathcal{L}^1$ et $g \in \mathcal{L}^\infty$. Montrer que $(f \star g)(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $f \star g \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(b) Soit $F \in L^1$ et $G \in L^\infty$. Montrer que $(F \star G)(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ en posant $F \star G = f \star g$, avec $f \in F$ et $g \in G$.

(c) L'application $(F, G) \mapsto F \star G$ est-elle continue de $L^1 \times L^\infty$ dans C_b ?

(d) A-t-on $F \star G \in C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, pour tout $F \in L^1$ et $G \in L^\infty$?

Exercice 8.7 (Caractérisation d'une fonction par son action sur C_c^∞) *Corrigé 156 page 473*
Soit $d \in \mathbb{N}^\star$. On rappelle que λ_d est la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$ et que l'élément d'intégration par rapport à λ_d est noté dx (au lieu de $d\lambda_d(x)$). On rappelle aussi que $|\cdot|$ dénote la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^d$. On se donne une fonction $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ t.q. :

- $\rho(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R}^d$, $|x| \geq 1$,
- $\rho(x) \geq 0$ si $x \in \mathbb{R}^d$,
- $\int \rho(x) dx = 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on note ρ_n la fonction définie par $\rho_n(x) = n^d \rho(nx)$, de sorte que $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ est une famille de noyaux régularisants (voir le chapitre 8 du cours).

1. Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$.

(a) Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Montrer que $f\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$.

On suppose maintenant que $\int f(x)\varphi(x)dx = 0$ pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer $f \star \rho_n(x)$ est bien défini pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et que $f \star \rho_n(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.

(c) Montrer que $f = 0$ p.p..

2. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $g \in \mathcal{L}^1_{loc}(\Omega)$ (c'est-à-dire que g est une fonction de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ t.q. $g 1_K \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$ pour tout compact K de Ω).

(a) Soit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$. Montrer que $g\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$. (La fonction φ est prolongée par 0 hors de Ω.)

On suppose maintenant que $\int g(x)\varphi(x)dx = 0$ pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On note Ω_n l'ensemble des $x \in \Omega$ t.q. $|x - y| > \frac{1}{n}$ pour tout $y \in \Omega^c$. Montrer $g \star \rho_n(x)$ est bien définie pour tout $x \in \Omega_n$ et que $g \star \rho_n(x) = 0$ pour tout $x \in \Omega_n$.

(c) Soit K un compact de Ω, montrer que $g 1_K = 0$ p.p.. En déduire que $g = 0$ p.p. sur Ω.

Exercice 8.8 (Théorème de compacité dans L^1) *Corrigé 157 page 475*

On pose $L^1(]0,1[) = L^1_{\mathbb{R}}(]0,1[,\mathcal{B}(]0,1[),\lambda)$ et $L^1(\mathbb{R}) = L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ (où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ou sa trace sur $\mathcal{B}(]0,1[)$). Pour $f \in L^1(]0,1[)$, on identifie f avec l'un de ses représentants et on note $\tilde{f}$ la fonction définie par $\tilde{f} = f$ sur $]0,1[$ et $\tilde{f} = 0$ sur $\mathbb{R}\setminus]0,1[$.

Soit $\mathcal{A}$ une partie de $L^1(]0,1[)$.

On rappelle que $\mathcal{A}$ est relativement compacte dans $L^1(]0,1[)$ si et seulement si $\mathcal{A}$ est précompacte (c'est-à-dire que pour $\varepsilon > 0$ il existe $p \in \mathbb{N}^\star$ et $f_1,\ldots,f_p \in \mathcal{A}$ t.q. $\mathcal{A} \subset \cup_{i=1}^p B(f_i,\varepsilon)$, où $B(f,\varepsilon)$ désigne la boule ouverte dans $L^1(]0,1[)$ de centre f et de rayon ε).

Partie I (condition suffisante). On suppose, dans cette partie, que $\mathcal{A}$ est relativement compacte dans $L^1(]0,1[)$.

1. Montrer que $\mathcal{A}$ est une partie bornée de $L^1(]0,1[)$.
2. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ t.q. :

$$h \in \mathbb{R}, |h| \le \alpha, f \in \mathcal{A} \Rightarrow \|\tilde{f}(\cdot + h) - \tilde{f}\|_1 \le \varepsilon. \tag{8.4}$$

Partie II (condition nécessaire). On suppose, dans cette partie, que $\mathcal{A}$ une partie bornée de $L^1(]0,1[)$ et que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ vérifiant (8.4).

Soit $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ t.q. $\rho \ge 0$, $\rho(x) = 0$ si $|x| \ge 1$ et $\int \rho(x)dx = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit ρ_n par $\rho_n(x) = n\rho(nx)$ si $x \in \mathbb{R}$.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^\star$ t.q. :

$$n \in \mathbb{N}^\star, n \ge n_0, f \in \mathcal{A} \Rightarrow \|\tilde{f} \star \rho_n - \tilde{f}\|_1 \le \varepsilon. \tag{8.5}$$

   [On pourra remarquer que $\tilde{f} \star \rho_n(x) - \tilde{f}(x) = \int (\tilde{f}(x - \frac{y}{n}) - \tilde{f}(x))\rho(y)dy$.]

2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Pour $f \in \mathcal{A}$, on note f_n la restriction à $[0,1]$ de la fonction $\tilde{f} \star \rho_n$.

   (a) Montrer qu'il existe $C_1, C_2 > 0$ ne dépendant que de n, ρ et de la borne de $\mathcal{A}$ dans $L^1(]0,1[)$ t.q. :

$$x \in [0,1],\ f \in \mathcal{A} \Rightarrow |f_n(x)| \le C_1,$$
$$x,y \in [0,1],\ f \in \mathcal{A} \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| \le C_2|x-y|.$$

   En déduire que l'ensemble $\{f_n,\ f \in \mathcal{A}\}$ est relativement compact dans $C([0,1],\mathbb{R})$ [Utiliser le théorème d'Ascoli.]

   (b) Montrer que l'ensemble $\{f_n,\ f \in \mathcal{A}\}$ est relativement compact dans $L^1(]0,1[)$.

3. Montrer que la partie $\mathcal{A}$ est relativement compacte dans $L^1(]0,1[)$.

Chapter 9

Vecteurs aléatoires

9.1 Définition, propriétés élémentaires

Définition 9.1 (Vecteur aléatoire) *Soit $d \geq 1$ et $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. On appelle vecteur aléatoire (souvent noté v.a.) de dimension d une application mesurable de Ω dans $\mathbb{R}^d$ (où $\mathbb{R}^d$ est muni de la tribu borélienne).*

Noter que la notation “v.a.” signifie indifféremment “variable(s) aléatoire(s)” ou “vecteur(s) aléatoire(s)”.

Proposition 9.1 *Soit $d > 1$ et $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. Soit X une application de Ω dans $\mathbb{R}^d$. On note $X_1, \ldots, X_d$ les composantes de X (de sorte de $X = (X_1, \ldots, X_d)^t$). On note $\sigma(X)$ la tribu engendrée par X (et $\sigma(X_i)$, pour $i = 1, \ldots, d$ la tribu engendrée par X_i). On a alors :*

1. *$\sigma(X)$ est la plus petite tribu contenant les tribus $\sigma(X_1), \ldots, \sigma(X_d)$.*
2. *X est un v.a. si et seulement si X_i est, pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$, une v.a.r..*

Démonstration : On rappelle que $\sigma(X) = \{X^{-1}(B),\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ et que, pour tout i, $\sigma(X_i) = \{X_i^{-1}(A),\ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. On note $\mathcal{C} = \{\prod_{i=1}^d A_i,\ A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour tout $i\}$. On rappelle que $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ (voir l'exercice 7.10) et que $\mathcal{C}$ engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ (c'est même encore vrai si on se limite à prendre pour A_i des intervalles, ouverts, voir l'exercice 2.6).

On note T la plus petite tribu contenant les tribus $\sigma(X_1), \ldots, \sigma(X_d)$. Soit $i \in \{1, \ldots, d\}$ et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. En prenant $B = \prod_{j=1}^d A_j$ avec $A_j = \mathbb{R}$ si $j \neq i$ et $A_i = A$, on a $X^{-1}(B) \in \sigma(X)$ (car $B \in \mathcal{C} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$) et $X^{-1}(B) = X_i^{-1}(A)$. On en déduit $X_i^{-1}(A) \in \sigma(X)$ et donc $\sigma(X_i) \subset \sigma(X)$ pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$. Comme $\sigma(X)$ est une tribu, on a donc $T \subset \sigma(X)$.

Pour montrer l'inclusion inverse (c'est-à-dire $T \supset \sigma(X)$). On remarque que, si $B \in \mathcal{C}$ on a $B = \prod_{i=1}^d A_i$ avec des A_i appartenant à $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On a donc $X^{-1}(B) = \cap_{i=1}^d X_i^{-1}(A_i) \in T$ (car $X_i^{-1}(A_i) \in \sigma(X_i) \subset T$). Or, il est facile de voir que $\{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, t.q. $X^{-1}(B) \in T\}$ est une tribu. Cette tribu contient $\mathcal{C}$, elle contient donc la tribu engendrée par $\mathcal{C}$, c'est-à-dire $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. On vient donc de montrer que $\{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, t.q. $X^{-1}(B) \in T\} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, c'est-à-dire que $X^{-1}(B) \in T$ pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, ou encore que $\sigma(X) \subset T$. On a bien, finalement, $\sigma(X) = T$, ce qui donne le premier item de la proposition.

Le deuxième item est un conséquence facile du premier. En effet, si X est un v.a., on a pour tout i, $\sigma(X_i) \subset \sigma(X) \subset \mathcal{A}$ et donc X_i est une v.a.r.. Réciproquement; si X_i est, pour tout i, une v.a.r., on a

$\sigma(X_i) \subset \mathcal{A}$ pour tout i. Comme $\mathcal{A}$ est une tribu, on a donc $\mathcal{A} \supset T$ et comme $T = \sigma(X)$ on en déduit que X est un v.a.. ■

La démonstration de la proposition 9.1 n'utilise pas vraiment le fait que les X_i soient des applications à valeurs dans $\mathbb{R}$. Elle se généralise donc facilement au cas où les X_i sont des applications à valeurs dans $\mathbb{R}^{d_i}$.

Proposition 9.2 *Soit $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$, $d_1, \ldots, d_p \in \mathbb{N}^\star$. soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable et, pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, X_i une application de Ω dans $\mathbb{R}^{d_i}$. On note $X = (X_1, \ldots, X_d)^t$, de sorte que X est une application de Ω dans $\mathbb{R}^d$ avec $d = d_1 + \ldots + d_p$. Soit $d \geq 1$ et $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. Soit X une application de Ω dans $\mathbb{R}^d$. On note $\sigma(X)$ la tribu engendrée par X (et $\sigma(X_i)$, pour $i = 1, \ldots, p$ la tribu engendrée par X_i). On a alors :*

1. *$\sigma(X)$ est la plus petite tribu contenant les tribus $\sigma(X_1), \ldots, \sigma(X_p)$.*
2. *X est un v.a. (de dimension d) si et seulement si X_i est, pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, un v.a. (de dimension d_i).*

Définition 9.2 (Loi d'un v.a.) *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace probabilisé, $d \geq 1$ et X un v.a. de dimension d. On appelle loi de probabilité de X, et on note cette loi P_X ou p_X, la probabilité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ image par X de p (c'est-à-dire $P_X(A) = p(X^{-1}(A))$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$). Si $(X_1, \ldots, X_d)$ sont les composantes de X, La probabilité p_X est aussi appelée loi conjointe de $(X_1, \ldots, X_d)$.*

Un exemple important est la loi normale multidimensionnelle.

Définition 9.3 (Loi normale multidimensionnelle) *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace probabilisé, $d \geq 1$ et X un v.a. de dimension d. Soit $m \in \mathbb{R}^d$ et D une matrice (à coefficients réels, de taille $d \times d$) s.d.p. (c'est-à-dire symétrique définie positive). Le v.a. X a pour loi $\mathcal{N}(m, D)$ (loi normale de paramètre m et D) si $P_X = f\lambda_d$ avec :*

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{det(D)}} \exp(-\frac{1}{2}(x-m)^t D^{-1}(x-m)) \;\; \lambda_d\text{-}p.p. \text{ en } x \in \mathbb{R}^d.$$

Si D est seulement seulement semi-définie positive (c'est-à-dire $Du \cdot u \geq 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}^d$), au lieu d'être définie positive (c'est-à-dire $Du \cdot u > 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}^d$, $u \neq 0$), la loi normale $\mathcal{N}(0, D)$ est aussi définie, voir la proposition 9.9, mais ce n'est pas une loi de densité (par rapport à la mesure de Lebesgue), voir l'exercice 10.9 (et l'exercice 9.14 qui donne un exemple de loi normale bidimensionnelle qui n'est pas de densité).

Nous verrons dans la section 9.3 que si X est un v.a. suivant une loi normale multidimensionnelle, X est un v.a. gaussien. L'extension de la définition de la loi normale multidimensionnelle au cas D non inversible permettra alors de dire que les v.a. gaussiens sont exactement ceux qui suivent une loi normale multidimensionnelle (proposition 9.9).

Le fait que les composantes du v.a. X suivent une loi normale ne donne pas que X suit une loi normale multidimensionnelle (voir, par exemple, l'exercice 10.10). Mais, si les composantes du v.a. X suivent une loi normale et sont indépendantes, le v.a. X suit alors une loi normale multidimensionnelle (cf. l'exercice 9.11 ou l'exercice 10.10).

Définition 9.4 (i-ème projecteur) *Soit $d \geq 1$. On appelle i-ème projecteur de $\mathbb{R}^d$ l'application π_i, de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$, qui a un vecteur de $\mathbb{R}^d$ fait correspondre sa i-ème composante dans la base canonique de $\mathbb{R}^d$.*

Définition 9.5 (Probabilité marginale) *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ espace probabilisé , $d \geq 1$ et X un vecteur aléatoire de dimension d. On appelle i-ème probabilité marginale du vecteur aléatoire X la mesure image de p_X par le i-ème projecteur π_i. La remarque suivante montre que cette probabilité marginale est en fait la loi de X_i notée p_{X_i}.*

Remarque 9.1 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ espace probabilisé , $d \geq 1$ et $X = (X_1, \ldots, X_d)^t$ un vecteur aléatoire de dimension d. On note q_i la i-ème probabilité marginale du vecteur aléatoire X. Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, par définition de la loi marginale, on a :

$$q_i(B) = p_X(\pi_i^{-1}(B)) = p(X^{-1}(\pi_i^{-1}(B))).$$

Comme $X_i = \pi_i \circ X$, on a donc :

$$q_i(B) = p(X_i^{-1}(B)).$$

La probabilité q_i est donc aussi la loi de la variable aléatoire X_i.

Remarque 9.2 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ espace probabilisé , $d > 1$ et $X = (X_1, \ldots, X_d)^t$ un vecteur aléatoire de dimension d. La connaissance de p_X entraîne la connaissance des p_{X_i}. La réciproque est en général fausse.

On définit la densité d'une loi de manière analogue au cas scalaire.

Définition 9.6 (Loi de densité) *Soit p une probabilité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ $(N?ge1)$, on dit que p est une probabilité de densité (par rapport à la mesure de Lebesgue) s'il existe $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ t.q. $p = f\lambda_N$.*

De même que dans le cas scalaire, on a un théorème qui permet de calculer des intégrales par rapport à la loi image :

Théorème 9.1 (Loi image) *Soit $d \geq 1$, $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace probabilisé, X un v.a. de dimension d et p_X la loi de X. Soit φ une application borélienne de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$. On a alors :*

1. *$\varphi \circ X \in L^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{A}, p)$ si et seulement si $\varphi \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), p_X)$,*
2. *L'égalité*
$$\int_\Omega \varphi \circ (x) dp(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(s) dp_X(s),$$
est vrai si φ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$, ou si φ est bornée ou encore si $\varphi \circ X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, p)$. (On rappelle que $\varphi \circ X$ est en général notée $\varphi(X)$).

Définition 9.7 (Fonction de répartition)
Soit $d \geq 1$, $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace probabilisé, $X = (X_1, \ldots, X_d)^t$ un v.a. de dimension d et p_X la loi de X. On appelle fonction de répartition du vecteur aléatoire X la fonction définie de $\mathbb{R}^d$ dans $[0, 1]$ par : $F_X(t_1, \ldots, t_d) = p([X_1 \leq t_1, \ldots, X_d \leq t_d])$.

Proposition 9.3 *Soit $d \geq 1$, $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace probabilisé et X un v.a. de dimension d de fonction de répartition F_X. Alors :*

1. *$0 \leq F_X(t) \leq 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}^d$;*
2. *Si t, $t' \in \mathbb{R}^d$, $t \leq t'$ (i.e. $t_i \leq t'_i$, pour tout $i = 1, \ldots, d$), $F_X(t) \leq F_X(t')$;*
3. *F_X est continue à droite en tout point ;*

4. $F_X(t_1,\ldots,t_d) \to 1$ *lorsque* $(t_1,\ldots,t_d) \to (+\infty,\ldots,+\infty)$ *;*

5. $F_X(t_1,\ldots,t_d) \to 0$ *lorsque* $t_i \to -\infty$ *(à i fixé).*

Démonstration : La démonstration découle facilement des propriétés d'une mesure (monotonie, continuité croissante et continuité décroissante. ■

Proposition 9.4 *Soit* $d \geq 1$, $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ *un espace probabilisé et* X *un v.a. de dimension* d *de fonction de répartition* F_X*. Si* $F_X \in C^d(\mathbb{R}^d, [0,1])$*, alors* p_X *est une probabilité de densité (par rapport à Lebesgue) et cette densité, notée* f_X*, vérifie*

$$f_X = \frac{\partial^d F_X}{\partial x_1 \ldots \partial x_d} \quad \lambda_d\text{-p.p.}. \tag{9.1}$$

Démonstration : On suppose que $d = 1$. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, la définition de F_X donne $p_X(]a,b]) = F_X(b) - F_X(a)$. Mais, comme F_X est de classe C_1, on a $F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b F_X'(t)dt$. En notant m la mesure de densité F_X' par rapport à λ, on a donc $P_X(]a,b]) = m(]a,b])$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, ce qui est suffisant pour dire que $P_X = m$ (en utilisant, par exemple, la proposition 2.5).

Pour $d > 1$, on note m la mesure de densité $\partial^d F_X/\partial x_1 \ldots \partial x_d$ par rapport à λ_d. Un raisoonnement voisin du précédent donne $m(\prod_{i=1}^d]a_i, b_i]) = P_X(\prod_{i=1}^d]a_i, b_i])$ pour tout $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i < b_I$, $i = 1, \ldots, d$. On en déduit $m = P_X$ avec la proposition 2.5. ■

Définition 9.8 (Espérance) *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ *espace probabilisé ,* $d > 1$ *et* $X = (X_1, \ldots, X_d)^t$ *un vecteur aléatoire de dimension d. On suppose que* $E(|X_i|) < \infty$ *pour tout* $i \in \{1, \ldots, d\}$*. L'espérance de X, notée* $E(X)$*, est alors le vecteur de* $\mathbb{R}^d$ *dont les composantes sont les espérances des* X_i*, c'est-à-dire* $E(X) = (E(X_1), \ldots, E(X_d))^t$*.*

Remarque 9.3 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ *espace probabilisé ,* $d > 1$ *et* $X = (X_1, \ldots, X_d)^t$ *un vecteur aléatoire de dimension d t.q.* $E(|X_i|) < \infty$ *pour tout* $i \in \{1, \ldots, d\}$*. Soit* $u \in \mathbb{R}^d$*. L'application* $u \cdot X$ *(qui à* $\omega \in \Omega$ *associe* $u \cdot X(\omega)$*, on rappelle que* $\xi \cdot \eta$ *est le produit scalaire canonique de* ξ *et* η *dans* $\mathbb{R}^d$*) est une v.a.r. intégrable et il est clair que* $E(u \cdot X) = u \cdot E(X)$*. L'application* $u \mapsto E(u \cdot X)$ *est donc l'application linéaire sur* $\mathbb{R}^d$ *représentée par* $E(X)$*.*

Définition 9.9 (Variance, covariance) *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ *espace probabilisé ,* $d > 1$ *et* $X = (X_1, \ldots, X_d)^t$ *un vecteur aléatoire de dimension d. On suppose que* $E(X_i^2) < \infty$ *pour tout* $i \in \{1, \ldots, d\}$*. On définit alors la matrice de covariance de X, notée* $Cov(X)$*, comme la matrice dont le coefficient* i, j *est donné par :*

$$Cov(X)_{i,j} = E((X_i - E(X_i))(X_j - E(X_j))) \text{ pour tout } i, j \in \{1, \ldots, d\}.$$

On a donc $C_{i,i} = Var(X_i)$ *et* $C_{i,j} = Cov(X_i, X_j)$ *(noter d'ailleurs que* $Cov(X_i, X_i) = Var(X_i)$*). Enfin, on peut aussi noter que* $Cov(X)$ *est l'espérance de la matrice* $(X - E(X))(X - E(X)^t$*.*

Remarque 9.4 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ *espace probabilisé ,* $d > 1$ *et* $X = (X_1, \ldots, X_d)^t$ *un vecteur aléatoire de dimension d t.q.* $E(X_i^2) < \infty$ *pour tout* $i \in \{1, \ldots, d\}$*. Pour tout* $u \in \mathbb{R}^d$*, on a donc* $E((u \cdot X)^2) < \infty$ *et il est facile de voir (voir l'exercice 9.8) que* $Var(u \cdot X) = u^t Cov(X) u$*. La matrice* $Cov(X)$ *est donc la matrice de la forme quadratique* $u \mapsto Var(u \cdot X)$*, définie sur* $\mathbb{R}^d$*. Cette matrice est donc symétrique et semi-définie positive. On peut aussi noter que, pour tout* u*,* $v \in \mathbb{R}^d$*, on a* $u^t Cov(X) v = E((u \cdot X)(v \cdot X))$*.*

9.2 Indépendance

Définition 9.10 *Soit $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$, $d_1, \ldots, d_p \in \mathbb{N}^\star$. soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable et, pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, X_i un v.a. de dimension d_i. Les v.a. $X_1, \ldots, X_p$ sont dits indépendants si les tribus $\sigma(X_1), \ldots, \sigma(X_p)$ (engendrées par $X_1, \ldots, X_p$) sont indépendantes (cf définition 2.24, p. 38)*

La proposition suivante donne des "opérations" possibles sur l'indépendance.

Proposition 9.5 *Soit $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$, $d_1, \ldots, d_p \in \mathbb{N}^\star$. soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable et, pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, X_i un v.a. de dimension d_i. On suppose que les v.a. $X_1, \ldots, X_p$ sont indépendants. On se donne maintenant une suite strictement croissante $p_0, \ldots, p_q$ ($q \geq 2$) t.q. $1 = p_0 < \ldots < p_q = p + 1$ et, pour $i \in \{1, \ldots, q\}$, on note Y_i le v.a. $(X_{p_{i-1}}, \ldots, X_{p_i - 1})^t$, qui est donc un v.a. de dimension $r_i = d_{p_{i-1}} + \ldots + d_{p_i - 1}$. On a alors*

1. *Les v.a. $Y_1, \ldots, Y_q$ sont indépendantes,*
2. *Si φ_i est, pour tout $i \in \{1, \ldots, q\}$, une application borélienne de $\mathbb{R}^{r_i}$ dans $\mathbb{R}^{s_i}$ (avec $s_i \in \mathbb{N}^\star$), les v.a. $\varphi_1(Y_1), \ldots, \varphi_q(Y_q)$ sont indépendants.*

Démonstration : le premier item est une conséquence immédiate de la proposition 2.11 (sur l'indépendance de tribus) et de la proposition 9.2. Le second item est une conséquence immédiate du premier car $\sigma(\varphi_i(Y_i)) \subset \sigma(Y_i)$ pour tout i. ∎

Remarque 9.5 *Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable et X, Y deux v.a. (pas nécessairement de même dimension). La proposition 9.5 montre que si X et Y sont indépendants, toute composante de X est indépendante de toute composante de Y. Réciproquement, si toute composante de X est indépendante de toute composante de Y, on en déduit que X et Y sont indépendants. Ceci est encore une conséquence simple de la proposition 2.11.*

On donne maintenant une généralisation de la proposition 4.10.

Proposition 9.6 *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace probabilisé, $n \geq 2$ et $X_1, \ldots, X_n$ des v.a. indépendants, de dimension $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{N}^\star$.*

1. *Soit, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, une fonction borélienne, notée φ_i, de $\mathbb{R}^{d_i}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. On a alors :*
$$E(\prod_{i=1}^{d} \varphi_i(X_i)) = \prod_{i=1}^{n} E(\varphi_i(X_i)). \tag{9.2}$$
(En convenant qu'un produit de termes est nul si l'un des termes est nul.)
2. *Soit, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, φ_i une fonction borélienne de $\mathbb{R}^{d_i}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $\varphi(X_i)$ est intégrable pour tout $i = 1, \ldots, n$. La v.a.r. $\prod_{i=1}^{d} \varphi_i(X_i)$ est alors intégrable et l'égalité (9.2) est vraie.*
3. *Soit, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, φ_i une fonction borélienne bornée de $\mathbb{R}^{d_i}$ dans $\mathbb{R}$. Alors, l'égalité (9.2) est vraie.*

N.B. Comme dans la proposition 4.10, l'item 3 est donc une CNS pour que les v.a. $X_1, \ldots, X_n$ soient indépendants.

DÉMONSTRATION : La démonstration suit pas à pas celle de la proposition 4.10, sans difficulté supplémentaire. ■

Remarque 9.6 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace probabilisable. La proposition 9.6 donne aussi des résultats quand les fonctions φ_i sont à la valeurs dans $\mathbb{R}^{r_i}$ avec $r_i \neq 1$. Par exemple, soit X, Y sont deux v.a. indépendants de dimensions d. On suppose X et Y intégrables (c'est-à-dire $E(|X|) < \infty$ et $E(|Y|) < \infty$). La v.a.r. $X \cdot Y$ est alors intégrable et $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$.

Plus généralement, soit X est un v.a. de dimension d, Y est un v.a. de dimension $\bar{d}$, X, Y indépendants. On suppose que φ est une fonction borélienne de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^r$ et ψ une fonction borélienne de $\mathbb{R}^{\bar{d}}$ dans $\mathbb{R}^r$ t.q. $\varphi \circ X$ et $\psi \circ Y$ soient intégrables. On a alors $\varphi \circ X \cdot \psi \circ Y$ intégrable et $E(\varphi \circ X \cdot \psi \circ Y) = E(\varphi \circ X) \cdot E(\psi \circ Y)$.

Enfin, si $X_1, \ldots, X_n$ sont des v.a. indépendants de dimension d ($d \geq 1$), la formule donnée dans la proposition 6.26 se généralise et donne :

$$\operatorname{Cov}(X_1 + \ldots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Cov}(X_i).$$

Pour le montrer, il suffit de traiter le cas $n = 2$ (qui est traité dans l'exercice 9.9) et de faire une récurrence sur n.

On donne maintenant la généralisation de la proposition 4.12.

Proposition 9.7 *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace probabilisé, $n \geq 2$ et $X_1, \ldots, X_n$ des v.a. indépendants, de dimension $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{N}^\star$. Ces v.a. sont indépendants si et seulement si on a, pour tout famille $\{\varphi_i)$, $i = 1, \ldots n\}$ t.q. $\varphi_i \in C_c(\mathbb{R}^{d_i}, \mathbb{R})$ pour tout i,*

$$E(\prod_{i=1}^{d} \varphi_i(X_i)) = \prod_{i=1}^{d} E(\varphi_i(X_i)), \tag{9.3}$$

(En convenant qu'un produit de termes est nul si l'un des termes est nul.)

DÉMONSTRATION : Ici encore, la démonstration suit pas à pas celle de la proposition 4.12, sans difficulté supplémentaire. ■

Théorème 9.2 (Loi d'un couple de v.a. indépendantes) *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.*

1. *Soit X, Y deux v.a.r.. Les v.a. X et Y sont indépendantes si et seulement si la loi du v.a. $(X, Y)^t$ (ou du couple (X, Y)) est $P_{(X,Y)^t} = P_X \otimes P_Y$.*
2. *Soit $X_1, \ldots, X_n$ ($n \geq 2$) n v.a. de dimension $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{N}^\star$. On pose $Z = (X_1, \ldots, X_n)^t$ (Z est donc un v.a. de dimension $d_1 + \ldots + d_n$). Les v.a. $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes si et seulement si la loi du v.a. Z est $P_Z = P_{X_1} \otimes \ldots \otimes P_{X_n}$.*

DÉMONSTRATION : La démonstration du premier item fait partie de l'exercice 9.10. le second item est une généralisation assez simple (en faisant, par exemple, une récurrence sur n pour se ramener au cas $n = 2$). ■

On utilise souvent en théorie des probabilités une suite (finie ou infinie) de v.a.r. indépendantes ayant des lois prescrites. Le théorème suivant montre qu'il existe effectivement un espace de probabilité et une suite de v.a.r.i. sur cet espace ayant des lois prescrites.

Théorème 9.3 (Existence de v.a.r.i. de lois prescrites) *Soit* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ *une suite de probabilités sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. *On a alors :*

1. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^\star$, *il existe un un espace probabilisé, noté* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, *et une suite finie de v.a.r. indépendantes, notées* $X_1, \ldots, X_n$ *t.q.* $P_{X_k} = p_k$ *pour tout* $k \in \{0, \ldots, n\}$.

2. *Il existe un un espace probabilisé, noté* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, *et une suite de v.a.r. indépendantes, notée* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ *t.q.* $P_{X_n} = p_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^\star$.

Démonstration : Nous démontrons ici le premier item. Le second (plus difficile) sera admis. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Un raisonnement par récurrence utilisant le théorème d'existence (et unicité) de la mesure produit (théorème 7.1) permet de construire une mesure p sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ vérifiant, pour toute famille $A_1, \ldots, A_n$ de boréliens de $\mathbb{R}$:

$$p(\prod_{i=1}^{n} A_i) = \prod_{i=1}^{n} p_i(A_i).$$

On a donc $p = p_1 \otimes \ldots \otimes p_n$.

On prend alors $(\Omega, \mathcal{A}, P) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), p)$ et, pour tout $i = 1, \ldots, n$, X_i est l'application qui a $\omega \in \mathbb{R}^n$ associe sa i-ième composante. Enfin, on note $X = (X_1, \ldots, X_n)^t$, de sorte que X est un v.a. de dimension n.

Pour tout $\omega \in \mathbb{R}^n$, on a $X(\omega) = \omega$, ceci prouve que $P_X = P$. Puis, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a $X(\omega) = \omega_i$ (où ω_i désigne la i-ième composante de ω). On en déduit que $P_{X_i} = p_i$. Enfin, comme $p = p_1 \otimes \ldots \otimes p_n$, on a aussi $P_X = p_{X_1} \otimes \ldots \otimes p_{X_n}$. Le théorème 9.2 donne donc que les v.a.r. $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes. ■

On s'intéresse maintenant à la somme de v.a.i.

Proposition 9.8 (Loi de la somme de v.a. indépendantes) *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé,* $d \geq 1$ *et* X, Y *deux v.a. indépendants de dimension* d. *Alors,* $p_{X+Y} = p_X \star p_Y$.

Démonstration : Soit φ une fonction borélienne bornée de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$. Comme X et Y sont indépendants, on a $P_{(X,Y)} = P_X \otimes P_Y$ (par le théorème 9.2) et donc :

$$\int_\Omega \varphi(X+Y)dP = \int_{\mathbb{R}^{2d}} \varphi(x+y)dP_{(X,Y)}(x,y) = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x+y)dP_X(x)dP_Y(y).$$

La définition de la convolution de mesure donne (voir la définition 7.4 et la proposition 7.10 :

$$\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x+y)dP_X(x)dP_Y(y) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(z)d(P_X \star P_Y)(z).$$

On en déduit que $\int_\Omega \varphi(X+Y)dP = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(z)d(P_X \star P_Y)(z)$, c'est-à-dire $P_{X+Y} = P_X \star P_Y$. ■

9.3 Vecteurs gaussiens, théorème central limite

Soit $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. On rappelle que la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ est la probabilité (sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$) de densité f avec, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Pour introduire les vecteurs gaussiens, il est utile de définir aussi la loi normale $\mathcal{N}(m,0)$. Cette loi normale est la probabilité (sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$) δ_m (appelée "mesure de Dirac au point m). Comme elle vérifie, pour tout fonction φ borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $\int \varphi d\delta_m = \varphi(m)$, il est facile de vétfier que $\mathcal{N}(m,0)$ est la limite étroite, quand $\sigma \to 0$, $\sigma > 0$, de $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$.

Définition 9.11 *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace probabilisé, $d \geq 1$ et X un v.a. de dimension d. le v.a. X est un v.a. gaussien si et seulement $u \cdot X$ est, pour tout $u \in \mathbb{R}^d$, une v.a.r. gaussienne.*

Remarque 9.7 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace probabilisé, $d > 1$ et X un v.a. de dimension d. On suppose que chaque composante de X est une v.a.r. gaussienne. Alors, le vecteur X n'est pas nécessairement gaussien. Mais, si les composantes de X sont indépendantes, le vecteur X est alors un v.a. gaussien. On peut aussi montrer que si X est un v.a. gaussien et que les composantes de X sont indépendantes deux à deux (ou si on a seulement $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0$ pour tout i, j t.q. $i \neq j$), alors les composantes de X sont indépendantes (voir l'exercice 10.10 pour tous ces résultats).

Les v.a. gaussiens sont les vecteurs qui suivent un loi normale multidimensionnelle, dont la définition et donnée dans la définition 9.3, à condition d'étendre convenablement la définition 9.3 au cas D non inversible. C'est l'objectif de la proposition suivante.

Proposition 9.9 *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace probabilisé, $d \geq 1$ et X un v.a. de dimension d.*

1. *Soit $m \in \mathbb{R}^d$ et D une matrice s.d.p. (de taille $d \times d$). Si $X \sim \mathcal{N}(m, D)$, où $\mathcal{N}(m, D)$ est définie par la définition 9.3, alors X est un vecteur gaussien.*
2. *Si X est un vecteur gaussien. On pose $m = E(X)$ et $D = Cov(X)$. Alors, la loi de X ne dépend que de D. Si D est inversible on a $X \sim \mathcal{N}(m, D)$ (où $\mathcal{N}(m, D)$ est définie par la définition 9.3).*

Ceci permet de définir $\mathcal{N}(m, D)$ dans le cas où D est seulement symétrique semi-définie positive (et $m \in \mathbb{R}^d$). On définit $\mathcal{N}(m, D)$ comme étant la loi d'un vecteur gaussien de dimension d t.q. $m = E(X)$ et $D = Cov(X)$ (on peut montrer qu'un tel vecteur existe).

Démonstration : Le premier item est démontré dans l'exercice 10.8 et le deuxième item est démontré dans l'exercice 10.9. ■

On termine ce paragraphe en donnant, sans démonstration, le théorème central limite pour une suite de v.a.i.

Théorème 9.4 *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace probabilisé et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ une suite de v.a. de dimension d i.i.d.. On suppose que $E(|X_1|^2) < \infty$. On pose $E(X_1) = m$, $D = Cov(X_1)$ et, pour $n \in \mathbb{N}^\star$,*

$$Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (X_i - m).$$

La suite $(P_{Y_n})_{n \in \mathbb{N}^\star}$ converge alors étroitement vers la loi normale multidimensionnelle $\mathcal{N}(0, D)$. (Voir la définition 9.3 et la proposition 9.9 pour la définition de cette loi normale multidimensionnelle.)

9.4 Exercices

9.4.1 Définition, propriétés élémentaires

Exercice 9.1 Soient (E,T) un espace mesurable et $(f_k)_{k=1,\ldots,N}$ une famille de fonctions mesurables de (E,T) dans $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Montrer que l'application f définie de E dans $\mathbb{R}^N$ par : $(x,\ldots,x) \mapsto f(x) = (f_1(x),\ldots f_N(x))$ est mesurable.

Exercice 9.2 On reprend les hypothèses de l'exercice 4.37. Soit Y la longévité moyenne des 1000 ouvrières nées le 7 mai. Déterminer une valeur $x > 0$ pour laquelle on a une probabilité inférieure à 10^{-2} que $|Y - 45| > x$.

Exercice 9.3 (Problème de Buffon) On reprend les hypothèses de l'exercice 4.38. On suppose maintenant que $\ell = \frac{d}{2}$. On lance n fois l'aiguille: quelle est la loi de la variable aléatoire Z_n, qui représente le nombre de rencontres au cours des n lancers.
Soit F_n la fréquence des rencontres au cours des n lancers; estimer, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé Tchebicheff, le nombre de lancers permettant d'obtenir $|F - \frac{1}{\pi}| \le 0.05$ avec une probabilité d'au moins 0.99.

Exercice 9.4
On va montrer ici que la connaissance des lois de probabilité marginales ne détermine pas forcément la loi de probabilité. On considère pour cela l'espace probabilisable $(E,T) = (]0,1[\times]0,1[,\mathcal{B}(\mathbb{R})_2)$ et on note λ_N la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, et $\delta_{(a,b)}$ la mesure de Dirac en (a,b). Soit p une probabilité sur (E,T), on note p_1 et p_2 ses probabilités marginales.

1. Soit $(a,b) \in E$. Montrer que $p = \delta_{(a,b)}$ si et seulement si $p_1 = \delta_a$ et $p_2 = \delta_b$.
2. Soit $p = \lambda_2$ sur (E,T). Montrer que $p_1 = p_2 = \lambda_1$ (sur $(]0,1[,\mathcal{B}(\mathbb{R}))$).
3. On pose $D = \{(t,1-t), t \in]0,1[\}$, et on définit l'application $f :]0,1[$ dans D par $f(t) = (t,1-t)$.
   (a) Montrer que f est mesurable.
   (b) On définit la probabilité p sur (E,T) par : $p(D^c) = 0$ et $p(A) = \lambda(f^{-1}(A)), \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})_2, A \subset D$. Montrer que $p_1 = p_2 = \lambda_1$ et conclure.

Exercice 9.5 On considère deux variables aléatoires réelles indépendantes X et Y qui ont pour loi de probabilité conjointe la loi dans le plan $\mathbb{R}^2$ de densité $f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\big(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\big)$ par rapport à la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^2$, σ étant un nombre réel donné. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire $Z = \max(|X|,|Y|)$?

Exercice 9.6 Soient X_1 et X_2 des variables aléatoires d'un espace probabilisé (E,T,p) dans $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ suivant des lois de Poisson de paramètre λ_1 et λ_2 respectivement, montrer que $X_1 + X_2$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$. (On rappelle que la loi de Poisson est donnée par $P = \sum_{k\in\mathbb{N}} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\delta_k$, où δ_k désigne la mesure de Dirac en k).

Exercice 9.7

1. Soient (E,T,m) un espace mesuré fini, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2 = L^2_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ t.q.:

   (H1) la série de terme général $\|f_n\|_2^2$ converge dans $\mathbb{R}$.

(H2) $(f_n, f_m)_{L^2} = 0 \; \forall n, m;\; n \neq m$.

(a) Montrer que la série de terme général f_n converge dans L^2 vers une fonction $F \in L^2$.

(b) Pour $q \in \mathbb{N}^\star$, on pose $A_q = \{y \in E, \forall N \in \mathbb{N}, \exists m, n, m > n > N$ et $|\sum_{p=n}^{m} f_p(y)| \geq \frac{1}{q}\}$. Montrer que $m(A_q) = 0$. En déduire que la série de terme général f_n converge vers F presque partout.

2. Soient (E, T, p) un espace probabilisé et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. indépendantes sur (Ω, T). On note σ_n^2 la variance de la v.a.r. X_n, et on suppose que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma_n^2 < +\infty$. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} X_k$. Montrer que la suite de v.a.r. S_n converge presque sûrement vers une v.a.r. S de variance finie, et que $\sigma^2(S_n - S) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 9.8 (Matrice des moments d'ordre deux et matrice de covariance) *Corrigé 158 page 477*

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace de probabilité. Soit X un vecteur aléatoire de dimension d ($d \geq 1$), dont toutes les coordonnées (notées X_i, $i = 1, \ldots, d$) sont supposées être de carré intégrable. La matrice des moments d'ordre 2 du v.a. X est la matrice $E(XX^t)$, dont le terme (i, j) est le réel $E(X_iX_j)$, et on rappelle que la matrice de covariance de X, notée $\mathrm{Cov}(X)$, est la matrice $E((X - E(X))(X - E(X))^t) = E(XX^t) - E(X)E(X)^t$, dont le terme (i, j) est la covariance des v.a.r. X_i et X_j. (La notation X^t désigne le transposé du vecteur X.)

1. Soit $u \in \mathbb{R}^d$, montrer que $u^tE(XX^t)u = E((u \cdot X)^2)$ et que $u^t\mathrm{Cov}(X)u = \mathrm{Var}(u \cdot X)$ (On rappelle que $u \cdot X = \sum_{i=1}^{d} u_iX_i = u^tX$).

2. Montrer que les matrices $E(XX^t)$ et $\mathrm{Cov}(X)$ sont symétriques et semi–définies positives.

3. Montrer que si A est une matrice $k \times d$ et b un vecteur de $\mathbb{R}^k$, $Y = AX + b$, alors $E(Y) = AE(X) + b$ et $\mathrm{Cov}(Y) = A\mathrm{Cov}(X)A^t$.

4. Montrer que si $\mathrm{Cov}(X)$ n'est pas inversible, alors le v.a. X prend p.s. ses valeurs dans un sous–espace affine de $\mathbb{R}^d$ de dimension (inférieure ou) égale à $d-1$, et que la loi de X n'est pas absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^d$, notée $\_d$ (i.e. cette loi n'est pas à densité dans $\mathbb{R}^d$).

5. Montrer que si trois points x, y et z de $\mathbb{R}^2$ ne sont pas alignés, tout v. a. X de dimension 2 tel que $P(X = x) > 0$, $P(X = y) > 0$ et $P(X = z) > 0$ a une matrice de covariance non dégénérée.

9.4.2 Indépendance

Exercice 9.9 (Covariance d'une somme de v.a.i.) *Corrigé 159 page 478*

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace de probabilité et X, Y deux vecteurs aléatoires indépendants de dimension d ($d \geq 1$). Montrer que $\mathrm{Cov}(X + Y) = \mathrm{Cov}(X)+\mathrm{Cov}(Y)$.

Exercice 9.10 (Loi d'un couple de v.a. indépendantes) *Corrigé 160 page 478*

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilités et X, Y deux v.a.r..

1. Montrer que X et Y sont indépendantes si et seulement si la loi du couple (X, Y) est $P_{(X,Y)} = P_X \otimes P_Y$.

2. On suppose que X et Y ont des densités par rapport à λ : $P_X = f\lambda$ et $P_Y = g\lambda$, avec $f, g \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ (et positives p.p.). Montrer que X et Y sont indépendantes si et seulement si la loi du couple (X, Y) a pour densité la fonction $(x, y) \mapsto f(x)g(y)$ par rapport à λ_2.

Exercice 9.11 (V.a. suivant une loi normale multidimensionelle)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilités et $X = (X_1, \ldots, X_d)$ $(d > 1)$ un v.a. de dimension d. On suppose que les X_i sont des v.a.r. indépendantes et que $X_i \sim \mathcal{N}(m_i, \sigma_i^2)$, avec $m_i \in \mathbb{R}$ et $\sigma_i > 0$ pour tout i. Montrer que X suit une loi normale multidimensionnelle et donner m et D t.q. $X \sim \mathcal{N}(m, D)$.

Exercice 9.12 (Somme de v.a. indépendantes et convolution) *Corrigé 161 page 479*
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilités et X, Y deux v.a.r. indépendantes.

1. On suppose que la loi de X a une densité, notée f, par rapport à la mesure de Lebesgue. Montrer que la loi de $X + Y$ a aussi une densité (par rapport à la mesure de Lebesgue) et l'exprimer en fonction de f et de la loi de Y.

2. On suppose que $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ et $Y \sim \mathcal{N}(m, s^2)$ $(m, \mu, s, \sigma \in \mathbb{R})$. Montrer que $X + Y \sim \mathcal{N}(\mu + m, \sigma^2 + s^2)$ (le signe "$\sim$" signifie "a pour loi").

Exercice 9.13 (Calcul de π) *Corrigé 162 page 479*
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité, $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ deux suites de variables aléatoires de loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. On suppose que toutes ces v.a. sont indépendantes (dans leur ensemble). On pose pour tout $n \geq 1$:

$$X_n = 1 \text{ si } U_n^2 + V_n^2 \leq 1 \text{ et } X_n = 0 \text{ sinon,}$$

et

$$Z_n = 4\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

1. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, la loi de X_n.

2. Montrer que la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge en probabilité vers π.

3. Soit $\alpha \in]0, 1[$ et $\varepsilon > 0$. A l'aide de l'inégalité de Tchebychev, donner, en fonction de α et ε, une valeur de $n_0 \in \mathbb{N}^\star$ t.q.
$$n \geq n_0 \Rightarrow P[|Z_n - \pi| \geq \varepsilon] \leq \alpha.$$

9.4.3 Vecteurs gaussiens, théorème central limite

Exercice 9.14 (Loi du couple (X, X) si X suit une loi normale) *Corrigé 163 page 480*

1. Soit A un borélien de $\mathbb{R}^2$. On pose $T(A) = \{x \in \mathbb{R} \text{ t.q. } (x, x)^t \in A\}$. Montrer que $T(A)$ est un borélien de $\mathbb{R}$. On pose $m(A) = \lambda(T(A))$ (où λ est mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$).

On a ainsi défini une application m de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

2. Montrer que l'application m (définie ci dessus) est une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ et que pour toute application φ borélienne positive de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ on a :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, y)dm(x, y) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, x)dx.$$

3. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace de probabilité. et X une v.a.r. t.q. $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.

   (a) On pose $Z = (X, X)^t$. Montrer que le v.a. Z est un vecteur gaussien et donner, pour $a \in \mathbb{R}^2$, la loi de $a \cdot Z$ (en fonction de a).

   (b) Montrer la loi du v.a. $(X, X)^t$ a une densité par rapport à la mesure m définie dans les questions précédentes et donner cette densité. En déduire que la loi du v.a. $(X, X)^t$ n'a pas de densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

N.B. la loi de $(X, X)^t$ est une loi normale bidimensionnelle car le vecteur $(X, X)^t$ est gaussien (voir la proposition 9.9) mais ce n'est pas une loi de densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

Chapter 10

Transformation de Fourier, fonction caractéristique

10.1 Introduction et notations

La notion de série de Fourier permet d'analyser les fonctions définies d'un compact $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). La notion de transformée de Fourier permet d'analyser les fonctions définies de $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^N$) dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). La transformée de Fourier est une notion employée par exemple en théorie du signal, en théorie des probabilités et pour l'analyse des équations aux dérivées partielles.

Dans toute la suite, on considèrera l'espace mesuré $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ et on notera $d\lambda_N(x) = dx$. Soit $N \geq 1$, les espaces $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ et $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ ont été définis dans la section 4.10 et les espaces $\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ et $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ ont été définis dans la section 6.2. On rappelle aussi que si f est une fonction définie de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{C}$, la fonction f est mesurable si et seulement si ses parties réelle et imaginaire sont mesurables (chaque ensemble, $\mathbb{R}^N$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, étant muni de sa tribu borélienne). On peut, bien sûr, aussi définir les espaces $\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ et $L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ pour tout $p \in [1, \infty]$.

Définition 10.1 (Espaces $L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$) *Soit $N \geq 1$, $p \in [1, \infty]$ et f une fonction mesurable de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{C}$ (c'est-à-dire $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$). On dit que $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ si $|f| \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ et on définit $\|f\|_p$ par $\|f\|_p = \||f|\|_p$ où $\||f|\|_p$ est la norme de $|f|$ dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ (vue au chapitre 6). L'espace $L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ est l'espace $\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ quotienté par le relation d'équivalence "= p.p.". C'est un espace de Banach (complexe), c'est-à-dire un e.v.n. (sur $\mathbb{C}$) complet.*

Remarque 10.1 Soit $N \geq 1$, $p \in [1, \infty]$ et f une fonction définie de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{C}$. Il est facile de voir que $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ si et seulement si ses parties réelle et imaginaire sont dans $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$.

10.2 Transformation de Fourier dans L^1

10.2.1 Définitions et premières propriétés

Soit $N \geq 1$. Pour $x = (x_1, \ldots, x_N)^t \in \mathbb{R}^N$ et $t = (t_1, \ldots, t_N)^t \in \mathbb{R}^N$, on note $x \cdot t$ le produit scalaire euclidien de x et t, c'est-à-dire $x \cdot t = \sum_{i=1}^N x_i t_i$. Dans ce chapitre, On note aussi $L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ l'espace

$L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$, pour $p \in [1, \infty]$.

Définition 10.2 (Transformée de Fourier dans L^1)
Soit $N \geq 1$ et $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. Pour $t \in \mathbb{R}^N$, l'application $x \mapsto e^{-ix\cdot t} f(x)$ (définie de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{C}$) appartient à $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. On définit alors $\hat{f}(t)$ par :

$$\hat{f}(t) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int f(x) e^{-ix\cdot t} dx. \tag{10.1}$$

La fonction $\hat{f}$ (définie de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{C}$) s'appelle transformée de Fourier de f.

On note $C_0(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}) = \{g \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ t.q. $g(t) \to 0$ quand $|t| \to +\infty\}$. On rappelle que $C_0(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ est un espace de Banach quand il est muni de la norme de la convergence uniforme, c'est-à-dire :

$$\|\varphi\|_u = \max_{x \in \mathbb{R}^N} |\varphi(x)|.$$

Proposition 10.1 *Soit $N \geq 1$. Soit F l'application qui à f (appartenant à $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$) associe sa transformée de Fourier. F est une application linéaire continue de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ dans $C_0(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$.*

Démonstration :

- Le théorème de continuité sous le signe $\int$ (théorème 4.9) appliqué à la fonction $(x, t) \mapsto e^{-ix.t} f(x)$ entraîne immédiatement que $\hat{f}$ est continue.
- On montre maintenant que $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
  - Cas $N = 1$. On remarque que pour $t \neq 0$, on a, comme $e^{i\pi} = -1$,

    $$\hat{f}(t) = -(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int e^{-i(x - \frac{\pi}{t})t} f(x) dx,$$

    et donc avec un changement de variable simple,

    $$\hat{f}(t) = -(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int e^{-iyt} f(y + \frac{\pi}{t}) dy.$$

    On en déduit que

    $$2\hat{f}(t) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int e^{-ixt} (f(x) - f(x + \frac{\pi}{t})) dx$$

    et donc que $|\hat{f}(t)| \leq \frac{1}{2}(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \|f(\cdot) - f(\cdot + \frac{\pi}{t})\|_1$. Le théorème de continuité en moyenne dans L^1 (théorème 5.6) donne alors le fait que $\hat{f}(t) \to 0$ quand $|t| \to \infty$.
  - Cas $N > 1$. On reprend la même méthode. Pour $t \neq 0$, $t = (t_1, \ldots, t_N)^t$, il existe $j \in \{1, \ldots, N\}$ t.q. $|t_j| = \max_{k=1,\ldots,N} |t_k|$. On a alors, comme $e^{i\pi} = -1$, en notant e_j le j-ième vecteur de base de $\mathbb{R}^N$,

    $$\hat{f}(t) = -(2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int e^{-i(x - \frac{\pi}{t_j} e_j)\cdot t} f(x) dx,$$

    et donc avec un changement de variable simple,

    $$\hat{f}(t) = -(2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int e^{-iy\cdot t} f(y + \frac{\pi}{t_j} e_j) dy.$$

    On en déduit que $|\hat{f}(t)| \leq \frac{1}{2}(2\pi)^{-\frac{N}{2}} \|f(\cdot) - f(\cdot + \frac{\pi}{t_j} e_j)\|_1$. Le théorème de continuité en moyenne dans L^1 (théorème 8.2) donne alors le fait que $\hat{f}(t) \to 0$ quand $|t| \to \infty$.

La tansformée a la propriété intéressante de transformer la convolution en produit. Ceci est montré dans la proposition suivante.

Proposition 10.2 *Soient f et $g \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$, alors $\widehat{f \star g} = (2\pi)^{\frac{N}{2}} \hat{f}\hat{g}$.*

Démonstration : Par la proposition 7.9, on $f \star g \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ et pour p.p. $x \in \mathbb{R}^N$, $f \star g(x) = \int f(x-y)g(y)dy$. On a donc, pour tout $t \in \mathbb{R}^N$,

$$\widehat{f \star g}(t) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int \left(\int f(x-y)g(y)dy \right) e^{-ix\cdot t}dx = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int \left(\int f(x-y)g(y)e^{-i(x-y)\cdot t}e^{-iy\cdot t}dy \right) dx.$$

En appliquant le théorème de Fubini (théorème 7.3) à la fonction $(x,y) \mapsto f(x-y)g(y)e^{-i(x-y)\cdot t}e^{-iy\cdot t}$ (qui est bien intégrable sur $\mathbb{R}^{2N}$ car son module est la fonction $(x,y) \mapsto |f(x-y)g(y)|$ dont l'intégrale sur $\mathbb{R}^{2N}$ est égale à $\|f\|_1\|g\|_1$), on obtient :

$$\widehat{f \star g}(t) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int \left(\int f(x-y)e^{-i(x-y)\cdot t}dx \right) g(y)e^{-iy\cdot t}dy.$$

Comme, pour tout $y \in \mathbb{R}^N$, $\int f(x-y)e^{-i(x-y)\cdot t}dx = \int f(z)e^{-iz\cdot t}dz = (2\pi)^{\frac{N}{2}}\hat{f}(t)$, on en déduit :

$$\widehat{f \star g}(t) = \hat{f}(t) \int g(y)e^{-iy\cdot t}dy = (2\pi)^{\frac{N}{2}}\hat{f}(t)\hat{g}(t),$$

ce qui est le résultat annoncé. ■

10.2.2 Théorème d'inversion

Il est naturel de se poser les deux questions suivantes :

(i) La transformée de Fourier d'une fonction f caractérise-t-elle la fonction f (c'est-à-dire si $\hat{f} = \hat{g}$, a-t-on $f = g$ p.p.)?

(ii) peut-on retrouver la fonction à partir de sa transformée de Fourier ?

Les réponses à ces questions sont fournies par le théorème d'inversion de Fourier :

Théorème 10.1 (Inversion partielle de la transformée de Fourier) *Soit $N \geq 1$ et $f \in L^1_{\mathbb{C}}$ t.q. $\hat{f} \in L^1_{\mathbb{C}}$. On a alors $f = \hat{\hat{f}}(-.)$ p.p., c'est-à-dire :*

$$f(t) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int \hat{f}(x)e^{ixt}dx, \text{ pour presque tout } t \in \mathbb{R}^N.$$

Démonstration : La démonstration fait l'objet de l'exercice 10.1. ■

Une conséquence de ce théorème est l'injectivité de l'application F, qui fournit donc une réponse positive à la question (i). En effet, soient f et $g \in L^1_{\mathbb{C}}$ t.q. $\hat{f} = \hat{g}$; alors par linéarité, $\widehat{f-g} = 0$ et donc $\widehat{f-g} \in L^1_{\mathbb{C}}$. En appliquant le théorème d'inversion, on a donc $f = g$ p.p..
Ce théorème apporte aussi une réponse partielle à la question (ii) : on peut calculer f à partir de $\hat{f}$ dès que $\hat{f} \in L^1$. Il faut remarquer à ce propos que L^1 n'est pas stable par transformation de Fourier (voir exercice 10.2).

10.2.3 Régularité et décroissance à l'infini

Proposition 10.3 (Différentiabilité, dimension 1)

1. *Soit $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ t.q. $f' \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ (où f' est la dérivée de f). Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\widehat{f'}(t) = (it)\hat{f}(t)$.*

2. *Soit $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ t.q. $(.)f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ (où $(.)f$ est l'application qui à $x \in \mathbb{R}$ associe $xf(x)$). Alors, $\hat{f} \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\hat{f}'(t) = \widehat{(-i\cdot)f}(t)$.*

Démonstration : La démonstration du premier item consiste à faire une intégration par parties sur l'intervalle $[-n,n]$ puis à faire tendre n vers l'infini (en remarquant que $f(\pm n) \to 0$, quand $n \to \infty$, voir l'exercice 5.8).

Le deuxième item est une conséquence immédiate du théorème 4.10 (théorème de dérivation sous le signe $\int$). ■

La transformation de Fourier "transforme" donc la dérivation en multiplication par la fonction $(i\cdot)$, et la multiplication par $(-i\cdot)$ en dérivation. Cette propriété est utilisée, par exemple, pour la résolution d'équations différentielles (qui sont ainsi transformées en équations algébriques).
Cette propriété se généralise au cas de la dimension N et pour un ordre k de dérivation quelconque. On introduit pour ce faire les notations suivantes : soient $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_N)^t \in \mathbb{N}^N$ un "multi-indice" et f une fonction de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{C}$. On définit $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots \alpha_N$ et :

$$D^\alpha f = \Big(\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}}\frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}}\cdots\frac{\partial^{\alpha_N}}{\partial x_N^{\alpha_N}}\Big)f.$$

Proposition 10.4 (Différentiabilité, dimension N)

1. *Soit $N \ge 1$ et $k \ge 1$. Soit $f \in C^k(\mathbb{R}^N,\mathbb{C})$ t.q. $D^\alpha f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$ t.q. $|\alpha| \le k$. Alors, $\widehat{D^\alpha f}(t) = (it)^\alpha \hat{f}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$ t.q. $|\alpha| \le k$, avec $(it)^\alpha = (it_1)^{\alpha_1}(it_2)^{\alpha_2}\ldots(it_N)^{\alpha_N}$.*

2. *Soit f t.q. $(.)^\alpha f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$ tel que $|\alpha| \le k$. Alors, $\hat{f} \in C^k(\mathbb{R}^N,\mathbb{C})$ et $D^\alpha \hat{f} = \widehat{(-i\cdot)^\alpha f}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$ tel que $|\alpha| \le k$.*

La proposition 10.4 montre que la dérivabilité de f entraîne la décroissance de $\hat{f}$ à l'infini ("plus f est dérivable, plus $\hat{f}$ décroît vite à l'infini"), et réciproquement. Cette remarque incite à définir l'espace des fonctions à décroissance rapide (souvent appelé "espace de Schwartz"), noté $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N,\mathbb{C})$ ou $\mathcal{S}_N$ en abrégé.

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^N,\mathbb{C}) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^N,\mathbb{C}) \text{ t.q. pour tout } \alpha \text{ et } \beta \in \mathbb{N}^N, \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |(x)^\alpha D^\beta f(x)| < +\infty\}.$$

On va montrer l'invariance par transformation de Fourier de cet espace. On commence par remarquer que $\mathcal{S}_N \subset L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. En effet, si $f \in \mathcal{S}_N$, en prenant des choix convenables de α et β dans la définition de $\mathcal{S}_N$, on remarque qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ t.q. $(1 + |x|^{N+1})|f(x)| \le C$. On en déduit que $f \in L^1_C(\mathbb{R}^N)$. Plus généralement, si $f \in \mathcal{S}_\mathbb{N}$, on remarque que $(\cdot)^\beta D^\alpha f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $a,\beta \in \mathbb{R}^N$. On obtient alors la proposition 10.5.

Proposition 10.5 *Soit $N \geq 1$ et $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$. Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^N$ on a :*

$$D^\alpha\Big(\widehat{(-i\cdot)^\beta f}\Big) = (i\cdot)^\alpha (\widehat{-i\cdot)^\beta} f = (i\cdot)^\alpha D^\beta \hat{f}, \tag{10.2}$$

$$(\widehat{-i\cdot)^\alpha D}^\beta f = D^\alpha \widehat{D^\beta} f = D^\alpha[(i\cdot)^\beta \hat{f}]. \tag{10.3}$$

Démonstration : La démonstration est une adaptation simple de celle de la proposition 10.4. ■

La proposition 10.5 et le théorème 10.1 nous permettent alors de remarquer que la transformée de Fourier est une bijection de $\mathcal{S}_N$ dans $\mathcal{S}_N$.

Proposition 10.6 *Soit $N \geq 1$. L'application F qui à f associe sa transformée de Fourier est une bijection de $\mathcal{S}_N$ dans $\mathcal{S}_N$. De plus, pour tout $f \in \mathcal{S}_N$, on a $f = \hat{\hat{f}}(-\cdot)$.*

Démonstration : En utilisant la proposition 10.5, on montre facilement que F envoie $\mathcal{S}_N$ dans $\mathcal{S}_N$. Le théorème d'inversion (théorème 10.1) donne alors que f est injective et que $f = \hat{\hat{f}}(-.)$ pour tout $f \in \mathcal{S}_N$. De cette dernière formule, on déduit que F est surjective (et donc bijective) de $\mathcal{S}_N$ dans $\mathcal{S}_N$. ■

10.3 Transformée de Fourier d'une mesure signée

Il est facile d'étendre la définition de la transformation de Fourier à une mesure signée sur les boréliens de $\mathbb{R}^N$. Plus précisément, si m est une mesure signée sur les boréliens de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$), la définition 10.3 définit la fonction $\hat{m}$ (continue et bornée de $\mathbb{R}^N$ dans C) et, si $m = f\lambda_N$, avec $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ (c'est-à-dire que m est la mesure signée de densité f par rapport à la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}^N$), on a $\hat{m}(t) = \hat{f}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^N$.

Définition 10.3 (Transformée de Fourier d'une mesure signée)
Soit $N \geq 1$ et m une mesure signée sur les boréliens de $\mathbb{R}^N$. Soit $t \in \mathbb{R}^N$, l'application $x \mapsto e^{-ix\cdot t}$ (définie de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{C}$) appartient à $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), m)$ (car elle est continue, donc borélienne, et bornée). On définit alors $\hat{m}(t)$ par :

$$\hat{m}(t) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int e^{-ix\cdot t} dm(x). \tag{10.4}$$

La fonction $\hat{m}$ (définie de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{C}$) s'appelle transformée de Fourier de m.

On rappelle que $C_b(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}) = \{g \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}) \text{ t.q. } \sup_{t\in\mathbb{R}^N} |g(t)| < \infty\}$ et que $C_b(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ est un espace de Banach quand il est muni de la norme de la convergence uniforme.

Proposition 10.7 *Soit $N \geq 1$. Soit m une mesure signée sur les boréliens de $\mathbb{R}^N$. La fonction $\hat{m}$ appartient à $C_b(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$.*

Démonstration : Le fait que $\hat{m}$ est bornée est simple. On utilise la décomposition de Hahn (proposition 2.6), c'est-à-dire le fait que $m = m^+ - m^-$, où $m^\pm$ sont deux mesure finies étrangères. On remarque alors que, pour tout $t \in \mathbb{R}^N$, on a $|\hat{m}(t)| \leq |m|(\mathbb{R}^N < +\infty$, où $|m| = m^+ + m^-$.
La fait que $\hat{m}$ est continue est une conséquence immédiate du théorème de continuité sous le signe $\int$ (théorème 4.9) appliqué à la fonction $(x,t) \mapsto e^{-ix.t}$ (et avec les mesures finies $m^\pm$). ■

Comme pour la transformation de Fourier dans L^1, on peut se demander si $\hat{m}$ caractérise la mesure signée m et si on peut retrouver m à partir de $\hat{m}$. La proposition suivante s'intéresse à ces deux questions.

Proposition 10.8 *Soit $N \geq 1$.*

1. *Soit m et μ deux mesures signées sur les boréliens de $\mathbb{R}^N$. On suppose que $\hat{m} = \hat{\mu}$. alors, $m = \mu$.*
2. *Soit m une mesure signée sur les boréliens de $\mathbb{R}^N$. On suppose que $\hat{m} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. Alors, $m = f\lambda_N$ avec $f = \hat{\hat{m}}(-\cdot)$ p.p. (c'est-à-dire p.p. pour la mesure λ_N).*

Démonstration : La démonstration de cette proposition fait l'objet de l'exercice 10.5. ∎

10.4 Transformation de Fourier dans L^2

On aimerait ici définir la transformée de Fourier d'un élément de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N) = L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$. On rappelle que l'espace $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ est un espace de Hilbert et que le produit scalaire sur $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ est défini par (en notant $dt = d\lambda_N(t)$) :

$$(f/g)_2 = \int f(t)\overline{g(t)}dt.$$

Il est clair que la définition de $\hat{f}$ qu'on a donnée pour $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ ne s'applique pas pour un élément de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. Pour définir la transformée de Fourier d'un élément de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$, on va utiliser la densité de $\mathcal{S}_N$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ (on peut montrer que $\mathcal{S}_N \subset L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$, comme on a montré que $\mathcal{S}_N \subset L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$). On va d'abord remarquer que la transformée de Fourier envoie $\mathcal{S}_N$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ et que c'est une isométrie pour la norme de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. On utilisera ensuite la densité de $\mathcal{S}_N$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ pour définir la transformée de Fourier des éléments de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$.

Proposition 10.9 *Soit $N \geq 1$ et $f, g \in \mathcal{S}_N$ (on a donc, en particulier, $f, g \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$). Alors $\hat{f}, \hat{g} \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ et $(f/g)_2 = (\hat{f}/\hat{g})_2$. En particulier, $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$.*

Démonstration : Soit $f, g \in \mathcal{S}_N$. Comme $f, \hat{f} \in \mathcal{S}_N \subset L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$, on peut appliquer le théorème d'inversion (théorème 10.1). Il donne $f = \hat{\hat{f}}(-\cdot)$ et donc :

$$(f/g)_2 = \int \hat{\hat{f}}(-t)\bar{g}(t)dt = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int \left(\int e^{ix\cdot t} \hat{f}(x)dx \right) \bar{g}(t)dt.$$

On utilise maintenant le théorème de Fubini (théorème 7.3). Il s'applique car $\hat{f}, \bar{g} \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. On obtient :

$$(f/g)_2 = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int \left(\int e^{ix\cdot t} \bar{g}(t)dt \right) \hat{f}(x)dx = \int \bar{\hat{g}}(t)\hat{f}(t)dt = (\hat{f}/\hat{g})_2,$$

ce qui termine la démonstration. ∎

La proposition 10.9 permet de définir, par un argument de densité, la transformée de Fourier dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$.

Théorème 10.2 *Soit $N \geq 1$. Il existe une application linéaire continue $\bar{F}$ de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ t.q. :*

1. *Si $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N) \cap L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$, on a alors $\bar{F}(f) = \hat{f}$ p.p..*
2. *Pour tout $f, g \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$, on a $(f/g)_2 = (\bar{F}(f)/\bar{F}(g))_2$.*

3. Pour tout $f \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$, on a $f = \bar{F}(\bar{F}(f))(-\cdot)$.

4. $\bar{F}$ est une bijection de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$.

Pour $f \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$, $\bar{F}(f)$ s'appelle la transformée de Fourier de f. Compte tenu du premier item, on notera en général, $\hat{f}$ la transformée de Fourier de f si $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ (et alors $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$) ou si $f \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ (et alors $\hat{f} \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$).

Démonstration : L'application $f \mapsto \hat{f}$ est définie sur $\mathcal{S}_N$, qui est un sous espace de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$, et prend ses valeurs dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ (car $\mathcal{S}_N \subset L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$, en confondant, comme d'habitude, un élément de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ avec l'un de ses représentants). Comme cette application est linéaire, continue pour la norme de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$, et que $\mathcal{S}_N$ est dense dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ (car $\mathcal{S}_N \supset C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ et $C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ est dense dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$, voir le théorème 8.4), on en déduit que cette application se prolonge en une application, notée $\bar{F}$, de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$.

Plus précisèment, soit $f \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. Il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}_N$ t.q. $f_n \to f$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ quand $n \to \infty$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc de Cauchy dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. La proposition 10.9 donne alors que la suite $(\hat{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc aussi de Cauchy dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. Elle converge donc dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. On aimerait définir $\bar{F}(f)$ comme étant la limite (dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$) de la suite $(\hat{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ceci est possible à condition que cette limite ne dépende que de f et pas du choix de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ vers f. Or, ce dernier point est facile car si $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une autre suite convergeant dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ vers f, on a $\|\hat{f}_n - \hat{g}_n\|_2 = \|f_n - g_n\|_2 \to 0$ quand $n \to \infty$. On a ainsi défini $\bar{F}$ de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ dans lui même.

La linéraité de $\bar{F}$ découle immédiatement du fait que l'appliaction $f \mapsto \hat{f}$ est linéaire de $\mathcal{S}_N$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. Enfin, soit $f \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}_N$ t.q. $f_n \to f$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. La proposition 10.9 donne que $\|\hat{f}_n\|_2 = \|f_n\|_2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En passant à la limite quend $n \to \infty$, on en déduit $\|\bar{F}(f)\|_2 = \|f\|_2$. Ce qui prouve la continuité de $\bar{F}$ de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. On montre maintenant les 4 items du théorème.

1. Soit $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N) \cap L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. En reprenant la démonstration du théorème 8.4, il est facile de voir qu'Il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ t.q. $f_n \to f$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ et $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ lorsque $n \to +\infty$ (car dans la démonstration du théorème 8.4, la suite construite pour converger vers f dans L^p ne dépend pas de p). On en déduit que $\hat{f}_n \to \hat{f}$ uniformément sur $\mathbb{R}^N$ lorsque $n \to +\infty$ (car $f_n \to f$ dans $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$) et que $\hat{f}_n \to \bar{F}(f)$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ lorsque $n \to +\infty$ (car $f_n \to f$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$) et donc que, après extraction éventuelle d'une sous suite, on peut supposer que $\hat{f}_n \to \bar{F}(f)$ p.p. quand $n \to \infty$. On en déduit bien que $\hat{f} = \bar{F}(f)$ p.p..

2. Soit $f, g \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. Il existe deux suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}_N$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}_N$ t.q. $f_n \to f$, $g_n \to g$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. La proposition 10.9 donne $(\hat{f}_n/\hat{g}_n)_2 = (f_n/g_n)_2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En passant à la limite quand $n \to \infty$ on obtient bien $(\overline{F}(f)/\overline{F}(g))_2 = (f/g)_2$.

3. Soit $f \in L^2$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}_N$ t.q. $f_n \to f$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ quand $n \to \infty$. On a donc $\hat{f}_n \to \bar{F}(f)$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$, ce qui donne aussi $\hat{f}_n(-\cdot) \to \bar{F}(f)(-\cdot)$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ et donc $\hat{\hat{f}}_n(-\cdot) \to \overline{F}(\overline{F}(f))(-\cdot)$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ quand $n \to +\infty$. La proposition 10.6 donne $f_n = \hat{\hat{f}}_n(-\cdot)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit donc (par unicité de la limite dans L^2) que $f = \overline{F}(\overline{F}(f))(-\cdot)$ p.p..

4. L'injectivité de $\bar{F}$ (de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$) découle du fait que $\|\bar{F}(f)\|_2 = \|f\|_2$ et que $\bar{F}$ est linéaire. La surjectivité est une conséquence immédiate du troisième item.

■

10.5 Résolution d'une EDO ou d'une EDP

On donne ici deux exemples simples d'utilisation de la transformation de Fourier pour la résolution d'une équation différentielle (souvent notée EDO pour Equation Différentielle Ordinaire) ou d'une équation aux dérivées partielles (souvent notée EDP pour Equation aux Dérivées Partielles).

Soit $N \geq 0$, $(a_0, \ldots, a_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$ et $g \in \mathcal{S}_1$ (donnés). On cherche $f \in \mathcal{S}_1$ qui vérifie :

$$a_N f^{(N)}(x) + \ldots + a_1 f'(x) + a_0 f(x) = g(x), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \tag{10.5}$$

Si $f \in \mathcal{S}_1$ vérifie (10.5), elle vérifie nécessairement, par transformation de Fourier :

$$a_N \widehat{f^{(N)}}(t) + \ldots + a_1 \widehat{f'}(t) + a_0 \hat{f}(t) = \hat{g}(t), \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}. \tag{10.6}$$

c'est-à-dire :

$$a_N (it)^N \hat{f}(t) + \ldots + a_1 it \hat{f}(t) + a_0 \hat{f}(t) = \hat{g}(t), \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}. \tag{10.7}$$

En posant $p(t) = a_N(it)^N + \ldots + a_1 it + a_0$ et en supposant que p e s'annule pas sur $\mathbb{R}$, on a alors :

$$\hat{f}(t) = \frac{\hat{g}(t)}{p(t)}. \tag{10.8}$$

Comme $g \in \mathcal{S}_1$ et que p ne s'annule par sur $\mathbb{R}$, on peut montrer que $\frac{\hat{g}}{p} \in \mathcal{S}_1$. En utilisant maintenant le théorème d'inversion, ou la proposition 10.6, on obtient :

$$f(t) = \hat{\hat{f}}(-t) = \widehat{\left(\frac{\hat{g}}{p}\right)}(-t), \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}. \tag{10.9}$$

On a donc montré que f est nécessairement donnée par (10.9). Réciporquement, il est facile de voir que la fonction donnée par (10.9) est solution de (10.5), c'est donc l'unique solution dans $\mathcal{S}_1$ de (10.5) (en supposant que p ne s'annule par sur $\mathbb{R}$).

Soit $N \geq 1$, on cherche $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, de classe C^2 (c'est-à-dire deux fois continûment dérivable) t.q.

$$-\Delta u(x) = 0, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^N. \tag{10.10}$$

Cherchons $u \in \mathcal{S}_N$ (et donc $\Delta u \in \mathcal{S}_N$) solution de (10.10). On a donc $\widehat{\Delta u} = 0$ (partout sur $\mathbb{R}^N$), c'est-à-dire $|t|^2 \hat{u}(t) = 0$ et donc $\hat{u}(t) = 0$, pour tout $t \neq 0$. Comme $\hat{u}$ est continue, ceci entraîne que $\hat{u} = 0$ (partout sur $\mathbb{R}^N$), et donc $u = 0$. La fonction identiquement égale à 0 est donc la seule solution de (10.10) dans $\mathcal{S}_N$.

On peut effectuer un raisonnement analogue si on cherche u de classe C^2 et dans $L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N)$ (on peut aussi le faire si u est seulement dans $L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N)$, il faut alors convenablement définir Δu). On obtient encore que la seule solution de (10.10) est $u = 0$.

Par contre, ce résultat d'unicité n'est plus vrai si on ne demande pas à u d'être de carré intégrable. En effet, les fonctions constantes sont toutes solutions de (10.10) (et on peut montrer que ce sont les seules fonctions, de classe C^2et bornées, solutions de (10.10)).

10.6 Fonction caractéristique d'un vecteur aléatoire

Définition 10.4 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé,* $d \geq 1$ *et* X *un v.a. de dimension* d*. On appelle fonction caractéristique de* X *la fonction de* $\mathbb{R}^d$ *dans* $\mathbb{C}$ *définie par :*

$$\varphi_X(u) = \int_\Omega e^{iX\cdot u} dP = E(e^{iX\cdot u}), \text{ pour } u \in \mathbb{R}^d.$$

Dans la définition précédente, la fonction $e^{iX\cdot u}$ est bien intégrable sur Ω (pour tout $u \in \mathbb{R}^d$) car la fonction $x \mapsto e^{ix\cdot u}$ est continue bornée de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}$. En notant p_X la loi de X, on remarque également que $\varphi_X = (2\pi)^{d/2}\hat{p}_X(-\cdot)$. La section 10.3 donne alors quelques propriétés élémentaires de la fonction caractéristique d'un v..a..

Proposition 10.10 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé,* $d \geq 1$ *et* X *un v.a. de dimension* d*. La fonction caractéristique de* X *vérifie alors les propriétés suivantes :*

1. $\varphi_X \in C_b(\mathbb{R}^d, C)$.
2. *La loi de* X *est entièrement déterminée par* φ_X *(c'est-à-dire que si* Y *est un autre v.a. de dimension* d *et que* $\varphi_X = \varphi_Y$*, on a nécessairement* $p_X = p_Y$*).*
3. *Si* $\varphi_X \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$*, la loi de* X *a une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$*, c'est-à-dire* $p_X = f\lambda_d$*, et :*

$$f(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot u}\varphi_X(u)du, \ \ \lambda_d\text{-p.s. en } x \in \mathbb{R}^d.$$

Démonstration : Comme $\varphi_X = (2\pi)^{d/2}\hat{p}_X(-\cdot)$, le premier item est donnée par la proposition 10.7 (qui donne $\hat{p}_X \in C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$).
Le deuxième item est donnée par le premier item de la proposition 10.8.
Pour le troisième item, on remarque que le deuxième item de la proposition 10.8 donne $p_X = f\lambda_d$ avec $f = \hat{\hat{p_X}}(-\cdot)$, ce qui donne λ_d-p.s. en $x \in \mathbb{R}^d$:

$$f(x) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot t}\hat{p_X}(t)dt = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot t}\varphi_X(t)dt.$$

■

Les fonctions caractéristiques peuvent être utilisées pour montrer l'indépendance de v.a.r. (ou de v.a.). on donne un exemple dans la proposition suivante.

Proposition 10.11 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé,* $d > 1$ *et* $X_1, \ldots, X_d$ d *v.a.r.. Alors, les v.a.r* $X_1, \ldots, X_d$ *sont indépendantes si et seulement si on a* $\varphi_X(u) = \prod_{j=1}^d \varphi_{X_j}(u_j)$ *pour tout* $u = (u_1, \ldots, u_d)^t \in \mathbb{R}^d$*, où* X *est le v.a. de composantes* $X_1, \ldots, X_d$*.*

Démonstration : D'après le théorème 9.2 les v.a.r. $X_1, \ldots, X_d$ sont indépendantes si et seulement $p_X = p_{X_1} \otimes \ldots \otimes p_{X_d}$. Par la proposition 10.8, ces deux mesures sont égales si et seulement si leurs transformées de Fourier sont égales, c'est-à-dire si et seulement si :

$$\varphi_X(u) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot u} d(p_{X_1} \otimes \ldots \otimes p_{X_d}) \text{ pour tout } u \in \mathbb{R}^d.$$

Comme $e^{ix\cdot u} = \prod_{j=1}^{d} e^{ix_j u_j}$ pour tout $x = (x_1, \ldots, x_d)^t$ et tout $u = (u_1, \ldots, u_d)^t$, la définition de la mesure produit donne

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot u} d(p_{X_1} \otimes \ldots \otimes p_{X_d}) = \prod_{j=1}^{d} \varphi_{X_j}(u_j),$$

ce qui termine la démonstration de cette proposition. ■

Il est intéressant aussi de connaître le lien entre convergence en loi et convergence simple des fonctions caractéristiques, que nous donnons maintenant, sans démonstration.

Proposition 10.12 *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, $d > 1$, $(X_n)n \in \mathbb{N}$ un suite de v.a. de dimension d et X un v.a. de dimension d. Alors, $X_n \to X$ en loi, quand $n \to \infty$, si et seulement si $\varphi_{X_n}(u) \to \varphi_X(u)$, quand $n \to \infty$, pour tout $u \in \mathbb{R}^d$.*

On termine cette section en donnant la fonction caractérsiatique d'un vecteur gaussien.

Proposition 10.13 *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.*

1. *Soit X une v.a.r. gaussienne. On note m son espérance (donc, $m = E(X) \in \mathbb{R}$) et σ^2 sa variance (donc, $\sigma^2 = E((X-m)^2) \geq 0$) de sorte que $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. On a alors :*

$$\varphi_X(u) = e^{imu} e^{-\frac{\sigma^2}{2}u^2}, \text{ pour tout } u \in \mathbb{R}.$$

2. *Soit $d \geq 1$ et X une v.a gaussien de dimension d. On note m son espérance (donc, $m = E(X) \in \mathbb{R}^d$) et D sa matrice de covariance (donc, D est une matrice symétrique, semi-définie positive, son terme à la ligne j et la colonne k est donné par la covariance des composantes d'indices j et k de X) de sorte que $X \sim \mathcal{N}(m, D)$ (proposition 9.9). On a alors :*

$$\varphi_X(u) = e^{im\cdot u} e^{-\frac{1}{2}Du\cdot u}, \text{ pour tout } u \in \mathbb{R}^d.$$

Démonstration : Soit X une v.a.r. gaussienne, $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. On suppose tout d'abord que $\sigma^2 = 0$, on a alors $X = m$ p.s. et donc, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $\varphi_X(u) = e^{imu}$, ce qui est bien la formule annoncée. On suppose maintenant que $\sigma > 0$, on a alors, pour tout $u \in \mathbb{R}$:

$$\varphi_X(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixu} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx.$$

Avec le changement de variable $y = \frac{x-m}{\sigma}$, on obtient :

$$\varphi_X(u) = e^{imu} \int_{\mathbb{R}} e^{iy\sigma u} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-y^2}{2}} dy,$$

ce qui donne $\varphi_X(u) = e^{imu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \psi(\sigma u)$ avec $\psi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{iyt} e^{\frac{-y^2}{2}} dy$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Comme la fonction $y \mapsto e^{y^2}$ est paire, on a aussi :

$$\psi(t) = \int_{\mathbb{R}} \cos(yt) e^{\frac{-y^2}{2}} dy, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Pour calculer $\psi(t)$, on remarque que le théorème de dérivabilité sous le signe $\int$ s'applique (théorème 4.10) et donne que ψ est de classe C^1 et $\psi'(t) = \int_{\mathbb{R}}(-y)\sin(yt)e^{\frac{-y^2}{2}}dy$. En intégrant par parties cette dernière intégrale (en fait, on intègre par parties sur $[-n, n]$ puis on fait tendre n vers l'infini), on obtient :

$$\psi'(t) = -\int_{\mathbb{R}} t\cos(yt)e^{\frac{-y^2}{2}}dy = -t\psi(t), \text{ pour tout } t \in \mathbb{R},$$

ce qui donne $\psi(t) = \psi(0)e^{\frac{-t^2}{2}}$. Comme $\psi(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-y^2}{2}}dy = \sqrt{2\pi}$, on en déduit que $\psi(t) = \sqrt{2\pi}e^{\frac{-t^2}{2}}$ (pour tout $t \in \mathbb{R}$) et donc que $\varphi_X(u) = e^{imu}e^{\frac{-\sigma^2u^2}{2}}$, ce qui est bien la formule annoncée.

On suppose maintenant que $d > 1$ et que X est un v.a. gaussien. Soit $u \in \mathbb{R}^d$. On a $\varphi_X(u) = E(e^{iX\cdot u}) = \varphi_{X\cdot u}(1)$. Pour connaître $\varphi_X(u)$, il suffit donc de connaître la fonction caractéristique de la v.a.r. $X \cdot u$. Comme X est un v.a. gaussien, la v.a.r. $X \cdot u$ est une v.a.r. gaussienne. Sa moyenne est $E(X \cdot u) = E(X) \cdot u = m \cdot u$ et sa variance est (voir l'exercice 158) :

$$\sigma^2 = E((X \cdot u - m \cdot u)^2) = E(u^t(X-m)(X-m)^tu) = u^t\mathrm{Cov}(X)u = u^tDu.$$

On a donc, d'après la première partie de cette démonstration (c'est-à-dire le cas $d = 1$),

$$\varphi_X(u) = \varphi_{X\cdot u}(1) = e^{im\cdot u}e^{-\frac{u^tDu}{2}},$$

ce qui est bien la fromule annoncée (car $u^tDu = Du \cdot u$). ■

10.7 Exercices

10.7.1 Transformation de Fourier dans L^1

Exercice 10.1 (Résultat partiel d'inversion de Fourier dans L^1) *Corrigé 164 page 483*
Soit $H(t) = e^{-|t|}, t \in \mathbb{R}$. On pose, pour $\lambda > 0$:

$$h_\lambda(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{\mathbb{R}} H(\lambda t)e^{itx}dt, x \in \mathbb{R}. \tag{10.11}$$

1. Montrer que $h_\lambda(x) = (\frac{2}{\pi})^{\frac{1}{2}}\frac{\lambda}{\lambda^2+x^2}$, et $\int_{\mathbb{R}} h_\lambda(x)dx = (2\pi)^{\frac{1}{2}}$.
2. Soit $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$f \star h_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} H(\lambda t)\hat{f}(t)e^{ixt}dt. \tag{10.12}$$
3. Soit g une fonction mesurable bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, continue en 0. Montrer que $g \star h_\lambda(0) \to \sqrt{2\pi}g(0)$ quand $\lambda \to 0$. [Utiliser 1. et le théorème de convergence dominée.]
4. Soit $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, montrer que :
$$\|f \star h_\lambda - \sqrt{2\pi}f\|_1 \to 0 \text{ lorsque } \lambda \to 0. \tag{10.13}$$
[Utiliser la continuité en moyenne et la question précédente avec $g(y) = \int |f(x-y) - f(x)|dx$.]

5. Déduire de ce qui précède le théorème d'inversion de Fourier, théorème 10.1.

Exercice 10.2 1. Calculer la transformée de Fourier de $1_{[-a,a]}$, $a \in \mathbb{R}_+$. En déduire que L^1 n'est pas stable par transformation de Fourier.

2. On pose $g_n = 1_{[-n,n]}$. Calculer $f \star g_n$, et montrer qu'il existe $h_n \in L^1$ t.q. $\hat{h}_n = f \star g_n$. Montrer que la suite $f \star g_n$ est bornée dans $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ alors que la suite h_n n'est pas bornée dans L^1. En déduire que la transformée de Fourier n'est pas surjective de L^1 dans C_0.

Exercice 10.3 Soit $f \in \mathcal{S}$, on pose $L(f)(x) = f"(x) + xf(x)$.

1. Montrer que $L(f) = 0$ entraîne $f = 0$.
2. Soit $k \in \mathcal{S}$, montrer que l'équation différentielle $h'(t) = k(t)$ a une solution dans $\mathcal{S}$ si et seulement si $\int k(t)dt = 0$.
3. Soit $g \in \mathcal{S}$, étudier l'existence et l'unicité des solutions dans $\mathcal{S}$ de l'équation $L(f) = g$. On pourra remarquer que pour $h \in \mathcal{S}$, on a :

$$i\frac{d}{dt}(he^{-i\frac{t^3}{3}}) - t^2(he^{-i\frac{t^3}{3}}) = ih'(t)e^{-i\frac{t^3}{3}}.$$

Exercice 10.4 On note L^p l'espace $L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

1. Soient $f, g \in L^1$, montrer que $f\hat{g} \in L^1$, $g\hat{f} \in L^1$ et $\int f\hat{g}d\lambda = \int g\hat{f}d\lambda$.
2. Soit $B = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Montrer que $1_B \star 1_B(t) = (1 - |t|)^+$.
3. On pose $\theta_n = (1 - \frac{|t|}{n})^+, n \in \mathbb{N}^\star$. Déduire de la question précédente que:

$$\hat{\theta}_n(y) = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin^2(\frac{ny}{2})}{ny^2}, \forall y \in \mathbb{R}.$$

[*Se ramener à* θ_1...]

4. Soit $f \in L^1 \cap L^\infty$ t.q. $\hat{f}(t) \in \mathbb{R}_+$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On se propose de montrer que $\hat{f} \in L^1$ (et donc que le théorème d'inversion s'applique)
   (a) On note $\varphi_n = \theta_n \hat{f}$; montrer que $\varphi_n \uparrow \hat{f}$ et $\int \varphi_n d\lambda \uparrow \int \hat{f}d\lambda$ lorsque $n \to +\infty$.
   (b) Montrer qu'il existe $\alpha \geq 0$ indépendant de n tel que $\int \hat{\theta}_n(y)dy = \alpha, \forall n \in \mathbb{N}^\star$. En déduire que $\hat{f} \in L^1$.

10.7.2 Transformée de Fourier d'une mesure signée

Exercice 10.5 (Une mesure est caractérisée par sa transformée de Fourier) *Corrigé 165 page 485*
Soit $d \geq 1$.

1. Soit m et μ deux mesures signées sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$. On suppose que $\hat{m} = \hat{\mu}$.
   (a) Soit $\varphi \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$. Montrer que $\int \hat{\varphi}dm = \int \hat{\varphi}d\mu$.

(b) Montrer que $\int \varphi dm = \int \varphi d\mu$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ (et donc pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$).

(c) Montrer que $m = \mu$ (On rappelle qu'une fonction de $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ est limite uniforme de fonctions de $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$).

2. Soit m une mesure signée sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$. On suppose que $\hat{m} \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$. Montrer que m est la mesure de densité f par rapport à la mesure de Lebesgue avec $f = \hat{\hat{m}}(-\cdot)$.

10.7.3 Transformation de Fourier dans L^2

Exercice 10.6 On note ici $\hat{f}$ la transformée de Fourier, pour $f \in L^1$ ou L^2.

1. Soient $f, g \in \mathcal{S}$, Montrer que $\widehat{fg} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f} \star \hat{g}$.
2. Soient $f, g \in L^2$, Montrer que $\widehat{fg} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f} \star \hat{g}$.

10.7.4 Fonction Caractéristique d'une v.a.r.

Exercice 10.7 (Calcul de fonctions caractéristiques)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilités et X une v.a. réelle. Calculer la fonction caractéristique φ_X de X dans les cas suivants :

1. $X = a$ p.s. $(a \in \mathbb{R})$.
2. $X \sim \mathcal{B}(p)$ (loi de Bernoulli de paramètre p : $\mathcal{P}[X = 1] = p = 1 - \mathcal{P}[X = 0]$).
3. X suit une loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$).

Exercice 10.8 (Loi normale et vecteur gaussien)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace probabilisé, $d \geq 1$ et X un v.a. de dimension d. Soit $m \in \mathbb{R}^d$ et D une matrice s.d.p. (de taille $d \times d$). Si $X \sim \mathcal{N}(m, D)$, où $\mathcal{N}(m, D)$ est définie par la définition 9.3, montrer que X est un vecteur gaussien.

Exercice 10.9 (Vecteurs gaussiens et densité)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilités, $d \geq 1$ et $X = (X_1, \ldots, X_d)$ un v.a. de dimension d.
On suppose que $X = (X_1, \ldots, X_d)$ est un vecteur gaussien (c'est-à-dire que $\sum_{i=1}^d a_i X_i$ suit une loi gaussienne pour tout $a_1, \ldots, a_d \in \mathbb{R}$). On note m la moyenne de X et D la matrice de covariance de X. Montrer que la loi de X est de densité par rapport à la mesure de Lebesgue (sur $\mathbb{R}^d$) si et seulement si D est inversible. Si D est inversible, montrer que la loi de X est la loi $\mathcal{N}(m, D)$ donnée dans la définition 9.3.

Exercice 10.10 (Vecteurs gaussiens, indépendance, covariance) *Corrigé 166 page 486*
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilités, $d \geq 1$ et $X = (X_1, \ldots, X_d)$ un v.a. de dimension d.

1. On suppose ici que $d = 2$.

   (a) On suppose que X_1 et X_2 suivent des lois gaussiennes et sont indépendantes, montrer que X est un vecteur gaussien et que $\text{Cov}(X_1, X_2) = 0$.

   (b) On suppose que X est un vecteur gaussien et que $\text{Cov}(X_1, X_2) = 0$. Montrer que X_1 et X_2 sont indépendantes.

2. On suppose toujours $d = 2$. Donner un exemple pour lequel X_1 et X_2 sont gaussiennes mais X n'est pas un vecteur gaussien. [On pourra, par exemple, choisir $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et X_1, X_2 de manière à avoir $\text{Cov}(X_1, X_2) = 0$ sans que X_1, X_2 soient indépendantes, voir l'exercice 4.44.]

3. On suppose que X est un vecteur gaussien et que les composantes de X sont indépendantes deux à deux. Montrer que $X_1, \ldots, X_d$ sont indépendantes.

Exercice 10.11 (Suite de v.a.r.i.i.d. de Poisson) *Corrigé 167 page 487*
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et X une v.a. de Poisson de paramètre λ ($\lambda > 0$). On rappelle que, $P[X = k] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et que $E[X] = \lambda$, $Var[X] = \lambda$.

1. Calculer la fonction caractéristique φ_X de X.

2. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ une suite de v.a. indépendantes et de Poisson de paramètre λ.
   (a) Soit $n > 1$. Déduire de la première question la loi de la v.a. $Y_n = \sum_{p=1}^{n} X_p$.
   (b) Utiliser le théorème central limite pour démontrer que
$$e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \to \frac{1}{2} \text{ quand } n \to \infty.$$

Exercice 10.12 (Sur la loi d'un vecteur aléatoire)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et X un v.a. de dimension d. Montrer que la loi de X est uniquement déterminée par la donnée des lois de toutes les v.a.r. $a \cdot X$, $a \in \mathbb{R}^d$, $|a| = 1$. [On pourra utiliser la fonction caractéristique de X.]

Exercice 10.13 (Un exemple...)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles, à valeurs dans $[-1, 1]^2$. On suppose que la loi de ce couple a une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue (sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$) avec :
$$f(x, y) = \frac{1 + xy(x^2 - y^2)}{4} 1_{[-1,1]^2}(x, y), \quad (x, y)^t \in \mathbb{R}^2.$$

1. Montrer que les lois des v.a. X et Y ont des densités par rapport à la mesure de Lebesgue (sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$). Calculer ces densités. X et Y sont-elles indépendantes ?

2. Calculer les espérances de X, Y et XY. Que vaut $cov(X, Y)$?

3. Calculer les fonctions caractéristiques de X, Y et $X + Y$.

Chapter 11

Espérance conditionnelle et martingales

11.1 Espérance conditionnelle

Nous commençons par définir l'espérance conditionnée par une tribu.

Définition 11.1 *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, X une v.a.r. intégrable et $\mathcal{B}$ une tribu incluse dans $\mathcal{A}$. On appelle "Espérance, conditionnée par $\mathcal{B}$, de X" ou "Espérance conditionnelle de X par rapport à $\mathcal{B}$" l'ensemble des applications Z de Ω dans $\mathbb{R}$, $\mathcal{B}$-mesurable, intégrable et t.q. :*

$$E(ZU) = E(XU) \text{ pour toute application } U \text{ de } \Omega \text{ dans } \mathbb{R}, \ \mathcal{B}\text{-mesurable, bornée.} \tag{11.1}$$

On note $E(X|\mathcal{B})$ cette espérance conditionnelle (c'est donc un ensemble de fonctions). (Noter que dans (11.1), les applications ZU et XU sont bien des v.a.r. intégrables).

Cette définition peut sembler un peu abrupte. On montrera dans la proposition 11.1 que, sous les hypothèses de la définition 11.1, l'espérance conditionnelle existe, c'est-à-dire que l'ensemble $E(X|\mathcal{B})$ est non vide, et que $E(X|\mathcal{B})$ est "unique", ceci signifiant que si $Z_1, Z_2 \in E(X|\mathcal{B})$, on a nécessairement $Z_1 = Z_2$ p.s..

L'ensemble $E(X|\mathcal{B})$, défini dans la définition 11.1, est une ensemble de v.a.r. (car Z $\mathcal{B}$-mesurable implique Z $\mathcal{A}$-mesurable) mais, en pratique, on confond cet ensemble avec l'un de ces éléments (comme on confond un élément de L^p avec l'un de ses représentants). Si Z est une v.a.r. $\mathcal{B}$-mesurable intégrable et t.q. $E(ZU) = E(XU)$ pour toute v.a.r. U $\mathcal{B}$-mesurable bornée, on écrira donc $Z = E(X|\mathcal{B})$ p.s. au lieu d'écrire $Z \in E(X|\mathcal{B})$.

Avant de démontrer l'existence et l'unicité de l'espérance conditionnelle, donnons quelques exemples simples. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une v.a.r. intégrable. Prenons tout d'abord $\mathcal{B} = \{\emptyset, \Omega\}$. Il est alors facile de voir (exercice 11.1) que $E(X|\mathcal{B})$ est réduit à un seul élément et que cet élément est la fonction constante et égale à $E(X)$.

Soit maintenant $A \in \mathcal{A}$ t.q. $0 < P(A) < 1$ et $\mathcal{B} = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$ (qui est bien une tribu incluse dans $\mathcal{A}$). On peut ici montrer (exercice 11.1) que $E(X|\mathcal{B})$ est aussi réduit à un seul élément et cet élément est la fonction Z définie par :

$$Z = \frac{E(X1_A)}{P(A)} 1_A + \frac{E(X1_{A^c})}{P(A^c)} 1_{A^c}.$$

La quantité $\frac{E(X1_A)}{P(A)}$ s'appelle "espérance de X sachant A". On a ainsi fait le lien entre "espérance de X sachant un événement" et "espérance de X par rapport à une tribu" (ou "selon une tribu").

Dans les deux exemples précédents, l'ensemble $E(X|\mathcal{B})$ était réduit à un seul élément. Voici maintenant un exemple où $E(X|\mathcal{B})$ n'est pas réduit à un seul élément. On prend $B \in \mathcal{A}$ t.q. $P(B) = 1$ et $B^c \neq \emptyset$ (c'est le cas, par exemple, si P est une mesure diffuse, que $\mathcal{A}$ contient les singletons et que B^c est formé d'un nombre fini ou dénombrable de points de Ω). On prend encore $\mathcal{B} = \{\emptyset, B, B^c, \Omega\}$. Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $Z_a = E(X)1_B + a1_{B^c}$. On peut alors montrer (exercice 11.2) que $E(X|\mathcal{B}) = \{Z_a,\ a \in \mathbb{R}\}$. L'ensemble $E(X|\mathcal{B})$ n'est donc pas réduit à un élément.

On montre maintenant l'existence et l'unicité de l'espérance, conditionnée par une tribu, d'une v.a.r. intégrable.

Proposition 11.1 *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $\mathcal{B}$ une tribu incluse dans $\mathcal{A}$. Soit X une v.a.r. intégrable. Alors :*

1. *(Existence) $E(X|\mathcal{B}) \neq \emptyset$.*
2. *(Unicité) $Z_1, Z_2 \in E(X|\mathcal{B}) \Rightarrow Z_1 = Z_2$ p.s..*

Démonstration : On démontre d'abord l'unicité de $E(X|\mathcal{B})$. Puis, on démontre l'existence de $E(X|\mathcal{B})$ si X est de carré intégrable, puis l'existence si X est positive (et intégrable) et enfin l'existence si X est seulement intégrable. En fait, la partie "existence si X est de carré intégrable" est inutile. Elle n'est pas utilisée pour la suite de la démonstration mais elle est éventuellement intéressante pour la compréhension de l'espérance conditionnelle.

Unicité. Soit $Z_1, Z_2 \in E(X|\mathcal{B})$. On pose $U = \text{sign}(Z_1 - Z_2)$ (on rappelle que la fonction sign est définie par $\text{sign}(s) = -1$ si $s < 0$, $\text{sign}(s) = 1$ si $s > 0$ et (par exemple) $\text{sign}(0) = 0$). Comme la fonction sign est borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et que $(Z_1 - Z_2)$ est $\mathcal{B}$-mesurable, la fonction U est bien $\mathcal{B}$-mesurable. Elle est aussi bornée, on a donc en utilisant 11.1 avec $Z = Z_1$ et $Z = Z_2$, $E(XU) = E(Z_1U)$ et $E(XU) = E(Z_2U)$. Ceci donne $E((Z_1 - Z_2)U) = 0$ et donc $E(|Z_1 - Z_2|) = 0$. On en déduit $Z_1 = Z_2$ p.s..

Existence si X est de carré intégrable. On note $P_{\mathcal{B}}$ la restriction de P (qui est une mesure sur $\mathcal{A}$) à $\mathcal{B}$ (tribu incluse dans $\mathcal{A}$). La mesure $P_{\mathcal{B}}$ est donc une probabilité sur $\mathcal{B}$. On note H l'espace de Hilbert $L^2_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, P_{\mathcal{B}})$ et, pour $V \in H$, on pose :

$$T(V) = \int_\Omega XVdP.$$

Il est clair que $T(V)$ est bien définie. En étant précis, on remarque que $T(V) = \int_\Omega XvdP$, où $v \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, P_{\mathcal{B}})$ est un représentant de V (et cette quantité ne dépend pas du représentant choisi). C'est pour définir T que nous avons besoin que X soit de carré intégrable.

L'application T est linéaire continue de H dans $\mathbb{R}$ (et on a $\|T\| \leq \|X\|_2$). On peut donc appliquer le théorème de Riesz dans les espaces de Hilbert (théorème 6.8), il donne l'existence de $Z \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{B}, P_{\mathcal{B}})$ t.q. :

$$T(V) = \int_\Omega ZVdP \text{ pour tout } V \in H. \tag{11.2}$$

Comme $Z \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{B}, P_{\mathcal{B}})$, la fonction Z est bien $\mathcal{B}$-mesurable et intégrable (elle est même de carré intégrable). On montrer maintenant que Z vérifie (11.1) (et donc que $Z \in E(X|B)$). Soit U une application $\mathcal{B}$-mesurable bornée de Ω dans $\mathbb{R}$. On a $U \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{B}, P_\mathcal{B})$, on peut donc utiliser (11.2) avec pour V la classe de U et on obtient

$$E(XU) = T(V) = \int_\Omega ZV dP = E(ZU).$$

L'application Z vérifie donc (11.1). ce qui prouve que $Z \in E(X|\mathcal{B})$.

Plus précisément, un développement du raisonnement ci avant (que les courageux peuvent faire) permet d'interpréter l'application $X \mapsto E(X|\mathcal{B})$ comme l'opérateur de projection orthogonale de $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ dans le sous espace vectoriel fermé formé à partir de $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P_\mathcal{B})$.

Existence si X est positive et intégrable. On utilise ici le théorème de Radon-Nikodym (théorème 6.10, qui se démontre d'ailleurs avec le théorème de Riesz dans les espaces de Hilbert, théorème 6.8). On note toujours $p_\mathcal{B}$ la restriction de P à $\mathcal{B}$ (de sorte que $P_\mathcal{B}$ est une probabilité sur $\mathcal{B}$).
Pour $B \in \mathcal{B}$, on pose $m(B) = \int_\Omega X 1_B dP$. On définit ainsi une mesure finie, m, sur $\mathcal{B}$ (la σ-additivité de m est immédiate). Cette mesure est absolument continue par rapport à la mesure $P_\mathcal{B}$ (car $B \in \mathcal{B}$, $P_\mathcal{B}(B) = 0$ implique que $P(B) = 0$ et donc $X1_B = 0$ p.s. et donc $m(B) = 0$). Le théorème de Radon-Nikodym (théorème 6.10) donne alors l'existence de Z, $\mathcal{B}$-mesurable positive, t.q. $m = ZP_\mathcal{B}$ (c'est-à-dire que m est la mesure sur $\mathcal{B}$ de densité Z par rapport à $P_\mathcal{B}$).
La fonction Z est intégrable car $\int_\Omega Z dP = \int_\Omega Z dP_B = (ZP_B)(\Omega) = m(\Omega) = E(X) < +\infty$. Il reste à montrer que Z vérifie (11.1) (ce qui donnera que $Z \in E(X|B)$). Soit U une application $\mathcal{B}$-mesurable bornée de Ω dans $\mathbb{R}$. On a $ZU \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{B}, P_\mathcal{B})$, et donc (voir la remarque 6.22) $U \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{B}, m)$ et :

$$E(ZU) = \int_\Omega ZU dP = \int_\Omega ZU dP_\mathcal{B} = \int_\Omega U dm.$$

Mais, comme m est la restriction à $\mathcal{B}$ de la mesure sur $\mathcal{A}$ de densité X par rapport à P (notée XP), on a aussi (toujours par la remarque 6.22) $U \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, XP)$ et :

$$\int_\Omega U dm = \int_\Omega UX dP = E(XU).$$

On a donc, finalement, $E(ZU) = E(XU)$. L'application Z vérifie donc (11.1). Ce qui prouve que $Z \in E(X|\mathcal{B})$.

Existence si X est seulement intégrable. Comme les fonctions X^+ et X^- sont positives et intégrables, il existe $Z_1 \in E(X^+|\mathcal{B})$ et $Z_2 \in E(X^-|\mathcal{B})$. On pose $Z = Z_1 - Z_2$. L'application Z est $\mathcal{B}$-mesurable et intégrable (car Z_1 et Z_2 le sont) et, pour tout fonction U $\mathcal{B}$-mesurable bornée, on a :

$$E(ZU) = E(Z_1U) - E(Z_2U) = E(X^+U) - E(X^-U) = E(XU).$$

L'application Z vérifie donc (11.1). Ce qui prouve que $Z \in E(X|\mathcal{B})$. ■

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $\mathcal{B}$ une tribu incluse dans $\mathcal{A}$. On a défini l'espérance, conditionnée par $\mathcal{B}$, d'une v.a.r. intégrable. On va maintenant montrer qu'on peut étendre la définition à des v.a.r. qui ne sont pas inégrables mais qui sont positives (la démonstration est déjà essentiellement dans la démonstration de la proposition 11.1). Pour cela, on va commencer par donner une "p.s.-caractérisation" de $E(X|B)$" lorsque X est une v.a.r. positive et intégrable. Cette caractérisation n'utilisant pas l'intégrabilité de X on aura ainsi une définition de $E(X|\mathcal{B})$ lorsque X est une v.a.r. positive. Ceci est fait dans la proposition 11.2 et la définition 11.2.

Proposition 11.2 *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $\mathcal{B}$ une tribu incluse dans $\mathcal{A}$.*

1. *Soit X une v.a.r. intégrable positive. Alors, $Z \in E(X|\mathcal{B})$ si et seulement si Z est $\mathcal{B}$-mesurable, intégrable, ≥ 0 p.s. et t.q. :*

$$E(ZU) = E(XU) \text{ pour toute application } U \text{ de } \Omega \text{ dans } \mathbb{R}, \mathcal{B}\text{-mesurable et positive.} \tag{11.3}$$

2. *Soit X une v.a.r. positive. On note $\bar{E}(X|\mathcal{B})$ l'ensemble des applications $\mathcal{B}$-mesurable, ≥ 0 et vérifiant (11.3). On a alors :*
   (a) *(Existence) $\bar{E}(X|\mathcal{B}) \neq \emptyset$.*
   (b) *(Unicité) $Z_1, Z_2 \in \bar{E}(X|\mathcal{B}) \Rightarrow Z_1 = Z_2$ p.s..*

Démonstration : On commence par montrer le premier item. Si $Z \in E(X|\mathcal{B})$, la fonction Z est bien $\mathcal{B}$-mesurable intégrable et vérifie (11.1). Elle vérifie donc (11.3) en ajoutant "U bornée". Pour montrer que $Z \geq 0$ p.s., on prend $U = 1_B$ avec $B = \{Z < 0\}$ (U est bien $\mathcal{B}$-mesurable bornée). On obtient $E(ZU) = E(XU) \geq 0$. Comme $ZU \leq 0$, on a donc $ZU = 0$ p.s. et donc $Z \geq 0$ p.s.. Enfin, pour montrer que Z vérifie (11.3) (c'est-à-dire avec U $\mathcal{B}$-mesurable positive mais non nécessairement bornée), il suffit d'utiliser le théorème de convergence monotone (théorème 4.2) en introduisant $U_n = U1_{B_n}$ avec, pour $n \in \mathbb{N}$, $B_n = \{U \leq n\}$.

Réciproquement, si Z est $\mathcal{B}$-mesurable, intégrable, ≥ 0 p.s. et vérifie (11.3), il est facile de voir que Z vérifie (11.1). En effet, si U est $\mathcal{B}$-mesurable bornée, on utilise (11.3) avec les parties positive et négative de U pour obtenir (11.1). Donc, $Z \in E(X|\mathcal{B})$.

On montre maintenant le deuxième item de la proposition.

Existence. On reprend la démonstration de la proposition 11.1. On rappelle que $p_{\mathcal{B}}$ la restriction de P à $\mathcal{B}$. Pour $B \in \mathcal{B}$, on pose $m(B) = \int_\Omega X1_B dP$. La mesure m est absolument continue par rapport à la mesure $P_{\mathcal{B}}$. Le théorème de Radon-Nikodym donne alors l'existence de Z, $\mathcal{B}$-mesurable positive, t.q. $m = ZP_{\mathcal{B}}$. Il reste à montrer que Z vérifie (11.3) (ce qui donnera que $Z \in \bar{E}(X|B)$). Soit U une application $\mathcal{B}$-mesurable positive de Ω dans $\mathbb{R}$. On a $E(ZU) = \int_\Omega ZUdP = \int_\Omega ZUdP_{\mathcal{B}} = \int_\Omega Udm$. Mais, comme m est la restriction à $\mathcal{B}$ de la mesure sur $\mathcal{A}$ de densité X par rapport à P (notée XP), on a aussi $\int_\Omega Udm = \int_\Omega UXdP = E(XU)$. On a donc, finalement, $E(ZU) = E(XU)$. L'application Z vérifie donc (11.3). Ce qui prouve que $Z \in \bar{E}(X|\mathcal{B})$.

Unicité. Soit $Z_1, Z_2 \in \bar{E}(X|\mathcal{B})$. prenons $U = (\text{sign}(Z_1 - Z_2))^+$ (qui est bien $\mathcal{B}$-mesurable et positive). On a donc, par (11.3), $E(Z_1U) = E(Z_2U) = E(XU)$, mais on ne peut rien en déduire car il est possible que $E(XU) = +\infty$. On va donc modifier légérement U. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On pose $B_n = \{Z_1 \leq n\} \cap \{Z_2 \leq n\}$ et $U_n = U1_{B_n}$. La fonction U_n est encore $\mathcal{B}$-mesurable et positive et (11.3) donne $E(Z_1U_n) = E(Z_2U_n)$. Comme $0 \leq E(Z_1U_n) = E(Z_2U_n) \leq n$, on en déduit $E((Z_1 - Z_2)U_n) = 0$. Mais, $(Z_1 - Z_2)U_n \geq 0$. En faisant tendre n vers l'infini, le théorème de convergence monotone (théorème 4.1) donne $E((Z_1 - Z_2)U) = 0$, c'est-à-dire $E((Z_1 - Z_2)^+) = 0$ et donc $Z_1 \leq Z_2$ p.s.. En changeant les rôles de Z_1 et Z_2 on a aussi $Z_2 \leq Z_1$ p.s.. D'où $Z_1 = Z_2$ p.s.. ■

Définition 11.2 *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, X une v.a.r. positive et $\mathcal{B}$ une tribu incluse dans $\mathcal{A}$. On appelle "Espérance, conditionnée par $\mathcal{B}$, de X " ou "Espérance conditionnelle de X par rapport à $\mathcal{B}$") l'ensemble des applications Z de Ω dans $\mathbb{R}$, $\mathcal{B}$-mesurable, positive et t.q. :*

$$E(ZU) = E(XU) \text{ pour toute application } U \text{ de } \Omega \text{ dans } \mathbb{R}, \mathcal{B}\text{-mesurable et positive.} \tag{11.4}$$

On note $\bar{E}(X|\mathcal{B})$ cette espérance conditionnelle (c'est donc un ensemble de fonctions). (Noter que dans (11.1), les applications ZU et XU sont bien des v.a.r. positives, leur intégrale sur Ω est donc bien définie et appartient à $\bar{R}_+$).

La proposition 11.2 nous donne l'existence et l'unicité (p.s.) de l'espérance conditionnelle lorsque X est une v.a.r. positive. Sous les hypothèses de la définition 11.2, si X est de plus intégrable, on a donc deux définitions de l'espérance conditionnelle de X par rapport à $\mathcal{B}$, notée $E(X|\mathcal{B})$ et $\bar{E}(X|\mathcal{B})$. La proposition 11.2 montre que $Z_1 \in E(X|\mathcal{B})$ et $Z_2 \in \bar{E}(X|\mathcal{B})$ implique $Z_1 = Z_2$ p.s.. En pratique, comme on confond $E(X|\mathcal{B})$ avec l'un de ces éléments et $\bar{E}(X|\mathcal{B})$ avec l'un de ces éléments, on a donc $E(X|\mathcal{B}) = \bar{E}(X|\mathcal{B})$ p.s.. Il est donc inutile de conserver la notation $\bar{E}(X|\mathcal{B})$ et on conservera la notation $E(X|\mathcal{B})$ dans les deux cas, c'est-à-dire "X v.a.r. intégrable" et "X v.a.r. positive".

Nous donnons maintenant quelques propriétés de l'espérance conditionnelle.

Proposition 11.3 *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, $\mathcal{B}$ une tribu incluse dans $\mathcal{A}$ et X une v.a.r.. Soit $p \in]1, \infty]$ et q le nombre conjugué de p (i.e. $q = p/(p-1)$ si $p < +\infty$ et $q = 1$ si $p = \infty$). On suppose que $X \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soit $Z \in E(X|\mathcal{B})$. Alors, $Z \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et $E(ZU) = E(XU)$ pour toute application U (de Ω dans $\mathbb{R}$) $\mathcal{B}$-mesurable t.q. $|U|^q$ soit intégrable.*

DÉMONSTRATION : La démonstration fait partie de l'exercice 11.5. En fait, le cas $p = 2$ a déjà été vu dans la démonstration de la proposition 11.1. ■

Proposition 11.4 (Inégalité de Jensen généralisée)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, $\mathcal{B}$ une tribu incluse dans $\mathcal{A}$ et X une v.a.r. de carré intégrable. Soit φ une fonction convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $\varphi(X)$ est intégrable. On a alors $E(\varphi(X)|\mathcal{B}) \geq \varphi(E(X|\mathcal{B}))$ p.s..

DÉMONSTRATION : D'après le lemme 11.1, comme φ est convexe, il existe c, fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (et donc fonction borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) t.q., pour tout $x, a \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) - \varphi(a) \geq c(a)(x - a)$.

Soit $Z \in E(X|\mathcal{B})$. On a donc pour tout $\omega \in \Omega$:

$$\varphi(X(\omega)) - \varphi(Z(\omega)) \geq c(Z(\omega))(X(\omega) - Z(\omega)). \tag{11.5}$$

On aimerait intégrer cette inégalité sur un élément (bien choisi) de $\mathcal{B}$ mais cela n'est pas possible car les v.a.r. $\varphi(Z)$ et $c(Z)(X-Z)$ peuvent ne pas être intégrables (bien que Z et X soient intégrables). Pour $p \in \mathbb{N}^\star$, on introduit donc $A_p = \{|Z| \leq p\}$ de sorte que les v.a.r. $1_{A_p}c(Z)(X-Z)$ et $1_{A_p}\varphi(Z)$ sont intégrables (noter que $c(Z)$ est bornée sur A_p car c est croissante). On pose aussi $A = \{E(\varphi(X)|\mathcal{B}) - \varphi(Z) < 0\}$ et $B_p = A_p \cap A$. Soit $p \in \mathbb{N}^\star$, l'inégalité (11.5) donne $1_{B_p}(\varphi(X) - \varphi(Z)) \geq 1_{B_p}c(Z)(X - Z)$ et donc, en intégrant sur Ω :

$$\int_{B_p} (\varphi(X) - \varphi(Z))dP \geq \int_{B_p} c(Z)(X - Z)dP. \tag{11.6}$$

Comme Z et $E(\varphi(X)|\mathcal{B})$ sont $\mathcal{B}$-mesurables, on a $B_p \in \mathcal{B}$ (et donc 1_{B_p} est $\mathcal{B}$-mesurable). On a aussi $c(Z)$ $\mathcal{B}$-mesurable (car c est borélienne) et donc $1_{B_p}c(Z)$ $\mathcal{B}$-mesurable. On en déduit :

$$\int_{B_p} c(Z)(X - Z)dP = E(1_{B_p}c(Z)(X - Z)) = 0 \text{ (car } Z \in E(X|\mathcal{B})),$$

et

$$\int_{B_p} (\varphi(X) - \varphi(Z))dP = E(1_{B_p}(\varphi(X) - \varphi(Z))) = E\left(1_{B_p}(E(\varphi(X)|\mathcal{B}) - \varphi(Z))\right).$$

Avec (11.6), on en déduit :

$$\int_{B_p} (E(\varphi(X)|\mathcal{B}) - \varphi(Z))dP \geq 0.$$

Comme $E(\varphi(X)|\mathcal{B})-\varphi(Z) < 0$ sur B_p (car $B_p \subset A$), on a donc $P(B_p) = 0$ et donc $P(A) = P(\cup_{p\in\mathbb{N}^\star} B_p) = 0$. Ce qui donne bien $E(\varphi(X)|\mathcal{B}) \geq \varphi(Z)$ p.s.. ∎

Lemme 11.1 *Soit φ une fonction convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, il existe alors c, fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (et donc fonction borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) t.q., pour tout $x, a \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) - \varphi(a) \geq c(a)(x - a)$.*

Démonstration : Si φ est dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction c existe et est unique, elle est donnée par $c = \varphi'$. L'existence de c est légérement plus difficile si φ n'est pas dérivable sur tout $\mathbb{R}$ (et on perd l'unicité de c). Soit $a \in \mathbb{R}$, on considère le fonction $h_a\ :\ x \mapsto \frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a}$ qui est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$. La convexité de φ permet de montrer que h_a est croissante (c'est-à-dire que $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$, $x > y \Rightarrow h_a(x) \geq h_a(y)$). La fonction h_a a donc une limite à gauche (et à droite) en tout point, y compris au point a. On pose (par exemple) :

$$c(a) = \lim_{x\to a, x<a} h_a(x).$$

Il est facile de vérifier que la fonction c ainsi définie est croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et vérifie, pour tout $x, a \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) - \varphi(a) \geq c(a)(x - a)$. ∎

On défnit maintenant l'espérance conditionnelle par rapport à une v.a.r. ou un v.a.

Définition 11.3 *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une v.a.r. (ou un v.a. de dimension d, $d \geq 1$). Soit Y une v.a.r. intégrable ou une v.a.r. positive. On appelle "Espérance, conditionnée par X, de Y" ou "Espérance conditionnelle de Y par rapport à X" (ou "Espérance conditionnelle de Y sachant X") l'ensemble $E(Y|\sigma(X)$, où $\sigma(X)$ est la tribu engendrée par X. On note $E(Y|X)$ cette espérance conditionnelle, de sorte que $E(Y|X) = E(Y|\sigma(X))$. (L'ensemble $E(Y|X)$ est donc un ensemble de v.a.r. et, comme d'habitude, on confond $E(Y|X)$ avec l'un de ces éléments.)*

Pour caractériser $E(Y|X)$ (sous les hypothèses de la définition 11.3) et pour calculer cette espérance conditionnelle, on utilise, en général, le théorème 3.1 que nous rappelons sous une forme légérement plus précise (donnée dans la démonstration du théorème 3.1).

Théorème 11.1 (Y mesurable par rapport à X) *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X, Y deux v.a.r.. On note $\sigma(X)$ la tribu engendrée par X. Alors :*

- *La v.a.r. Y est $\sigma(X)$-mesurable si et seulement si il existe f, fonction borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, t.q. $Y = f(X)$.*
- *La v.a.r. Y est $\sigma(X)$-mesurable bornée si et seulement si il existe f, fonction borélienne bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, t.q. $Y = f(X)$.*
- *La v.a.r. Y est $\sigma(X)$-mesurable positive si et seulement si il existe f, fonction borélienne positive de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, t.q. $Y = f(X)$.*

Démonstration : La démonstration de ce théorème est donnée dans la démonstration du théorème 3.1. ∎

Voici une conséquence immédiate de ce théorème, utilisée pour calculer $E(Y|X)$

Proposition 11.5 (Calcul de $E(Y|X)$) *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X, Y deux v.a.r.. Soit Z une application de Ω dans $\mathbb{R}$.*

1. *On suppose que Y est intégrable. Alors, $Z \in E(Y|X)$ si et seulement si il existe ψ application borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ t.q. $Z = \psi(X)$, $\psi(X)$ est intégrable et*

$$E(\psi(X)\varphi(X)) = E(X\varphi(X)) \text{ pour toute application } \varphi \text{ de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}, \text{ borélienne bornée.} \quad (11.7)$$

2. *On suppose que Y est positive. Alors, $Z \in E(Y|X)$ si et seulement si il existe ψ application borélienne positive de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ t.q. $Z = \psi(X)$ et*

$$E(\psi(X)\varphi(X)) = E(X\varphi(X)) \text{ pour toute application } \varphi \text{ de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}, \text{ borélienne positive.} \quad (11.8)$$

Démonstration : La démonstration est une conséquence immédiate du théorème 11.1. ■

La conséquence de la proposition 11.5 est que (sous les hypotèses de la proposition) l'on cherche $E(Y|X)$ sous la forme d'une fonction $\psi(X)$ (avec ψ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) vérifiant (11.7) (ou (11.8)). On raisonne, en général, par "condition nécessaire sur ψ" et, comme on sait que $E(X|Y)$ existe, il est même inutile de vérifier que la fonction $\psi(X)$ que l'on trouve (qui est, en général, définie p.s.) est bien intégrable (ou positive).

La proposition 11.5 montre également que (sous les hypotèses de la proposition 11.5) la fonction Y est une fonction de X (c'est-à-dire $Y = \psi(X)$ pour un certain ψ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) si et seulement si $E(Y|X) = Y$. Pour montrer que la v.a.r. Y est une fonction d'une autre v.a.r. X, il suffit donc de montrer que $E(Y|X) = Y$. En comparaison, le calcul de la covariance entre X et Y (après "normalisation") s'intéresse seulement à l'existence ou non d'une dépendance affine de Y en fonction de X. Voir, à ce propos, l'exercice 11.13.

11.2 Martingales

Définition 11.4 (Filtration et processus) *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé*

1. *On appelle 'filtration" une suite de tribus $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.q. $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{B}_{n+1} \subset \mathcal{A}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
2. *On appelle "procesus réel" une suite de v.a.r..*
3. *Soit $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une filtration et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processus réel. On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est adapté à la filtration $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n est $\mathcal{B}_n$-mesurable.*

Définition 11.5 (Martingale) *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une filtration et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processus réel (c'est-à-dire une suite de v.a.r.).*

1. *(Martingale) la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*
   (a) *X_n est $\mathcal{B}_n$-mesurable et intégrable,*
   (b) *$E(X_{n+1}|\mathcal{B}_n) = X_n$ p.s..*
2. *(Sous et sur martingale) la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-martingale [resp. sur-martingale] par rapport à la filtration $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*
   (a) *X_n est $\mathcal{B}_n$-mesurable et intégrable,*

(b) $E(X_{n+1}|\mathcal{B}_n) \geq X_n$ *p.s. [resp.* $E(X_{n+1}|\mathcal{B}_n) \leq X_n$ *p.s.].*

Définition 11.6 (Temps d'arrêt) *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé,* $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une filtration et* T *une v.a. à valeurs dans* $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ *(c'est-à-dire une application mesurable de* Ω*, muni de la tribu* $\mathcal{A}$*, dans* $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$*, muni de la tribu la plus fine). L'application* T *s'appelle un temps d'arrêt si, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* $\{T = n\} \in \mathcal{B}_n$*.*

On conclut cette section par un théorème, sans démonstration, sur la convergence des martingales.

Théorème 11.2 (Convergence p.s. d'une martingale)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé,* $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une filtration et* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de v.a.r. positives. On suppose que* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une martingale par rapport à* $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$*. Alors, il existe une v.a.r. intégrable,* X*, t.q.* $X_n \to X$ *p.s., quand* $n \to \infty$*.*

11.3 Exercices

11.3.1 Espérance conditionnelle

Exercice 11.1 (Espérance conditionnelle selon une tribu) *Corrigé 168 page 489*
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et Y une variable aléatoire réelle intégrable. Dans les trois cas suivants, montrer que $E[Y|\mathcal{B}]$ est réduit à un élément et déterminer $E[Y|\mathcal{B}]$ (en fonction de Y et $\mathcal{B}$).

1. La tribu $\mathcal{B}$ la tribu grossière, c'est-à-dire $\mathcal{B} = \{\emptyset, \Omega\}$.
2. Soit $B \in \mathcal{A}$ t.q. $0 < P[B] < 1$. On prend pour $\mathcal{B}$ la tribu engendrée par B.
3. Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \subset \mathcal{A}$ t.q. $B_n \cap B_m = \emptyset$ si $n \neq m$, $\Omega = \cup_{n\in\mathbb{N}^\star} B_n$ et $0 < P(B_n) < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. On prend pour $\mathcal{B}$ la tribu engendrée par $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ (c'est-à-dire $\mathcal{B} = \{\cup_{n\in J} B_n,\ J \subset \mathbb{N}^\star\}$).

Exercice 11.2 (Espérance conditionnelle selon une tribu (2))

Soit $(\Omega, \mathcal{A},\ P)$ un espace probabilisé et X une v.a.r. intégrable. Soit $B \in \mathcal{A}$ t.q. $P(B) = 1$ et $B^c \neq \emptyset$ (c'est le cas, par exemple, si P est une mesure diffuse, que $\mathcal{A}$ contient les singletons et que B^c est formé d'un nombre fini ou dénombrable de points de Ω). On pose $\mathcal{B} = \{\emptyset, B, B^c, \Omega\}$. Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $Z_a = E(X)1_B + a1_{B^c}$. Montrer que $E(X|\mathcal{B}) = \{Z_a,\ a \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 11.3 (Espérance conditionnelle selon une v.a.r.) *Corrigé 169 page 490*
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, X une variable aléatoire réelle et Y une variable aléatoire réelle intégrable.

1. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ t.q. $X = a$ p.s.. Donner un élément de $E[Y|X]$.
2. On suppose que X prend p.s. deux valeurs x_1 ou x_2 avec $x_1 \neq x_2$. Donner un élément de $E[Y|X]$.
3. On suppose que X est une v.a. prenant p.s. ses valeurs dans un ensemble dénombrable $\{x_n, n \in \mathbb{N}^\star\}$ avec $P(X = x_n) \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. Donner un élément de $E[Y|X]$.

Exercice 11.4 (Egalité d'espérances conditionnelles)

Soit Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$ un événement et X une v.a.r. intégrable t.q. $X1_B = Y1_B$ p.s.. Montrer que $E[X|\mathcal{B}]1_B = E[Y|\mathcal{B}]1_B$ p.s..

Exercice 11.5 (Espérance conditionnelle d'une v.a.r. appartenant à $\mathcal{L}^p$)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, $\mathcal{B}$ une tribu incluse dans $\mathcal{A}$ et X une v.a.r.. Soit $p \in]1, \infty]$ et q le nombre conjugué de p(c'est-à-dire $q = p/(p-1)$ si $p < +\infty$ et $q = 1$ si $p = \infty$). On suppose que $X \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soit $Z \in E(X|\mathcal{B})$. Montrer que $Z \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et que $E(ZU) = E(XU)$ pour toute application U (de Ω dans $\mathbb{R}$) $\mathcal{B}$-mesurable de puissance q-ieme intégrable.

Exercice 11.6 (Calcul de $E(\exp(XY)|X)$ si Y est gaussienne) *Corrigé 170 page 491*
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilités et X, Y deux v.a. réelles indépendantes. On suppose que Y suit une loi gaussienne centrée réduite et que $E[\exp(X^2/2)] < \infty$. Montrer que $\exp(XY)$ est intégrable et déterminer $E[\exp(XY)|X]$.

Exercice 11.7 (Espérance selon une somme de v.a.r.i.i.d)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilités, $n \in \mathbb{N}^\star$ et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes, de même loi et intégrables. On note $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Calculer $E(X_1|S_n)$.

Exercice 11.8 (Une condition nécessaire pour avoir $X = Y$ p.s.)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilités et X, Y deux variables aléatoires réelles intégrables et t.q.

$$E[X|Y] = Y \text{ p.s. et } E[Y|X] = X \text{ p.s..}$$

1. Montrer que pour tout réel c, $E\left[(X-Y)1_{X>c,Y>c}\right] = E\left[(Y-X)1_{X>c\geq Y}\right] \leq 0$ p.s..
2. En déduire que pour tout réel c, $P[X > c \geq Y] = 0.$ p.s..
3. Montrer que $X = Y$ p.s..

Exercice 11.9 (Espérance du produit et produit des espérances) *Corrigé 171 page 492*
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilités et X, Y deux v.a. intégrables t.q. XY est intégrable et $E[X|Y] = E(X)$ p.s.. Montrer que $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Exercice 11.10 (Egalité de lois donne égalité d'espérances conditionnelles)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilités et X, Y, Z trois variables aléatoires réelles t.q. $(X, Z) \sim (Y, Z)$. Montrer que pour toute fonction f borélienne positive, $E[f(X)|Z] = E[f(Y)|Z]$ p.s..

Exercice 11.11 (Convergence faible $\Rightarrow$ convergence faible des espérances conditionnelles)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilités, $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$, X une v.a. intégrable et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. intégrables. On suppose que $X_n \to X$ faiblement dans $L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ quand $n \to \infty$ (ce qui est équivalent à dire que, pour tout v.a. U bornée, on a $\lim_{n\to\infty} E[X_n U] = E[XU]$).

1. Montrer que pour toute v.a. U, $\mathcal{B}$-mesurable et bornée, on a
$$\lim_{n\to\infty} E[E[X_n|\mathcal{B}]U] = E[E[X|\mathcal{B}]U].$$
2. Montrer que $E[X_n|\mathcal{B}] \to E[X|\mathcal{B}]$ faiblement dans $L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ quand $n \to \infty$.

Exercice 11.12 (Minoration d'une espérance conditionnelle)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité, $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$ et Y est une v.a.r. positive. Soit U une v.a.r. positive, $\mathcal{B}-$mesurable et t.q. pour toute v.a.r. positive $\mathcal{B}-$mesurable Z on ait $E(YZ) \geq E(UZ)$. Montrer que $E(Y|B) \geq U$ p.s..

Exercice 11.13 (Dépendance linéaire et dépendance non linéaire)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et X, Y deux v.a.r. non constantes.

1. (Dépendance linéaire.) On pose $\overline{X} = \frac{X-E(X)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}$ et $\overline{Y} = \frac{Y-E(Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}}$.
   (a) Montrer que $|\mathrm{Cov}(\overline{X}, \overline{Y})| \le 1$.
   (b) Montrer que $|\mathrm{Cov}(\overline{X}, \overline{Y})| = 1$ si et seulement si il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, t.q. $Y = \alpha X + \beta$.
   (c) Donner un exemple pour lequel $Y = f(X)$ (avec f fonction borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) et $\mathrm{Cov}(\overline{X}, \overline{Y}) = 0$.
2. (Dépendance.)
   (a) On suppose que X et Y sont indépendantes. Montrer que $E(Y|X) = E(Y)$.
   (b) Montrer qu'il existe f (fonction borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) t.q. $Y = f(X)$ si et seulement $E(Y|X) = Y$.

Exercice 11.14 (Convergence d'une suite d'espérance conditionnelles)
Soient (E, T, p) un espace probabilisé et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de tribus sur E t.q. $T_n \subset T_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $\cup_{n\in\mathbb{N}} T_n = T$. Soit $X \in L^2_{\mathbb{R}}(E, T, p)$ et $E(X|T_n)$ l'espérance conditionnelle de X par rapport à la tribu T_n. Nous allons montrer que $E(X|T_n)$ converge vers X dans $L^2_{\mathbb{R}}(E, T, p)$ lorsque $n \to +\infty$.

1. Montrer qu'il existe $e \in L^2_{\mathbb{R}}(E, T, p)$ et une sous-suite de la suite $(E(X|T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, encore notée $(E(X|T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, qui converge faiblement vers e dans $L^2_{\mathbb{R}}(E, T, p)$.
2. Montrer que $\int XY dp = \int eY dp$, pour tout $Y \in F = \overline{\cup_{n\in\mathbb{N}} L^2_{\mathbb{R}}(E, T_n, p)}$.
3. Montrer que $F = L^2_{\mathbb{R}}(E, T, p)$ et en déduire que $e = X$ p.s..
4. Montrer que $\|E(X|T_n)\|_2 \le \|X\|_2$ et en déduire que la suite $(e(X, T_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers X dans $L^2_{\mathbb{R}}(E, T, p)$.

Exercice 11.15 (Projection sur $L^2(\Omega, \tau(X), P)$ versus projection sur ev(X))
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilités. Si $\mathcal{B}$ est une sous-tribu de $\mathcal{A}$, on note encore P la restriction de P à $\mathcal{B}$, de sorte que $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ est encore un espace de probabilités. On rappelle que $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{B}, P) \subset \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et que l'on peut considérer $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ comme un s.e.v. de $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$. L'espace $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ est donc un s.e.v. fermé de $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit $X \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ (en choisissant un représentant de X, X est donc une v.a.). On note $\mathrm{ev}(X)$ le s.e.v. engendré par X (noter que $\mathrm{ev}(X)$ est un s.e.v. fermé de $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$).

Si V est un s.e.v. fermé de $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on note P_V l'opérateur de projection orthogonale sur V.

1. On suppose que X est constante et non nulle (c'est-à-dire qu'il existe $a \in \mathbb{R}^\star$ t.q. $X = a$ p.s.). Montrer que $P_{\mathrm{ev}(X)} = P_{L^2(\Omega, \tau(X), P)}$ (i.e. $\mathrm{ev}(X) = L^2(\Omega, \tau(X), P)$).
2. On suppose que X n'est pas constante. Montrer que pour toute sous-tribu $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$, $P_{\mathrm{ev}(X)} \neq P_{L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)}$ (i.e. $\mathrm{ev}(X) \neq L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$).

   Remarque : Si Y est une v.a. de carré intégrable, on a $E[Y|X] = E[Y|\tau(X)] = P_{L^2(\Omega, \tau(X), P)}$ Y.

11.3.2 Martingales

Exercice 11.16 (Quelques propriétés des martingales) *Corrigé 172 page 493*
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité muni d'une filtration $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (c'est-à-dire d'une suite croissante de sous tribus de $\mathcal{A}$) et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de de v.a.r. (c'est-à-dire un processus réel). On suppose que X_n est intégrable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. On suppose que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-martingale (par rapport à la filtration $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$) Montrer que la suite $(E(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. On suppose que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale (par rapport à la filtration $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$) Montrer que $E(X_{n+m}|\mathcal{B}_n) = X_n$ p.s. pour tout $m \geq 0$.
3. Soit φ une fonction convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale (par rapport à la filtration $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$) et que $\varphi(X_n)$ est intégrable pour tout $n \in \mathbb{N}$ (on rappelle que $\varphi(X_n)$ est une notation pour désigner $\varphi \circ X_n$). Montrer que $(\varphi(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-martingale (par rapport à la filtration $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$).

Exercice 11.17 (Séries de Fourier et martingales)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et $\mathcal{B}$ une sous tribu de $\mathcal{A}$. Montrer que

$$X \in L^2(\Omega, \mathcal{B}, P) \Rightarrow X^+ \in L^2(\Omega, \mathcal{B}, P).$$

$(L^2(\Omega, \mathcal{B}, P) = L^2_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, P).)$
On prend maintenant $\Omega =]0, 1[$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(]0, 1[)$ et $P = \lambda$ (la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(]0, 1[)$). On pose $H = L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pour $p \in \mathbb{Z}$, on définit $e_p \in H$ par $e_p(x) = \exp(2i\pi px)$ pour $x \in]0, 1[$. On rappelle que $\{e_p,\ p \in \mathbb{Z}\}$ est une base hilbertienne de H. pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $V_n = ev\{e_p,\ -n \leq p \leq n\}$ (c'est un s.e.v. fermé de H).

Soit $X \in H$. On sait que $X_n \to X$ dans H, quand $n \to \infty$, avec $X_n = P_{V_n}X$ où P_{V_n} désigne l'opérateur de projection orthogonale sur V_n (X_n est donc une somme partielle de la série de Fourier de X).

1. Montrer que $P_{V_n}(X_{n+1}) = X_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, monter qu'il n'existe pas de sous-tribu $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ t.q. $V_n = L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{B}, P)$. [On pourra, par exemple, commencer par remarquer que V_n est formé de fonctions analytiques.]
3. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On pose $\mathcal{B}_n = \tau(e_p,\ -n \leq p \leq n)$. A-t-on $V_n \subset L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{B}_n, P)$ ou $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{B}_n, P) \subset V_n$?

Exercice 11.18 (Quelques questions sur les temps d'arrêt)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité muni d'une filtration $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r., adaptée à la filtration $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et τ défini de Ω dans $\mathbb{R}$ par
$$\tau(\omega) = 1 \text{ si } X_1(\omega) \in E \text{ et } \tau = 5 \text{ si } X_1(\omega) \notin E.$$
Montrer que τ est un temps d'arrêt.
2. Soit ν et τ deux temps d'arrêt par rapport à la filtration $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que $\nu + \tau$ est encore un temps d'arrêt (par rapport à la filtration $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$).

3. Soit ν et τ deux temps d'arrêt, par rapport à la filtration $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et t.q. $\nu \leq \tau$ p.s.. Soit $\mathcal{B}_\nu$ et $\mathcal{B}_\tau$ les deux tribus associées. Montrer que $\mathcal{B}_\nu \subset \mathcal{B}_\tau$. [Si T est un temps d'arrêt, on note $\mathcal{B}_T = \{A \in \mathcal{A}$ t.q., pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A \cap \{T = n\} \in \mathcal{B}_n\}$.]

Exercice 11.19 (Martingale construite avec les espérances d'une v.a.)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité muni d'une filtration $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit X une v.a.r. intégrable. Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $X_n = E[X|\mathcal{B}_n]$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$) est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{B}_n)$.

Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\mathcal{F}_n = \tau(X_1, \ldots, X_n)$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$).

Exercice 11.20 (Il est temps de s'arrêter)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité muni d'une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r., adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On suppose aussi que $E[|X_n|] < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout temps d'arrêt (par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$) τ borné,
$$E[|X_\tau|] < \infty.$$
On suppose dans la suite que pour tout temps d'arrêt (par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$) τ borné,
$$E[X_\tau] = E[X_0].$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\Lambda_n \in \mathcal{F}_n$. On définit σ_n par
$$\sigma_n(\omega) = n \text{ si } \omega \in \Lambda_n \text{ et } \sigma_n(\omega) = n + 1 \text{ si } \omega \notin \Lambda_n.$$
Montrer que σ_n est un temps d'arrêt (par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$).
3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et ν_n défini par $\nu_n(\omega) = n + 1$ pour tout $\omega \in \Omega$. Montrer que ν_n est aussi un temps d'arrêt (par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$).
4. En remarquant que $X_\tau = X_\tau 1_A + X_\tau 1_{A^c}$ (pour tout temps d'arrêt τ et tout événement A), montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale.

Chapter 12

Corrigés d'exercices

12.1 Exercices du chapitre 1

Corrigé 1 (Convergences simple et uniforme)
Construire une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C([0,1],\mathbb{R})$ et $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ t.q. $f_n \to f$ simplement, quand n $\to \infty$, et $f_n \not\to f$ uniformément, quand n $\to \infty$.

———————————————corrigé———————————————

On prend, pour $n \geq 2$:
$f_n(x) = nx$, pour $x \in [0, \frac{1}{n}]$, $f_n(x) = n(\frac{2}{n} - x)$, pour $x \in]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]$, $f_n(x) = 0$, pour $x \in]\frac{2}{n}, 1]$.
On a $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C([0,1],\mathbb{R})$. Pour tout $x \in [0,1]$, on a bien $f_n(x) \to 0$ quand $n \to \infty$. Enfin $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas uniformément vers 0 car $\|f_n\|_u = \max\{|f_n(x)|; x \in [0,1]\} = 1 \not\to 0$, quand $n \to \infty$.

———————————————————————————————

Corrigé 2 (Intégrale d'une fonction continue)
Une fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ est dite "en escalier" s'il existe $n \geq 1$ et $x_0, \ldots, x_n$ t.q. $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = 1$ et g constante sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$, $0 \leq i \leq n-1$.

Pour g en escalier et $x_0, \ldots, x_n$ comme dans la définition ci dessus, on pose $\displaystyle\int_0^1 g(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x_{i+1} - x_i)$, où a_i est la valeur prise par g sur $]x_i, x_{i+1}[$.

1. Montrer que la définition précédente est bien cohérente, c'est-à-dire que l'intégrale de g ne dépend que du choix de g et non du choix des x_i. Montrer que l'application qui à g associe l'intégrale de g est linéaire de l'ensemble des fonctions en escalier dans $\mathbb{R}$.

   ———————————————corrigé———————————————

   Soit $n \geq 1$ et $x_0, \ldots, x_n$ t.q. $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = 1$ et g constante sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$, $0 \leq i \leq n-1$. On note a_i est la valeur prise par g sur $]x_i, x_{i+1}[$.

   Soit également $m \geq 1$ et $y_0, \ldots, y_m$ t.q. $0 = y_0 < y_1 < \ldots < y_{m-1} < y_m = 1$ et g constante sur chaque intervalle $]y_i, y_{i+1}[$, $0 \leq i \leq m-1$. On note b_i est la valeur prise par g sur $]y_i, y_{i+1}[$.

   Nous devons montrer que $\sum_{i=0}^{n-1} a_i(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{m-1} b_i(y_{i+1} - y_i)$.

On considère l'union des points x_i et des points y_i, c'est-à-dire que $z_0, \ldots, z_p$ sont t.q. $0 = z_0 < z_1 < ... < z_{p-1} < z_p = 1$ et $\{z_i,\ i \in \{0, \ldots, p\}\} = \{x_i,\ i \in \{0, \ldots, n\}\} \cup \{y_i,\ i \in \{0, \ldots, m\}\}$ (on a donc, en particulier, $p \geq \max\{m, n\}$). On note c_i est la valeur prise par g sur $]z_i, z_{i+1}[$.

Pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, il existe $k_i \in \{0, \ldots, p\}$ t.q. $x_i = z_{k_i}$ (en particulier, $k_0 = 0$ et $k_n = p$) et on a donc $x_{i+1} - x_i = \sum_{j=k_i}^{k_{i+1}-1}(z_{j+1} - z_j)$. Comme $a_i = c_j$ si $k_i \leq j \leq k_{i+1} - 1$ (car $]z_j, z_{j+1}[\subset]x_i, x_{i+1}[$), on en déduit :

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=k_i}^{k_{i+1}-1} c_j(z_{j+1} - z_j) = \sum_{i=0}^{p-1} c_i(z_{i+1} - z_i).$$

De la même manière, on a $\sum_{i=0}^{m-1} b_i(y_{i+1} - y_i) = \sum_{i=0}^{p-1} c_i(z_{i+1} - z_i)$, d'où l'on conclut $\sum_{i=0}^{n-1} a_i(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{m-1} b_i(y_{i+1} - y_i)$.

On a bien montré que l'intégrale de g ne dépend que du choix de g et non du choix des x_i.

On montre maintenant que l'application qui à g associe l'intégrale de g est linéaire de l'ensemble des fonctions en escalier dans $\mathbb{R}$ (cet ensemble est bien un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$).

Soit g et h deux fonctions en escalier et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Soit $n \geq 1$ et $x_0, \ldots, x_n$ t.q. $0 = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = 1$ et g constante sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$, $0 \leq i \leq n-1$. Soit également $m \geq 1$ et $y_0, \ldots, y_m$ t.q. $0 = y_0 < y_1 < ... < y_{m-1} < y_m = 1$ et h constante sur chaque intervalle $]y_i, y_{i+1}[$, $0 \leq i \leq m-1$. On considère ici encore l'union des points x_i et des points y_i, c'est-à-dire que $z_0, \ldots, z_p$ sont t.q. $0 = z_0 < z_1 < ... < z_{p-1} < z_p = 1$ et $\{z_i,\ i \in \{0, \ldots, p\}\} = \{x_i,\ i \in \{0, \ldots, n\}\} \cup \{y_i,\ i \in \{0, \ldots, m\}\}$. Les fonctions g, h et $\alpha g + \beta h$ sont donc constantes sur chaque intervalle $]z_i, z_{i+1}[$ (ceci montre d'ailleurs que $\alpha g + \beta h$ est bien une fonction en escalier et donc que l'ensemble des fonctions en escalier est bien un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$). En notant a_i la valeur de g sur $]z_i, z_{i+1}[$ et b_i la valeur de h sur $]z_i, z_{i+1}[$, on obtient :

$$\int_0^1 g(x)dx = \sum_{i=0}^{p-1} a_i(z_{i+1} - z_i),\ \int_0^1 h(x)dx = \sum_{i=0}^{p-1} b_i(z_{i+1} - z_i).$$

On en déduit que $\alpha \int_0^1 g(x)dx + \beta \int_0^1 h(x)dx = \sum_{i=0}^{p-1}(\alpha a_i + \beta b_i)(z_{i+1} - z_i) = \int_0^1 (\alpha g(x) + \beta h(x))dx$ car $\alpha a_i + \beta b_i$ est la valeur de $\alpha g + \beta h$ sur $]z_i, z_{i+1}[$.

Ceci prouve bien que l'application qui à g associe l'intégrale de g est linéaire de l'ensemble des fonctions en escalier dans $\mathbb{R}$.

---

2. Soit $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$.

   (a) Construire une suite de fonctions en escalier $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ t.q. f soit limite uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque $n \to +\infty$.

   corrigé

   Pour $n \geq 1$, on choisit (par exemple) f_n ainsi :
   $f_n(x) = f(\frac{i}{n})$, si $x \in [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}[$, $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Pour bien définir f_n sur tout $[0, 1]$, on prend aussi $f_n(1) = f(1)$.

La fonction f_n est bien en escalier (elle est constante sur chaque intervalle $]\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}[$ pour $i \in \{0, \ldots, n-1\}$). Elle converge uniformément vers f, quand $n \to \infty$, car f est uniformément continue. Plus précisément, on a $\|f_n - f\|_u = \max\{|f_n(x) - f(x)|, x \in [0,1]\} \le \max\{|f(x) - f(y)|, x, y \in [0,1]; |x - y| \le \frac{1}{n}\} \to 0$, quand $n \to \infty$.

Noter que, pour ce choix de f_n, on a $\int_0^1 f_n(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} f(\frac{i}{n})\frac{1}{n}$. Cette somme est une "somme de riemann" asociée à f et on va voir ci-après qu'elle converge vers $\int_0^1 f(x)dx$ quand $n \to \infty$.

(b) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions en escalier t.q. f soit limite uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $n \to +\infty$. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, où I_n est l'intégrale de la fonction en escalier f_n, converge. Enfin, montrer que la limite $I = \lim_{n\to\infty} I_n$ ne dépend que de f, et non de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On pose alors $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = I$.

corrigé

Si g est une fonction en escalier, il est clair que la fonction $|g|$ (définie par $|g|(x)) = |g(x)|$) est aussi en escalier et que l'on a

$$|\int_0^1 g(x)dx| \le \int_0^1 |g(x)|dx \le \|g\|_u.$$

On en déduit que, pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, $|I_n - I_m| = |\int_0^1 (f_n - f_m)dx| \le \|f_n - f_m\|_u$. Comme la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (vers f) pour la norme $\|\cdot\|_u$, c'est une suite de Cauchy pour cette norme. La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc de Cauchy dans $\mathbb{R}$. La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente dans $\mathbb{R}$.

Soit maintenant une autre suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier t.q. f soit aussi limite uniforme de $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit J_n l'intégrale de la fonction en escalier g_n. On remarque que $|I_n - J_n| \le \|f_n - g_n\|_u$, d'où l'on déduit que $\lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} J_n$ car $\|f_n - g_n\|_u \le \|f_n - f\|_u + \|g_n - f\|_u \to 0$, quand $n \to \infty$. La limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne dépend donc que de f, et non du choix de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

---

3. Montrer que l'application qui à f associe l'intégrale de f est linéaire de $C([0,1],\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ et que, pour tout $f \in C([0,1],\mathbb{R})$, on a $\displaystyle|\int_0^1 f(x)dx| \le \int_0^1 |f(x)|dx \le \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

corrigé

Soit $f, g \in C([0,1],\mathbb{R})$ et soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On choisit deux suites de fonctions en escalier, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, convergeant uniformément vers f et g. La suite $(\alpha f_n + \beta g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite de fonction en escalier convergeant uniformément vers $\alpha f + \beta g$ (qui appartient bien à $C([0,1],\mathbb{R})$). En passant à la limite, quand $n \to \infty$ dans l'égalité $\int_0^1 (\alpha f_n + \beta g_n)(x)dx = \alpha \int_0^1 f_n(x)dx + \beta \int_0^1 g_n(x)dx$ (démontrée précédemment), on obtient $\int_0^1 (\alpha f + \beta g)(x)dx = \alpha \int_0^1 f(x)dx + \beta \int_0^1 g(x)dx$.

Enfin, si $f \in C([0,1],\mathbb{R})$. On choisit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f. On a déjà vu que $|\int_0^1 f_n(x)dx| \le \int_0^1 |f_n(x)|dx \le \|f_n\|_u$. On obtient les inégalités désirées en passant à la limite sur n, car $(|f_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions en escalier convergeant uniformément vers $|f|$ et $\|f_n\|_u \to \|f\|_u$ quand $n \to \infty$.

Corrigé 3 (Propriétés de l'intégrale des fonctions continues)
Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C([0,1],\mathbb{R})$ et $\varphi \in C([0,1],\mathbb{R})$. On suppose que $\varphi_n \to \varphi$ simplement quand $n \to \infty$.

1. Montrer que si $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |\varphi_n(x) - \varphi(x)|\,dx \to 0$, alors $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \varphi_n(x)\,dx = \int_0^1 \varphi(x)\,dx$.

   corrigé

   Ceci est une conséquence d'une inégalité vue dans l'exercice définissant l'intégrale d'une fonction continue :
$$|\int_0^1 (\varphi_n(x) - \varphi(x))dx| \le \int_0^1 |\varphi_n(x) - \varphi(x)|dx.$$

---

2. Montrer que si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers φ, alors $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \varphi_n(x)\,dx = \int_0^1 \varphi(x)\,dx$.

   corrigé

   Ceci est aussi une conséquence d'une inégalité vue dans l'exercice définissant l'intégrale d'une fonction continue :
$$|\int_0^1 (\varphi_n(x) - \varphi(x))dx| \le \|\varphi_n - \varphi\|_u.$$

---

3. Donner un exemple de suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers φ simplement, mais non uniformément, t.q. $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \varphi_n(x)\,dx = \int_0^1 \varphi(x)\,dx$.

   corrigé

   On prend, pour $n \ge 2$:

   $\varphi_n(x) = nx$, pour $x \in [0, \frac{1}{n}]$, $\varphi_n(x) = n(\frac{2}{n} - x)$, pour $x \in]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]$, $\varphi_n(x) = 0$, pour $x \in]\frac{2}{n}, 1]$.

   On a $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C([0,1],\mathbb{R})$. Pour tout $x \in [0,1]$, on a $\varphi_n(x) \to 0$ quand $n \to \infty$. La suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc simplement vers 0. Elle ne converge pas uniformément vers 0, car $\|\varphi_n\|_u = 1 \not\to 0$. On a bien $\int_0^1 \varphi_n(x)dx = \frac{1}{n} \to 0$ quand $n \to \infty$.

---

4. Donner un exemple de suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge simplement vers φ t.q. $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \varphi_n(x)\,dx \ne \int_0^1 \varphi(x)\,dx$.

   corrigé

   On prend, pour $n \ge 2$:

   $\varphi_n(x) = n^2x$, pour $x \in [0, \frac{1}{n}]$, $\varphi_n(x) = n^2(\frac{2}{n} - x)$, pour $x \in]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]$, $\varphi_n(x) = 0$, pour $x \in]\frac{2}{n}, 1]$.

   On a $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C([0,1],\mathbb{R})$. Pour tout $x \in [0,1]$, on a $\varphi_n(x) \to 0$ quand $n \to \infty$. La suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc simplement vers 0. Pourtant $\int_0^1 \varphi_n(x)dx = 1 \not\to 0$ quand $n \to \infty$.

---

5. Si la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait les deux conditions :

   (a) Pour tout ε, $0<\varepsilon<1$, $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers φ sur $[\varepsilon,1]$,

   (b) Les φ_n sont à valeurs dans $[-1,+1]$,

   montrer que $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1 \varphi_n(x)\,dx = \int_0^1 \varphi(x)\,dx.$

   corrigé

   Par la condition (a), la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers φ sur $]0,1]$. La condition (b) donne alors $\varphi(x)\in[-1,1]$ pour tout $x\in]0,1]$ (et donc aussi pour tout $x\in[0,1]$ car φ est continue sur $[0,1]$).

   Soit $\varepsilon>0$. On utilise maintenant le fait que $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^\varepsilon f(x)dx + \int_\varepsilon^1 f(x)dx$, pour tout $f\in C([0,1],\mathbb{R})$, pour obtenir :

$$|\int_0^1(\varphi_n(x)-\varphi(x))dx| \le 2\varepsilon + \max_{x\in[\varepsilon,1]}\{|\varphi_n(x)-\varphi(x)|\}.$$

   D'après (a), il existe n_0 t.q. $\max_{x\in[\varepsilon,1]}\{|\varphi_n(x)-\varphi(x)|\}\le\varepsilon$ pour $n\ge n_0$. On a donc $|\int_0^1(\varphi_n(x)-\varphi(x))dx|\le 3\varepsilon$ pour $n\ge n_0$. Ce qui prouve que $\int_0^1\varphi_n(x)\to\int_0^1\varphi(x)dx$ quand $n\to\infty$.

6. Vérifier que la suite de fonctions définies par $\varphi_n(x)=\dfrac{x\sqrt{n}}{1+nx^2}$ satisfait les conditions énoncées à la question 5. Donner l'allure générale du graphe de ces fonctions pour des petites valeurs de n; que devient le graphe lorsque $n\to\infty$?

   corrigé

   On a bien $\varphi_n\in C([0,1],\mathbb{R})$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Soit $\varepsilon>0$. Pour tout $x\in[\varepsilon,1]$ et tout $n\in\mathbb{N}$, on a $0\le\varphi_n(x)\le\frac{\sqrt{n}}{n\varepsilon^2}\to 0$ quand $n\to\infty$. La condition (a) de la question 5 est donc vérifiée. La condition (b) est également vérifiée en remarquant que $2x\sqrt{n}\le 1+nx^2$ pour tout $x\ge 0$ et $n\in\mathbb{N}$ (on a donc $\varphi_n(x)\in[0,\frac{1}{2}]$ pour tout $x\in[0,1]$ et tout $n\in\mathbb{N}$). La question 5 donne donc que $\int_0^1\varphi_n(x)dx\to 0$ quand $n\to\infty$.

   La fonction φ_n est croissante pour $x\in[0,\frac{1}{\sqrt{n}}]$, elle atteint son maximum en $x=\frac{1}{\sqrt{n}}$, ce maximum vaut $\frac{1}{2}$ (φ_n ne converge donc pas uniformément vers 0 quand $n\to\infty$). La fonction φ_n est ensuite décroissante pour $x\in[\frac{1}{\sqrt{n}},1]$ et tends vers 0 pour tout x.

7. On suppose maintenant que la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie l'hypothèse suivante:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1|\varphi_n(x)-\varphi(x)|^2dx=0. \tag{12.1}$$

   A-t-on $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1|\varphi_n(x)-\varphi(x)|dx=0$? [On pourra par exemple utiliser (après l'avoir démontrée) l'inégalité suivante: pour tout $\varepsilon>0$, il existe $c_\varepsilon\ge 0$, ne dépendant que de ε, t. q. $a\le\varepsilon+c_\varepsilon a^2$.]

---corrigé---

Soit $\varepsilon > 0$. On remarque que (pour $a \geq 0$) $a \leq \varepsilon + \frac{a^2}{\varepsilon}$ (en fait, on a même $2a \leq \varepsilon + \frac{a^2}{\varepsilon}$), le plus facile, pour s'en convaincre, est de remarquer que $a \leq \frac{a^2}{\varepsilon}$ si $a \geq \varepsilon$ (donc $a \leq \max\{\varepsilon, \frac{a^2}{\varepsilon}\}$)). On a donc

$$\int_0^1 |\varphi_n(x) - \varphi(x)|dx \leq \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 (\varphi_n(x) - \varphi(x))^2 dx.$$

Par l'hypothèse (12.1), Il existe n_0 t.q. le dernier terme de l'inégalité précédente soit inférieur à ε si $n \geq n_0$. On a donc $\int_0^1 |\varphi_n(x) - \varphi(x)|dx \leq 2\varepsilon$ si $n \geq n_0$. On a bien montré que $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |\varphi_n(x) - \varphi(x)|dx\, dx = 0$.

---

8. Même question que ci dessus en remplaçant l'hypothèse (12.1) par : $\exists p > 1; \lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p dx = 0$.

---corrigé---

la démonstration est identique à la précédente en remarquant que $a \leq \varepsilon + \frac{a^p}{\varepsilon^{p-1}}$, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $a \geq 0$.

---

9. On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\int_0^1 |\varphi_n(x)|^2 dx \leq C, \forall n \in \mathbb{N}, \tag{12.2}$$

et que la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[\varepsilon, 1]$, pour tout $\varepsilon > 0$. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 |\varphi_n(x) - \varphi(x)|dx = 0$.

---corrigé---

On utilise la même inégalité qu'à la question 7 avec $\varepsilon = \frac{1}{\delta}$, c'est-à-dire $a \leq \frac{1}{\delta} + \delta a^2$. On a donc, pour tout $x \in [0,1]$, $|\varphi_n(x)| \leq \frac{1}{\delta} + \delta|\varphi_n(x)|^2$.

On en déduit, pour $\eta \in]0,1]$, en intégrant sur l'intervalle $[0,\eta]$:

$$\int_0^\eta |\varphi_n(x)|dx \leq \frac{\eta}{\delta} + \delta\int_0^\eta |\varphi_n(x)|^2 dx,$$

et donc, avec (1.12),

$$\int_0^\eta |\varphi_n(x)|dx \leq \frac{\eta}{\delta} + \delta C.$$

De même, on a

$$\int_0^\eta |\varphi(x)|dx \leq \frac{\eta}{\delta} + \delta\int_0^1 \varphi^2(x)dx.$$

Soit $\varepsilon > 0$, on choisit $\delta > 0$ pour avoir $\delta C \leq \varepsilon$ et $\delta\int_0^1 \varphi^2(x)dx \leq \varepsilon$, puis, on choisit $\eta > 0$ pour avoir $\frac{\eta}{\delta} \leq \varepsilon$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^1 |\varphi_n(x) - \varphi(x)|dx \leq \int_\eta^1 |\varphi_n(x) - \varphi(x)|dx + 4\varepsilon.$$

Comme $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers φ sur $[\eta, 1]$, il existe n_0 t.q. $|\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in [\eta, 1]$ et tout $n \geq n_0$. On en déduit $\int_0^1 |\varphi_n(x) - \varphi(x)|dx \leq 5\varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$. Ce qui prouve que $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |\varphi_n(x) - \varphi(x)|dx = 0$.

---

10. Construire un exemple de suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui satisfasse aux hypothèses de la question précédente et qui ne soit pas bornée (donc qui ne satisfasse pas aux hypothèses de la question 5).

corrigé

On prend, pour $n \geq 2$:

$\varphi_n(x) = n\sqrt{n}x$, pour $x \in [0, \frac{1}{n}]$, $\varphi_n(x) = n\sqrt{n}(\frac{2}{n} - x)$, pour $x \in]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]$, $\varphi_n(x) = 0$, pour $x \in]\frac{2}{n}, 1]$.

On a $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C([0, 1], \mathbb{R})$. Pour tout $\varepsilon > 0$, $\varphi_n \to 0$ uniformément sur $[\varepsilon, 1]$ quand $n \to \infty$. Enfin, $\int_0^1 |\varphi_n(x)|^2 dx \leq 2$ (car $|\varphi_n(x)| \leq \sqrt{n}$ pour $x \in [0, \frac{2}{n}]$).

---

11. Peut-on remplacer l'hypothèse (12.2) par : il existe $p > 1$ et $C > 0$ t.q. $\displaystyle\int_0^1 |\varphi_n(x)|^p dx \leq C$, pour tout $n \in \mathbb{N}$?

corrigé

Oui, le raisonnement fait pour $p = 2$ s'adapte ici en remarquant que $a \leq \frac{1}{\delta} + \delta^{p-1}a^p$ (pour $\delta > 0$ et $a \geq 0$).

---

12. Peut-on remplacer l'hypothèse (12.2) par : il existe $C > 0$ t.q. $\displaystyle\int_0^1 |\varphi_n(x)|dx \leq C$, pour tout $n \in \mathbb{N}$?

corrigé

Non, il suffit de reprendre l'exemple de la question 4 :

$\varphi_n(x) = n^2x$, pour $x \in [0, \frac{1}{n}]$, $\varphi_n(x) = n^2(\frac{2}{n} - x)$, pour $x \in]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]$, $\varphi_n(x) = 0$, pour $x \in]\frac{2}{n}, 1]$.

Corrigé 4 (Normes définies par l'intégrale)

Soit $E = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de $[-1, +1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $\varphi \in E$, on pose $\|\varphi\|_1 = \int_{-1}^{+1} |\varphi(t)|\, dt$ et $\|\varphi\|_2 = \left(\int_{-1}^{+1} |\varphi(t)|^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}}$.

1. Montrer que $(E, \|\cdot\|_1)$ est un espace normé.

corrigé

Il est clair que $\|f\|_1 \in \mathbb{R}_+$ pour tout $f \in E$ et que $\|\alpha f\|_1 = |\alpha|\|f\|_1$, $\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $f, g \in E$.

Il reste à vérifier que $\|f\|_1 = 0$ implique $f = 0$. Pour le montrer, il suffit de remarquer que si $f \neq 0$, il existe $t \in [-1, 1]$ t.q. $a = f(t) \neq 0$ et donc, par continuité de f, il existe $\alpha, \beta \in [-1, 1]$, $\alpha < \beta$ et $f > a/2$ sur $[\alpha, \beta]$. D'où l'on déduit $\|f\|_1 \geq \frac{a}{2}(\beta - \alpha) > 0$.

---

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $\varphi_n \in E$ par

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 0 & si \quad -1 \leq x \leq 0 \\ nx & si \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 & si \quad \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

(a) Montrer que si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers φ dans $(E, \|\cdot\|_1)$, alors $\varphi(x) = 0$ si $x < 0$ et $\varphi(x) = 1$ si $x > 0$.

corrigé

On a $\int_{-1}^{0} |\varphi(x)|dx \leq \|\varphi_n - \varphi\|_1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En faisant tendre n vers ∞ on en déduit $\int_{-1}^{0} |\varphi(x)|dx = 0$ et donc (par continuité de φ) que $\varphi = 0$ sur $[-1, 0]$.

Soit $\varepsilon > 0$. On a aussi $\int_{\varepsilon}^{1} |\varphi(x) - 1|dx \leq \|\varphi_n - \varphi\|_1$ pour tout n t.q. $1/n \leq \varepsilon$. On en déduit, en faisant tendre n vers ∞ que $\int_{\varepsilon}^{0} |\varphi(x) - 1|dx = 0$ et donc $\varphi = 1$ sur $[\varepsilon, 1]$. Comme ε est arbitraire, on a finalement $\varphi = 1$ sur $]0, 1]$. Noter que ceci est en contradiction avec $\varphi = 0$ sur $[-1, 0]$ et la continuité de φ en 0. La suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge donc pas dans $(E, \|\cdot\|_1)$.

(b) En déduire que $(E, \|\cdot\|_1)$ n'est pas complet.

corrigé

La suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|_1)$ (il suffit de remarquer que $\|\varphi_n - \varphi_m\|_1 \leq \frac{1}{n}$ si $m \geq n$) et ne converge pas dans $(E, \|\cdot\|_1)$. L'espace $(E, \|\cdot\|_1)$ n'est donc pas complet.

---

3. Montrer que $(E, \|\cdot\|_2)$ est un espace préhilbertien (c'est-à-dire que sa norme est induite par un produit scalaire) mais n'est pas complet (ce n'est donc pas un espace de Hilbert).

corrigé

Pour $f, g \in E$, on pose $(f/g)_2 = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$. L'application $(f, g) \mapsto (f/g)_2$ est un produit scalaire sur E, c'est-à-dire que c'est une application bilinéaire de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$, symétrique et $(f/f)_2 = 0$ implique $f = 0$. Elle induit donc une norme sur E qui est justement le la norme $\|\cdot\|_2$, c'est-à-dire $\|f\|_2 = \sqrt{(f/f)_2}$. L'espace $(E, \|\cdot\|_2)$ est donc un espace préhilbertien (voir la partie du cours sur les espaces de Hilbert pour plus de précisions).

L'espace $(E, \|\cdot\|_2)$ n'est pas complet car la même suite qu'à la question précédente, $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, est de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|_2)$ (on a aussi $\|\varphi_n - \varphi_m\|_2 \leq \frac{1}{n}$ si $m \geq n$) et ne converge pas dans $(E, \|\cdot\|_2)$ (un raisonnement analogue à celui de la question précédente montre que si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers φ dans $(E, \|\cdot\|_2)$, alors $\varphi(x) = 0$ si $x < 0$ et $\varphi(x) = 1$ si $x > 0$, ce qui est en contradiction avec la continuité de φ en 0).

Corrigé 5 (Rappels sur la convergence des suites réelles)

1. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. On rappelle que $\limsup_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{p\geq n} u_p$. Montrer que $\limsup_{n\to\infty} u_n$ est la plus grande valeur d'adhérence de u.

corrigé

On note $a_n = \sup_{p\geq n} u_p \in \overline{\mathbb{R}}$. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante donc convergente dans $\overline{\mathbb{R}}$, ceci montre que $\limsup_{n\to\infty} u_n$ est bien définie. on pose $a = \lim_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} u_n$.

On montre tout d'abord que a est une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On distingue 3 cas :

Cas 1 Il existe $n \in \mathbb{N}$ t.q. $a_n = -\infty$.

On a alors $u_p = -\infty$ pour tout $p \geq n$ et donc $u_n \to -\infty$ et $a = -\infty$ est bien une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Cas 2 $a_n = \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\sup_{p\geq n} u_p = \infty$, il existe donc $\varphi(n) \geq n$ t.q. $u_{\varphi(n)} \geq n$. La suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une sous suite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, elle converge vers $a = \infty$, donc a est bien une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Cas 3 $a_n > -\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et il existe $q \in \mathbb{N}$ t.q. $a_q < \infty$.

Dans ce cas, on a $a_n \in \mathbb{R}$ pour tout $n \geq q$. Pour tout $n \geq q$, il existe $\varphi(n) \geq n$ t.q. $a_n - \frac{1}{n} \leq u_{\varphi(n)} \leq a_n$ (par définition d'un sup). La suite $(u_{\varphi(n)})_{n\geq q}$ est donc une sous suite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, elle converge vers $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, donc a est bien une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Il reste à montrer que a est supérieur ou égal à toutes les valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit b une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il existe donc $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ t.q. $\varphi(n) \to \infty$ et $u_{\varphi(n)} \to b$, quand $n \to \infty$. Comme $a_{\varphi(n)} \geq u_{\varphi(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc, en passant à limite quand $n \to \infty$, $a \geq b$. a est donc la plus grande valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

---

2. Si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, on sait (conséquence du résultat de la question précédente) qu'il existe une suite extraite de u qui converge vers $\limsup_{n\to\infty} u_n$. Donner un exemple d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ t.q. aucune sous suite ne converge simplement vers $\limsup_{n\to\infty} f_n$ (qui est définie par $(\limsup_{n\to\infty} f_n)(x) = \limsup_{n\to\infty}(f_n(x))$ pour tout $x \in \mathbb{R}$).

corrigé

Comme $\mathrm{card}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = \mathrm{card}(\mathbb{R})$, il existe $\psi : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ bijective. On définit maintenant f_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$,

- Si le cardinal de $\psi(x)$ est fini, on prend $f_n(x) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Si le cardinal de $\psi(x)$ est infini, on peut écrire $\psi(x) = \{\varphi_x(p), p \in \mathbb{N}\}$ où φ_x est une fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. on prend alors $f_n(x) = 1$ si $n \notin \psi(x)$, $f_n(x) = 1$ si $n = \varphi_x(2q)$ avec $q \in \mathbb{N}$ et $f_n(x) = 0$ si $n = \varphi_x(2q+1)$ avec $q \in \mathbb{N}$.

Avec ce choix de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\limsup_{n\to\infty} f_n$ est la fonction constante et égale à 1. On montre maintenant que aucune sous suite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge simplement vers $\limsup_{n\to\infty} f_n$. En effet, soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ t.q. $\varphi(n) \to \infty$ quand $n \to \infty$. Il existe $x \in \mathbb{R}$ t.q. $\psi(x) = \text{Im}(\varphi)$ (car ψ est surjective). Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on peut trouver $n \geq p$ t.q. $\varphi(n) = \varphi_x(2q+1)$ pour un certain $q \in \mathbb{N}$ (car $\{\varphi(0), \ldots, \varphi(p-1)\}$ ne peut pas contenir $\{\varphi_x(2q+1),\, q \in \mathbb{N}\}$), on a donc $f_{\varphi(n)}(x) = 0$, ce qui montre que $f_{\varphi(n)}(x) \not\to 1$ quand $n \to \infty$. La sous suite $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge donc pas simplement vers $\limsup_{n\to\infty} f_n$.

---

3. Trouver l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.q.:

   $\liminf_{n\to\infty} u_n = 0$, $\limsup_{n\to\infty} u_n = 1$ et $\lim_{n\to\infty} |u_{n+1} - u_n| = 0$.

   Donner un exemple d'une telle suite.

   corrigé

   On note A l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. D'après la question 1 (et son analogue avec lim inf) on a $0, 1 \in A$ et $A \subset [0,1]$. On montre maintenant que $A = [0,1]$.

   Soit $a \in]0,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, il existe $p \geq n$ t.q. $u_p > a$ (car $\sup_{p\geq n} u_p \geq 1$). De même, il existe $q > p$ t.q. $u_q < a$ (car $\inf_{q\geq p} u_q \leq 0$). On pose $\varphi(n) = \min\{q > p;\ u_q < a\}$. On a donc $u_{\varphi(n)} < a \leq u_{\varphi(n)-1}$ (noter que ceci est aussi vrai si $q = p+1$, grâce au choix de p). Comme $|u_{\varphi(n)} - u_{\varphi(n)-1}| \to 0$ quand $n \to \infty$ (noter que $\varphi(n) \to \infty$ quand $n \to \infty$ car $\varphi(n) > n$), on a $u_{\varphi(n)} \to a$ quand $n \to \infty$ et donc $a \in A$. ceci prouve que $A = [0,1]$.

   On obtient un exemple d'une telle suite de la manière suivante :

   Pour $n \in \mathbb{N}$ il existe un unique (p,q) avec $p \in \mathbb{N}$, $0 \leq q \leq p$ t.q. $n = \frac{p(p+1)}{2} + q$, on pose alors $u_n = \frac{q}{p+1}$ si $p = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$, et $u_n = \frac{p-q}{p+1}$ si $p = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$.

Corrigé 6 (Fonctions caractéristiques d'ensembles)
Soit E un ensemble. Lorsque A est une partie de E, on définit $\mathbf{1}_A : E \to \mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} &\mathbf{1}_A(x) = 1, \text{ si } x \in A, \\ &\mathbf{1}_A(x) = 0, \text{ si } x \notin A. \end{aligned} \tag{12.3}$$

$\mathbf{1}_A$ est appelée "fonction caractéristique de A" (elle est souvent aussi notée χ_A).

1. Montrer que si A et B sont deux sous-ensembles disjoints de E, alors $\mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B$. En déduire que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de sous-ensembles de E deux à deux disjoints, on a $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{1}_{A_n} = \mathbf{1}_{\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n}$ (on précisera aussi le sens donné à "$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{1}_{A_n}$").

   corrigé

   Si A et B sont 2 parties de E, il est facile de voir que $\mathbf{1}_{A\cup B}(x)$ est différent de $\mathbf{1}_A(x) + \mathbf{1}_B(x)$ seulement si $x \in A \cap B$. Si A et B sont deux parties disjointes de E, on a bien $\mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B$.

   Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de parties de E, on définit, pour $x \in E$:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{1}_{A_n}(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{p=0}^{n} \mathbf{1}_{A_n}(x),$$

cette limite existe toujours dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Si les (A_n) sont disjoints 2 à 2, cette limite est 0 si $x \notin \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et est 1 si $x \in \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ (car x appartient alors à un seul A_n).

---

2. Montrer que si $B \subset A \subset E$, on a $\mathbf{1}_{A\setminus B} = \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B$.

corrigé

Si $x \in B$, on a $\mathbf{1}_{A\setminus B}(x) = \mathbf{1}_A(x) - \mathbf{1}_B(x) = 0$,

Si $x \in A \setminus B$, on a $\mathbf{1}_{A\setminus B}(x) = \mathbf{1}_A(x) - \mathbf{1}_B(x) = 1$,

Si $x \in A^c$, on a $\mathbf{1}_{A\setminus B}(x) = \mathbf{1}_A(x) - \mathbf{1}_B(x) = 0$,

ceci donne bien $\mathbf{1}_{A\setminus B} = \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B$.

---

3. Montrer que, pour A et B sous-ensembles de E, on a $\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$.

corrigé

Si $x \in A \cap B$, on a $\mathbf{1}_{A\cap B}(x) = \mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_B(x) = 1$,

Si $x \in (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$, on a $\mathbf{1}_{A\cap B}(x) = \mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_B(x) = 0$,

ceci donne bien $\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$.

---

4. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction ne prenant qu'un nombre fini de valeurs. Montrer que f s'écrit comme combinaison linéaire de fonctions caractéristiques.

corrigé

Soit $a_1,\ldots,a_n$ les valeurs prises par f (noter que $a_i \neq a_j$ si $i \neq j$). On pose alors $A_i = \{x \in E;\ f(x) = a_i\}$. On voit alors que $f = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A_i}$.

Corrigé 7 (Limite uniforme dans $\mathbb{R}$)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f (de sorte que $f \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$).

(a) On suppose que, pour $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{a\to+\infty} \int_0^a f_n(x)\,dx$ existe dans $\mathbb{R}$. On note $\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$ cette limite.

Montrer, en donnant un exemple, que $\lim_{a\to+\infty} \int_0^a f(x)\,dx$ peut ne pas exister dans $\mathbb{R}$.

corrigé

Pour $n \geq 1$, on définit f_n par :

$f_n(x) = 1$, si $0 \leq x < 1$,
$f_n(x) = \frac{1}{x}$, si $1 \leq x \leq n$;
$f_n(x) = n + \frac{1}{n} - x$, si $n < x < n + \frac{1}{n}$,
$f_n(x) = 0$, si $x \geq n + \frac{1}{n}$.

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f défnie par :
$f(x) = 1$, si $0 \le x < 1$, $f(x) = \frac{1}{x}$, si $1 \le x$.
Plus précisément, on a $\|f_n - f\|_u \le \frac{1}{n} \to 0$ quand $n \to \infty$.
D'autre part, pour $a \ge 1$, $\int_0^a f(x)\,dx = 1 + \log(a) \to \infty$ quand $a \to \infty$.

(b) On suppose de plus que $\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$ existe dans $\mathbb{R}$ et que $\lim_{a\to+\infty} \int_0^a f(x)\,dx$ existe dans $\mathbb{R}$. On note alors $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ cette dernière limite. A-t-on

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx \quad ?$$

corrigé

Pour $n \ge 1$, on définit f_n par :

$f_n(x) = \frac{1}{n}$, si $0 \le x < n$,
$f_n(x) = n + \frac{1}{n} - x$, si $n < x < n + \frac{1}{n}$,
$f_n(x) = 0$, si $x \ge n + \frac{1}{n}$.

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 car $\|f_n\|_u = \frac{1}{n} \to 0$ quand $n \to \infty$, mais $1 \le \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx \not\to 0$ quand $n \to \infty$.

Corrigé 8 (Limites sup et inf d'ensembles)
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties d'un ensemble E. On note

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{p\ge n} A_p \quad \text{et} \quad \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{p\ge n} A_p.$$

1. On suppose la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monotone, c'est-à-dire que $A_n \subset A_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, ou que $A_{n+1} \subset A_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Que sont $\liminf_{n\to\infty} A_n$ et $\limsup_{n\to\infty} A_n$?

corrigé

On suppose que $A_n \subset A_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on alors $\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

On suppose que $A_{n+1} \subset A_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on alors $\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n = \cap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

---

2. Même question que précédemment si la suite est définie par : $A_{2p} = A$ et $A_{2p+1} = B$, $p \in \mathbb{N}$, A et B étant deux parties données de E.

corrigé

Dans ce cas, on a $\liminf_{n\to\infty} A_n = A \cap B$ et $\limsup_{n\to\infty} A_n = A \cup B$.

---

3. Montrer que:

$$1_{\limsup_{n\to\infty} A_n} = \limsup_{n\to\infty} 1_{A_n} \ ,$$

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n \ ,$$

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \{x \in E; \sum_{n=0}^{+\infty} 1_{A_n^c}(x) < \infty\} \ ,$$

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \{x \in E; \sum_{n=0}^{+\infty} 1_{A_n}(x) = \infty\} \ .$$

corrigé

On remarque d'abord que, si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$, $1_{\cap_{n\in\mathbb{N}} B_n} = \inf_{n\in\mathbb{N}} 1_{B_n}$ et $1_{\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n} = \sup_{n\in\mathbb{N}} 1_{B_n}$.

- Soit $x \in E$,

$$1_{\limsup_{n\to\infty} A_n}(x) = 1_{\cap_{n\in\mathbb{N}}\cup_{p\geq n} A_p}(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} 1_{\cup_{p\geq n} A_p}(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}}(\sup_{p\geq n} 1_{A_p}(x)) = \lim_{n\to\infty}(\sup_{p\geq n} 1_{A_p}(x)) = \limsup_{n\to\infty} 1_{A_p}(x).$$

  Donc $1_{\limsup_{n\to\infty} A_n} = \limsup_{n\to\infty} 1_{A_n}$.

  De même, soit $x \in E$,

$$1_{\liminf_{n\to\infty} A_n}(x) = 1_{\cup_{n\in\mathbb{N}}\cap_{p\geq n} A_p}(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} 1_{\cap_{p\geq n} A_p}(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}}(\inf_{p\geq n} 1_{A_p}(x)) = \lim_{n\to\infty}(\inf_{p\geq n} 1_{A_p}(x)) = \liminf_{n\to\infty} 1_{A_p}(x).$$

  Donc $1_{\liminf_{n\to\infty} A_n} = \liminf_{n\to\infty} 1_{A_n}$.

- Si $x \in \liminf_{n\to\infty} A_n$, il existe $n \in \mathbb{N}$ t.q. $x \in \cap_{p\geq n} A_p$, donc $x \in \cup_{p\geq m} A_p$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ (on a, par exemple, $x \in A_p$ avec $p = \max\{m, n\}$). On en déduit $x \in \cap_{m\in\mathbb{N}} \cup_{p\geq m} A_p = \limsup_{n\to\infty} A_n$. Donc $\liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n$.
- Soit $x \in E$. On voit que $x \in \liminf_{n\to\infty} A_n$ si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}$ t.q. $x \in A_p$ pour tout $p \geq n$, ce qui est équivalent à dire que x n'appartient à A_n^c que pour un nombre fini de n ou encore que $\sum_{n=0}^{+\infty} 1_{A_n^c}(x) < \infty$. On a donc bien $\liminf_{n\to\infty} A_n = \{x \in E; \sum_{n=0}^{+\infty} 1_{A_n^c}(x) < \infty\}$.
- Soit $x \in E$. On voit que $x \in \limsup_{n\to\infty} A_n$ si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $p \geq n$ t.q. $x \in A_p$, ce qui est équivalent à dire que x n'appartient à A_n que pour un nombre infini de n ou encore que $\sum_{n=0}^{+\infty} 1_{A_n}(x) = \infty$. On a donc bien $\limsup_{n\to\infty} A_n = \{x \in E; \sum_{n=0}^{+\infty} 1_{A_n}(x) = \infty\}$.

12.2 Exercices du chapitre 2

12.2.1 Tribus

Corrigé 9 (Caractérisation d'une tribu)
Soit E un ensemble.

1. Soit T une partie de $\mathcal{P}(E)$ stable par union dénombrable, stable par passage au complémentaire et t.q. $\emptyset \in T$. Montrer que T est une tribu, c'est-à-dire qu'elle vérifie aussi $E \in T$ et qu'elle est stable par intersection dénombrable.

corrigé

- $E \in T$ car $E = \emptyset^c$ et que T est stable par passage au complémentaire.
- T est stable par intersection dénombrable car, si $(A_n) \subset T$, on a $(\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n)^c = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c \in T$ (car T est stable par passage au complémentaire et par union dénombrable) et donc $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T$ (car T est stable par passage au complémentaire).

---

2. L'ensemble des parties finies de E est-il une tribu ?

corrigé

- Si E est fini, l'ensemble des parties finies de E est une tribu, c'est la tribu $\mathcal{P}(E)$.
- Si E est infini, l'ensemble des parties finies de E n'est pas une tribu, car il n'est pas stable par passage au complémentaire (le complémentaire d'une partie finie est infinie. . .).

Corrigé 10 (Tribu engendrée)
Soit E un ensemble.

1. Montrer qu'une intersection quelconque de tribus sur E est une tribu sur E.

corrigé

Soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille de tribus sur I (I est un ensemble quelconque). On pose $T = \{A \subset E; A \in T_i$ pour tout $i \in I\}$ (T est bien l'intersection des tribus T_i, $i \in I$). On montre que T est une tribu :

- $\emptyset \in T$ car $\emptyset \in T_i$ pour tout $i \in I$.
- T est stable par complémentaire car, si $A \subset T$, on a $A \in T_i$ pour tout $i \in I$, donc $A^c \in T_i$ pour tout $i \in I$ (car T_i est stable par passage au complémentaire), donc $A^c \in T$.
- T est stable par union dénombrable car, si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$, on a $A_n \in T_i$ pour tout $i \in I$ et tout $n \in \mathbb{N}$ donc $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T_i$ pour tout $i \in I$ et tout $n \in \mathbb{N}$ (car T_i est stable par union dénombrable), donc $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T$,

d'après l'exercice précédent, on en déduit que T est une tribu.

---

2. Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$. On note $T_{\mathcal{A}}$ l'intersection de toutes les tribus sur E contenant $\mathcal{A}$ (une partie de E appartient donc à $T_{\mathcal{A}}$ si et seulement si elle appartient à toutes les tribus contenant $\mathcal{A}$, on remarquera qu'il y a toujours au moins une tribu contenant $\mathcal{A}$, c'est la tribu $\mathcal{P}(E)$). Montrer que $T_{\mathcal{A}}$ est la plus petite des tribus contenant $\mathcal{A}$ (c'est la tribu engendrée par $\mathcal{A}$).

corrigé

D'après la question précédente, $T_{\mathcal{A}}$ est bien une tribu. La définition de $T_{\mathcal{A}}$ donne que toute tribu contenant $\mathcal{A}$ doit contenir $T_{\mathcal{A}}$. $T_{\mathcal{A}}$ est donc la plus petite tribu contenant $\mathcal{A}$.

---

3. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(E)$ et $T_{\mathcal{A}}$, $T_{\mathcal{B}}$ les tribus engendrées par $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. Montrer que si $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ alors $T_{\mathcal{A}} \subset T_{\mathcal{B}}$.

corrigé

$T_{\mathcal{B}}$ est une tribu contenant $\mathcal{B}$, donc contenant $\mathcal{A}$. Donc $T_{\mathcal{A}} \subset T_{\mathcal{B}}$.

Corrigé 11 (Exemples de Tribus)

1. Tribu trace

(a) Soit $\mathcal{T}$ une tribu sur un ensemble E et $F \subset E$. Montrer que $\mathcal{T}_F = \{A \cap F, A \in \mathcal{T}\}$ est une tribu sur F (tribu trace de $\mathcal{T}$ sur F).

corrigé

- $\emptyset \in \mathcal{T}_F$ car $\emptyset = \emptyset \cap F$ et $\emptyset \in \mathcal{T}$.
- Soit $A \in \mathcal{T}_F$. Il existe $B \in \mathcal{T}$ t.q. $A = B \cap F$. On a donc $F \setminus A = (E \setminus B) \cap F \in \mathcal{T}_F$ car $E \setminus B \in \mathcal{T}$. $\mathcal{T}_F$ est donc stable par passage au complémentaire.
- Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}_F$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $B_n \in T$ t.q. $A_n = B_n \cap F$. On a donc $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n = (\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n) \cap F \in \mathcal{T}_F$ car $\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{T}$. $\mathcal{T}_F$ est donc stable par union dénombrable.

Ceci est suffisant pour dire que $\mathcal{T}_F$ est une tribu sur F.

(b) Si E est un espace topologique et $\mathcal{T} = \mathcal{B}(E)$ ($\mathcal{B}(E)$ est la tribu borélienne de E), montrer que la tribu trace sur F, notée T_F, est la tribu engendrée par la topologie trace sur F (tribu borélienne de F, notée $\mathcal{B}(F)$). [Montrer que $\mathcal{B}(F) \subset T_F$. Pour montrer que $T_F \subset \mathcal{B}(F)$, considérer $\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{P}(E);\, A \cap F \in \mathcal{B}(F)\}$ et montrer que $\mathcal{C}$ est une tribu (sur E) contenant les ouverts de E.] Si F est un borélien de E, montrer que T_F est égale à l'ensemble des boréliens de E contenus dans F.

corrigé

On note $\mathcal{O}_F$ l'ensemble des ouverts de F, et $\mathcal{O}_E$ l'ensemble des ouverts de E. Par définition de la topologie trace, $\mathcal{O}_F = \{O \cap F, O \in \mathcal{O}_E\}$.

Comme $\mathcal{O}_E \subset \mathcal{B}(E)$, on a $\mathcal{O}_F \subset T_F = \{B \cap F, B \in \mathcal{B}(E)\}$ (Noter que $T_F = \mathcal{B}(E)_F$, avec les notations de la question précédente). On en déduit que $\mathcal{B}(F) \subset T_F$ car T_F est une tribu sur F contenant $\mathcal{O}_F$ qui engendre $\mathcal{B}(F)$.

On montre maintenant que $T_F \subset \mathcal{B}(F)$. On pose $\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{P}(E);\ A \cap F \in \mathcal{B}(F)\}$. $\emptyset \in \mathcal{C}$ car $\emptyset \cap F = \emptyset \in \mathcal{B}(F)$. $\mathcal{C}$ est stable par passage au complémentaire car, si $A \in \mathcal{C}$, on a $(E \setminus A) \cap F = F \setminus A = F \setminus (A \cap F) \in \mathcal{B}(F)$, donc $(E \setminus A) \in \mathcal{C}$. Enfin, pour montrer que $\mathcal{C}$ est stable par union dénombrable, soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$, on a $(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \cap F = \cup_{n\in\mathbb{N}}(A_n \cap F) \in \mathcal{B}(F)$, ce qui donne $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{C}$ et la stabilité de $\mathcal{C}$ par union dénombrable. $\mathcal{C}$ est donc une tribu. Il est clair que $\mathcal{O}_E \subset \mathcal{C}$ car si $O \in \mathcal{O}_E$, on a $O \cap F \in \mathcal{O}_F \subset \mathcal{B}(F)$. La tribu $\mathcal{C}$ contient $\mathcal{O}_E$, ce qui prouve que $\mathcal{C}$ contient $\mathcal{B}(E)$ et donc que $A \cap F \in \mathcal{B}(F)$ pour tout $A \in \mathcal{B}(E)$. Ceci donne exactement $T_F \subset \mathcal{B}(F)$. On a bien montré finalement que $T_F = \mathcal{B}(F)$ (on rappelle que $T_F = \mathcal{B}(E)_F$, avec les notations de la question précédente).

On suppose maintenant que F est un borélien de E, c'est-à-dire que $F \in \mathcal{B}(E)$. On a alors $T_F \subset \mathcal{B}(E)$ (car $A \cap F \in \mathcal{B}(E)$ si $A \in \mathcal{B}(E)$). Puis, soit $A \subset F$ t.q. $A \in \mathcal{B}(E)$, on peut écrire $A = A \cap F$, donc $A \in T_F$. On a bien montré que $T_F = \{A \subset F;\ A \in \mathcal{B}(E)\}$.

---

2. Soit E un ensemble infini et $S = \{\{x\}, x \in E\}$. Déterminer la tribu engendrée par S (distinguer les cas E dénombrable et non dénombrable).

corrigé

On note $T(S)$ la tribu engendrée par S.

- On suppose que E est au plus dénombrable (c'est-à-dire dire fini ou dénombrable). D'après la stabilité de $T(S)$ par union dénombrable, la tribu $T(S)$ doit contenir toutes les parties au plus dénombrables. Comme toutes les parties de E sont au plus dénombrables, on en déduit $T(S) = \mathcal{P}(E)$.
- On suppose maintenant que E est infini non dénombrable. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties de E au plus dénombrables et $\mathcal{B} = \{A^c,\ A \in \mathcal{A}\}$. D'après la stabilité de $T(S)$ par union dénombrable, la tribu $T(S)$ doit contenir $\mathcal{A}$. Par stabilité de $T(S)$ par passage au complémentaire, $T(S)$ doit aussi contenir $\mathcal{B}$.

  on va montrer maintenant que $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ est une tribu (on en déduit que $T(S) = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$). On a $\emptyset \in \mathcal{A} \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ et il est clair que $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ est stable par passage au complémentaire (car $A \in \mathcal{A}$ implique $A^c \in \mathcal{B}$ et $A \in \mathcal{B}$ implique $A^c \in \mathcal{A}$). Enfin, si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, on distingue 2 cas :

  1er cas. Si $A_n \in \mathcal{A}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A} \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

  2eme cas. Si il existe $n \in \mathbb{N}$ t.q. $A_n \in \mathcal{B}$ on a alors $A_n^c \in \mathcal{A}$, donc A_n^c est au plus dénombrable et $(\cup_{p\in\mathbb{N}} A_p)^c = \cap_{p\in\mathbb{N}} A_p^c \subset A_n^c$ est aussi au plus dénombrable,ce qui donne $(\cup_{p\in\mathbb{N}} A_p)^c \in \mathcal{A}$ et $\cup_{p\in\mathbb{N}} A_p \in \mathcal{B} \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

  On a bien montré que $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Ce qui prouve la stabilité par union dénombrable de $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Finalement, $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ est donc une tribu contenant S et contenu dans $T(S)$, ceci donne $T(S) = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

Corrigé 12 (Tribu image)
Soient E et F des ensembles. Pour $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ (resp. $\mathcal{P}(F)$) on note $T(\mathcal{A})$ la tribu de E (resp. F) engendrée par $\mathcal{A}$.
Soit $f\ : E\ \to F$ une application.

1. Montrer que si $\mathcal{T}'$ est une tribu sur F, alors $f^{-1}(\mathcal{T}') = \{f^{-1}(B);\ B \in \mathcal{T}'\}$ est une tribu sur E (tribu image réciproque).

corrigé

On démontre que $f^{-1}(\mathcal{T}')$ est une tribu sur E en remarquant que $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $E \setminus f^{-1}(A) = f^{-1}(F \setminus A)$ (pour tout $A \subset F$) et $f^{-1}(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \cup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_n)$ (pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(F)$).

---

2. Montrer que si $\mathcal{T}$ est une tribu sur E, alors $\mathcal{T}' = \{B \subset F;\ f^{-1}(B) \in \mathcal{T}\}$ est une tribu sur F (tribu image directe).

corrigé

Ici aussi, on montre que $\mathcal{T}'$ est une tribu sur F en remarquant que $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A)$ (pour tout $A \subset F$) et $f^{-1}(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \cup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_n)$ (pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(F)$).

Noter que, en général, $\{f(B),\ B \in \mathcal{T}\}$ n'est pas une tribu sur F (par exemple, si f est non surjective, $F \notin \{f(B),\ B \in \mathcal{T}\}$).

---

3. Montrer que pour tout ensemble $\mathcal{C}$ de parties de F on a : $T(f^{-1}(\mathcal{C})) = f^{-1}(T(\mathcal{C}))$. [*Montrer que* $T(f^{-1}(\mathcal{C})) \subset f^{-1}(T(\mathcal{C}))$. *Puis, pour montrer que* $f^{-1}(T(\mathcal{C})) \subset T(f^{-1}(\mathcal{C}))$, *montrer que* $T = \{G \subset F;\ f^{-1}(G) \in T(f^{-1}(\mathcal{C}))\}$ *est une tribu contenant* $\mathcal{C}$.]

corrigé

$f^{-1}(T(\mathcal{C}))$ est une tribu sur E (d'après la première question) contenant $f^{-1}(\mathcal{C})$ (car $T(\mathcal{C}) \supset \mathcal{C}$), elle contient donc $T(f^{-1}(\mathcal{C}))$, ce qui donne $f^{-1}(T(\mathcal{C})) \supset T(f^{-1}(\mathcal{C}))$.

Pour montrer l'inclusion inverse, c'est-à-dire $f^{-1}(T(\mathcal{C})) \subset T(f^{-1}(\mathcal{C}))$. On pose $T = \{G \subset F;\ f^{-1}(G) \in T(f^{-1}(\mathcal{C}))\}$. On montre d'abord que T est une tribu :

- $\emptyset \in T$ car $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in T(f^{-1}(\mathcal{C}))$
- T est stable par passage au complémentaire car, si $A \in T$, on a $f^{-1}(A) \in T(f^{-1}(\mathcal{C}))$ et $f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A) \in T(f^{-1}(\mathcal{C}))$, donc $(F \setminus A) \in T$.
- T est stable par union dénombrable car, si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$, on a $f^{-1}(A_n) \in T(f^{-1}(\mathcal{C}))$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $f^{-1}(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \cup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_n) \in T(f^{-1}(\mathcal{C}))$, donc $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T$.

On a bien montré que T est une tribu. Il est immédiat que $T \supset \mathcal{C}$ (car $f^{-1}(B) \in T(f^{-1}(\mathcal{C}))$ pour tout $B \in \mathcal{C}$). On en déduit que T contient $T(\mathcal{C})$, c'est-à-dire que $f^{-1}(B) \in T(f^{-1}(\mathcal{C}))$ pour tout $B \in T(\mathcal{C})$. Ceci signifie exactement que $f^{-1}(T(\mathcal{C})) \subset T(f^{-1}(\mathcal{C}))$.

Les 2 inclusions nous donnent bien $f^{-1}(T(\mathcal{C})) = T(f^{-1}(\mathcal{C}))$.

Corrigé 13 (Tribu borélienne de $\mathbb{R}^2$)

On note T la tribu (sur $\mathbb{R}^2$) engendrée par $\{A \times B;\ A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. On va montrer ici que $T = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

1. Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}^2$ est réunion au plus dénombrable de produits d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. [S'inspirer d'une démonstration analogue faite pour $\mathbb{R}$ au lieu de $\mathbb{R}^2$.] En déduire que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \subset T$.

---corrigé---

On s'inspire ici de la démonstration du lemme 2.1 (on peut reprendre aussi la démonstration de l'exercice 14).

Soit O un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Pour tout $x = (x_1, x_2)^t \in O$, il existe $r > 0$ t.q. $]x_1 - r, x_1 + r[\times]x_2 - r, x_2 + r[\subset O$. Comme les rationnels sont denses dans $\mathbb{R}$, on peut trouver $y_1 \in \mathbb{Q}\cap]x_1 - r, x_1[$, $z_1 \in \mathbb{Q}\cap]x_1, x_1 + r[$, $y_2 \in \mathbb{Q}\cap]x_2 - r, x_2[$ et $z_2 \in \mathbb{Q}\cap]x_2, x_2 + r[$. On a donc $x \in]y_1, z_1[\times]y_2, z_2[\subset O$.

On note alors $I = \{(y_1, z_1, y_2, z_2) \in \mathbb{Q}^4;\ ]y_1, z_1[\times]y_2, z_2[) \subset O\}$. Pour tout $x \in O$, il existe donc $(y_1, z_1, y_2, z_2) \in I$ t.q. $x \in]y_1, z_1[\times]y_2, z_2[$. On en déduit que

$$O = \cup_{(y_1,z_1,y_2,z_2)\in I}]y_1, z_1[\times]y_2, z_2[.$$

Comme I est au plus dénombrable (car $\mathbb{Q}^4$ est dénombrable), on en déduit que $O \in T$. On a ainsi montré que T est une tribu contenant tous les ouverts de $\mathbb{R}^2$, et donc contenant la tribu engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}^2$ (c'est-à-dire $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$). Donc, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \subset T$.

---

2. Soit A un ouvert de $\mathbb{R}$ et $T_1 = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R});\ A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\}$. Montrer que T_1 est une tribu (sur $\mathbb{R}$) contenant les ouverts (de $\mathbb{R}$). En déduire que $T_1 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

---corrigé---

- $\emptyset \in T_1$ car $A \times \emptyset = \emptyset \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.
- On montre ici que T_1 est stable par passage au complémentaire.

  Soit $B \in T_1$, on a donc $B^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $A \times B^c = A \times (\mathbb{R} \setminus B) = (A \times \mathbb{R}) \setminus (A \times B)$. Or, $(A \times \mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (car A et $\mathbb{R}$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$), on a donc $(A \times \mathbb{R}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. D'autre part, $(A \times B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ (car $B \in T_1$). Donc, $A \times B^c = (A \times \mathbb{R}) \setminus (A \times B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Ce qui prouve que $B^c \in T_1$ et donc que T_1 est stable par passage au complémentaire.
- Enfin, T_1 est stable par union dénombrable. En effet, si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T_1$, on a $A \times (\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \cup_{n\in\mathbb{N}} A \times B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ (car $A \times B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). Donc, $\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in T_1$.

On a donc montré que T_1 est une tribu, il reste à montrer que T_1 contient les ouverts de $\mathbb{R}$.

Soit B un ouvert de $\mathbb{R}$. On a donc $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et, comme $A \times B$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, on a $A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. On a donc $B \in T_1$.

T_1 est donc une tribu contenant les ouverts de $\mathbb{R}$, donc contenant $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Donc, $T_1 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

La conséquence de cette question est donc :

$$A \text{ ouvert de } \mathbb{R} \text{ et } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2). \tag{12.4}$$

---

3. Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $T_2 = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R});\ A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\}$. Montrer que $T_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

---corrigé---

On commence par remarquer que la question précédente donne que T_2 contient les ouverts de $\mathbb{R}$. En effet, soit A un ouvert de $\mathbb{R}$, la propriété (12.4) donne $A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, et donc $A \in T_2$.

On montre maintenant que T_2 est une tribu (on en déduira que $T_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$).

- $\emptyset \in T_2$ car $\emptyset \times B = \emptyset \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.
- On montre ici que T_2 est stable par passage au complémentaire.

  Soit $A \in T_2$, on a $A^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $A^c \times B = (\mathbb{R} \times B) \setminus (A \times B)$. La propriété (12.4) donne $(\mathbb{R} \times B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ car $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. D'autre part, $(A \times B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ (car $A \in T_2$). Donc, $A^c \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Ce qui prouve que $A^c \in T_2$ et donc que T_2 est stable par passage au complémentaire.
- Enfin, T_2 est stable par union dénombrable. En effet, si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T_2$, on a $(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \times B = \cup_{n\in\mathbb{N}}(A_n \times B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ (car $A_n \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). Donc, $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T_2$.

T_2 est donc une tribu (sur $\mathbb{R}$) contenant les ouverts de $\mathbb{R}$, ce qui prouve que $T_2 \supset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et donc, finalement, $T_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

---

4. Montrer que $T \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ (et donc que $T = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$).

corrigé

La question précédente donne :

$$A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2).$$

On a donc $\{A \times B;\ A,\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. On en déduit $T \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Avec la question 1, on a finalement $T = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

Corrigé 14 (Tribu borélienne sur $\mathbb{R}^N$)

1. Montrer que la tribu borélienne de $\mathbb{R}^N$ est égale à celle engendrée par l'ensemble de toutes les boules ouvertes de $\mathbb{R}^N$. [On pourra montrer d'abord que tout ouvert de $\mathbb{R}^N$ est réunion dénombrable de boules ouvertes de $\mathbb{R}^N$.]

corrigé

Soit T la tribu engendrée par l'ensemble de toutes les boules ouvertes de $\mathbb{R}^N$. Comme les boules ouvertes sont des ouverts, on a $T \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

On montre maintenant l'inclusion inverse, c'est-à-dire $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \subset T$. Soit O un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Pour tout $x \in O$, il existe $r > 0$ t.q. $B(x,r) \subset O$ (où $B(x,r)$ déisgne la boule ouverte de centre x et rayon r). Comme les rationnels sont denses $\mathbb{R}$, on peut donc trouver $y \in \mathbb{Q}^N$ et $s \in \mathbb{Q}_+^\star = \{t \in \mathbb{Q};\ t > 0\}$, t.q. $x \in B(y,s) \subset O$. On note alors $I = \{(y,s) \in \mathbb{Q}^N \times \mathbb{Q}_+^\star;\ B(y,s) \subset O\}$. On a alors $O = \cup_{(y,s)\in I} B(y,s)$. Comme I est au plus dénombrable (car $\mathbb{Q}^{N+1}$ est dénombrable), on en déduit que $O \in T$ et donc que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \subset T$ (car T est une tribu contenant tous les ouverts).

Le raisonnement précédent montre même que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ est aussi la tribu engendrée par l'ensemble des boules ouvertes à rayons rationnels et centre à coordonnées rationnelles.

---

2. Montrer que la tribu borélienne de $\mathbb{R}^N$ est égale à celle engendrée par l'ensemble des produits d'intervalles ouverts à extrémités rationnelles.

corrigé

On reprend le même raisonnement que dans la question précédente en remplaçant $B(x,r)$ par $P(x,r) = \prod_{i=1}^{N}]x_i - r, x_i + r[$, avec $x = (x_1, \ldots, x_N)^t$.

---

3. Montrer que la tribu borélienne de $\mathbb{R}$ est engendrée par les intervalles $]a,b]$ où $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

corrigé

Soit $\mathcal{C} = \{]a,b],\ a,b \in \mathbb{R},\ a < b\}$ et $T(\mathcal{C})$ la tribu engendrée par $\mathcal{C}$. Comme $]a,b] = \cap_{n>0}]a, b + \frac{1}{n}[$, on voit que $]a,b] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour tout $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Donc, on a $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et donc $T(\mathcal{C}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

On montre maintenant l'inclusion inverse, c'est-à-dire $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset T(\mathcal{C})$. Soit $I =]a,b[$ avec $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$. On peut écrire $I = \cup_{n \geq n_0}]a, b - \frac{1}{n}]$, avec n_0 t.q. $\frac{1}{n_0} < b - a$. On en déduit que $I \in T(\mathcal{C})$. Puis, comme tout ouvert non vide peut s'écrire comme réunion dénombrable d'intervalles ouverts à extrémités finies (voir le lemme 2.1 page 20), on obtient que tout ouvert appartient à $T(\mathcal{C})$. Ceci permet de conclure que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset T(\mathcal{C})$ et finalement que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = T(\mathcal{C})$.

---

4. Soit S un sous ensemble dense de $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ est engendrée par la classe des boules ouvertes (ou bien fermées) telles que les coordonnées du centre et le rayon appartiennent S.

corrigé

On reprend le même raisonnement que dans la première question en remplaçant $\mathbb{Q}^N$ par S^N (qui est dense dans $\mathbb{R}^N$) et $\mathbb{Q}_+^\star$ par $S_+^\star = \{s \in S;\ s > 0\}$ (qui est dense dans $\mathbb{R}_+^\star$).

Corrigé 15

Soit E un ensemble et $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$.

1. Montrer que $\mathcal{A}$ est une algèbre (cf. définition 2.4) si et seulement si $\mathcal{A}$ vérifie les deux propriétés suivantes :

   (a) $E \in \mathcal{A}$,

   (b) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$.

corrigé

- On suppose que $\mathcal{A}$ est une algèbre. Il est clair que (a) est vérifiée. Pour montrer (b) il suffit d'utiliser la stabilité par intersection finie et par passage au complémentaire, cela donne bien que $A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{A}$ si $A, B \in \mathcal{A}$.
- On suppose maintenant que $\mathcal{A}$ vérifie (a) et (b).

  On a alors $\emptyset = E \setminus E \in \mathcal{A}$, et donc $\emptyset, E \in \mathcal{A}$.

  On remarque ensuite que, grâce à (b), $A^c = E \setminus A \in E$ si $A \in \mathcal{A}$. On a donc la stabilité de $\mathcal{A}$ par passage au complémentaire.

  Soit maintenant $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$. On a $A_1 \cap A_2 = A_1 \setminus A_2^c$, on en déduit que $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}$ par (b) et la stabilité de $\mathcal{A}$ par passage au complémentaire. Une récurrence sur n donne alors que $\mathcal{A}$ est stable par intersection finie.

  Enfin, la stabilité de $\mathcal{A}$ par union finie découle de la stabilité de $\mathcal{A}$ par intersection finie et par passage au complémentaire car $(\cup_{p=0}^{n} A_p)^c = \cap_{p=0}^{n} A_p^c$.

  On a bien montré que $\mathcal{A}$ est une algèbre.

2. Soit $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ une famille d'algèbres (sur E). Montrer que $\cap_{i\in I}\mathcal{A}_i = \{A \in \mathcal{P}(E);\ A \in \mathcal{A}_i$ pour tout $i \in I\}$ est encore une algèbre.

corrigé

On peut montrer que $\cap_{i\in I}\mathcal{A}_i$ est une algèbre en utilisant diretement la définition d'une algèbre. Onb peut aussi le montrer en utilisant la première question, ce que nous faisons ici. On montre donc que $\cap_{i\in I}\mathcal{A}_i$ vérifie (a) et (b) :

- $E \in \cap_{i\in I}\mathcal{A}_i$ car $E \in \mathcal{A}_i$ pour tout $i \in I$.
- Soit $A, B \in \cap_{i\in I}\mathcal{A}_i$. Pour tout $i \in I$, on a $A, B \in \mathcal{A}_i$. On en déduit $A \setminus B \in \mathcal{A}_i$ (car $\mathcal{A}_i$ est une algèbre) et donc $A \setminus B \in \cap_{i\in I}\mathcal{A}_i$.

On a bien montré que $\cap_{i\in I}\mathcal{A}_i$ est une algèbre.

Si $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$, la deuxième question permet donc de définir l'algèbre engendrée par $\mathcal{C}$ comme l'intersection de toutes les algèbres sur E contenant $\mathcal{C}$.

Corrigé 16

Soit E un ensemble et $\mathcal{C}$ un ensemble de parties de E. On suppose que $\emptyset, E \in \mathcal{C}$, que $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie et que le complémentaire de tout élément de $\mathcal{C}$ est une union finie disjointe d'éléments de $\mathcal{C}$, c'est-à-dire :

$$C \in \mathcal{C} \Rightarrow \text{ il existe } n \in \mathbb{N}^\star \text{ et } C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{C} \text{ t.q. } C^c = \cup_{p=1}^n C_p \text{ et } C_p \cap C_q = \emptyset \text{ si } p \neq q.$$

On note $\mathcal{B}$ l'ensemble des réunions finies disjointes d'éléments de $\mathcal{C}$. Une partie de E est donc un élément de $\mathcal{B}$ si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}^\star$ et $(A_p)_{p=1,\ldots,n} \subset \mathcal{C}$ t.q. $A_p \cap A_q = \emptyset$ si $p \neq q$ et $A = \cup_{p=1}^n A_p$.

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est stable par intersection finie et par passage au complémentaire.

corrigé

On montre tout d'abord la stabilité de $\mathcal{B}$ par intersection finie. Soit $A, B \in \mathcal{B}$. Il existe $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{C}$ et $B_1, \ldots, B_m \in \mathcal{C}$ t.q. $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, si $i \neq j$, $A = \cup_{i=1}^n A_i$ et $B = \cup_{j=1}^m B_j$. On a alors $A \cap B = (\cup_{i=1}^n A_i) \cap (\cup_{j=1}^m B_j) = \cup_{i=1}^n \cup_{j=1}^m (A_i \cap B_j)$. Comme $A_i \cap B_j \in \mathcal{C}$ (car $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie) pour tout i, j et que $(A_i \cap B_j) \cap (A_k \cap B_l) = \emptyset$ si $(i,j) \neq (k,l)$, on en déduit que $A \cap B \in \mathcal{B}$.

Une récurrence sur n donne alors la stabilité de $\mathcal{B}$ par intersection finie.

On montre maintenant la stabilité de $\mathcal{B}$ par passage au complémentaire. Soit $A \in \mathcal{B}$. Il existe $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{C}$ t.q. $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$ et $A = \cup_{i=1}^n A_i$. On a alors $A^c = \cap_{i=1}^n A_i^c$. Comme A_i^c est une réunion finie disjointe d'éléments de $\mathcal{C}$, on a bien $A_i^c \in \mathcal{B}$. La stabilité de $\mathcal{B}$ par intersection finie donne alors que $A^c \in \mathcal{B}$. On a donc bien montré la stabilité de $\mathcal{B}$ par passage au complémentaire.

---

2. Montrer que l'algèbre engendrée par $\mathcal{C}$ est égale à $\mathcal{B}$.

corrigé

On note $\mathcal{A}$ l'agèbre engendrée par $\mathcal{C}$. Comme $\mathcal{A}$ est stable par union finie et contient $\mathcal{C}$, il est clair que $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}$. Comme $\mathcal{B}$ contient $\mathcal{C}$, pour montrer l'inclusion inverse, il suffit de montrer que $\mathcal{B}$ est une algèbre (car $\mathcal{A}$ est l'intersection de toutes les algèbres contenant $\mathcal{C}$). On montre donc maintenant que $\mathcal{B}$ est une algèbre.

Pour montrer que $\mathcal{B}$ est une algèbre, on montre que $\mathcal{B}$ vérifie les quatre propriétés d'une algèbre.

- $E, \emptyset \in \mathcal{B}$ car $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ et $E, \emptyset \in \mathcal{C}$.
- La question précédente montre que $\mathcal{B}$ est stable par par intersection finie et par passage au complémentaire.
- La stabilité de $\mathcal{B}$ par union finie découle facilement de la stabilité de $\mathcal{B}$ par intersection finie et par passage au complémentaire, car $\cup_{i=1}^n A_i = (\cap_{i=1}^n A_i^c)^c$.

On a bien montré que $\mathcal{B}$ est une algèbre. Comme $\mathcal{B} \supset \mathcal{C}$, on a donc $\mathcal{B} \supset \mathcal{A}$ et finalement $\mathcal{B} = \mathcal{A}$.

Corrigé 17
Soit E un ensemble. Pour $\Sigma \subset \mathcal{P}(E)$, on dit que Σ est une classe monotone (sur E) si Σ vérifie les deux propriétés suivantes (de stabilité par union croissante dénombrable et par intersection décroissante dénombrable) :

- $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$, $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \Sigma$,
- $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$, $A_n \supset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \cap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \Sigma$.

1. Soit $\Sigma \subset \mathcal{P}(E)$. Montrer que Σ est une tribu si et seulement si Σ est une classe monotone et une algèbre (cf. exercice 2.8).

corrigé

- Si Σ est une tribu, Σ est stable par union dénombrable et intersection dénombrable. On en déduit immédiatement que Σ est une algèbre et une classe monotone.
- On suppose maintenant que Σ est une algèbre et une classe monotone. Comme Σ est une algèbre, pour montrer que Σ est une tribu, il suffit de montrer que Σ est stable par union dénombrable.

  Soit donc $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$ et $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. On veut montrer que $A \in \Sigma$. On remarque que $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ avec $B_n = \cup_{p=0}^n A_n$. Comme Σ est une algèbre, on a $B_n \in \Sigma$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puis, comme Σ est de stable par union croissante (noter que $B_n \subset B_{n+1}$) dénombrable, on en déduit que $A \in \Sigma$. On a bien montré que Σ est stable par union dénombrable et donc que Σ est une tribu.

  Noter que l'hypothèse de stabilité de Σ par intersection décroissante dénombrable n'a pas été utilisé. Elle sera utile à la question 4.

---

2. Donner un exemple, avec $E = \mathbb{R}$, de classe monotone qui ne soit pas une tribu.

corrigé

Il y a beaucoup d'exemples de classes monotones qui ne sont pas des tribus. En voici un : $\Sigma = \{\mathbb{R}\}$.

---

3. Soit $(\Sigma_i)_{i\in I}$ une famille de classes monotones (sur E). Montrer que $\cap_{i\in I}\Sigma_i = \{A \in \mathcal{P}(E);\ A \in \Sigma_i$ pour tout $i \in I\}$ est encore une classe monotone.

corrigé

- Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \cap_{i\in I}\Sigma_i$ t.q. $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a donc, pour tout $i \in I$, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma_i$ et donc, puisque Σ_i est une classe monotone, $\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n \in \Sigma_i$. On en déduit que $\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n \subset \cap_{i\in I}\Sigma_i$.
- Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \cap_{i\in I}\Sigma_i$ t.q. $A_n \supset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a donc, pour tout $i \in I$, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma_i$ et donc, puisque Σ_i est une classe monotone, $\cap_{n\in\mathbb{N}}A_n \in \Sigma_i$. On en déduit que $\cap_{n\in\mathbb{N}}A_n \subset \cap_{i\in I}\Sigma_i$.

Ceci montre bien que $\cap_{i\in I}\Sigma_i$ est une classe monotone.

Si $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$, cette question permet donc de définir la classe monotone engendrée par $\mathcal{C}$ comme l'intersection de toutes les classes monotones sur E contenant $\mathcal{C}$.

4. (Lemme des classes monotones) Soit $\mathcal{A}$ une algèbre sur E. On note Σ la classe monotone engendrée par $\mathcal{A}$ et on note T la tribu engendrée par $\mathcal{A}$.

   (a) Montrer que $\Sigma \subset T$.

   corrigé

   Σ est l'intersection de toutes les classes monotones sur $\mathcal{A}$. Une tribu étant aussi une classe monotone, la tribu T (engendrée par $\mathcal{A}$) est donc une classe monotone contenant $\mathcal{A}$. On en déduit que $\Sigma \subset T$.

   (b) Soit $A \subset E$. On pose $\Sigma_A = \{B \subset E;\ A \setminus B \in \Sigma \text{ et } B \setminus A \in \Sigma\}$. Montrer que Σ_A est une classe monotone.

   corrigé

   - Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma_A$, $B_n \subset B_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose $B = \cup_{n\in\mathbb{N}}B_n$. On va montrer que $B \in \Sigma_A$.

     On a $A \setminus B = A \setminus \cup_{n\in\mathbb{N}}B_n = \cap_{n\in\mathbb{N}}(A \setminus B_n)$. La suite $(A \setminus B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de Σ. Comme Σ est une classe monotone, on en déduit $A \setminus B = \cap_{n\in\mathbb{N}}(A \setminus B_n) \in \Sigma$.

     On montre aussi que $B \setminus A \in \Sigma$. En effet, $B \setminus A = \cup_{n\in\mathbb{N}}B_n \setminus A = \cup_{n\in\mathbb{N}}(B_n \setminus A) \in \Sigma$ par la stabilité de Σ par union croissante dénombrable.

     On a donc bien montré que $B \in \Sigma_A$. Ce qui donne la stabilité de Σ par union croissante dénombrable.
   - De manière analogue, on va montrer la stabilité de Σ par intersection décroissante dénombrable. Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma_A$, $B_n \supset B_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose $B = \cap_{n\in\mathbb{N}}B_n$.

     Comme $A \setminus B = \cup_{n\in\mathbb{N}}(A \setminus B_n)$, on obtient $A \setminus B \in \Sigma$ en utilisant la stabilité de Σ par union croissante dénombrable.

     Comme $B \setminus A = \cap_{n\in\mathbb{N}}(B_n \setminus A)$, on obtient $B \setminus A \in \Sigma$ en utilisant la stabilité de Σ par intersection décroissante dénombrable.

     On a donc $B \in \Sigma_A$. Ce qui donne la stabilité de Σ par intersection décroissante dénombrable.

   On a bien montré que Σ_A est une classe monotone.

   (c) (Question plus difficile.) Montrer que Σ est une algèbre. [Utiliser la question (b) et la première question de l'exercice 2.8.] En déduire que $T = \Sigma$.

corrigé

Pour montrer que Σ est une algèbre, il suffit de montrer que Σ vérifie les propriétés (a) et (b) de la première question de l'exercice 2.8. Il est immédiat que la propriété (a) est vérifiée car $E \in \mathcal{A} \in \Sigma$. Pour montrer (b), on utilise la classe monotone Σ_A définie à la question 4 pour $A \subset E$.

Soit $A \in \mathcal{A}$. Comme $\mathcal{A}$ est une algèbre, on a donc $\mathcal{A} \subset \Sigma_A$. La classe monotone Σ_A contient $\mathcal{A}$, elle contient donc Σ qui est l'intersection de toutes les classes monotones contenant $\mathcal{A}$. On a donc :

$$A \in \mathcal{A},\, B \in \Sigma \Rightarrow B \in \Sigma_A. \tag{12.5}$$

On remarque maintenant que, pour tout $A, B \in \mathcal{P}(E)$, on a :

$$A \in \Sigma_B \Leftrightarrow B \in \Sigma_A.$$

On déduit donc de (12.5) :

$$A \in \mathcal{A},\, B \in \Sigma \Rightarrow A \in \Sigma_B.$$

Si $B \in \Sigma$, la classe monotone Σ_B contient donc $\mathcal{A}$. Elle contient alors aussi Σ (qui est l'intersection de toutes les classes monotones sur E contenant $\mathcal{A}$). On a donc montré :

$$B \in \Sigma,\, A \in \Sigma \Rightarrow A \in \Sigma_B.$$

On en déduit que $A \setminus B \in \Sigma$ si $A, B \in \Sigma$.

On a bien montré que Σ vérifie la propriété (b) de la première question de l'exercice 2.8 et donc que Σ est une algèbre.

Pour conclure, on remarque Σ est une classe monotone et une algèbre. C'est donc une tribu (par la question 1) contenant $\mathcal{A}$. Elle contient donc T (qui est l'intersection de toutes les tribus contenant $\mathcal{A}$) et on a bien, finalement, $\Sigma = T$.

Corrigé 18 (Caractérisation de la tribu engendrée)

Soit E un ensemble et $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$. On dit que $\mathcal{A}$ est stable par intersection finie si $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$. On dit que $\mathcal{A}$ est stable par différence si :

$$A, B \in \mathcal{A},\ B \subset A \Rightarrow A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{A}.$$

On dit que $\mathcal{A}$ est stable par union dénombrable disjointe si :

$$(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}, A_n \cap A_m = \emptyset \text{ pour } n \neq m \Rightarrow \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}.$$

Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$.

1. On note $\mathcal{Z}$ l'ensemble des parties de $\mathcal{P}(E)$ stables par différence et stables par union dénombrable disjointe. Montrer qu'il existe $\mathcal{D} \in \mathcal{Z}$ t.q. $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ et :

$$\mathcal{A} \in \mathcal{Z},\, \mathcal{C} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{D} \subset \mathcal{A}.$$

corrigé

On note $\mathcal{Z}_r$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{Z}$ contenant $\mathcal{C}$. On remarque tout d'abord que $\mathcal{Z}_r \neq \emptyset$ car $\mathcal{P}(E) \in \mathcal{Z}_r$. Puis, on note $\mathcal{D}$ l'ensemble des parties de E appartenant à tous les éléments de $\mathcal{Z}_r$ (c'est-à-dire que, pour $A \in \mathcal{P}(E)$, on a $A \in \mathcal{D}$ si, pour tout $\mathcal{B} \in \mathcal{Z}_r$, $A \in \mathcal{B}$).

Il est facile de voir que $\mathcal{D}$ est stable par différence, stable par union dénombrable disjointe et que $\mathcal{D}$ contient $\mathcal{C}$ (car tous les éléments de $\mathcal{Z}_r$ vérifient ces trois propriétés). Enfin, $\mathcal{A} \in \mathcal{Z}_r \Rightarrow \mathcal{D} \subset \mathcal{A}$, ce qui est bien la propriété demandée.

Dans la suite, on note toujours $\mathcal{D}$ cette partie de $\mathcal{P}(E)$. On suppose maintenant que $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie et que $E \in \mathcal{C}$.

2. Pour $A \in \mathcal{P}(E)$, on note $\mathcal{D}_A = \{D \in \mathcal{D} \text{ t.q. } A \cap D \in \mathcal{D}\}$.

   (a) Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que $\mathcal{D}_A$ est stable par union dénombrable disjointe et stable par différence.

   corrigé

   Soit $(D_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_A$ avec $D_n \cap D_m = \emptyset$ si $n \neq m$. On va montrer que $\cup_{n\in\mathbb{N}} D_n \in \mathcal{D}_A$. On remarque tout d'abord que $\cup_{n\in\mathbb{N}} D_n \in \mathcal{D}$ car $D_n \in \mathcal{D}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $\mathcal{D}$ est stable par union dénombrable disjointe. Puis, $A \cap (\cup_{n\in\mathbb{N}} D_n) = \cup_{n\in\mathbb{N}}(D_n \cap A) \in \mathcal{D}$ car $D_n \cap A \in \mathcal{D}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(D_n \cap A) \cap (D_m \cap A) = \emptyset$, si $n \neq m$, et $\mathcal{D}$ est stable par union dénombrable disjointe. On a donc montré que $\cup_{n\in\mathbb{N}} D_n \in \mathcal{D}_A$. Ce qui prouve que $\mathcal{D}_A$ est stable par union dénombrable disjointe.

   Soit maintenant $D_1, D_2 \in \mathcal{D}_A$, avec $D_1 \subset D_2$. On va montrer que $D_2 \setminus D_1 \in D_{\mathcal{A}}$. Pour cela, on remarque que $D_2 \setminus D_1 \in \mathcal{D}$ car $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ et que $\mathcal{D}$ est stable par différence. Puis, $A \cap (D_2 \setminus D_1) = (A \cap D_2) \setminus (A \cap D_1) \in \mathcal{D}$ car $A \cap D_1$, $A \cap D_2 \in D$, $(A \cap D_1) \subset (A \cap D_2)$ et $\mathcal{D}$ est stable par différence. On a donc montré que $D_2 \setminus D_1 \in D_{\mathcal{A}}$. Ce qui prouve que $\mathcal{D}_A$ est stable par différence.

   (b) Soit $A \in \mathcal{C}$. Montrer que $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}_A$. En déduire que $\mathcal{D}_A = \mathcal{D}$.

   corrigé

   Soit $B \in \mathcal{C}$. On a $B \in \mathcal{D}$ (car $\mathcal{D} \supset \mathcal{C}$) et $A \cap B \in \mathcal{C}$ (car $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie), donc $A \cap B \in \mathcal{D}$. Ceci montre que $B \in \mathcal{D}_A$ et donc $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}_A$.

   Comme $\mathcal{D}_A$ est stable par différence, stable par union dénombrable disjointe et que $\mathcal{D}_A$ contient $\mathcal{C}$, la question 1 donne $\mathcal{D}_A \supset \mathcal{D}$ et, finalement, $\mathcal{D}_A = \mathcal{D}$.

   (c) Soit $A \in \mathcal{D}$. Montrer que $\mathcal{D}_A = \mathcal{D}$. En déduire que $\mathcal{D}$ est stable par intersection finie.

   corrigé

   Soit $B \in \mathcal{C}$. On a $B \in \mathcal{D}$ (car $\mathcal{D} \supset \mathcal{C}$). Comme $B \in \mathcal{C}$, la question précédente donne $\mathcal{D} = \mathcal{D}_B$ et donc $A \in \mathcal{D}_B$. On a donc $A \cap B \in \mathcal{D}$. Ceci montre que $B \in \mathcal{D}_A$ et donc $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}_A$.

   On en déduit, comme à la question précédente, que $\mathcal{D}_A = \mathcal{D}$.

   Soit maintenant $B \in \mathcal{D}$. Comme $\mathcal{D} = \mathcal{D}_A$, on a $B \in \mathcal{D}_A$ et donc $A \cap B \in \mathcal{D}$. L'intersection de deux éléments de $\mathcal{D}$ est donc aussi dans $\mathcal{D}$. Ceci prouve bien la stabilité de $\mathcal{D}$ par intersection finie (une récurrence facile donne que l'intersection d'un nombre fini d'éléments de $\mathcal{D}$ est aussi dans $\mathcal{D}$).

   ---

3. Montrer que $\mathcal{D}$ est une tribu. En déduire que $\mathcal{D}$ est la tribu engendrée par $\mathcal{C}$.

corrigé

On remarque que $E \in \mathcal{D}$ (car $E \in \mathcal{C} \subset \mathcal{D}$) et que $\mathcal{D}$ est stable par complémentaire car, si $A \in \mathcal{D}$, on a $E \setminus A \in \mathcal{D}$ car $\mathcal{D}$ est stable par différence (et $E, A \in \mathcal{D}$ avec $A \subset E$). Pour montrer que $\mathcal{D}$ est une tribu, il suffit de montrer que $\mathcal{D}$ est stable par union dénombrable (non nécessairement disjointe).

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}$. Comme $\mathcal{D}$ est stable par complémentaire, on aussi $A_n^c \in \mathcal{D}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$B_n = A_n \cap (\cap_{i=0}^{n-1} A_i^c).$$

On a $B_n \in \mathcal{D}$ car $\mathcal{D}$ est stable par inteserction finie et $B_n \cap B_m = \emptyset$ si $n \neq m$ (en notant que $B_n \subset A_n$ et $B_m \subset A_n^c$ si $m > n$). Comme $\mathcal{D}$ est stable par union dénombrable disjointe, on en déduit $\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{D}$ et donc $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$ (car $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n$). Ceci prouve que $\mathcal{D}$ est stable par union dénombrable et donc que $\mathcal{D}$ est une tribu.

On a ainsi montré que $\mathcal{D}$ est une tribu contenant $\mathcal{C}$ et donc contenant la tribu engendrée par $\mathcal{C}$, notée $\tau(\mathcal{C})$. D'autre part, il est facile de voir que toute tribu contenant $\mathcal{C}$ appartient à $\mathcal{Z}_r$ (défini à la question 1) et donc que $\tau(\mathcal{C})$ contient $\mathcal{D}$. On a bien montré finalement que $\mathcal{D} = \tau(\mathcal{C})$.

Remarque : l'hypothèse "$E \in \mathcal{C}$" n'a été utilisée qu'une seule fois. Elle n'a été utilisée que pour montrer que $E \in \mathcal{D}$ (dans la question 3). On peut remplacer cette hypothèse par "il existe une suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$ t.q. $E_n \cap E_m = \emptyset$, si $n \neq m$, et $E = \cup_{n\in\mathbb{N}} E_n$". En effet, de cette hypothèse, on déduit aussi $E \in \mathcal{D}$ car $\mathcal{D}$ est stable par union dénombrable disjointe et $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$. La suite du raisonnement de la question 3 donne alors aussi que $\mathcal{D}$ est la tribu engendrée par $\mathcal{C}$.

12.2.2 Mesures

Corrigé 19 (Exemples de mesures)

Soit E un ensemble infini non dénombrable. Pour toute partie A de E, on pose $m(A) = 0$ si A est au plus dénombrable, et $m(A) = +\infty$ sinon. L'application m est-elle une mesure sur $\mathcal{P}(E)$?

corrigé

Oui, l'application m est une mesure sur $\mathcal{P}(E)$. En effet, on a bien $m(\emptyset) = 0$ et si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(E)$ on a $m(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} m(A_n) = 0$ si A_n est au plus dénombrable pour tout $n \in \mathbb{N}$ (car une réunion d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable) et $m(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} m(A_n) = \infty$ si il existe $n \in \mathbb{N}$ t.q. A_n est infini non dénombrable. On a donc toujours $m(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} m(A_n)$ (noter d'ailleurs qu'il est inutile de supposer les A_n disjoints 2 à 2).

Corrigé 20 (Mesure trace et restriction d'une mesure)

Soit (E, T, m) un espace mesuré

1. Soit $F \in T$. Montrer que la tribu trace de T sur F, notée T_F, est incluse dans T (cette tribu est une tribu sur F). Montrer que la restriction de m à T_F est une mesure sur T_F. On l'appellera la *trace* de m sur F. Si $m(F) < \infty$, cette mesure est finie.

corrigé

Soit $B \in T_F$, il existe donc $A \in T$ t.q. $B = A \cap F$. Comme $F \in T$, on a donc aussi $B \in T$.

On note m_F la restriction de m à T_F, on a donc $m_F(B) = m(B)$ pour tout $B \in T_F$. Il est alors immédiat de voir que $m_F(\emptyset) = 0$ et que m_F est σ-additive sur T_F, m_F est donc une mesure sur T_F. Si $m(F) < \infty$, on a $m_F(F) = m(F) < \infty$, la mesure m_F est donc finie (mais la mesure m peut ne pas être finie, c'est-à-dire que l'on peut avoir $m(E) = \infty$).

---

2. Soit $\mathcal{A}$ une tribu incluse dans T. La restriction de m à $\mathcal{A}$ est une mesure. Est-elle finie (resp. σ-finie) si m est finie (resp. σ-finie) ?

corrigé

On note m_a la restriction de m à $\mathcal{A}$, on a donc $m_a(B) = m(B)$ pour tout $B \in \mathcal{A}$. Il est clair que m_a est une mesure sur $\mathcal{A}$.

- Si m est finie, on a $m_a(E) = m(E) < \infty$, m_a est donc aussi une mesure finie.
- Si m est σ-finie, il existe une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ t.q. $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n = E$ et $m(A_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Mais, comme les A_n ne sont pas nécessairement dans $\mathcal{A}$, la mesure m_a peut ne pas être σ-finie. On peut construire un exemple facilement de la manière suivante :

  On suppose que m est σ-finie mais n'est pas finie (on peut prendre, par exemple $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$) et on prend $\mathcal{A} = \{\emptyset, E\}$. La mesure m_a n'est pas σ-finie...

Corrigé 21

Soit (E, T, m) un espace mesuré fini ("fini" signifie que $m(E) < \infty$) et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites d'ensembles mesurables tels que $B_n \subset A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \setminus \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \setminus B_n)$.

corrigé

Soit $x \in (\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \setminus \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n$, on a donc $x \in \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et $x \notin \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n$, c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ t.q. $x \in A_p$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \notin B_n$. On a donc $x \in A_p \setminus B_p$, ce qui prouve que $x \in \cup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \setminus B_n)$ et donc que $(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \setminus \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \setminus B_n)$.

---

2. Montrer que $m(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) - m(\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} (m(A_n) - m(B_n))$.

corrigé

Puisque $m(E) < \infty$, on a, pour tout $A, B \in T$ t.q. $B \subset A$, $m(A \setminus B) = m(A) - m(B)$. La monotonie de m, la σ-sous additivité de m (et la question précédente) nous donne alors :

$$\begin{aligned} m(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) - m(\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = m((\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \setminus (\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n)) &\le m(\cup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \setminus B_n)) \\ &\le \textstyle\sum_{n=0}^{+\infty} m(A_n \setminus B_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} (m(A_n) - m(B_n)). \end{aligned}$$

Corrigé 22

Soit (E,T,m) un espace mesuré fini et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ t.q., pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m(A_n) = m(E)$. Montrer que $m(\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = m(E)$.

corrigé

Comme $m(E) < \infty$, on a $m(A^c) = m(E) - m(A)$ pour tout $A \in T$. De $m(A_n) = m(E)$, on déduit alors $m(A_n^c) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par σ-sous additivité de m, on a alors $m(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c) = 0$. Comme $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c = (\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n)^c$, on a donc $m((\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n)^c) = 0$ et donc $m(\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = m(E)$.

Corrigé 23 (Contre exemples...)

1. Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $\lambda(A) = 0$. A-t-on nécessairement A fermé ?

   corrigé

   Non, A n'est pas nécessairement fermé. On peut prendre, par exemple $A = \{\frac{1}{n},\ n \geq 1\}$. On a $\lambda(A) = 0$ et A n'est pas fermé (car 0 appartient à l'adhérence de A sans être dans A).

   ---

2. Soit (E,T) un espace mesurable et $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$ qui engendre T. On considère m_1 et m_2 des mesures sur T. Montrer que $m_1(A) = m_2(A)$ pour tout $A \in \mathcal{C}$ n'implique pas que $m_1 = m_2$ sur T. [*On pourra trouver un exemple (facile) avec* $(E,T) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *et* m_1, m_2 *non finies. Un exemple avec* $(E,T) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *et* m_1, m_2 *finies est aussi possible mais plus difficile à trouver...*]

   corrigé

   on prend $(E,T) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

   - Exemple "facile" (avec m_1, m_2 non finies).
     On prend $\mathcal{C}_1 = \{]a,\infty[,\ a \in \mathbb{R}\}$. On a bien $T(\mathcal{C}_1) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire que $\mathcal{C}_1$ engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (voir la proposition 2.2). On prend alors $m_1 = \lambda$ et $m_2 = 2\lambda$ (c'est-à-dire $m_2(B) = 2\lambda(B)$ pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$). On a bien $m_1(B) = m_2(B)$ pour tout $B \in \mathcal{C}_1$ (car on a alors $m_1(B) = m_2(B) = \infty$). Mais $m_1 \neq m_2$ puisque, par exemple, $m_1(]0,1[) = 1$ et $m_2(]0,1[) = 2$.
   - Exemple "difficile" (avec m_1, m_2 finies).
     On prend maintenant $\mathcal{C}_2 = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R});\ \{-1,0,1\} \cap B = \emptyset\} \cup \{\{-1,0\}\} \cup \{\{0,1\}\}$ (un élément de $\mathcal{C}_2$ est donc un borélien ne contenant ni -1 ni 0 ni 1, ou bien la partie $\{-1,0\}$, ou bien la partie $\{0,1\}$). On montre d'abord que $T(\mathcal{C}_2) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Il est clair que $T(\mathcal{C}_2) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ car $\mathcal{C}_2 \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Pour montrer l'inclusion inverse, c'est-à-dire $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset T(\mathcal{C}_2)$, on remarque que $\{0\} = \{-1,0\} \cap \{0,1\} \in T(\mathcal{C}_2)$ et donc que $\{-1\} = \{-1,0\} \setminus \{0\} \in T(\mathcal{C}_2)$, $\{1\} = \{0,1\} \setminus \{0\} \in T(\mathcal{C}_2)$. Finalement on voit alors que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset T(\mathcal{C}_2)$ car tout borélien s'écrit comme un borélien ne contenant ni -1 ni 0 ni 1 (qui appartient donc à $T(\mathcal{C}_2)$), auquel on ajoute éventuellement 1, 2 ou 3 autre(s) élément(s) de $T(\mathcal{C}_2)$ (qui sont les parties $\{0\}$, $\{-1\}$ et $\{1\}$, on conclut alors avec la stabilité par union finie de la tribu $T(\mathcal{C}_2)$).

     On rappelle que, pour $a \in \mathbb{R}$, on note δ_a la mesure de dirac sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On a donc, pour $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\delta_a(B) = 1$ si $a \in B$ et $\delta_a(B) = 0$ si $a \notin B$. On prend alors $m_1 = \delta_{-1} + \delta_0 + \delta_1$ et $m_2 = 2\delta_{-1} + 2\delta_1$. On a clairement $m_1 = m_2$ sur $\mathcal{C}_2$ car $m_1(B) = m_2(B) = 0$ si $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ est t.q. $\{-1,0,1\} \cap B = \emptyset$ et $m_1(\{-1,0\}) = m_2(\{-1,0\}) = m_1(\{0,1\}) = m_2(\{0,1\}) = 2$. Enfin, on a $m_1 \neq m_2$ puisque, par exemple, $m_1(\{0\}) = 1$ et $m_2(\{0\}) = 0$.

Corrigé 24 (Résultat d'unicité)
Soit (E, T) un espace mesurable et m, μ deux mesures sur T. Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$. On suppose que $\mathcal{C}$ engendre T et que $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie.

On suppose que $m(A) = \mu(A)$ pour tout $A \in \mathcal{C}$.

1. On suppose que $E \in \mathcal{C}$ et que $m(E) < \infty$. Montrer que $m(A) = \mu(A)$ pour tout $A \in T$. [On pourra introduire $\mathcal{D} = \{A \in T, \, m(A) = \mu(A)\}$ et utiliser l'exercice 2.13.]

corrigé

On pose $\mathcal{D} = \{A \in T, \, m(A) = \mu(A)\}$. La $\sigma-$additivité de m et μ montre que $\mathcal{D}$ est stable par union dénombrable disjointe. Comme $m(E) < \infty$, on peut aussi montrer que $\mathcal{D}$ est stable par différence (au sens de l'exercice 2.13). En effet, si $A, B \in \mathcal{D}$, avec $B \subset A$, on a (par additivité de m et μ) $m(B) + m(A \setminus B) = m(A)$ et $\mu(B) + \mu(A \setminus B) = \mu(A)$. Comme $m(A) < \infty$ et $\mu(A) < \infty$, on a donc $m(A \setminus B) = m(A) - m(B)$ et $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$, ce qui prouve que $m(A \setminus B) = \mu(A \setminus B)$ et donc que $A \setminus B \in \mathcal{D}$.

On utilise maintenant l'exercice 2.13. Comme $\mathcal{D} \supset \mathcal{C}$, $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie et $E \in \mathcal{C}$, la question 3 de l'exercice 2.13 permet de montrer $\mathcal{D} = \tau(\mathcal{C}) = T$. (Plus précisément, comme $\mathcal{D} \supset \mathcal{C}$, on a $\mathcal{D} \in \mathcal{Z}_r$, où $\mathcal{Z}_r$ est défini dans le corrigé 18. Puis, en utilisant que $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie et que $E \in \mathcal{C}$, la dernière question de l'exercice 2.13 donne que $\mathcal{D} \supset \tau(\mathcal{C})$.)

On a donc bien montré que $m(A) = \mu(A)$ pour tout $A \in T$.

2. (Généralisation de la question précédente). On suppose qu'il existe une suite $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$ t.q. $E_n \cap E_m = \emptyset$ si $n \neq m$, $m(E_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $E = \cup_{n \in \mathbb{N}} E_n$. Montrer que $m(A) = \mu(A)$ pour tout $A \in T$.

corrigé

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $A \in T$, on pose $m_n(A) = m(A \cap E_n)$ et $\mu_n(A) = \mu(A \cap E_n)$ (noter que $A \cap E_n \in T$, car $A, E_n \in T$). On obtient ainsi deux mesures sur T, m_n et μ_n. Ces deux mesures sont égales sur $\mathcal{C}$ (car $A \cap E_n \in \mathcal{C}$ puisque $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie).

On raisonne alors comme à la question précédente. On pose $\mathcal{D} = \{A \in T, \, m_n(A) = \mu_n(A)\}$ et le raisonnement de la question récédente donne que $\mathcal{D}$ est stable par union dénombrable disjointe et (grâce à $m_n(E) < \infty$) que $\mathcal{D}$ est stable par différence (au sens de l'exercice 2.13). On utilise maintenant la remarque de la fin de la question 3 de l'exercice 2.13. Comme $\mathcal{D} \supset \mathcal{C}$, $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie et E est une union dénombrable disjointe d'éléments de $\mathcal{C}$, cette remarque donne $\mathcal{D} = \tau(\mathcal{C}) = T$. On a donc, pour tout $A \in T$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$m(A \cap E_n) = m_n(A) = \mu_n(A) = \mu(A \cap E_n).$$

On en déduit que $m(A) = \mu(A)$, pour tout $A \in T$, car, par $\sigma-$additivité de m et μ, $m(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} m(A \cap E_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A \cap E_n) = \mu(A)$.

3. Avec $(E, T) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})$, donner un exemple pour lequel $E \in \mathcal{C}$ et $m \neq \mu$.

corrigé

Un exemple simple est obtenu en prenant pour $\mathcal{C}$ lensemble des ouverts de $\mathbb{R}$, $\mu = 2m$ et m définie sur T par $m(A) =$card(A) si A a un nombre fini d'éléments et $m(A) = +\infty$ sinon.

Corrigé 25 (Mesure atomique, mesure diffuse)
Soit (E,T) un espace mesurable t.q. $\{x\} \in T$ pour tout $x \in E$. Une mesure m sur T est diffuse si $m(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in E$. Une mesure m sur T est purement atomique si il existe $S \in T$ t.q. $m(S^c) = 0$ et $m(\{x\}) > 0$ si $x \in S$.

1. Montrer qu'une mesure purement atomique et diffuse est nulle. Donner, pour $(E,T) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ un exemple de mesure purement atomique et un exemple de mesure diffuse. [Montrer que la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est diffuse.]

   corrigé

   Soit m une mesure purement atomique et soit $S \in T$ t.q. $m(S^c) = 0$ et $m(\{x\}) > 0$ si $x \in S$. Si m est diffuse, on a $m(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in E$, donc $S = \emptyset$ et $m = 0$.

   On rappelle que, pour $a \in \mathbb{R}$, on note δ_a la mesure de dirac sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On a donc, pour $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\delta_a(B) = 1$ si $a \in B$ et $\delta_a(B) = 0$ si $a \notin B$. La mesure δ_a est (pour tout $a \in \mathbb{R}$) purement atomique, il suffit de prendre $S = \{a\}$, on a bien $\delta_a(S^c) = 0$ et $\delta_a(\{a\}) = 1 > 0$.

   Un exemple de mesure diffuse sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est donné par la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

2. Soit m une mesure diffuse sur T. Montrer que tous les ensembles dénombrables sont de mesure nulle.

   corrigé

   Soit A une partie dénombrable de E. Il existe donc une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ t.q. $A = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ $= \cup_{n\in\mathbb{N}}\{x_n\}$. On a donc $A \in T$ (car $\{x_n\} \in T$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que T est stable par union dénombrable) et $m(A) \le \sum_{n=0}^{+\infty} m(\{x_n\}) = 0$ car m est diffuse.

3. Soit m une mesure sur T. On suppose que m est σ-finie, c'est à dire qu'il existe $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ t.q. $E = \cup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ et $m(E_n) < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Montrer que l'ensemble des $x \in E$ t.q. $m(\{x\}) > 0$ (de tels x sont appelés "atomes" de m) est au plus dénombrable. [On pourra introduire l'ensemble $A_{n,k} = \{x \in E_n;\ m(x) \ge \frac{1}{k}\}$.]

   corrigé

   On pose $A = \{x \in E;\ m(\{x\}) > 0\}$. Si $x \in A$, il existe $n \in \mathbb{N}$ t.q. $x \in E_n$ et il existe $k \in \mathbb{N}^\star$ t.q. $m(\{x\}) \ge \frac{1}{k}$. On a donc $x \in A_{n,k}$. Ceci montre que $A = \cup_{(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^\star} A_{n,k}$. Pour montrer que A est au plus dénombrable, il suffit de montrer que $A_{n,k}$ est au plus dénombrable (car une réunion dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable). Soit donc $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^\star$. Soit $x_1, \ldots, x_p$ p éléments distincts de $A_{n,k}$. Par monotonie et additvité de m, on a $\frac{p}{k} \le \sum_{n=1}^{p} m(\{x_n\}) = m(\{x_1, \ldots, x_p\}) \le m(E_n) < \infty$. On en déduit que $p \le km(E_n) < \infty$ et donc que $A_{n,k}$ a un nombre fini d'éléments (ce nombre est inférieur ou égal à $km(E_n)$). On en déduit donc que A est au plus dénombrable.

   (b) Montrer qu'il existe une mesure diffuse m_d et une mesure purement atomique m_a sur T telles que $m = m_d + m_a$. Montrer que m_d et m_a sont étrangères, c'est à dire qu'il existe $A \in T$ t.q. $m_d(A) = 0$ et $m_a(A^c) = 0$.

   corrigé

On considère toujours $A = \{x \in E;\ m(\{x\}) > 0\}$. On remarque tout d'abord que $A \in T$ (car A est au plus dénombrable, d'après la question précédente, et que les singletons, c'est-à-dire les parties réduites à un seul élément, sont dans T). On pose alors, pour tout $B \in T$:

$$m_a(B) = m(B \cap A),\ \ m_d(B) = m(B \cap A^c).$$

Il est facile de voir que m_d et m_a sont des mesures sur T et que, par additivité de m, on a bien $m = m_a + m_d$.

La mesure m_d est diffuse car, si $x \in E$, on a $m_d(\{x\}) = m(\{x\}) = 0$ si $x \in A^c$ (car A contient tous les points t.q. $m(\{x\}) > 0$) et $m_d(\{x\}) = m(\emptyset) = 0$ si $x \in A$ (car $\{x\} \cap A^c = \emptyset$).

La mesure m_a est purement atomique. Il suffit de prendre $S = A$, on a bien $m_a(S^c) = m(A^c \cap A) = 0$ et $m_a(\{x\}) = m(\{x\}) > 0$ si $x \in S = A$.

Enfin, m_a et m_d sont étrangères car $m_d(A) = 0$ et $m_a(A^c) = 0$.

(c) Montrer que si m est finie il existe un singleton dont la mesure est supérieure ou égale à la mesure de tous les autres singletons. Montrer que ceci peut-être inexact si m n'est que σ-finie.

corrigé

On suppose que m est finie. Soit $M = \sup\{m(\{x\}),\ x \in E\}$. On veut montrer qu'il existe $x \in E$ t.q. $M = m(\{x\})$. On suppose $M > 0$ (sinon, il suffit de prendre n'importe quel $x \in E$ pour avoir $m(\{x\}) = M$). On va raisonner par l'absurde, on suppose donc que $m(\{x\}) < M$ pour tout $x \in E$. Par définition de M, Il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ t.q. $m(\{x_n\}) \to M$ quand $n \to \infty$. Comme $m(\{x_n\}) < M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut même supposer (quitte à extraire une sous suite) que $m(\{x_n\}) < m(\{x_{n+1}\}) < M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Quitte à supprimer les premiers termes de la suite, on peut aussi supposer que $m(\{x_0\}) > \frac{M}{2}$. Les points x_n sont alors tous distincts, ce qui donne $\sum_{n=0}^{+\infty} m(\{x_n\}) = m(\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}) \leq m(E)$. Ceci est impossible car $m(E) < \infty$ et $m(\{x_n\}) > \frac{M}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (donc $\sum_{n=0}^{+\infty} m(\{x_n\}) = \infty$).

Exemple de mesure σ-finie pour laquelle M n'est pas atteint.

Sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on définit m par $m(B) = \sum_{n=2}^{\infty}(1 - \frac{1}{n})\delta_n(B)$ (où δ_n est le mesure de Dirac au point $n \in \mathbb{N}$).

Pour montrer que m est une mesure, on peut remarquer, en posant $\mathbb{N}_2 = \{n \in \mathbb{N};\ n \geq 2\}$, que $m(B) = \sum_{n\in\mathbb{N}_2; n\in B}(1 - \frac{1}{n})$. Si $B = \cup_{p\in\mathbb{N}} B_p$ avec $B_p \cap B_q = \emptyset$ si $p \neq q$, on a $\sum_{p\in\mathbb{N}} m(B_p) = \sum_{p\in\mathbb{N}} \sum_{n\in\mathbb{N}_2; n\in B_p}(1 - \frac{1}{n}) = \sum_{(n,p)\in\mathbb{N}_2\times\mathbb{N}; n\in B_p}(1 - \frac{1}{n})$ (on utilise ici le lemme 2.3 page 30). Comme les B_p sont disjoints 2 à 2, n appartient à B_p pour au plus 1 p, et comme $B = \cup_{p\in\mathbb{N}} B_p$, on obtient $\sum_{(n,p)\in\mathbb{N}_2\times\mathbb{N}; n\in B_p}(1 - \frac{1}{n}) = \sum_{n\in\mathbb{N}_2\times\mathbb{N}; n\in B}(1 - \frac{1}{n}) = m(B)$. Ceci prouve la σ-additivité de m. Le fait que $m(\emptyset) = 0$ est immédiat. On a donc bien montré que m est une mesure.

La mesure m est bien σ-finie, il suffit de remarquer que $m([-n, n]) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $\mathbb{R} = \cup_{n\in\mathbb{N}}[-n, n]$. enfin, pour cette mesure m, on a $M = \sup\{m(\{x\}),\ x \in E\} = 1$ et il n'existe pas de $x \in \mathbb{R}$ t.q. $m(\{x\}) = 1$. En fait, m est purement atomique car $m((\mathbb{N}_2)^c) = 0$ et on a $0 < m(\{x\})$, pour tout $x \in \mathbb{N}_2$.

---

4. Pour $(E,T) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, donner un exemple de mesure purement atomique finie dont l'ensemble des atomes est infini.

corrigé

Un tel exemple est obtenu en modifiant légérement la mesure construite à la question précédente. Sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on définit m par $m(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\delta_n(B)$. Une démonstration analogue à celle faite à la question précédente montre que m est bien une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, m est finie (on a $m(\mathbb{R}) = \frac{\pi^2}{6} < \infty$), m est atomique car $m((\mathbb{N}^\star)^c) = 0$ et $0 < m(\{x\}) < 1$, pour tout $x \in \mathbb{N}^\star$. L'ensemble des atomes de m est infini, c'est $\mathbb{N}^\star$.

Corrigé 26 (limites sup et inf d'ensembles)
Soit (E,T,m) un espace mesuré et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$. On rappelle que $\limsup_{n\to\infty} A_n = \cap_{n\in\mathbb{N}} \cup_{p\geq n} A_p$ et $\liminf_{n\to\infty} A_n = \cup_{n\in\mathbb{N}} \cap_{p\geq n} A_p$.

1. On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $m(\cup_{p\geq n_0} A_p) < \infty$. Montrer que $m(\liminf_{n\to\infty} A_n) \leq \liminf_{n\to\infty} m(A_n) \leq \limsup_{n\to\infty} m(A_n) \leq m(\limsup_{n\to\infty} A_n)$.

corrigé

- La propriété de continuité croissante d'une mesure (voir la proposition 2.3) donne :

$$m(\liminf_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} m(\cap_{p\geq n} A_p).$$

  La monotonie de m donne $m(\cap_{p\geq n} A_p) \leq m(A_q)$ pour tout $q \geq n$. On a donc $m(\cap_{p\geq n} A_p) \leq \inf_{p\geq n} m(A_p)$ et donc $\lim_{n\to\infty} m(\cap_{p\geq n} A_p) \leq \lim_{n\to\infty}(\inf_{p\geq n} m(A_p))$, c'est-à-dire :

$$m(\liminf_{n\to\infty} A_n) \leq \liminf_{n\to\infty} m(A_n).$$

- De $\inf_{p\geq n} m(A_p) \leq \sup_{p\geq n} m(A_p)$, on déduit $\liminf_{n\to\infty} m(A_n) \leq \limsup_{n\to\infty} m(A_n)$.
- Comme il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $m(\cup_{p\geq n_0} A_p) < \infty$, la propriété de continuité décroissante d'une mesure (voir la proposition 2.3) donne $m(\limsup_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} m(\cup_{p\geq n} A_p)$. La monotonie de m donne $m(\cup_{p\geq n} A_p) \geq m(A_q)$ pour tout $q \geq n$. On a donc $m(\cup_{p\geq n} A_p) \geq \sup_{p\geq n} m(A_p)$ et donc $\lim_{n\to\infty} m(\cup_{p\geq n} A_p) \geq \lim_{n\to\infty}(\sup_{p\geq n} m(A_p))$, c'est-à-dire :

$$m(\limsup_{n\to\infty} A_n) \geq \limsup_{n\to\infty} m(A_n).$$

---

2. Donner un exemple (c'est-à-dire choisir (E,T,m) et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$) pour lequel :

$$\limsup_{n\to\infty} m(A_n) > m(\limsup_{n\to\infty} A_n).$$

corrigé

On prend $(E,T,m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $A_n = [n, n+1[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On obtient alors :

$$\limsup_{n\to\infty} m(A_n) = 1 > 0 = m(\emptyset) = m(\limsup_{n\to\infty} A_n).$$

---

3. Donner un exemple avec m finie (c'est-à-dire $m(E) < \infty$) pour lequel
$m(\liminf_{n\to\infty} A_n) < \liminf_{n\to\infty} m(A_n) < \limsup_{n\to\infty} m(A_n) < m(\limsup_{n\to\infty} A_n)$.

corrigé

On prend $(E, T, m) = ([0,4], \mathcal{B}([0,4]), \lambda)$ (plus précisément, λ est ici la restriction à $\mathcal{B}([0,4])$ de λ qui est une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$) et $A_{2n} = [0,2]$, $A_{2n+1} = [1,4]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On obtient $\limsup_{n\to\infty} A_n = [0,4]$ et $\liminf_{n\to\infty} A_n = [1,2]$. On a ainsi :

$m(\liminf_{n\to\infty} A_n) = 1$, $\liminf_{n\to\infty} m(A_n) = 2$, $\limsup_{n\to\infty} m(A_n) = 3$ et $m(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 4$.

---

4. ($\star$) (Lemme de Borel-Cantelli) On suppose que $\sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n) < \infty$.
Montrer que $m(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$.

corrigé

De $\sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n) < \infty$ on déduit que $\sum_{p=n}^{\infty} m(A_p) \to 0$ quand $n \to \infty$ et donc que $m(\cup_{p\geq n} A_p) \to 0$ quand $n \to \infty$ (car, par σ-sous additivté de m, on a $m(\cup_{p\geq n} A_p) \leq \sum_{p=n}^{\infty} m(A_p)$). Par continuité décroissante de m, on en déduit alors $m(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$.

Corrigé 27 (Petit ouvert dense...) ($\star\star$)
On considère ici l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Soit $\varepsilon > 0$, peut-on construire un ouvert dense dans $\mathbb{R}$ de mesure inférieure à ε ? [On rappelle qu'une partie A de R est dense dans $\mathbb{R}$ si $\overline{A} = \mathbb{R}$ ou encore si, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in A$ t.q. $|x - a| < \varepsilon$.]

corrigé

La réponse est "oui".... Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\mathbb{Q}$ est dénombrable, il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, bijective. On considère alors $O = \cup_{n\in\mathbb{N}}]\varphi(n) - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, \varphi(n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}[$. O est bien un ouvert (comme réunion d'ouverts), dense dans $\mathbb{R}$ (car $O \supset \mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$) et, par σ-sous additivité d'une mesure, on a $\lambda(O) \leq \varepsilon \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \varepsilon$.

Corrigé 28 (Non existence d'une mesure sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ exprimant la longueur) ($\star\star$)
On définit la relation d'équivalence sur $[0,1[$: xRy si $x - y \in \mathbb{Q}$. En utilisant l'axiome du choix, on construit un ensemble $A \subset [0,1[$ tel que A contienne un élément et un seul de chaque classe d'équivalence. Pour $q \in \mathbb{Q} \cap [0,1[$, on définit $A_q = \{y \in [0,1[; y = x + q \text{ ou } y = x + q - 1, x \in A\}$, c'est-à-dire $A_q = \{y \in [0,1[; y - q \in A \text{ ou } y - q + 1 \in A\}$.

1. Montrer que $\bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1[} A_q = [0,1[$.

corrigé

Soit $y \in [0,1[$, il existe $x \in A$ t.q. yRx (car A contient un élément dans chaque classe d'équivalence), c'est-à-dire $y - x \in \mathbb{Q}$. Comme $y - x \in]-1,1[$ (car $x, y \in [0,1[$), on a donc $y - x = q \in \mathbb{Q} \cap [0,1[$ ou $y - x + 1 = q \in \mathbb{Q} \cap]0,1[$. Ceci donne $y \in A_q$. On a donc $[0,1[\subset \cup_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1[} A_q$. Comme $A_q \subset [0,1[$ pour tout $q \in \mathbb{Q} \cap [0,1[$, on a finalement $[0,1[= \cup_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1[} A_q$.

Il est important aussi de remarquer que les A_q sont disjoints 2 à 2. En effet, si $y \in A_q \cap A_{q'}$, il existe $x, x' \in A$ t.q. $y - x = q$ ou $(q-1)$ et $y - x' = q'$ ou $(q'-1)$. On en déduit $x - x' \in \mathbb{Q}$ et donc

$x = x'$ (car A contient un seul élément de chaque classe d'équivalence). Ceci donne $q = q' = y - x$ (si $y - x \in [0,1[$) ou $q = q' = y - x + 1$ (si $y - x \in]-1,0[$).

---

2. Montrer que si m est une application de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, invariante par translation et vérifiant $m([0,1[) = 1$, m ne peut pas être σ- additive. En déduire la non-existence d'une mesure m, sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, invariante par translation et t.q. $m([a,b]) = b - a$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. En particulier, montrer que l'application $\lambda^\star$, définie en cours, ne peut pas être une mesure sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

corrigé

On suppose que m est une mesure sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ vérifiant $m([0,1[) = 1$. La σ- additivité de m donne alors, avec la première question,

$$1 = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,1[} m(A_q). \tag{12.6}$$

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, on note $B + x = \{y + x,\ y \in B\}$. On suppose que m est invariante par translation, on a donc $m(B + x) = m(B)$ pour tout $B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ et tout $x \in \mathbb{R}$.

On remarque maintenant que $A_q = ((A+q) \cap [0,1[) \cup ((A+q-1) \cap [0,1[)$ pour tout $q \in \mathbb{Q} \cap [0,1[$. De plus, si $y \in ((A+q) \cap [0,1[) \cap ((A+q-1) \cap [0,1[)$, il existe $x, x' \in A$ t.q. $y = x + q = x' + q - 1$, donc $x' - x = 1$, ce qui est impossible. Ceci montre que $((A+q) \cap [0,1[) \cap ((A+q-1) \cap [0,1[) = \emptyset$. On a donc, en utilisant l'additivité de m, l'invariance par translation de m et le fait que $A + q \subset [0,2[$, $m(A_q) = m((A+q) \cap [0,1[) + m((A+q-1) \cap [0,1[) = m((A+q) \cap [0,1[) + m((A+q) \cap [1,2[) = m(A+q) = m(A)$, pour tout $q \in \mathbb{Q} \cap [0,1[$. On en déduit $\sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,1[} m(A_q) = 0$ si $m(A) = 0$ et $\sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,1[} m(A_q) = \infty$ si $m(A) > 0$, et donc $\sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,1[} m(A_q) \neq 1$, en contradiction avec (12.6). Il n'existe donc pas de mesure sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, invariante par translation et t.q. $m([0,1[) = 1$.

Si m est une mesure sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, invariante par translation et t.q. $m([a,b]) = b - a$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. On montre que $m[0,1[= 1$ en utilisant la continuité croissante de m et le fait que $[0,1[= \cup_{n \geq 1} [0, 1 - \frac{1}{n}]$. Il est donc impossible de trouver une telle mesure.

L'application $\lambda^\star$ définie en cours sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ (à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$) est invariante par translation et vérifie $\lambda^\star([a,b]) = b - a$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Elle n'est donc pas σ-additive sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Corrigé 29

Soit m une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. pour tout intervalle I et tout $x \in \mathbb{R}$ on ait $m(I) = m(I + x)$ (avec $I + x = \{a + x,\ a \in I\}$) et $m([0,1]) = 1$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $m(\{x\}) = 0$ (i.e. m est diffuse). En déduire que m est la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. [On pourra découper $[0,1[$ en q intervalles de longueur $1/q$.]

corrigé

On pose $m(\{0\}) = \alpha$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On prend $I = \{0\}$ (I est bien un intervalle) de sorte que $I + x = \{x\}$. On a alors $\alpha = m(\{0\}) = m(I) = m(I + x) = m(\{x\})$. On a donc montré que $m(\{x\}) = \alpha$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Pour montrer que $\alpha = 0$, il suffit, par exemple, de remarquer que, en utilisant la σ-additivité de m :

$$1 = m([0,1]) \geq \sum_{n=1}^{\infty} m(\{\frac{1}{n}\}) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \alpha.$$

On en déduit $\alpha = 0$ (sinon, le membre de droite de la précédente inégalité est égal à $+\infty$ et l'inégalité est alors fausse).

On a donc bien montré que $m(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ceci donne, en particulier que $1 = m([0,1]) = m([0,1[) + m(\{1\}) = m([0,1[)$.

Soit maintenant $q \in \mathbb{N}^\star$. On a $m([\frac{i}{q}, \frac{i+1}{q}[) = m([0, \frac{1}{q}[)$ pour tout $i \in \{0,\ldots,q-1\}$, car $[\frac{i}{q}, \frac{i+1}{q}[= [0, \frac{1}{q}[+\frac{i}{q}$. On en déduit :

$$1 = m([0,1[) = \sum_{i=0}^{q-1} m([\frac{i}{q}, \frac{i+1}{q}[) = qm([0, \frac{1}{q}[),$$

et donc $m([0, \frac{1}{q}[) = \frac{1}{q}$. Ceci donne aussi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $m([x, x+\frac{1}{q}[) = \frac{1}{q}$, car $[x, x+\frac{1}{q}[= [0, \frac{1}{q}[+x$. En utilisant l'additivité de m, on a donc, pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$:

$$m([0, \frac{p}{q}[) = \sum_{i=0}^{p-1} m([\frac{i}{q}, \frac{i+1}{q}[) = \frac{p}{q}. \tag{12.7}$$

De (12.7), on va déduire $m([\alpha,\beta[) = \beta - \alpha$ pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.q. $\alpha < \beta$. En effet, soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.q. $\alpha < \beta$. Comme $[\alpha,\beta[= [0,\gamma[+\alpha$, avec $\gamma = \beta - \alpha$, on a $m([\alpha,\beta[) = m([0,\gamma[)$. Il existe alors deux suites $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}_+^\star$ et $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}_+^\star$ t.q. $r_n \uparrow \gamma$ et $s_n \downarrow \gamma$ quand $n \to \infty$. Comme $[0,r_n[\subset [0,\gamma[\subset [0,s_n[$, on a, grâce à (12.7), $r_n = m([0,r_n[) \le m([0,\gamma[) \le m([0,s_n[) = s_n$. Eh faisant $n \to \infty$, on en déduit que $m([0,\gamma[) = \gamma$ et donc $m([\alpha,\beta[) = \beta - \alpha$.

Enfin, comme $m(\{\alpha\}) = 0$, on a aussi

$$m(]\alpha,\beta[) = \beta - \alpha, \text{ pour tout } \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha < \beta.$$

La partie "unicité" du théorème de Carathéodory donne alors $m = \lambda$.

Corrigé 30 (Support d'une mesure sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$)

Soit m une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Montrer qu'il existe un plus grand ouvert de mesure nulle pour m. L'ensemble fermé complémentaire de cet ouvert s'appelle *le support* de m. [On pourra, par exemple, considérer les pavés à extrémités rationnelles qui sont de mesure nulle pour m.]

corrigé

On note A l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}^d$ de mesure nulle pour m. L'ensemble A est non vide (car l'ensemble vide est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ de mesure nulle). On pose :

$$O = \cup_{\omega\in A}\omega.$$

L'ensemble O est donc la réunion de tous les ouverts de $\mathbb{R}^d$ de mesure nulle. Il est clair que O est ouvert (car c'est une réunion d'ouverts) et qu'il contient tous les ouverts de $\mathbb{R}^d$ de mesure nulle. Pour montrer que O est le plus grand ouvert de mesure nulle, il suffit donc de montrer que O est de mesure nulle. Pour cela, on va montrer que O est une réunion dénombrable d'ouverts de mesure nulle.

Soit $x = (x_1,\ldots,x_d)^t \in O$. Il existe $\omega \in A$ t.q. $x \in \omega$. Comme ω est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ t.q. :

$$\prod_{i=1}^{d}]x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon[\subset \omega.$$

Pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$ il existe $\gamma_{i,x} \in]x_i - \varepsilon, x_i[\cap \mathbb{Q}$ et $\delta_{i,x} \in]x_i, x_i + \varepsilon[\cap \mathbb{Q}$. On a donc :

$$x \in \prod_{i=1}^{d}]\gamma_{i,x}, \delta_{i,x}[\subset \omega \subset O.$$

Par monotonie d'une mesure, on a $m(\prod_{i=1}^{d}]\gamma_{i,x}, \delta_{i,x}[) \leq m(\omega) = 0$, et donc $m(\prod_{i=1}^{d}]\gamma_{i,x}, \delta_{i,x}[) = 0$.
Comme $O = \cup_{x \in O}\{x\}$, on a aussi :

$$O = \cup_{x \in O} \prod_{i=1}^{d}]\gamma_{i,x}, \delta_{i,x}[= \cup_{x \in O} P_{\gamma_x, \delta_x}, \tag{12.8}$$

en posant $\gamma_x = (\gamma_{1,x}, \ldots, \gamma_{d,x})^t$, $\delta_x = (\delta_{1,x}, \ldots, \delta_{d,x})^t$ et $P_{\gamma,\delta} = \prod_{i=1}^{d}]\gamma_i, \delta_i[$ (si $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_d)^t$ et $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_d)^t$).
On remarque maintenant que, pour tout $x \in O$, $\gamma_x, \delta_x \in \mathbb{Q}^d$. L'égalité (12.8) donne donc :

$$O = \cup_{(\gamma,\delta) \in B} P_{\gamma,\delta},$$

où B est une partie de $\mathbb{Q}^{2d}$ et $m(P_{\gamma,\delta}) = 0$ pour tout $(\gamma, \delta) \in B$. Comme $\mathbb{Q}^{2d}$ est dénombrable, la partie B est au plus dénombrable et la $\sigma-$sous additivité d'une mesure donne alors que $m(O) = 0$.

Corrigé 31 (Ensemble de Cantor)
On considère l'espace mesuré $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$.
On pose $C_0 = [0, 1]$, $a_1^0 = 0$, $b_1^0 = 1$, et $\alpha_0 = 1$. Pour $n \geq 0$, on construit $C_{n+1} \subset [0, 1]$ de la manière suivante : on suppose $C_n = \bigcup_{p=1}^{2^n} [a_p^n, b_p^n]$ connu, et on définit $C_{n+1} = \bigcup_{p=1}^{2^{n+1}} [a_p^{n+1}, b_p^{n+1}]$ où, pour $p = 1, \ldots, 2^n$, $a_{2p-1}^{n+1} = a_p^n$, $b_{2p-1}^{n+1} = a_p^n + \alpha_{n+1}$, $a_{2p}^{n+1} = b_p^n - \alpha_{n+1}$ et $b_{2p}^{n+1} = b_p^n$, avec $\alpha_{n+1} = \frac{\rho_n \alpha_n}{2}$, et $0 < \rho_n < 1$. On pose $C = \cap_{n \geq 0} C_n$ (C s'appelle "ensemble de Cantor", l'exemple le plus classique est obtenu avec $\rho_n = \frac{2}{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

1. Montrer que $C_{n+1} \subset C_n$.

corrigé

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \{1, \ldots, 2^n\}$, la longueur de l'intervalle $[a_p^n, b_p^n]$ est α_n. Comme $\alpha_{n+1} < \frac{\alpha_n}{2}$ et que $a_{2p-1}^{n+1} = a_p^n$ et $b_{2p}^{n+1} = b_p^n$, on a $[a_{2p-1}^{n+1}, b_{2p-1}^{n+1}] \cup [a_{2p}^{n+1}, b_{2p}^{n+1}] \subset [a_p^n, b_p^n]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \{1, \ldots, 2^n\}$. En prenant l'union sur $p \in \{1, \ldots, 2^n\}$, on en déduit $C_{n+1} \subset C_n$.

---

2. Montrer que C est compact et $\overset{\circ}{C} = \emptyset$.

corrigé

L'ensemble C est fermé (dans $\mathbb{R}$) car c'est une intersection de fermés (chaque C_n est fermé). D'autre part $C \subset [0, 1]$, C est donc compact (car fermé et borné dans $\mathbb{R}$).

Comme $\alpha_{n+1} < \frac{\alpha_n}{2}$, on a toujours $b_p^n < a_{p+1}^n$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \{1, \ldots, 2^n - 1\}$). Les intervalles composant C_n sont donc disjoints 2 à 2 et de longueur α_n. Ceci montre que $x, y \in [0, 1]$, $(y - x) > \alpha_n$ implique $]x, y[\not\subset C_n$. Comme $\alpha_n \to 0$ quand $n \to \infty$ (noter que $\alpha_n \leq \frac{1}{2^n}$), on en déduit que $C = \cap_{n \in \mathbb{N}} C_n$ ne contient aucun intervalle ouvert (non vide) et donc que $\overset{\circ}{C} = \emptyset$.

---

3. Montrer que C est non dénombrable.

corrigé

On commence par définir, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^\star$, des points x_c pour $c \in \{1,2\}^n$.

Pour $n = 1$, $x_{(1)} = a_1^0$ et $x_{(2)} = b_1^0$.

Soit $n \geq 1$. Supposons que x_c est construit pour tout $c \in \{1,2\}^n$ et que pour chaque $c \in \{1,2\}^n$, $x_c \in \{b_p^{n-1},\ p = 1,\ldots,2^{n-1}\} \cup \{a_p^{n-1},\ p = 1,\ldots,2^{n-1}\}$. On construit maintenant x_c pour $c \in \{1,2\}^{n+1}$. Soit donc $c \in \{1,2\}^{n+1}$, on pose $c = \{\overline{c}, b\}$ avec $\overline{c} \in \{1,2\}^n$ et $d \in \{1,2\}$ et on distingue 4 cas :

(a) $x_{\overline{c}} = b_p^{n-1}$, avec $p \in \{1,\ldots,2^{n-1}\}$, $d = 1$. On pose alors $x_c = a_{2p}^n$,
(b) $x_{\overline{c}} = b_p^{n-1}$, avec $p \in \{1,\ldots,2^{n-1}\}$, $d = 2$. On pose alors $x_c = b_{2p}^n$,
(c) $x_{\overline{c}} = a_p^{n-1}$, avec $p \in \{1,\ldots,2^{n-1}\}$, $d = 1$. On pose alors $x_c = a_{2p-1}^n$,
(d) $x_{\overline{c}} = a_p^{n-1}$, avec $p \in \{1,\ldots,2^{n-1}\}$, $d = 2$. On pose alors $x_c = b_{2p-1}^n$.

Il est intéressant de noter, avec ces formules, que $|x_c - x_{\overline{c}}| \leq \alpha_n \leq \frac{1}{2^n}$ et que $x_c \in C$.

On note S l'ensemble des suites indexées par $\mathbb{N}^\star$, prenant leurs valeurs dans $\{1,2\}$. Si $c \in S$, on note c_n l'élément de $\{1,2\}^n$ formé par les n premiers termes de la suite et on note $x_n = x_{c_n}$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy (car $|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1}{2^n}$) et incluse dans C, elle converge donc vers un point $x_c \in C$. On remarque que si c et c' sont deux suites différentes, alors $x_c \neq x_{c'}$. En effet soit $n \in \mathbb{N}$ t.q. $c_n = c'_n$ et $c_{n+1} \neq c'_{n+1}$, on alors $|x_{c_m} - x_{c'_m}| \geq (1-\rho_n)\alpha_n$ pour tout $m > n$ et donc, en passant à la limite quand $m \to \infty$, $|x_c - x_{c'}| \geq (1-\rho_n)\alpha_n$, ce qui donne $x_c \neq x_{c'}$. L'application $c \mapsto x_c$ est donc une injection de S dans C. Ceci montre que C est infini non dénombrable (car S est infini non dénombrable).

---

4. Montrer que si ρ_n ne dépend pas de n, alors $\lambda(C) = 0$. En déduire que si $A \in \mathcal{B}([0,1])$, $\lambda(A) = 0$ n'entraîne pas que A est dénombrable.

corrigé

La construction des points a_p^n et b_p^n donne $\lambda([a_{2p-1}^{n+1}, b_{2p-1}^{n+1}] \cup [a_{2p}^{n+1}, b_{2p}^{n+1}]) = 2\alpha_{n+1} = \rho_n\alpha_n = \rho_n\lambda([a_p^n, b_p^n])$. En prenant l'union sur $p \in \{1,\ldots,2^n\}$, on en déduit $\lambda(C_{n+1}) = \rho_n\lambda(C_n)$.

Si ρ_n ne dépend pas de n, c'est-à-dire $\rho_n = \rho$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $0 < \rho < 1$, on a donc $\lambda(C_{n+1}) = \rho\lambda(C_n)$. Ceci donne, comme $\lambda(C_0) = 1$, $\lambda(C_n) = \rho^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par continuité décroissante de λ, on en déduit $\lambda(C) = \lim_{n\to\infty} \lambda(C_n) = 0$.

---

5. Soit $0 < \epsilon < 1$. Montrer qu'il existe une suite $(\rho_n)_{n\geq 0} \subset]0,1[$ t.q. $\lambda(C) = \epsilon$.

corrigé

Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset]\varepsilon, 1]$ t.q. $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_{n+1} < \varepsilon_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon_n \to \varepsilon$ quand $n \to \infty$ (on peut prendre, par exemple, $\varepsilon_n = \varepsilon - \frac{1-\varepsilon}{n+1}$).

On prend $\rho_n = \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a bien $0 < \rho_n < 1$ et, comme $\lambda(C_{n+1}) = \rho_n\lambda(C_n)$ (ceci a été démontré à la question précédente), on adonc $\lambda(C_n) = \varepsilon_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par continuité décroissante de λ, on en déduit $\lambda(C) = \lim_{n\to\infty} \lambda(C_n) = \varepsilon$.

---

6. Soit f lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que si A est un compact de $[0,1]$ t.q. $\lambda(A)=0$, alors $f(A)$ est un compact de $\mathbb{R}$ t.q. $\lambda(f(A))=0$.

corrigé

Comme f est continue, f transforme les compacts en compacts. Donc, $f(A)$ est bien un compact de $\mathbb{R}$ (et donc appartient à $\mathcal{B}(\mathbb{R})$).

On montre maintenant que $\lambda(f(A))=0$.

Soit $L \in \mathbb{R}$ t.q. $|f(y)-f(x)| \leq L|y-x|$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$. On commence par montrer un petit résultat préliminaire. Soit $I=[a,b]$ un intervalle fermé de $[0,1]$ (I est donc compact). Comme f est continue sur $[a,b]$, il existe $x, y \in [a,b]$ t.q. $f(x)=m=\min\{f(z),\, z \in [a,b]\}$ et $f(y)=M=\max\{f(z),\, z \in [a,b]\}$. On a donc $f(I) \subset [m,M]$ (en fait, $f(I)=[m,M]$), d'où :

$$\lambda(f(I)) \leq M-m = f(y)-f(x) \leq L|y-x| = L\lambda(I). \tag{12.9}$$

Soit $\eta>0$. Comme $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, d'après la régularité de λ (voir le théorème 2.3), il existe O, ouvert de $\mathbb{R}$, t.q. $A \subset O$ et $\lambda(0) \leq \eta$. D'après le lemme 2.4 page 34, O est une union dénombrable d'intervalles ouverts disjoints 2 à 2. En prenant éventuellement la restriction à $[0,1]$ de ces intervalles, on obtient donc une famille dénombrable, notée $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, d'intervalles inclus dans $[0,1]$, disjoints 2 à 2 t.q. $A \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} I_n \subset O$. On en déduit $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda(I_n) = \lambda(\cup_{n\in\mathbb{N}} I_n) \leq \eta$ et $f(A) \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} f(I_n) \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} f(\overline{I}_n)$. On a donc $\lambda(f(A)) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda(f(\overline{I}_n))$. En utilisant (12.9), on a donc $\lambda(f(A)) \leq L\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda(\overline{I}_n) = L\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda(I_n) \leq L\eta$. Comme η est arbitrairement petit, on a donc $\lambda(f(A))=0$.

---

7. Construire une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ t.q. si A est un compact de $[0,1]$ t.q. $\lambda(A)=0$, on n'a pas forcément $\lambda(f(A))=0$ (mais $f(A)$ est un compact de $\mathbb{R}$). [Utiliser un ensemble de Cantor de mesure nulle (cf question 4) et un ensemble de Cantor de mesure $\epsilon>0$ (cf question 5).]

corrigé

On note C l'ensemble obtenu dans la question 4, c'est-à-dire avec $\rho_n=\rho$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $0<\rho<1$ (par exemple, $\rho=\frac{2}{3}$). On note a_n^p, b_n^p, C_n les points et ensembles utilisés pour construire C et on note aussi $D=\{a_n^p,\, n\in\mathbb{N},\, p\in\{1,\ldots,2^n\}\} \cup \{b_n^p,\, n\in\mathbb{N},\, p\in\{1,\ldots,2^n\}\}$. (Noter que $D \subset C$.)

Soit $\varepsilon>0$. On note $\tilde{C}$ l'ensemble C obtenu à la question 5. On a donc $\lambda(C)=\varepsilon$. On note $\tilde{a}_n^p$, $\tilde{b}_n^p$, $\tilde{C}_n$ les points et ensembles utilisés pour construire $\tilde{C}$ et on note aussi $\tilde{D}=\{\tilde{a}_n^p,\, n\in\mathbb{N},\, p\in\{1,\ldots,2^n\}\} \cup \{\tilde{b}_n^p,\, n\in\mathbb{N},\, p\in\{1,\ldots,2^n\}\}$. (Noter que $\tilde{D} \subset \tilde{C}$.)

Soit $n\in\mathbb{N}$ et $p\in\{1,\ldots,2^n\}$. On construit f sur l'intervalle $[b_{2p-1}^{n+1}, a_{2p}^{n+1}]$ en prenant f affine et t.q. $f(b_{2p-1}^{n+1})=\tilde{b}_{2p-1}^{n+1}$ et $f(a_{2p-1}^{n+1})=\tilde{a}_{2p-1}^{n+1}$. On remarque que f est ainsi contruit de $(\cup_{n\in\mathbb{N}} C_n^c)\cup D$ dans $(\cup_{n\in\mathbb{N}} \tilde{C}_n^c)\cup \tilde{D}$ et est strictement croissante. Comme $(\cup_{n\in\mathbb{N}} C_n^c)^c = C$ et que C est d'intérieur vide, f est définie sur une partie dense de $[0,1]$ et, comme $(\cup_{n\in\mathbb{N}} \tilde{C}_n^c)^c=\tilde{C}$ et que $\tilde{C}$ est d'intérieur vide, l'image de f est dense dans $[0,1]$.

Il est maintenant facile de définir f par densité sur tout $[0,1]$. En effet, soit $x\in[0,1]\setminus(\cup_{n\in\mathbb{N}} C_n^c)\cup D$, il existe une suite de points de $(\cup_{n\in\mathbb{N}} C_n^c)\cup D$, notée $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, convergeant en croissant vers x et une suite de points de $(\cup_{n\in\mathbb{N}} C_n^c)\cup D$, notée $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, convergeant en décroissant vers x (en fait, ces points peuvent même être pris dans D). Comme f et croissante, la suite $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc en croissant vers un certain $\gamma \in [0,1]$ et la suite $(f(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en décroissant vers un certain $\delta \in [0,1]$ (la croissance de f donne aussi que ces limites ne dépendent que du choix de x et non du choix des suites $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$). Comme f est croissante, on a $\gamma \leq \delta$ et comme l'image de f (définie pour l'instant seulement sur $(\cup_{n\in\mathbb{N}}C_n^c)\cup D$) est dense dans $[0,1]$, on a nécessairement $\gamma = \delta$ (l'intervalle γ, δ ne rencontre pas l'image de f). On peut donc poser $f(x) = \gamma = \delta$.

La fonction f est donc maintenant définie sur tout $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$. Elle est strictement croissante et son image est dense dans $[0,1]$, elle est donc continue (par le même raisonnement que celui fait pour définir $f(x)$ en tout point $x \in [0,1]\setminus(\cup_{n\in\mathbb{N}}C_n^c)\cup D)$. Comme une application continue transforme un compact en compact, on a donc $f([0,1]) = [0,1]$ et ceci prouve en particulier que $f([0,1] \setminus (\cup_{n\in\mathbb{N}}C_n^c) \cup D) = [0,1] \setminus (\cup_{n\in\mathbb{N}}\tilde{C}_n^c) \cup \tilde{D}$. Comme $f(D) = \tilde{D}$, on a aussi $f(C) = \tilde{C}$. Pour que f soit définie sur $\mathbb{R}$ et continue, on ajoute $f(x) = 0$ pour $x < 0$ et $f(x) = 1$ pour $x > 1$. On a toujours $f(C) = \tilde{C}$. Ceci donne bien le résultat désiré car $\lambda(C) = 0$ et $\lambda(\tilde{C}) = \varepsilon > 0$.

Corrigé 32 (Mesure complète)
Soit (E, T, m) un espace mesuré. Une partie B de E est dite "négligeable" si elle est incluse dans un élément de T de mesure nulle. On note $\mathcal{N}_m$ l'ensemble des parties négligeables. On pose $\overline{T} = \{A \cup N;\ A \in T,\ N \in \mathcal{N}_m\}$.

1. Montrer que $\overline{T}$ est une tribu et que $T \cup \mathcal{N}_m \subset \overline{T}$.

corrigé

(a) On montre d'abord que $\overline{T}$ est une tribu.
- $\emptyset \in \overline{T}$ car $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset$ et $\emptyset$ appartient à T et $\mathcal{N}_m$ (car il est de mesure nulle).
- $\overline{T}$ est stable par passage au complémentaire :

  Soit $C \in \overline{T}$. Il existe $A \in T$ et $N \in \mathcal{N}_m$ t.q. $C = A \cup N$. Comme $N \in \mathcal{N}_m$, il existe $B \in T$ t.q. $N \subset B$ et $m(B) = 0$.

  On remarque alors que $C^c = (A \cup N)^c = A^c \cap N^c = (A^c \cap B^c) \cup (A^c \cap N^c \cap B)$. Comme $A^c \cap B^c \in T$ (par les propriétés de stabilité de T) et $(A^c \cap N^c \cap B) \in \mathcal{N}_m$ (car inclus dans B), on en déduit que $C^c \in \overline{T}$. Donc, $\overline{T}$ est stable par passage au complémentaire.
- $\overline{T}$ est stable par union dénombrable :

  Soit $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{T}$. Il existe $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ et $(N_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{N}_m$ t.q. $C_n = A_n \cup N_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $N_n \in \mathcal{N}_m$, il existe $B_n \in T$ t.q. $N_n \subset B_n$ et $m(B_n) = 0$.

  On a alors $\cup_{n\in\mathbb{N}}C_n = (\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n)\cup(\cup_{n\in\mathbb{N}}N_n)$. On remarque que $\cup_{n\in\mathbb{N}}N_n \subset B = \cup_{n\in\mathbb{N}}B_n \in T$ et $m(B) = 0$ par σ-sous additivité de m. Donc, $\cup_{n\in\mathbb{N}}N_n \in \mathcal{N}_m$. comme $\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n \in T$, on a finalement $\cup_{n\in\mathbb{N}}C_n \in \overline{T}$. Ce qui prouve bien que $\overline{T}$ est stable par union dénombrable.

On a bien montré que $\overline{T}$ est une tribu sur E.

(b) On montre maintenant que $T \cup \mathcal{N}_m \subset \overline{T}$.
- Si $A \in T$, on a $A = A \cup \emptyset$. Comme $\emptyset \in \mathcal{N}_m$, on en déduit $A \in \overline{T}$. Donc, $T \subset \overline{T}$.
- Si $N \in \mathcal{N}_m$, on a $N = \emptyset \cup N$. Comme $\emptyset \in T$, on en déduit $N \in \overline{T}$. Donc, $\mathcal{N}_m \subset \overline{T}$.

Finalement, on a bien $T \cup \mathcal{N}_m \subset \overline{T}$.

---

2. Soit A_1, $A_2 \in T$ et N_1, $N_2 \in \mathcal{N}_m$ t.q. $A_1 \cup N_1 = A_2 \cup N_2$. Montrer que $m(A_1) = m(A_2)$.

corrigé

Soit $B_2 \in T$ t.q. $N_2 \subset B_2$ et $m(B_2) = 0$. On a :

$$A_1 \subset A_1 \cup N_1 = A_2 \cup N_2 \subset A_2 \cup B_2.$$

Donc, par monotonie et sous additivité de m, $m(A_1) \le m(A_2 \cup B_2) \le m(A_2) + m(B_2) = m(A_2)$. En changeant les rôles de A_1 et A_2, on a aussi $m(A_2) \le m(A_1)$. On a donc $m(A_1) = m(A_2)$.

Pour $B \in \overline{T}$, soit $A \in T$ et $N \in \mathcal{N}_m$ t.q. $B = A \cup N$, on pose $\overline{m}(B) = m(A)$. (La question précédente montre que cette définition est cohérente.)

3. Montrer que $\overline{m}$ est une mesure sur $\overline{T}$ et $\overline{m}_{|T} = m$. Montrer que $\overline{m}$ est la seule mesure sur $\overline{T}$ égale à m sur T.

corrigé

(a) On montre d'abord que $\overline{m}$ est une mesure sur $\overline{T}$.

Comme $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset$ et $\emptyset \in T \cap \mathcal{N}_m$, on a $\overline{m}(\emptyset) = m(\emptyset) = 0$.

Soit maintenant $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{T}$ t.q. $C_n \cap C_m = \emptyset$ si $n \ne m$. Il existe $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ et $(N_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{N}_m$ t.q. $C_n = A_n \cup N_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $N_n \in \mathcal{N}_m$, il existe $B_n \in T$ t.q. $N_n \subset B_n$ et $m(B_n) = 0$.

On a donc $\cup_{n\in\mathbb{N}} C_n = (\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \cup (\cup_{n\in\mathbb{N}} N_n)$. On a déjà vu que $\cup_{n\in\mathbb{N}} N_n \in \mathcal{N}_m$. Par définition de $\overline{m}$, on a donc $\overline{m}(\cup_{n\in\mathbb{N}} C_n) = m(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n)$. Comme $C_n \cap C_m = \emptyset$ si $n \ne m$, on a aussi $A_n \cap A_m = \emptyset$ si $n \ne m$ (car $A_p \subset C_p$ pour tout p). La σ-additivité de m (et la définition de $\overline{m}(C_n)$) donne(nt) alors :

$$\overline{m}(\cup_{n\in\mathbb{N}} C_n) = m(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \overline{m}(C_n).$$

Ce qui prouve la σ-additivité de $\overline{m}$.

(b) On montre maintenant que $\overline{m}_{|T} = m$.

Si $A \in T$, on a $A = A \cup \emptyset$. Comme $\emptyset \in \mathcal{N}_m$, on a donc ($A \in \overline{T}$, on le savait déjà, et) $\overline{m}(A) = m(A)$. Donc, $\overline{m}_{|T} = m$.

(c) Enfin, on montre que $\overline{m}$ est la seule mesure sur $\overline{T}$ égale à m sur T.

Soit $\tilde{m}$ une mesure sur $\overline{T}$ égale à m sur T.

Soit $C \in \overline{T}$. Il existe $A \in T$ et $N \in \mathcal{N}_m$ t.q. $C = A \cup N$. Comme $N \in \mathcal{N}_m$, il existe $B \in T$ t.q. $N \subset B$ et $m(B) = 0$. On a alors $A \subset C \subset A \cup B$. La monotonie de $\tilde{m}$, le fait que $\tilde{m} = m$ sur T et la sous additivité de m donnent :

$$m(A) = \tilde{m}(A) \le \tilde{m}(C) \le \tilde{m}(A \cup B) = m(A \cup B) \le m(A) + m(B) = m(A).$$

On a donc $\tilde{m}(C) = m(A) = \overline{m}(C)$. Ce qui prouve que $\tilde{m} = \overline{m}$.

---

4. Montrer que $\mathcal{N}_{\overline{m}} = \mathcal{N}_m \subset \overline{T}$.

corrigé

On a déjà vu (à la question 1) que $\mathcal{N}_m \subset \overline{T}$.

- Il est facile de voir que $\mathcal{N}_m \subset \mathcal{N}_{\overline{m}}$. En effet, soit $N \in \mathcal{N}_m$. Il existe $B \in T$ t.q. $N \subset B$ et $m(B) = 0$. Comme $T \subset \overline{T}$ et que $\overline{m} = m$ sur T, on a donc aussi $B \in \overline{T}$ et $\overline{m}(B) = 0$. Ce qui prouve que $N \in \mathcal{N}_{\overline{m}}$.
- Soit maintenant $N \in \mathcal{N}_{\overline{m}}$. Il existe $C \in \overline{T}$ t.q. $N \subset C$ et $\overline{m}(C) = 0$. Comme $C \in \overline{T}$, il existe $A \in T$, $M \in \mathcal{N}_m$ et $B \in T$ t.q. $m(B) = 0$ et $C = A \cup M \subset A \cup B$. la définition de $\overline{m}$ donne que $\overline{m}(C) = m(A)$, on a donc $m(A) = 0$. On en déduit $m(A \cup B) \leq m(A) + m(B) = 0$, et donc, comme $C \subset A \cup B$, on a bien $C \in \mathcal{N}_m$.

On a bien montré que $\mathcal{N}_{\overline{m}} = \mathcal{N}_m \subset \overline{T}$.

L'exercice 4.18 page 102 montre la différence "dérisoire", du point de vue de l'intégration, entre (E, T, m) et son complété $(E, \overline{T}, \overline{m})$.

Corrigé 33 (Série commutativement convergente dans $\mathbb{R}$)
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Le but de l'exercice est de montrer que si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{\varphi(n)}$ est convergente pour toute bijection $\varphi\ : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ est absolument convergente.

Pour montrer ce résultat, on suppose, par exemple, que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^+ = \infty$. Montrer qu'il existe $\varphi\ :\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, bijective, t.q. $\sum_{p=0}^{n} a_{\varphi(p)} \to \infty$ quand $n \to \infty$. Conclure.

corrigé

On suppose que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ n'est pas absolument convergente. La suite $(\sum_{p=0}^{n} |a_p|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc en croissant vers ∞. Comme $|a_p| = a_p^+ + a_p^-$ et que $a_p^+ = \max\{a_p, 0\} \geq 0$ et $a_p^- = \max\{-a_p, 0\} \geq 0$, les deux suites $(\sum_{p=0}^{n} a_p^+)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\sum_{p=0}^{n} a_p^-)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc aussi croissantes et l'une des deux, au moins, converge vers ∞. On suppose que la suite $(\sum_{p=0}^{n} a_p^+)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ∞ (un raisonnement analogue à ce qui suit permettrait de traiter le cas où la suite $(\sum_{p=0}^{n} a_p^-)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ∞). On va construire ci-après une bijection φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ t.q. $\sum_{p=0}^{n} a_{\varphi(p)} \to \infty$ quand $n \to \infty$. Ceci prouvera que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{\varphi(n)}$ est non convergente pour au moins une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

On note $P = \{n \in \mathbb{N},\ a_n \geq 0\}$ et $N = \{n \in \mathbb{N},\ a_n < 0\}$ (de sorte que $P \cap N = \emptyset$ et $P \cup N = \mathbb{N}$). Soit φ_1 et φ_2 les deux applications strictement croissantes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ t.q. $P = \{\varphi_1(n),\ n \in \mathbb{N}\}$ et $N = \{\varphi_2(n),\ n \in \mathbb{N}\}$.

On comnence par montrer qu'il existe une suite strictement croissante $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ t.q. $a_0 = 0$ et :

$$a_{\varphi_2(n)} + \sum_{p=a_n}^{a_{n+1}-1} a_{\varphi_1(p)} \geq 1. \tag{12.10}$$

Pour montrer l'existence d'une telle suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on pose $a_0 = 0$. Puis, on raisonne par récurrence sur n. Si $a_0, \ldots, a_n$ sont contruits, l'existence de a_{n+1} découle du fait que $\sum_{p=a_n}^{\infty} a_{\varphi_1(p)} = \sum_{p=\varphi_1(a_n)}^{\infty} a_p^+ = \infty$.

la construction de la suite $(\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ se fait alors en prenant $\varphi_1(a_0), \ldots, \varphi_1(a_1 - 1)$ puis $\varphi_2(0)$ puis $\varphi_1(a_1), \ldots, \varphi_1(a_2 - 1)$ puis $\varphi_2(1)\ldots$ puis $\varphi_1(a_n), \ldots, \varphi_1(a_{n+1} - 1)$ puis $\varphi_2(n)\ldots$

Pour décrire précisément cette application φ, on pose $b_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} = b_n + a_{n+1} - a_n + 1$ (la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et tend donc vers ∞ quand $n \to \infty$). On définit alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(q)$ losrque $q \in \{b_n, \ldots b_{n+1} - 1\}$ par :

$$\begin{aligned}&\varphi(b_n + p) = \varphi_1(a_n + p) \text{ pour } p \in \{0, \ldots, a_{n+1} - a_n - 1\},\\ &\varphi(b_{n+1} - 1) = \varphi_2(n).\end{aligned}$$

On a bien ainsi défini une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ car $b_{n+1}-1 = b_n+p$, pour $p = a_{n+1}-a_n$. L'application φ est surjective car $\{\varphi(q),\, q \in \mathbb{N}\} = P \cup N\}$. Elle est injective car chaque valeur de φ_1 et φ_2 n'est prise qu'une seule fois par φ. Enfin, on a bien $\sum_{p=0}^{n} a_{\varphi(p)} \to \infty$ quand $n \to \infty$. En effet, on remarque que, grâce à (12.10) :

$$\sum_{q=0}^{b_{n+1}-1+p} a_{\varphi(q)} \geq \sum_{q=0}^{b_{n+1}-1} a_{\varphi(q)} \geq n,$$

pour tout $p \geq 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$. Ce qui donne, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\liminf_{p\to\infty} \sum_{q=0}^{p} a_{\varphi(q)} \geq n$, et donc $\sum_{q=0}^{p} a_{\varphi(q)} \to \infty$, quand $p \to \infty$.

Corrigé 34 (Mesure sur S^1)

On considère $S^1 = \{(x, y)^t \in \mathbb{R}^2,\, |x|^2+|y|^2 = 1\}$ (S^1 est donc le cercle unité de $\mathbb{R}^2$). Pour $z = (x, y)^t \in S^1$, il existe un unique $\theta_z \in [0, 2\pi[$ t.q. $x = \cos(\theta_z)$ et $y = \sin(\theta_z)$. Pour $\alpha \in [0, 2\pi[$ et $z \in S^1$ on pose $R_\alpha(z) = (\cos(\theta_z+\alpha), \sin(\theta_z+\alpha))^t$. Noter que R_α est une bijection de S^1 sur S^1 (c'est la rotation d'angle α).

Définir une tribu T sur S^1, t.q. T contienne les parties de la forme $\{(\cos(\theta), \sin(\theta))^t,\, \theta \in]\alpha, \beta[\}$ avec $-\infty < \alpha < \beta < \infty$, et une mesure μ sur T de sorte que (S^1, T, μ) soit un espace mesuré avec $\mu(S^1) = 1$ et t.q. μ soit invariante par rotation (c'est à dire que, pour tout $A \in T$ et $\alpha \in [0, 2\pi[$, on ait $R_\alpha(A) = \{R_\alpha(z),\, z \in A\} \in T$ et $\mu(R_\alpha(A)) = \mu(A)$). [On pourra utiliser la tribu borélienne de $\mathbb{R}$, notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, et la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.]

corrigé

On note Θ l'application $z \mapsto \theta_z$ de S^1 dans $\mathbb{R}$ (cette application est bijective de S^1 dans $[0, 2\pi[$). On prend alors $T = \{\Theta^{-1}(B),\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. C'est bien une tribu sur S^1 (voir l'exercice 2.4).

Soit $-\infty < \alpha < \beta < \infty$ et $E = \{(\cos(\theta), \sin(\theta))^t,\, \theta \in]\alpha, \beta[\}$. On a $E \subset S^1$ et, si $z \in S^1$, on a $z \in E$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ t.q. $\theta_z + 2k\pi \in]\alpha, \beta[$. Ceci prouve que

$$E = \cup_{k\in\mathbb{Z}} \Theta^{-1}(]\alpha - 2k\pi, \beta - 2k\pi[),$$

et donc que $E \in T$ car $\Theta^{-1}(]\alpha - 2k\pi, \beta - 2k\pi[) \in T$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

On définit maintenant μ. Soit $A \in T$. On pose $\Theta_A = \{\theta_z,\, z \in A\}$. Comme $A \in T$, il existe $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $A = \Theta^{-1}(B)$, et donc $A = \Theta^{-1}(B \cap [0, 2\pi[)$. Comme Θ est une bijection de S^1 dans $[0, 2\pi[$, on a alors $\Theta_A = B \cap [0, 2\pi[\in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On pose $\mu(A) = \frac{1}{2\pi}\lambda(\Theta_A)$, où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

μ est bien une mesure sur T. En effet, on a $2\pi\mu(\emptyset) = \lambda(\Theta_\emptyset) = \lambda(\emptyset) = 0$. Puis, si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de T, disjoints 2 à 2, la suite $(\Theta_{A_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, disjoints 2 à 2. La $\sigma-$additvité de μ découle alors de celle de λ.

Il reste à montrer que μ est invariante par rotation. Soit $\alpha \in [0, 2\pi[$ et $A \in T$. Comme on l'a vu précédemment, il existe $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $A = \Theta^{-1}(B \cap [0, 2\pi[)$. On a donc $A = \{(\cos(\theta), \sin(\theta))^t$,

$\theta \in B \cap [0, 2\pi[\}$. Pour $\beta \in \mathbb{R}$, on note $B_\beta = \{\theta + \beta, \theta \in B\}$. On a alors :

$$R_\alpha(A) = \{(\cos(\theta+\alpha), \sin(\theta+\alpha))^t, \theta \in B \cap [0, 2\pi[\} = \{(\cos(\theta), \sin(\theta))^t, \theta \in B_\alpha \cap [\alpha, 2\pi + \alpha[\}$$
$$= \{(\cos(\theta), \sin(\theta))^t, \theta \in B_\alpha \cap [\alpha, 2\pi[\} \cup \{(\cos(\theta), \sin(\theta))^t, \theta \in B_{\alpha-2\pi} \cap [0, \alpha[\}$$
$$= \Theta^{-1}(B_\alpha \cap [\alpha, 2\pi[) \cup \Theta^{-1}(B_{\alpha-2\pi} \cap [0, \alpha[).$$

La propriété d'invariance par translation de λ permet de dire que $B_\beta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour tout $\beta \in \mathbb{R}$. On a donc $R_\alpha(A) \in T$ et, par additivité d'une mesure et définition de μ,

$$2\pi\mu(R_\alpha(A)) = \lambda(B_\alpha \cap [\alpha, 2\pi[) + \lambda(B_{\alpha-2\pi} \cap [0, \alpha[).$$

L'invariance par translation de λ donne $\lambda(B_{\alpha-2\pi} \cap [0, \alpha[) = \lambda(B_\alpha \cap [2\pi, \alpha + 2\pi[)$ et donc :

$$2\pi\mu(R_\alpha(A)) = \lambda(B_\alpha \cap [\alpha, 2\pi[) + \lambda(B_\alpha \cap [2\pi, \alpha+2\pi[) = \lambda(B_\alpha \cap [\alpha, \alpha+2\pi[) = \lambda(B \cap [0, 2\pi[).$$

Ce qui donne bien $\mu(R_\alpha(A)) = \mu(A)$.

12.2.3 Probabilités

Corrigé 35 (Lemme de Borel-Cantelli)
Soient (E, T, p) un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$. On pose $B_n = \cup_{k\geq n} A_k$ et $A = \cap_{n\in\mathbb{N}} B_n$ (on rappelle que $A = \limsup_{n\to\infty} A_n$).

1. Montrer que si $\sum_{n\in\mathbb{N}} p(A_n) < +\infty$ alors $p(A) = 0$.

corrigé

Cette question a été corrigée dans le corrigé 26.

---

2. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, les événements $A_1, \ldots, A_n$ sont indépendants. On suppose aussi que $\sum_{n\in\mathbb{N}} p(A_n) = \infty$. Montrer que $p(A) = 1$.

corrigé

Comme cela a été vu dans le corrigé 26, la propriété de continuité décroissante d'une mesure (voir la proposition 2.3) domme $p(A) = \lim_{n\to\infty} p(B_n)$. Il suffit donc de montrer que $p(B_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si il existe $k \geq n$ t.q. $p(A_k) = 1$, on a, par monotonie de p, que $p(B_n) \geq p(A_k) = 1$ et donc $p(B_n) = 1$. On suppose maintenant que $p(A_k) < 1$ pour tout $k \geq n$. Comme $B_n^c = \cap_{k\geq n} A_k^c$, la continuité décroissante de p et l'indépendance des A_k donne :

$$p(B_n^c) = \lim_{m\to\infty} \prod_{k=n}^{m} p(A_k^c) = \lim_{m\to\infty} \prod_{k=n}^{m} (1 - p(A_k)).$$

Comme $\ln(1-x) \leq -x$ pour tout $x < 1$ (ou, de manière équivalente, $\ln(u) \leq u - 1$ pour tout $u > 0$, ceci est une conséquence, par exemple, de la concavité de la fonction ln), on a, pour $m > n$:

$$\ln(\prod_{k=n}^{m} (1 - p(A_k))) = \sum_{k=n}^{m} \ln(1 - p(A_k)) \leq -\sum_{k=n}^{m} p(A_k).$$

De l'hypothèse $\sum_{n\in\mathbb{N}} p(A_n) = \infty$, on déduit $\lim_{m\to\infty} \ln(\prod_{k=n}^{m}(1-p(A_k))) = -\infty$, et donc $p(B_n^c) = 0$. Ceci donne bien $p(B_n) = 1$ et termine la démonstration.

12.3 Exercices du chapitre 3

12.3.1 Fonctions mesurables

Corrigé 36 (Caractérisation des fonctions mesurables) $(\star)$
Soient (E, T) un espace mesurable et f une application de E dans $\mathbb{R}$;

1. Montrer que $T_f = \{B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})\,;\, f^{-1}(B) \in T\}$ est une tribu.

———————————————corrigé———————————————

Cette question est un cas particulier (avec $F = \mathbb{R}$) de la question 2 de l'exercice 2.4, voir le corrige 12 page 282.

—————————————————————————————————————

2. Soit $\mathcal{C}$ un ensemble qui engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

   (i) f est mesurable,

   (ii) $f^{-1}(C) \in T$, pour tout $C \in \mathcal{C}$.

———————————————corrigé———————————————

On remarque que f mesurable signifie simplement que T_f (définie à la question précédente) contient $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Le sens (i) $\Rightarrow$ (ii) est immédiat car $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Pour le sens (ii) $\Rightarrow$ (i), on remarque que T_f est une tribu. Donc, si T_f contient $\mathcal{C}$, on a aussi T_f contient $T(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ceci donne f mesurable. Donc, on a bien (ii) $\Rightarrow$ (i)

—————————————————————————————————————

Corrigé 37 (Composition de fonctions mesurables)
Soit (E, T) et (F, S) deux espaces mesurables. Soit $f : E \to F$ et $\varphi : F \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ est muni, comme toujours, de la tribu borélienne). On suppose que f et φ sont mesurables. Montrer que $\varphi \circ f$ est mesurable (de E dans $\mathbb{R}$).

———————————————corrigé———————————————

E est muni de la tribu T, F est muni de la tribu S et $\mathbb{R}$ est muni de la tribu borélienne.

Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on remarque que $(\varphi \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(\varphi^{-1}(B))$. Comme $\varphi^{-1}(B) \in S$ car φ est mesurable (de F dans $\mathbb{R}$), on a donc $f^{-1}(\varphi^{-1}(B)) \in T$ car f est mesurable (de E dans F). Ceci montre bien que $\varphi \circ f$ est mesurable (de E dans $\mathbb{R}$).

—————————————————————————————————————

Corrigé 38 ($\mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}_+ \ldots$)
Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi \geq 0$. On munit $\mathbb{R}$ (au départ et à l'arrivée) de la tribu borélienne. Montrer que φ est mesurable (on dit aussi borélienne) si et seulement si φ est mesurable quand on la considère comme une application de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ ($\overline{\mathbb{R}}_+$ étant aussi muni de la tribu borélienne).

———————————————corrigé———————————————

On suppose φ mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit B un borélien de $\overline{\mathbb{R}}_+$, on a donc $B \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (voir la définition 3.1 page 51). Comme φ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$ et que φ est mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on a donc $\varphi^{-1}(B) = \varphi^{-1}(B \cap \mathbb{R}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ceci donne donc que φ est mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Réciproquement, on suppose maintenant φ mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ (mais φ ne prend jamais la valeur ∞, on peut donc la considérer comme étant de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$). Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On a donc aussi $B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ et donc $\varphi^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ car φ est mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Ceci prouve que φ est mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Corrigé 39 (Stabilité de $\mathcal{M}$)

1. Soient (E, T), (E', T'), (E'', T'') des espaces mesurables, f (resp. g) une application de E dans E' (resp. de E' dans E''). On suppose que f et g sont mesurables. Montrer que $g \circ f$ est une application mesurable de E dans E''.

   corrigé

   Cette question est identique à celle de l'exercice 3.2 (voir le corrigé 37) avec E'' au lieu de $\mathbb{R}$. La démonstration est semblable :

   Soit $B \in T''$, on remarque que $(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B))$. Comme $g^{-1}(B) \in T'$ car g est mesurable (de E' dans E''), on a donc $f^{-1}(g^{-1}(B)) \in T$ car f est mesurable (de E dans E'). Ceci montre bien que $g \circ f$ est mesurable (de E dans E").

   ---

2. Soit (E, T) un espace mesurable, on munit $\mathbb{R}$ de la tribu des boréliens $\mathcal{B}(\mathbb{R})$; soient f et g des fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$.

   (a) Montrer que $f^+(= \sup(f, 0))$, $f^-(= -\inf(f, 0))$ sont des fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$.

   corrigé

   Cette question est démontrée dans la proposition 3.7 page 58.

   (b) Montrer que $f + g$, fg et $|f|$ sont des fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$.

   corrigé

   Le fait que $f + g$, $fg \in \mathcal{M}$ est démontré dans la proposition 3.5 et le fait que $|f| \in \mathcal{M}$ est démontré dans la proposition 3.7 (car $|f|$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$ et $|f| \in \mathcal{M}_+$, on conclut avec l'exercice 3.3, corrigé 38).

   ---

3. Soient (E, T) un espace mesurable, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$. On suppose que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge (dans $\mathbb{R}$) pour tout $x \in E$. On pose $f(x) = lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ (pour tout $x \in E$). Montrer que f est une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$.

   corrigé

   La démonstration de cette question est donnée dans la proposition 3.5 page 56 (propriété 3).

   ---

4. Soit (E, T) un espace mesurable, on suppose qu'il existe $A \in T$ dont les sous-ensembles ne soient pas tous mesurables. Il existe donc $B \subset A$ t.q. $B \notin T$. Montrer que $h = 1_B - 1_{A\setminus B}$ n'est pas mesurable (de E dans $\mathbb{R}$), alors que $|h|$ l'est.

   corrigé

$\{1\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ alors que $h^{-1}(\{1\}) = B \notin T$, donc h n'est pas mesurable. Par contre $|h| = 1_A$ est mesurable car $A \in T$.

Corrigé 40 (Mesurabilité des fonctions continues)
Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On munit $\mathbb{R}$ (au départ et à l'arrivée) de la tribu borélienne

1. On suppose f continue. Montrer que f est mesurable (on dit aussi que f est borélienne).

   corrigé

   Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$. Comme f est continue, $f^{-1}(O)$ est aussi un ouvert de $\mathbb{R}$, donc $f^{-1}(O) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Comme l'ensemble des ouverts des ouverts engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, on en déduit que f est mesurable (on utilise ici le caractérisation de la mesurabilité donnée à la proposition 3.2 page 54).

   ---

2. On suppose f continue à droite (resp. gauche). Montrer que f est mesurable.

   corrigé

   On suppose f continue à droite. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit f_n par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} & x \le -n, \\ f(\frac{p}{n}) & \text{si} & \frac{p-1}{n} < x \le \frac{p}{n},\ p \in \{-n^2+1, \ldots, n^2\} \\ 0 & \text{si} & x > n, \end{cases}$$

   de sorte que

$$f_n = \sum_{p=-n^2+1}^{n^2} f(\frac{p}{n}) 1_{]\frac{p-1}{n}, \frac{p}{n}]}.$$

   On a $f_n \in \mathcal{E}$ car $]\frac{p-1}{n}, \frac{p}{n}] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour tout n et p. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $n > |x|$, on a $f_n(x) = f(\frac{p}{n})$ avec $\frac{p}{n} - \frac{1}{n} \le x \le \frac{p}{n}$ (p dépend de n, x est fixé). Comme f est continue à droite en x, on a donc $f_n(x) \to f(x)$ quand $n \to \infty$ (car $\frac{p}{n} \to x$, avec $\frac{p}{n} \ge x$). La deuxième caractérisation de la mesurabilité (proposition 3.6 page 58) donne alors $f \in \mathcal{M}$.

   ---

3. On suppose f croissante. Montrer que f est mesurable.

   corrigé

   Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $A = f^{-1}([\alpha, \infty[)$. On suppose $A \neq \emptyset$ (si $A = \emptyset$, on a bien $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$). Si $x \in A$, on a $f(x) \ge \alpha$ et, comme f est croissante, on a aussi $f(y) \ge \alpha$ pour tout $y \ge x$. Donc, $[x, \infty[\subset A$. En posant $a = \inf A \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, on en déduit que $]a, \infty[\subset A \subset [a, \infty[$. A est donc nécessairement un intervalle (dont la borne supérieure est ∞), ce qui prouve que $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Comme $\{[\alpha, \infty[,\ \alpha \in \mathbb{R}\}$ engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, on en déduit que f est mesurable. (On a utilisé ici de nouveau la caractérisation de la mesurabilité donnée à la proposition 3.2 page 54).

Corrigé 41 (Egalité presque partout)

1. Soient f et g des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et λ la mesure de Lebesgue ; montrer que $f = g$ λ p.p. si et seulement si $f = g$.

corrigé

Si $f = g$ (c'est-à-dire $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$), on a bien $f = g$ λ p.p. car $f = g$ sur $\emptyset^c$ et $\lambda(\emptyset) = 0$.

Pour la réciproque, on va utiliser le fait qu'un ouvert non vide est toujours de mesure de Lebesgue strictement positive. En effet, si O est un ouvert non vide, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.q. $\alpha < \beta$ et $]\alpha, \beta[\subset O$, on a donc $0 < \beta - \alpha = \lambda(]\alpha, \beta[) \le \lambda(O)$.

On suppose maintenant que $f = g$ λ p.p., il existe $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $\lambda(A) = 0$ et $f = g$ sur A^c. On a alors $\{f(x) \ne g(x)\} \subset A$. Or, $\{f(x) \ne g(x)\} = (f - g)^{-1}(\mathbb{R}^\star)$ est un ouvert car $(f - g)$ est continue (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) et $\mathbb{R}^\star$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. Donc $\{f(x) \ne g(x)\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et la monotonie de λ donne $\lambda(\{f(x) \ne g(x)\}) \le \lambda(A) = 0$. On en déduit que $\{f(x) \ne g(x)\} = \emptyset$ (car un ouvert non vide est toujours de mesure de Lebesgue strictement positive) et donc $f = g$.

2. Soient f et g des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et δ_0 la mesure de Dirac en 0 ; montrer que $f = g$ δ_0 p.p. si et seulement si $f(0) = g(0)$.

corrigé

Si $f(0) = g(0)$, on prend $A = \{0\}^c$. On a bien $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\delta_0(A) = 0$ et $f = g$ sur A^c car $A^c = \{0\}$. Donc, $f = g$ δ_0 p.p..

Réciproquement, on suppose maintenant que $f = g$ δ_0 p.p., il existe donc $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $f = g$ sur A^c et $\delta_0(A) = 0$. Comme $\delta_0(A) = 0$, on a donc $0 \notin A$, c'est-à-dire $0 \in A^c$ et donc $f(0) = g(0)$.

Corrigé 42

Soit $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On munit $\mathbb{R}^p$ de sa tribu borélienne (pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$). on suppose que f est mesurable par rapport à $x \in \mathbb{R}^N$, pour tout $y \in \mathbb{R}$, et que f est continue a gauche par rapport a $y \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$.
Pour $n > 1$ et $p \in \mathbb{Z}$, on pose : $a_p^n = \frac{p}{n}$, $p \in \mathbb{Z}$; on définit la fonction f_n, $n > 1$, de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x, y) = f(x, a_p^n), \text{ si } y \in [a_p^n, a_{p+1}^n[$$

On se limite à $N = 1$.

1. Montrer que f_n converge simplement vers f lorsque $n \to +\infty$.

corrigé

Soit $(x, y)^t \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a donc $f_n(x, y) = f(x, \frac{p}{n})$ avec $\frac{p}{n} \le y < \frac{p}{n} + \frac{1}{n}$. Noter que x et y sont fixés et que p dépend de n. Quand $n \to \infty$, on a donc $\frac{p}{n} \to y$ avec $\frac{p}{n} \le y$. Comme $f(x, \cdot)$ est continue à gauche en y, on a donc $f(x, \frac{p}{n}) \to f(x, y)$ quand $n \to \infty$, c'est-à-dire $f_n(x, y) \to f(x, y)$ quand $n \to \infty$.

2. Montrer que f_n est mesurable. [On pourra utiliser, sans le démontrer, le fait que $A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ si A, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ceci est démontré dans l'exercice 2.5 page 42.]

———————————————corrigé———————————————

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Pour $p \in \mathbb{Z}$, on pose $g_p = f(\cdot, \frac{p}{n})$. On a donc, par hypothèse, g_p mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Soit $(x,y)^t \in \mathbb{R}^2$. Il existe donc $p \in \mathbb{Z}$ t.q. $y \in [\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}[$. On a alors $f_n(x,y) = g_p(x)$ et donc $f_n(x,y) \in C$ si et seulement $g_p(x) \in C$. On en déduit que :

$$f_n^{-1}(C) = \cup_{p \in \mathbb{Z}} (g_p^{-1}(C) \times [\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}[).$$

Comme g_p est mesurable, on a $g_p^{-1}(C) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On a aussi $[\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}[\in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et donc $g_p^{-1}(C) \times [\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}[\in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ (ceci est démontré dans l'exercice 2.5 page 42). Comme $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ est stable par union dénombrable, on en déduit $f_n^{-1}(C) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ et donc f_n mesurable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

———————————————————————————————

3. Montrer que f est mesurable.

———————————————corrigé———————————————

Comme f_n mesurable pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et que $f_n(x,y) \to f(x,y)$, quand $n \to \infty$, pour tout $(x,y)^t \in \mathbb{R}^2$, la propriété 3 de la proposition 3.5 donne que f est mesurable (de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$).

———————————————————————————————

Corrigé 43 (Tribu de Borel sur $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$)

1. Montrer que $\{[0,\beta[, \beta \in \mathbb{R}_+^\star\}$ engendre $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.

———————————————corrigé———————————————

On note $\mathcal{C}_1 = \{[0,\beta[, \beta \in \mathbb{R}_+^\star\}$.

- Comme $[0,\beta[$ est un ouvert de $\overline{\mathbb{R}}_+$ pour tout $\beta \in \mathbb{R}_+^\star$, on a $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ et donc $T(\mathcal{C}_1) \subset \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.
- Par stabilité d'une tribu par passage au complémentaire, on a $\{[\beta,\infty], \beta \in \mathbb{R}_+^\star\} \subset T(\mathcal{C}_1)$.
  Comme $[0,\infty] = [0,1[\cup [1,\infty] \in T(\mathcal{C}_1)$, on a aussi $\{[\alpha,\infty], \alpha \in \mathbb{R}_+\} \subset T(\mathcal{C}_1)$.
  Par stabilité d'une tribu par intersection, on a alors $\{[\alpha,\beta[,\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}_+,\ \alpha < \beta\} \subset T(\mathcal{C}_1)$.
  Par stabilité d'une tribu par union dénombrable, on montre alors que $\{]\alpha,\beta[,\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}_+,\ \alpha < \beta\} \subset T(\mathcal{C}_1)$ et $\{]\beta,\infty], \beta \in \mathbb{R}_+\} \subset T(\mathcal{C}_1)$.

  Comme tout ouvert de $\overline{\mathbb{R}}_+$ est une réunion au plus dénombrable d'intervalles du type $]\alpha,\beta[$ (avec $\alpha,\beta \in \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{Q}$), $[0,\beta[$ (avec $\beta \in \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{Q}$) et $]\beta,\infty]$ (avec $\beta \in \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{Q}$), on en déduit que tout ouvert de $\overline{\mathbb{R}}_+$ est dans $T(\mathcal{C}_1)$ et donc $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+) \subset T(\mathcal{C}_1)$.

On a bien montré que $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+) = T(\mathcal{C}_1)$.

———————————————————————————————

2. Montrer que $\{[0,\beta[, \beta \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+^\star\}$ engendre $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.

———————————————corrigé———————————————

On note $\mathcal{C}_2 = \{[0, \beta[, \beta \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+^\star\}$. Si $\beta \in \mathbb{R}_+^\star$, on remarque que $[0, \beta[= \cup_{\alpha \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+^\star, \alpha < \beta} [0, \alpha[$. On en déduit que $[0, \beta[\in T(\mathcal{C}_2)$. On a donc $\mathcal{C}_1 \subset T(\mathcal{C}_2)$ et $T(\mathcal{C}_1) \subset T(\mathcal{C}_2)$.

Comme $T(\mathcal{C}_1) = \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$, on a aussi $T(\mathcal{C}_2) = \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.

---

3. Montrer que $\{]0, \beta[, \beta \in \mathbb{R}_+^\star\}$ n'engendre pas $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.

corrigé

On prend un ensemble E (ayant au moins 2 éléments) et une tribu T sur E différente de $\mathcal{P}(E)$ (par exemple, $T = \{\emptyset, E\}$). Soit alors $A \subset E$, $A \notin T$. On définit f de E dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ par $f(x) = \infty$ si $x \in A$ et $f(x) = 0$ si $x \notin A$. Comme $A \notin T$, la fonction f est non mesurable. On a pourtant $f^{-1}(]0, \beta[) = \emptyset \in T$ pour tout $\beta \in \mathbb{R}_+^\star$. Ceci montre que $\{]0, \beta[, \beta \in \mathbb{R}_+^\star\}$ n'engendre pas $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.

Corrigé 44

Soit f une fonction mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ est muni de sa tribu borélienne, notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$). On se propose de montrer que le graphe de f est un borélien de $\mathbb{R}^2$. On admettra le résultat suivant, vu en TD :

$$A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2). \tag{12.11}$$

On munit aussi $\mathbb{R}^2$ de sa tribu borélienne. Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on pose $F(x, y) = f(x)$ et $H(x, y) = y$.

1. Montrer que F et H sont mesurables de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

corrigé

Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On a $F^{-1}(A) = f^{-1}(A) \times \mathbb{R}$. Comme f est mesurable, $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Comme $\mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, (12.11) donne $f^{-1}(A) \times \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ et donc $F^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. On a donc F mesurable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Le fait que H est mesurable se démontre de manière semblable en remarquant que $H^{-1}(A) = \mathbb{R} \times A$ (ou en utilisant la continuité de H).

---

2. On pose $G(f) = \{(x, y)^t \in \mathbb{R}^2;\ y = f(x)\}$ ($G(f)$ est donc le graphe de f). Montrer que $G(f) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

corrigé

L'ensemble de fonctions mesurables est un espace vectoriel, on a donc $F - H$ mesurable. On en déduit que $G(f) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ en remarquant que $G(f) = (F - H)^{-1}(\{0\})$ et $\{0\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Corrigé 45 (mesurabilité au sens de Lusin)

Soit m une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, finie sur les compacts de $\mathbb{R}^N$. On rappelle (cf. cours) que m est nécessairement régulière (c'est-à-dire que pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe F fermé et O ouvert t.q. $F \subset A \subset O$ et $m(O \setminus F) < \varepsilon$).

Soit $f \in \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. On dit que f est "mesurable au sens de Lusin" si pour tout compact K et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe K_1 compact, $K_1 \subset K$, t.q. $m(K \setminus K_1) \leq \varepsilon$ et $f_{|_{K_1}} \in C(K_1, \mathbb{R})$.

1. On suppose, dans cette question, que $f = 1_A$ avec $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. Montrer que f est mesurable au sens de Lusin. [Construire K_1 avec K, F et O, où F et O sont donnés par la régularité de m appliquée à l'ensemble A.]

—————————————corrigé—————————————

Soit K compact et $\varepsilon > 0$. Par la régularité de m, il existe F fermé et O ouvert t.q. $F \subset A \subset O$ et $m(O \setminus F) < \varepsilon$. On prend $K_1 = (K \cap F) \cup (K \cap O^c)$.

Les ensembles $K \cap F$ et $K \cap O^c$ sont fermés (car l'intersection d'un compact et d'un fermé est un compact). L'ensemble K_1 est donc compact car il est l'union de deux compacts. Comme $K_1 = K \setminus (O \setminus F)$, on a bien $K_1 \subset K$ et $(K \setminus K_1) \subset (O \setminus F)$. On en déduit $m(K \setminus K_1) \leq m(O \setminus F) \leq \varepsilon$.

On montre maintenant que $f_{|K_1} \in C(K_1, \mathbb{R})$. Soit $x \in K_1$. On distingue deux cas :

Premier cas. Si $x \in K \cap F$, on a alors $x \in O$. Comme O est ouvert il existe δ t.q. $B(x, \delta) \subset O$ (où $B(x, \delta)$ est la boule ouverte de centre x et de rayon δ). On a donc $K_1 \cap B(x, \delta) \subset K \cap F \subset A$. Ce qui prouve que $f_{|K_1}$ est constante et égale à 1 sur $K_1 \cap B(x, \delta)$ et donc $f_{|K_1}$ est continue en x (car constante dans un voisinage de x).

Deuxième cas. Si $x \in K \cap O^c$, on raisonne de manière similaire. On a $x \in F^c$. Comme F^c est ouvert il existe δ t.q. $B(x, \delta) \subset F^c$. On a donc $K_1 \cap B(x, \delta) \subset K \cap O^c \subset A^c$. Ce qui prouve que $f_{|K_1}$ est constante et égale à 0 sur $K_1 \cap B(x, \delta)$ et donc $f_{|K_1}$ est continue en x.

———————————————————————————

2. On suppose, dans cette question, que f est étagée (c'est-à-dire $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$). Montrer que f est mesurable au sens de Lusin.

—————————————corrigé—————————————

Il existe $n \in \mathbb{N}^\star$, $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ t.q. $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$. On pose $f_i = 1_{A_i}$, de sorte que $f = \sum_{i=1}^n a_i f_i$.

Soit K compact et $\varepsilon > 0$. Par la question 1, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, il existe $K_1^{(i)}$ compact, $K_1^{(i)} \subset K$, t.q. $m(K \setminus K_1^{(i)}) \leq \varepsilon / n$ et $(f_i)_{|_{K_1^{(i)}}} \in C(K_1^{(i)}, \mathbb{R})$. On prend alors :

$$K_1 = \cap_{i=1}^n K_1^{(i)}.$$

On a bien K_1 compact (car intersection de compacts), $K_1 \subset K$. On a aussi $(K \setminus K_1) = \cup_{i=1}^n (K \setminus K_1^{(i)})$ et donc :

$$m(K \setminus K_1) \leq \sum_{i=1}^n m(K \setminus K_1^{(i)}) \leq \varepsilon.$$

Enfin, $f_{|K_1}$ est continue car $f_{|K_1} = \sum_{i=1}^n a_i (f_i)_{|K_1}$ et $(f_i)_{|K_1}$ est continue (puisque $(f_i)_{K_1^{(i)}}$ est continue et $K_1 \subset K_1^{(i)}$).

———————————————————————————

3. On suppose que f est mesurable (c'est-à-dire $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$). Montrer que f est mesurable au sens de Lusin. [On rappelle qu'une fonction mesurable est limite simple de fonctions étagées. On pourra utiliser le théorème d'Egorov, Théorème 3.2, et la question précédente.]

corrigé

Comme $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$, il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$ t.q. $f_n \to f$ p.p..

Soit K compact et $\varepsilon > 0$. Par la question 2, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $K_1^{(n)}$ compact, $K_1^{(n)} \subset K$, t.q. $m(K \setminus K_1^{(n)}) \le 2^{-n}$ et $(f_n)_{|_{K_1^{(n)}}} \in C(K_1^{(n)}, \mathbb{R})$. On prend tout d'abord :

$$K_2 = \cap_{n\in\mathbb{N}} K_1^{(n)}.$$

On a bien K_2 compact (car intersection de compacts), $K_2 \subset K$. On a aussi $(K \setminus K_2) = \cup_{n\in\mathbb{N}}(K \setminus K_1^{(n)})$ et donc $m(K \setminus K_2) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} m(K \setminus K_1^{(n)}) \le 2\varepsilon$. Enfin, $(f_n)_{|K_2}$ est continue pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour trouver K_1, on utilise maintenant théorème d'Egorov. Comme $f_n \to f$ p.p. sur K_2 et que $m(K_2) < \infty$, il existe $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ t.q. $A \subset K_2$, $m(K_2 \setminus A) \le \varepsilon$ et $f_n \to f$ uniformément sur A. En utilisant la régularité de m , on trouve aussi $F \subset A$, F fermé et $m(A \setminus F) \le \varepsilon$. On prend alors $K_1 = F$.

On a bien K_1 compact (car K_1 est fermé dans le compact K_2), $K_1 \subset K$. On a $(K \setminus K_1) = (K \setminus K_2) \cup (K_2 \setminus A) \cup (A \setminus F)$ et donc $m(K \setminus K_1) \le 4\varepsilon$. Enfin $f_{|K_1}$ est continue car $f_{|K_1}$ est limite uniforme de la suite de fonctions continues $((f_n)_{|K_1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Corrigé 46 (V.a. mesurable par rapport à une autre v.a.)

Dans cet exercice, on démontre le théorème 3.1. Soit X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On veut veut montrer que Y est mesurable par rapport à la tribu engendrée par X (notée $\tau(X)$ si et seulement si il existe une fonction borélienne f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $Y = f(X)$ (c'est-à-dire , plus précisément, que $Y = f \circ X$).

1. Montrer que si Y est de la forme $Y = f(X)$ où f est une fonction borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors Y est $\tau(X)$-mesurable.

corrigé

On rappelle que la tribu engendrée par X est $\tau(X) = \{X^{-1}(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$.

Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a $Y^{-1}(B) = X^{-1}(f^{-1}(B))$. Comme f est borélienne (c'est-à-dire mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, où $\mathbb{R}$ est muni de la tribu borélienne), on a $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et donc $X^{-1}(f^{-1}(B)) \in \tau(X)$. Ce qui prouve que T est $\tau(X)$-mesurable.

On suppose maintenant que Y est $\tau(X)$-mesurable.

2. On suppose, dans cette question, qu'il existe une suite de réels (a_j) tels que $a_j \ne a_k$ pour $j \ne k$ et une suite d'événements (A_j) disjoints deux à deux tels que

$$Y = \sum_j a_j 1_{A_j}.$$

On suppose aussi que $\cup_j A_j = \Omega$. Montrer que, pour tout j, $A_j \in \tau(X)$ et qu'il existe une fonction borélienne $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $Y = f(X)$.

corrigé

Soit $j \in \mathbb{N}$. Comme les A_i sont disjoints deux à deux, $a_i \neq a_k$ si $i \neq k$ et $\cup_i A_i = \Omega$, on a $A_j = Y^{-1}(\{a_j\})$. Comme $\{a_j\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et Y est τ-mesurable, on en déduit que $A_j \in \tau(X)$. (On rappelle aussi que $\tau(X) \subset \mathcal{A}$ car X est une v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.)

Pour tout i, il existe $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $A_i = X^{-1}(B_i)$ (car $A_i \in \tau(X)$). Comme les A_i sont disjoints deux à deux, on a, si $i \neq j$, $B_i \cap B_j \cap \operatorname{Im}(X) = \emptyset$ (avec $\operatorname{Im}(X) = \{X(\omega), \omega \in \Omega\}$). On peut donc supposer les B_i disjoints deux à deux en remplaçant chaque B_i ($i > 0$) par $B_i \setminus \cup_{j<i} B_j$.

On pose $f = \sum_i a_i 1_{B_i}$. La fonction f est bien une fonction borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Si $\omega \in \Omega$, il existe i t.q. $\omega \in A_i$ (car $\Omega = \cup_i A_i$), on a donc $X(w) \in B_i$ et donc $f(X(\omega)) = a_i = Y(\omega)$. Ce qui donne bien $f(X) = Y$.

---

3. Soit n un entier. On définit la fonction $\phi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par: $\phi_n(x) = \frac{1}{n}[nx]$ où $[\cdot]$ désigne la partie entière. ($[x]$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x.)

   (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\phi_n(x)$ converge vers x, quand $n \to \infty$.

   corrigé

   Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $0 \leq nx - [nx] < 1$ et donc $0 \leq x - \phi_n(x) < \frac{1}{n}$. Ce qui prouve que $\phi_n(x) \to x$ quand $n \to \infty$.

   (b) On pose $Y_n = \phi_n(Y)$. Montrer que Y_n est $\tau(X)$ mesurable.

   corrigé

   On remarque tout d'abord que ϕ_1 est borélienne. En effet, pour $p \in \mathbb{Z}$, on a $\phi_1^{-1}(\{p\}) = [p, p+1[\in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Puis, pour $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a $\phi_1^{-1}(B) = \cup_{p \in \mathbb{Z} \cap B} [p, p+1[\in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

   Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Comme $x \mapsto nx$ est continue, c'est une application borélienne. Par composition (et produit par $(1/n)$), on en déduit que la fonction ϕ_n est borélienne. On montre alors que Y_n est $\tau(X)$-mesurable, comme dans la première question car, pour $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a $Y_n^{-1}(B) = Y^{-1}(\phi_n^{-1}(B)) \in \tau(X)$.

   ---

4. Terminer la preuve du théorème.

corrigé

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Comme l'ensemble des valeurs prises par Y_n (définie dans la troisième question) est au plus dénombrable, on peut appliquer la deuxième question. On obtient l'existence de $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, borélienne, t.q. $Y_n = f_n(X)$.

On note A l'ensemble des réels x pour lesquels la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}^\star}$ est convergente. A est donc aussi l'ensemble des réels x pour lesquels la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}^\star}$ est de Cauchy. On en déduit que $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ car A peut s'écrire :

$$A = \cap_{n \in \mathbb{N}^\star} \cup_{N \in \mathbb{N}^\star} \cap_{p,q \geq N} (f_p - f_q)^{-1}([-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]).$$

On pose maintenant $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ si $x \in A$ et $f(x) = 0$ si $x \in A^c$. La fonction f est borélienne car f est limite simple des fonction boréliennes $f_n 1_{A^c}$ quand $n \to \infty$.

Enfin, si $\omega \in \Omega$, on a $Y_n(\omega) = f_n(X(\omega))$. La troisième question donne que $Y_n(\omega) = \phi_n(Y(\omega)) \to Y(\omega)$. On a donc $X(\omega) \in A$ et donc $f_n(X(\omega)) \to f(X(\omega))$. Ceci donne $Y(\omega) = f(X(\omega))$. On a bien montré que $Y = f(X)$ avec f borélienne.

Maintenant, on se demande dans quelle mesure la fonction f est unique. On note P_X la loi de X.

5. Soit f et g deux fonctions boréliennes t.q. $Y = f(X) = g(X)$. Montrer que

$$P_X(f = g) = 1.$$

corrigé

Soit $B = \{x \in \mathbb{R},\, f(x) = g(x)\}$. On a $B = (f-g)^{-1}(\{0\}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Si $\omega \in \Omega$, on a $f(X(\omega)) = g(X(\omega)) = Y(\omega)$ et donc $X(\omega) \in B$. Ceci prouve que $X^{-1}(B) = \Omega$ et donc que $P_X(B) = P(X^{-1}(B)) = 1$, c'est-à-dire $P_X(f = g) = 1$.

Corrigé 47 (Composition de v.a.)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^\star$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables alélatoires réelles. (c'est-à-dire à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de la tribu des boréliens). On définit Z par

$$\forall \omega \in \Omega\,,\;\; Z(\omega) = Y_{N(\omega)}(\omega).$$

Montrer que Z est une variable aléatoire.

corrigé

Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$A_n = \{N = n\} = \{\omega \in \Omega,\, N(\omega) = n\}$$

et

$$B_n = Y_n^{-1}(B) = \{Y_n \in B\} = \{\omega \in \Omega,\, Y_n(\omega) \in B\}.$$

(Notre que l'ensemble des A_n, $n \in \mathbb{N}^\star$, forme une partition de Ω.) On va montrer que $Z^{-1}(B) = \cup_{n\in\mathbb{N}^\star}(A_n \cap B_n)$.

En effet, pour tout $\omega \in \Omega$, on a $\omega \in A_{N(\omega)}$ et, si $\omega \in Z^{-1}(B)$, on a $Z(\omega) = Y_{N(\omega)}(\omega) \in B$. On a donc $\omega \in A_{N(\omega)} \cap B_{N(\omega)}$, ce qui donne bien $\omega \in \cup_{n\in\mathbb{N}^\star}(A_n \cap B_n)$.

Réciproquement, si $\omega \in \cup_{n\in\mathbb{N}^\star}(A_n \cap B_n)$, il existe $n \in \mathbb{N}^\star$ t.q. $\omega \in A_n \cap B_n$. On a donc $Z(\omega) = Y_n(\omega) \in B$. On a bien montré que $Z^{-1}(B) = \cup_{n\in\mathbb{N}^\star}(A_n \cap B_n)$.

Comme N et Y_n sont des v.a.r., on a $A_n, B_n \in \mathcal{A}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. On en déduit que $Z^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. Ceci donne bien que Z est mesurable.

N.B. : Une autre démonstration possible est de remarquer que $Z = \sum_{n\in\mathbb{N}^\star} 1_{A_n} Y_n$.

Corrigé 48 (Evénements, tribus et v.a. indépendantes)
Soit $(E, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. (Indépendance de 2 évènements) Soit $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$. Montrer que A_1 et A_2 sont indépendants (c'est-à-dire $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$) si et seulement si les tribus $\tau(\{A_1\})$ et $\tau(\{A_2\})$ sont indépendantes (c'est-à-dire $P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P(B_2)$ pour tout $B_1 \in \tau(\{A_1\})$ et $B_2 \in \tau(\{A_2\})$).

corrigé

On a $\tau(\{A_1\}) = \{\emptyset, A_1, A_1^c, E\}$ et $\tau(\{A_2\}) = \{\emptyset, A_2, A_2^c, E\}$.

Si les tribus $\tau(\{A_1\})$ et $\tau(\{A_2\})$ sont indépendantes on donc :

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P(B_2) \text{ pour tout } B_1 \in \{\emptyset, A_1, A_1^c, E\} \text{ et tout } \{\emptyset, A_2, A_2^c, E\}. \tag{12.12}$$

En prenant, dans (12.12), $B_1 = A_1$ et $B_2 = A_2$, on en déduit que A_1 et A_2 sont indépendants.

Réciproquement, on suppose que A_1 et A_2 sont indépendants. Pour montrer que $\tau(\{A_1\})$ et $\tau(\{A_2\})$ sont indépendantes, il suffit de montrer (12.12). On remarque tout d'abord que (12.12) est vraie si $B_1 = \emptyset$ ou E et si $B_2 = \emptyset$ ou E (l'hypothèse d'indépendance de A_1 et A_2 est même inutile). Puis, on remarque que l'hypothèse d'indépendance de A_1 et A_2 donne que (12.12) est vraie si $B_1 = A_1$ et $B_2 = A_2$. Enfin, on remarque que C_1 et C_2 indépendants implique que C_1 et C_2^c sont indépendants. En effet, on a :

$$P(C_1 \cap C_2^c) = P(C_1 \setminus (C_1 \cap C_2)) = P(C_1) - P(C_1 \cap C_2).$$

Comme C_1 et C_2 sont indépendants, on en déduit :

$$P(C_1 \cap C_2^c) = P(C_1) - P(C_1)P(C_2) = P(C_1)(1 - P(C_2)) = P(C_1)P(C_2^c).$$

En appliquant cette propriété avec $C_1 = A_1$ et $C_2 = A_2$, on montre donc que A_1 et A_2^c sont indépendants. En prenant maintenant $C_1 = A_2^c$ et $C_2 = A_1$, on montre alors que A_1^c et A_2^c sont indépendants. Enfin, En prenant $C_1 = A_2$ et $C_2 = A_1$, on montre que A_1^c et A_2 sont indépendants. On a ainsi montré que (12.12) est vraie, c'est-à-dire que les tribus $\tau(\{A_1\})$ et $\tau(\{A_2\})$ sont indépendantes.

---

2. (Indépendance de n évènements, $n \geq 2$) Soit $n \geq 2$, $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$. Montrer que les événements $A_1, \ldots, A_n$ vérifient "$P(\cap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} P(A_i)$ pour tout $I \subset \{1, \ldots, n\}$" si et seulement si les tribus $\tau(\{A_1\}), \ldots, \tau(\{A_n\})$ sont indépendantes (c'est-à-dire $P(\cap_{i=1}^n B_i) = \prod_{i=1}^n P(B_i)$ pour tout $B_i \in \tau(\{A_i\})$, $i \in \{1, \ldots, n\}$).

corrigé

Pour $p \in \{0, \ldots, n\}$, on introduit la propriété $\mathcal{P}_p$ suivante :

$$P(\cap_{i=1}^n B_i) = \prod_{i=1}^n P(B_i) \text{ si } B_i \in \tau(\{A_i\}) \text{ pour } i \leq p \text{ et } B_i \in \{\emptyset, A_i, E\} \text{ pour } i > p.$$

Il est facile de voir que la propriété $\mathcal{P}_0$ est équivalente à "$P(\cap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} P(A_i)$ pour tout $I \subset \{1, \ldots, n\}$". La propriété $\mathcal{P}_n$ signifie que les tribus $\tau(\{A_1\}), \ldots, \tau(\{A_n\})$ sont indépendantes.

Le fait que $\mathcal{P}_n$ implique $\mathcal{P}_0$ est immédiat. On suppose maintenant que $\mathcal{P}_0$ est vérifiée et va montrer que $\mathcal{P}_n$ est vérifiée. Pour cela, on raisonne par récurrence sur p. On suppose donc que $\mathcal{P}_{p-1}$ est vérifiée pour un $p \in \{1, \ldots, n\}$ et on doit montrer que $\mathcal{P}_p$ est vérifiée. Pour montrer que $\mathcal{P}_p$ est vérifiée, il suffit de prendre les B_i t.q. $B_i \in \tau(\{A_i\})$ pour $i \leq p-1$, $B_p = A_p^c$ et $B_i \in \{\emptyset, A_i, E\}$

pour $i < p$ et de montrer que $P(\cap_{i=1}^n B_i) = \prod_{i=1}^n P(B_i)$ (car les autres choix de B_p sont directement donnés par $\mathcal{P}_{p-1}$). Or, on a, pour ce choix des B_i :

$$P(\cap_{i=1}^n B_i) = P(\cap_{i=1}^n C_i) - P(\cap_{i=1}^n D_i),$$

avec $C_i = D_i = B_i$ si $i \neq p$, $C_p = E$ et $D_p = A_p$. En utilisant $\mathcal{P}_{p-1}$ on a $P(\cap_{i=1}^n C_i) = \prod_{i=1}^n P(C_i)$ et $P(\cap_{i=1}^n D_i) = \prod_{i=1}^n P(D_i)$ et donc :

$$P(\cap_{i=1}^n B_i) = \left(\prod_{i\neq p} P(B_i)\right)(P(E) - P(A_p)) = \left(\prod_{i\neq p} P(B_i)\right) P(A_p^c) = \prod_{i=1}^n P(B_i).$$

On a ainsi montré que $\mathcal{P}_p$ est vérifiée. Par récurrence (finie) sur p, on montre donc que $\mathcal{P}_n$ est vérifiée, ce qui prouve que les tribus $\tau(\{A_1\}), \ldots, \tau(\{A_n\})$ sont indépendantes.

---

3. En donnant un exemple (avec $n \geq 3$), montrer que l'on peut avoir n évévements, notés $A_1, \ldots, A_n$, indépendants deux à deux, sans que les événements $A_1, \ldots, A_n$ soient indépendants.

corrigé

On prend, par exemple, $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(E)$ et P donnée par $P(\{i\}) = \frac{1}{4}$, pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Puis, on choisit $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{1, 3\}$ et $A_3 = \{2, 3\}$. Les trois évévements A_1, A_2, A_3 sont bien indépendants deux à deux (car $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j) = \frac{1}{4}$ si $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$) mais ne sont pas indépendants car $0 = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \neq \frac{1}{8} = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$.

---

4. Soit $A \in \mathcal{A}$.

   (a) On suppose que $A \in \mathcal{A}_1$ et $A \in \mathcal{A}_2$ et que $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont deux tribus indépendantes (et contenues dans $\mathcal{A}$). Montrer que $P(A) \in \{0, 1\}$.

   corrigé

   Comme $A \in \mathcal{A}_1$, $A \in \mathcal{A}_2$ et que $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont deux tribus indépendantes, on doit avoir $P(A \cap A) = P(A)P(A)$, c'est-à-dire $P(A)(1 - P(A)) = 0$ et donc $P(A) \in \{0, 1\}$.

   (b) Montrer que $P(A) \in \{0, 1\}$ si et seulement si A est indépendant de tous les éléments de $\mathcal{A}$.

   corrigé

Si A est indépendant de tous les éléments de $\mathcal{A}$, A est indépendant avec lui même. On en déduit, comme à la question précédente que $P(A) \in \{0, 1\}$.

Réciproquement, on suppose maintenant que $P(A) \in \{0, 1\}$ et on distingue deux cas.

Premier cas. On suppose que $P(A) = 0$. On a alors pour tout $B \in \mathcal{A}$, $A \cap B \subset A$ et donc (par monotonie de P) $0 \leq P(A \cap B) \leq P(A) = 0$. On en déduit $P(A \cap B) = 0 = P(A)P(B)$. Ce qui prouve que A est indépendant de tous les éléments de $\mathcal{A}$.

Deuxième cas. On suppose que $P(A) = 1$. On a alors $P(A^c) = 0$ et, pour tout $B \in \mathcal{A}$, $P(A \cap B) = 1 - P((A \cap B)^c) = 1 - P(A^c \cup B^c)$. Or (par monotonie et σ-sous addivité de P) $P(B^c) \leq P(A^c \cup B^c) \leq P(A^c) + P(B^c) = P(B^c)$. Donc, $P(A^c \cup B^c) = P(B^c)$ et donc $P(A \cap B) = 1 - P(B^c) = P(B) = P(A)P(B)$. Ce qui prouve que A est indépendant de tous les éléments de $\mathcal{A}$.

---

5. Soit $n \geq 1$ et $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$. Montrer que les événements $A_1, \ldots, A_n$ sont indépendants si et seulement si les v.a. $1_{A_1}, \ldots, 1_{A_n}$ sont indépendantes.

corrigé

Si X est une v.a.r., la tribu engendrée par X est $\tau(X) = \{X^{-1}(B),\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. Pour $A \in \mathcal{A}$, on a donc $\tau(1_A) = \{\emptyset, A, A^c, E\}$, c'est-à-dire $\tau(1_A) = \tau(\{A\})$. L'indépendance des événements $A_1, \ldots, A_n$ correspond (par la définition 2.25) à l'indépendance des tribus $\tau(\{A_1\}), \ldots, \tau(\{A_1\})$. L'indépendance des v.a.r. $1_{A_1}, \ldots, 1_{A_n}$ correspond (par la définition 3.12)) à l'indépendance des tribus $\tau(1_{A_1}), \ldots, \tau(1_{A_n})$. Comme $\tau(\{A_i\}) = \tau(1_{A_i})$, pour tout i, on en déduit que les événements $A_1, \ldots, A_n$ sont indépendants si et seulement si les v.a. $1_{A_1}, \ldots, 1_{A_n}$ sont indépendantes.

Corrigé 49 (Convergence en mesure) $(\star\star)$

Soient (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si il existe f et g fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$ telles que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en mesure vers f et g, alors $f = g$ p.p..

   [*On pourra commencer par montrer que, pour tout* $\delta > 0$, $m(\{x \in E\,;\, |f(x) - g(x)| > \delta\}) = 0$].

corrigé

Pour $h : E \to \mathbb{R}$ et $\delta > 0$, on note toujours $\{h > \delta\} = \{x \in E;\ h(x) > \delta\}$, $\{h \geq \delta\} = \{x \in E;\ h(x) \geq \delta\}$, $\{h < \delta\} = \{x \in E;\ h(x) < \delta\}$ et $\{h \leq \delta\} = \{x \in E;\ h(x) \leq \delta\}$.

Soit $\delta > 0$. Pour tout $x \in E$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - g(x)|$. On en déduit $\{|f - f_n| \leq \frac{\delta}{2}\} \cap \{|f_n - g| \leq \frac{\delta}{2}\} \subset \{|f - g| \leq \delta\}$ et donc, en passant au complémentaire,

$$\{|f - g| > \delta\} \subset \{|f - f_n| > \frac{\delta}{2}\} \cup \{|f_n - g| > \frac{\delta}{2}\}. \tag{12.13}$$

Par sous additivité de m, on a donc $m(\{|f - g| > \delta\}) \leq m(\{|f - f_n| > \frac{\delta}{2}\}) + m(\{|f_n - g| > \frac{\delta}{2}\})$. En passant à la limite quand $n \to \infty$, on en déduit $m(\{|f - g| > \delta\}) = 0$.

On remarque maintenant que $\{x \in E;\ f(x) \neq g(x)\} = \{|f - g| > 0\} = \cup_{n\in\mathbb{N}^\star}\{|f - g| > \frac{1}{n}\}$ et donc, par σ-sous additivité de m, on obtient $m(\{x \in E;\ f(x) \neq g(x)\}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(\{|f - g| > \frac{1}{n}\}) = 0$ et donc $f = g$ p.p..

---

2. Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f \in \mathcal{M}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $g \in \mathcal{M}$, alors $(f_n + g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f + g \in \mathcal{M}$.

corrigé

Soit $\delta > 0$. En reprenant la démonstration de (12.13), on montre que

$$\{|f + g - (f_n + g_n)| > \delta\} \subset \{|f - f_n| > \frac{\delta}{2}\} \cup \{|g - g_n| > \frac{\delta}{2}\}.$$

Par sous additivité de m, ceci donne $m(\{|f+g-(f_n+g_n)| > \delta\}) \leq m(\{|f-f_n| > \frac{\delta}{2}\}) + m(\{|g-g_n| > \frac{\delta}{2}\})$ et donc que $m(\{|f+g-(f_n+g_n)| > \delta\}) \to 0$ quand $n \to \infty$. On a bien montré que $f_n+g_n \to f+g$ en mesure quand $n \to \infty$.

---

3. On suppose maintenant que m est une mesure finie. Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f \in \mathcal{M}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers g, alors $(f_n\, g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f\, g \in \mathcal{M}$.

[*On pourra commencer par montrer que, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f \in \mathcal{M}$, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 et $k_0 \in \mathbb{N}$ tels que, si $n \geq n_0$ et $k \geq k_0$, on a $m(\{x \in E\,; |f_n(x)| \geq k\}) \leq \varepsilon$*]. Donner un contre-exemple au résultat précédent lorsque $m(E) = \infty$.

corrigé

Pour $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$, la démonstration de (12.13) donne ici $\{|f_n| > k\} \subset \{|f| > \frac{k}{2}\} \cup \{|f_n - f| > \frac{k}{2}\}$ et donc

$$m(\{|f_n| > k\}) \leq m(\{|f| > \frac{k}{2}\}) + m(\{|f_n - f| > \frac{k}{2}\}. \tag{12.14}$$

On pose $A_k = \{|f| > \frac{k}{2}\}$. On a $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset T$, $A_{k+1} \subset A_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $\cap_{k\in\mathbb{N}} A_k = \emptyset$ (car f prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$). Comme E est de mesure finie, on a $m(A_k) < \infty$ (pour tout k) et on peut appliquer la continuité décroissante de m. Elle donne :

$$m(A_k) \to 0, \text{ quand } n \to \infty. \tag{12.15}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par (12.15), il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $m(A_{k_0}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Par la convergence en mesure de f_n vers f, il existe alors n_0 t.q. $m(\{|f_n - f| > \frac{k_0}{2}\} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $n \geq n_0$ et l'inégalité (12.14) donne $m(\{|f_n| > k_0\}) \leq \varepsilon$ si $n \geq n_0$. On en déduit (comme $\{|f_n| > k\} \subset \{|f_n| > k_0\}$ si $k \geq k_0$) :

$$n \geq n_0,\ k \geq k_0 \Rightarrow m(\{|f_n| > k\}) \leq \varepsilon. \tag{12.16}$$

On montre maintenant que $f_n g_n \to fg$ en mesure.

Soit $\delta > 0$, on veut montrer que $m(\{|f_n g_n - fg| > \delta\} \to 0$ quand $n \to \infty$. Pour cela, on remarque que $|f_n g_n - fg| \leq |f_n||g_n - g| + |g||f_n - f|$. Pour $k \in \mathbb{N}^\star$, on a donc

$$\{|f_n| \leq k\} \cap \{|g_n - g| \leq \frac{\delta}{2k}\} \cap \{|g| \leq k\} \cap \{|f_n - f| \leq \frac{\delta}{2k}\} \subset \{|f_n g_n - fg| \leq \delta\}$$

et, en passant au complémentaire,

$$\{|f_n g_n - fg| > \delta\} \subset \{|f_n| > k\} \cup \{|g_n - g| > \frac{\delta}{2k}\} \cup \{|g| > k\} \cup \{|f_n - f| > \frac{\delta}{2k}\},$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} m(\{|f_n g_n - fg| > \delta\}) \leq m(\{|f_n| > k\}) + m(\{|g_n - g| > \frac{\delta}{2k}\}) \\ + m(\{|g| > k\}) + m(\{|f_n - f| > \frac{\delta}{2k}\}). \end{aligned} \tag{12.17}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe k_0 et n_0 de manière à avoir (12.16). En utilisant (12.15) avec g au lieu de f, il existe aussi k_1 t.q. $m(\{|g| > k\}) \leq \varepsilon$ pour $k \geq k_1$. On choisit alors $k = \max\{k_0, k_1\}$. En utilisant la convergence en mesure de f_n vers f et de g_n vers g, il existe n_1 t.q. $m(\{|g_n - g| > \frac{\delta}{2k}\}) \leq \varepsilon$ et $m(\{|f_n - f| > \frac{\delta}{2k}\}) \leq \varepsilon$ pour $n \geq n_1$. Finalement, avec $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$ on obtient :

$$n \geq n_2 \Rightarrow m(\{|f_n g_n - fg| > \delta\}) \leq 4\varepsilon.$$

Ce qui prouve la convergence en mesure de $f_n g_n$ vers fg, quand $n \to \infty$.

Pour obtenir un contre-exemple à ce résultat si $m(E) = \infty$, on prend $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Pour $n \geq 1$ on définit f_n par $f_n(x) = \frac{1}{n}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et on définit g_n par $g_n(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Il est clair que $f_n \to 0$ en mesure, $g_n \to g$ en mesure, avec $g(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $f_n g_n \not\to 0$ en mesure car $m(\{|f_n g_n| > \delta\}) = \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et tout $\delta > 0$.

Corrigé 50 (Convergence presque uniforme et convergence p.p.)
Soient (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ (c'est-à-dire une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$) et $f \in \mathcal{M}$. On suppose que $f_n \to f$ presque uniformément (c'est à dire que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $A \in T$ t.q. $m(A) \leq \varepsilon$ et $f_n \to f$ uniformément sur A^c). Montrer que $f_n \to f$ p.p., quand $n \to \infty$.

corrigé

Soit $A_n \in T$ t.q. $m(A_n) \leq \frac{1}{n}$ et $f_n \to f$ uniformément sur A_n^c. On pose $A = \cap_{n\in\mathbb{N}^\star} A_n$, de sorte que $A \in T$ et $m(A) = 0$ car $m(A) \leq m(A_n) \leq \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

Soit $x \in A^c$, il existe $n \in \mathbb{N}^\star$ t.q. $x \in A_n$ et on a donc $f_n(x) \to f(x)$ quand $n \to \infty$. Comme $m(A) = 0$, ceci donne bien $f_n \to f$ p.p., quand $n \to \infty$.

Corrigé 51 (Théorème d'Egorov) $(\star\star)$
Soient (E, T, m) un espace mesuré fini, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$, et f une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f_n \to f$ p.p., lorsque $n \to +\infty$.
Pour $j \in \mathbb{N}^\star$ et $n \in \mathbb{N}$, on définit :

$$A_{n,j} = \{x\,;\, |f(x) - f_n(x)| \geq \frac{1}{j}\}, \text{ et } B_{n,j} = \bigcup_{p\geq n} A_{p,j} \tag{12.18}$$

1. Montrer que à j fixé, $\lim_{n\to+\infty} m(B_{n,j}) = 0$.

corrigé

On remarque d'abord que $A_{n,j} = (|f - f_n|)^{-1}([\frac{1}{j}, \infty[) \in T$ car $|f - f_n| \in \mathcal{M}$. On a donc aussi $B_{n,j} \in T$.

D'autre part, comme $f_n \to f$ p.p., lorsque $n \to +\infty$, il existe $C \in T$ t.q. $m(C) = 0$ et $f_n(x) \to f(x)$, quand $n \to \infty$, pour tout $x \in C^c$.

On va montrer que $m(B_{n,j}) \to 0$, quand $n \to \infty$ (on rappelle que $j \in \mathbb{N}^\star$ est fixé), en utilisant la continuité décroissante de m. On remarque en effet que $m(B_{n,j}) < \infty$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$) car $m(E) < \infty$ (et c'est seulement ici que cette hypothèse est utile), puis que $B_{n+1,j} \subset B_{n,j}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La continuité de décroissante de m donne donc

$$m(B_{n,j}) \to m(\cap_{n\in\mathbb{N}} B_{n,j}).$$

Or, si $x \in \cap_{n\in\mathbb{N}} B_{n,j}$, on a $x \in B_{n,j}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $p \geq n$ t.q. $x \in A_{n,j}$, c'est-à-dire $|f(x) - f_n(x)| \geq \frac{1}{j}$. Comme j est fixé, ceci montre que $f_n(x) \not\to f(x)$ quand $n \to \infty$, et donc que $x \in C$. On en déduit que $\cap_{n\in\mathbb{N}} B_{n,j} \subset C$ et donc que $m(\cap_{n\in\mathbb{N}} B_{n,j}) = 0$ et finalement que $m(B_{n,j}) \to 0$, quand $n \to \infty$.

---

2. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe A tel que $m(A) \leq \varepsilon$ et $f_n \to f$ uniformément sur A^c lorsque $n \to +\infty$. En déduire le théorème d'Egorov (théorème 3.2).

   [*On cherchera A sous la forme :* $\displaystyle\bigcup_{j\in\mathbb{N}^\star} B_{n_j,j}$, *avec un choix judicieux de n_j*.]

corrigé

Soit $\varepsilon > 0$. pour tout $j \in \mathbb{N}^\star$, la question précédente donne qu'il existe $n(j) \in \mathbb{N}$ t.q. $m(B_{n,j}) \leq \frac{\varepsilon}{2^j}$. On pose $B = \cup_{j\in\mathbb{N}^\star} B_{n(j),j}$, de sorte que $B \in T$ et, par σ-sous additivité de m :

$$m(B) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m(B_{n(j),j}) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon.$$

On montre maintenant que $f_n \to f$ uniformémement sur B^c (ce qui conclut la question en prenant $A = B$).

Comme $B = \cup_{j\in\mathbb{N}^\star}(\cup_{p\geq n(j)} A_{p,j})$, on a, en passant au complémentaire, $B^c = \cap_{j\in\mathbb{N}^\star}(\cap_{p\geq n(j)} A^c_{p,j})$.

Soit $\eta > 0$. Il existe $j \in \mathbb{N}^\star$ t.q. $\frac{1}{j} \leq \eta$. Soit $x \in B^c$, comme $x \in \cap_{p\geq n(j)} A^c_{p,j}$, on a donc $x \in A^c_{p,j}$ pour tout $p \geq n(j)$, c'est-à-dire :

$$p \geq n(j) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{j} \leq \eta.$$

Comme $n(j)$ ne dépend que de j (et donc que de η) et pas de $x \in B^c$, ceci prouve la convergence uniforme de f_n vers f sur B^c.

---

3. Montrer, par un contre exemple, qu'on ne peut pas prendre $\varepsilon = 0$ dans la question précédente.

corrigé

On prend, par exemple, $(E, T, m) = (]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[, \lambda)$ (plus précisément, λ est ici la restriction à $\mathcal{B}(]0,1[)$ de λ, qui est une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$).

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on prend $f_n = 1_{]0,\frac{1}{n}[}$, de sorte que $f_n \to 0$ p.p., quand $n \to \infty$ (et même, $f_n(x) \to 0$ pour tout $x \in]0,1[$).

Soit maintenant $B \in \mathcal{B}(]0,1[)$ t.q. $\lambda(B) = 0$. On va montrer que f_n ne peut pas tendre uniformément vers 0 sur B^c (ceci prouve bien qu'on ne peut pas prendre $\varepsilon = 0$ dans la question précédente, c'est-à-dire $\varepsilon = 0$ dans le théorème d'Egorov).

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, Il est clair que $B^c \cap]0, \frac{1}{n}[\neq \emptyset$ (car sinon, $]0, \frac{1}{n}[\subset B$ et donc $\frac{1}{n} = \lambda(]0, \frac{1}{n}[) \leq \lambda(B) = 0$). Il existe donc $x \in B^c$ t.q. $f_n(x) = 1$. On a donc

$$\sup_{x\in B^c} |f_n(x)| = 1,$$

ce qui prouve bien que f_n ne tends pas uniformément vers 0 sur B^c, quand $n \to \infty$.

---

4. Montrer, par un contre exemple, que le résultat du théorème d'Egorov est faux lorsque $m(E) = +\infty$.

corrigé

On prend, par exemple, $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\lambda)$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on prend $f_n = 1_{]n,n+1[}$, de sorte que $f_n \to 0$ p.p., quand $n \to \infty$ (et même, $f_n(x) \to 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$).

Soit maintenant $0 < \varepsilon < 1$ et $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $\lambda(B) \leq \varepsilon$. On va montrer que f_n ne peut pas tendre uniformément vers 0 sur B^c (ceci prouve bien que théorème d'Egorov peut être mis en défaut si $m(E) = \infty$).

Soit $n \in \mathbb{N}$, Il est clair que $B^c \cap]n, n+1[\neq \emptyset$ (car sinon, $]n, n+1[\subset B$ et donc $1 = \lambda(]n, n+1[) \leq \lambda(B) \leq \varepsilon$, en contradiction avec $\varepsilon < 1$). Il existe donc $x \in B^c$ t.q. $f_n(x) = 1$. On a donc

$$\sup_{x \in B^c} |f_n(x)| = 1,$$

ce qui prouve bien que f_n ne tends pas uniformément vers 0 sur B^c, quand $n \to \infty$.

Corrigé 52 (Convergence en mesure et convergence p.p.)

Soient (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$, et f une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$. On rappelle que, par définition, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en mesure vers f si :

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to+\infty} m(\{x \in E; |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0. \tag{12.19}$$

1. On suppose ici que $m(E) < +\infty$.

(a) Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers f presque partout, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers f en mesure [*Utiliser le théorème d'Egorov.*]

corrigé

Soit $\varepsilon > 0$, on veut montrer que $m(\{|f_n - f| > \varepsilon\}) = m(\{x \in E; |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) \to 0$, quand $n \to \infty$, c'est-à-dire que

$$\begin{aligned} &\forall \delta > 0,\ \exists n_0,\ \text{t.q.} \\ &n \geq n_0 \Rightarrow m(\{|f_n - f| > \varepsilon\}) \leq \delta. \end{aligned} \tag{12.20}$$

Soit donc $\delta > 0$. D'après le théorème d'Egorov (théorème 3.2 page 62), il existe $A \in T$ t.q. $m(A) \leq \delta$ et $f_n \to f$ uniformément sur A^c. La convergence uniforme sur A^c nous donne donc l'existence de n_0 t.q., $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in A^c$, si $n \geq n_0$. On a donc, pour $n \geq n_0$, $\{|f_n - f| > \varepsilon\} \subset A$, et donc $m(\{|f_n - f| > \varepsilon\}) \leq m(A) \leq \delta$. On a bien montré (12.20) et donc la convergence en mesure de f_n vers f, quand $n \to \infty$.

(b) Montrer par un contrexemple que la réciproque de la question précédente est fausse.

corrigé

On reprend ici un exemple vu au début de la section 4.7 pour montrer que la convergence dans L^1 n'entraîne pas la convergence presque partout.

On prend $(E, T, m) = ([0, 1[, \mathcal{B}([0, 1[), \lambda)$ (on a bien $m(E) < \infty$) et on construit ainsi la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

Soit $n \in \mathbb{N}$. Il existe un unique $p \in \mathbb{N}^\star$ et $\frac{(p-1)p}{2} \leq n < \frac{p(p+1)}{2}$. On pose alors $k = n - \frac{(p-1)p}{2}$ et on prend $f_n = 1_{[\frac{k}{p}, \frac{k+1}{p}[}$. Il faut noter ici que $k + 1 \leq \frac{p(p+1)}{2} - \frac{(p-1)p}{2} = p$ et donc $\frac{k+1}{p} \leq 1$.

Lorsque $n \to \infty$, on a $p \to \infty$ et donc $m(\{|f_n| > 0\}) = \frac{1}{p} \to 0$. Ce qui prouve, en particulier, que $f_n \to 0$ en mesure, quand $n \to \infty$.

Enfin, on remarque que, pour tout $x \in [0, 1[$, $f_n(x) \not\to 0$ quand $n \to \infty$. En effet, soit $x \in [0, 1[$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On choisit $p \in \mathbb{N}^\star$ t.q. $\frac{(p-1)p}{2} \geq n$, il existe alors $k \in \mathbb{N}$ t.q. $0 \leq k \leq p - 1$ et $x \in [\frac{k}{p}, \frac{k+1}{p}[$, de sorte que $f_{\varphi(n)}(x) = 1$ en choisissant $\varphi(n) = \frac{(p-1)p}{2} + k$. On a ainsi construit $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, sous suite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (car $\varphi(n) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) t.q. $f_{\varphi(n)}(x) \not\to 0$ quand $n \to \infty$. ceci montre bien que $f_n(x) \not\to 0$ quand $n \to \infty$.

Corrigé 53 (Essentiellement uniforme versus presque uniforme)

Soit (E, T, m) un espace mesuré. Pour $f \in \mathcal{M}$, on pose $A_f = \{C \in \mathbb{R}, |f| \leq C \text{ p.p.}\}$. Si $A_f \neq \emptyset$, on pose $\|f\|_\infty = \inf A_f$. Si $A_f = \emptyset$, on pose $\|f\|_\infty = \infty$.

1. Soit $f \in \mathcal{M}$ t.q. $A_f \neq \emptyset$. Montrer que $\|f\|_\infty \in A_f$.

corrigé

Comme $A_f \neq \emptyset$ et $\|f\|_\infty = \inf A_f$, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A_f$ t.q. $a_n \downarrow \|f\|_\infty$ quand $n \to \infty$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, de $a_n \in A_f$ on déduit qu'il existe $B_n \in T$ t.q. $m(B_n) = 0$ et $|f(x)| \leq a_n$ pour tout $x \in B_n^c$.

On pose $B = \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n$. On a donc $B \in T$ et, par σ-additivité de m, $m(B) = 0$ (car $m(B) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} m(B_n)$). Enfin, pour tout $x \in B^c = \cap_{n\in\mathbb{N}} B_n^c$, on a $|f(x)| \leq a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En faisant $n \to \infty$, on en déduit que $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$. On a donc $|f| \leq \|f\|_\infty$ p.p., c'est-à-dire $\|f\|_\infty \in A_f$.

---

2. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ et $f \in \mathcal{M}$.

(a) On suppose, dans cette question, que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ quand $n \to \infty$ (on dit que $f_n \to f$ essentiellement uniformément). Montrer que $f_n \to f$ presque uniformément.

corrigé

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $A_n \in T$ t.q. $m(A_n) = 0$ et $|(f_n - f)(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty$ pour tout $x \in A_n^c$. On pose $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. On a donc $A \in T$, $m(A) = 0$, $|(f_n - f)(x) \leq \|f_n - f\|_\infty$ pour tout $x \in A^c$. Comme $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ quand $n \to \infty$, on en déduit que $f_n \to f$ uniformément sur A^c. Enfin, comme $m(A) \leq \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, on a bien montré la convergence presque uniforme de f_n vers f.

(b) En donnant un exemple (c'est-à-dire en choisissant convenablement (E, T, m), $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et f), montrer qu'on peut avoir $f_n \to f$ presque uniformément, quand $n \to \infty$, et $\|f_n - f\|_\infty \not\to 0$.

corrigé

On prend, par exemple, $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, $f = 0$ et $f_n = 1_{[0,\frac{1}{n}]}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

Soit $\varepsilon > 0$. On choisit $A = [0, \varepsilon]$, de sorte que $m(A) = \varepsilon$. On a bien $f_n \to 0$ uniformément sur A^c, quand $n \to \infty$, car $f_n = 0$ sur A^c pour tout n t.q. $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Donc, $f_n \to f$ presque uniformément quand $n \to \infty$.

Mais f_n ne tends pas vers 0 essentiellement uniformément, quand $n \to \infty$, car $\|f_n\|_\infty = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ (en effet, $f_n \le 1$ sur tout $\mathbb{R}$, $f_n = 1$ sur $[0, \frac{1}{n}]$) et $\lambda([0, \frac{1}{n}]) > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$).

Corrigé 54 (Mesurabilité des troncatures)

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable et f une fonction mesurable de X dans $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ est muni, comme toujours quand on ne le précise pas, de la tribu borélienne). Pour $a > 0$, on définit la fonction "tronquée" :

$$f_a(x) = \begin{cases} a & \text{si} \quad f(x) > a \\ f(x) & \text{si} \quad |f(x)| \le a \\ -a & \text{si} \quad f(x) < -a \end{cases}$$

Montrer que f_a est mesurable.

corrigé

Soit $a > 0$. On définit T_a de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$T_a(s) = \begin{cases} a & \text{si} \quad s > a \\ s & \text{si} \quad |s| \le a \\ -a & \text{si} \quad s < -a \end{cases}$$

La fonction T_a peut aussi s'écrire $T_a(s) = \max\{-a, \min\{a, s\}\}$ pour $s \in \mathbb{R}$. On remarque que la fonction T_a est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Elle est donc borélienne (c'est-à-dire mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, avec $\mathbb{R}$ muni de sa tribu borélienne).

Comme $f_a = T_a \circ f$, on en déduit que f_a est mesurable car c'est la composée d'applications mesurables.

12.4 Exercices du chapitre 4

12.4.1 Intégrale sur $\mathcal{M}_+$ et sur $\mathcal{L}^1$

Corrigé 55 (Sup de mesures)
Soit (E,T) un espace mesurable et $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures sur T. On suppose que $m_{n+1}(A) \geq m_n(A)$ pour tout $A \in T$ et tout $n \in \mathbb{N}$. On pose $m(A) = \sup\{m_n(A), n \in \mathbb{N}\}$ pour $A \in T$.

1. (Lemme préliminaire) Soit $(a_{n,p})_{n,p\in\mathbb{N}} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ et $(a_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ t.q. $a_{n+1,p} \geq a_{n,p}$, pour tout $n,p \in \mathbb{N}$, et $a_{n,p} \to a_p$ quand $n \to \infty$, pour tout $p \in \mathbb{N}$. Montrer $\sum_{p=0}^{\infty} a_{n,p} \to \sum_{p=0}^{\infty} a_p$ (dans $\overline{\mathbb{R}}_+$) quand $n \to \infty$. [On pourra utiliser $\sum_{p=0}^{N} a_{n,p} \leq \sum_{p=0}^{\infty} a_{n,p} \leq \sum_{p=0}^{\infty} a_p$.]

   ---corrigé---

   On remarque tout d'abord que la suite $(\sum_{p=0}^{\infty} a_{n,p})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, elle admet donc une limite dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Pour $N \in \mathbb{N}$, on passe à la limite quand $n \to \infty$ dans les inégalités $\sum_{p=0}^{N} a_{n,p} \leq \sum_{p=0}^{\infty} a_{n,p} \leq \sum_{p=0}^{\infty} a_p$.

   On obtient $\sum_{p=0}^{N} a_p \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{p=0}^{\infty} a_{n,p} \leq \sum_{p=0}^{\infty} a_p$.

   On passe maintenant à la limite quand $N \to \infty$ pour obtenir

   $\sum_{p=0}^{\infty} a_p \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{p=0}^{\infty} a_{n,p} \leq \sum_{p=0}^{\infty} a_p$.

   On a donc $\lim_{n\to\infty} \sum_{p=0}^{\infty} a_{n,p} = \sum_{p=0}^{\infty} a_p$.

   ---

2. Montrer que m est une mesure.

   ---corrigé---

   - $m(\emptyset) = \sup_{n\in\mathbb{N}} m_n(\emptyset) = 0$.
   - Soit $(A_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset T$ t.q. $A_p \cap A_q = \emptyset$ si $p \neq q$. On pose $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. On a :
     $m(A) = \sup_{n\in\mathbb{N}} m_n(A) = \lim_{n\to\infty} m_n(A) = \lim_{n\to\infty} \sum_{p=0}^{\infty} m_n(A_p)$.
     En utilisant la question précédente avec $a_{n,p} = m_n(A_p)$, on en déduit $m(A) = \sum_{p=0}^{\infty} m(A_p)$.

   ---

3. Soit $f \in \mathcal{E}_+(E,T)$. (On rappelle que $\mathcal{E}_+(E,T)$ est l'ensemble des fonctions étagées de E dans $\mathbb{R}_+$.) Montrer que $\int f dm = \sup_{n\in\mathbb{N}}(\int f dm_n)$.

   ---corrigé---

   Soit $\{a_1,\ldots,a_p\} \subset \mathbb{R}_+^\star$ et $\{A_1,\ldots,A_p\} \subset T$ t.q. $f = \sum_{i=1}^{p} a_i 1_{A_i}$.

   On a $\int f dm_n = \sum_{i=1}^{p} a_i m_n(A_i)$, la suite $(\int f dm_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante. Puis, en passant à la limite sur n, on obtient :

   $\lim_{n\to\infty}(\sum_{i=1}^{p} a_i m_n(A_i)) = \sum_{i=1}^{p} a_i \lim_{n\to\infty}(m_n(A_i)) = \sum_{i=1}^{p} a_i m(A_i) = \int f dm$, et donc

   $\int f dm = \lim_{n\to\infty}(\int f dm_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}}(\int f dm_n)$.

   ---

4. Soit $f \in \mathcal{M}_+(E,T)$. (On rappelle que $\mathcal{M}_+(E,T)$ est l'ensemble des fonctions mesurables de E dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.)

(a) Montrer que $(\int f dm_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante majorée par $\int f dm$.

corrigé

Soit $f \in \mathcal{M}_+$. Soit $(f_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ t.q. $f_p \uparrow f$ quand $p \to \infty$. D'après la question précédente, on a (pour tout n et tout p) $\int f_p dm_n \leq \int f_p dm_{n+1} \leq \int f_p dm$.

En passant à la limite sur p (avec n fixé) on en déduit $\int f dm_n \leq \int f dm_{n+1} \leq \int f dm$. La suite $(\int f dm_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante et majorée par $\int f dm$.

(b) Montrer que $\int f dm_n \to \int f dm$ quand $n \to \infty$.

corrigé

On pose $A_f = \{g \in \mathcal{E}_+,\ g \leq f\}$. On sait que $\int f dm = \sup_{g\in A_f} \int g dm$ et que $\int f dm_n = \sup_{g\in A_f} \int g dm_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La question 2 donne que $\int g dm = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int g dm_n$ pour tout $g \in \mathcal{E}_+$. On en déduit :

$$\int f dm = \sup_{g\in A_f} (\sup_{n\in\mathbb{N}} \int g dm_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} (\sup_{g\in A_f} \int g dm_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int f dm_n,$$

ce qui, avec la question précécdente, donne bien $\int f dm_n \to \int f dm$ quand $n \to \infty$.

---

5. Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Montrer que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $\int f dm_n \to \int f dm$ quand $n \to \infty$.

corrigé

On a $|f| \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. la question 4 donne $\int |f| dm_n \leq \int |f| dm$, on en déduit que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

la question 4 donne aussi que

$\int f^+ dm_n \to \int f^+ dm$ et

$\int f^- dm_n \to \int f^- dm$.

Ces 2 convergences ayant lieu dans $\mathbb{R}$, on en déduit que $\int f dm_n \to \int f dm$ quand $n \to \infty$.

Corrigé 56 (Somme de mesures)

Soient m_1 et m_2 deux mesures sur l'espace mesurable (E, T).

1. Montrer que $m = m_1 + m_2$ est une mesure.

corrigé

(a) $m(\emptyset) = m_1(\emptyset) + m_2(\emptyset) = 0$,

(b) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ t.q. $A_n \cap \mathcal{A}_m = \emptyset$ si $n \neq m$. On a :

$$m(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = m_1(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) + m_2(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n).$$

Comme $m_i(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{p=0}^{n} m_i(A_p)$ pour $i = 1, 2$, on en déduit

$$m(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{p=0}^{n} (m_1(A_p) + m_2(A_p)) = \lim_{n\to\infty} \sum_{p=0}^{n} m(A_p),$$

ce qui prouve bien la σ-additivité de m.

Ceci montre bien que m est une mesure.

---

2. Montrer qu'une application f mesurable de E dans $\mathbb{R}$ est intégrable pour la mesure m si et seulement si elle est intégrable pour les mesures m_1 et m_2. Si f est intégrable pour la mesure m, montrer que $\int f dm = \int f dm_1 + \int f dm_2$.

corrigé

Soit $A \in T$, on pose $\varphi = 1_A$. La définition de m donne immédiatement

$$\int \varphi dm = \int \varphi dm_1 + \int \varphi dm_2. \tag{12.21}$$

Par linérarité de l'intégrale, (12.21) est aussi vrai pour $\varphi \in \mathcal{E}_+$.

Soit maintenant $\varphi \in \mathcal{M}_+$. Il existe $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ t.q. $\varphi_n \uparrow \varphi$ quand $n \to \infty$. On écrit (12.21) avec φ_n au lieu de φ et on fait tendre n vers l'infini. La définition de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$ donne alors (12.21).

On a donc montré que (12.21) était vrai pour tout $\varphi \in \mathcal{M}_+$.

Soit $f \in \mathcal{M}$, en écrivant (12.21) avec $\varphi = |f|$ on obtient bien que $f \in \mathcal{L}^1(E,T,m)$ si et seulement si $f \in \mathcal{L}^1(E,T,m_1) \cap \mathcal{L}^1(E,T,m_2)$.

Enfin, si $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$, on écrit (12.21) avec $\varphi = f^+$ et $\varphi = f^-$, la différence donne bien $\int f dm = \int f dm_1 + \int f dm_2$.

---

3. Soit $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de mesures (positives) sur (E,T) et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+^\star$. On pose, pour $A \in T$, $m(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n m_n(A)$. Montrer que m est une mesure sur T ; soit f une application mesurable de E dans $\mathbb{R}$ et intégrable pour la mesure m ; montrer que $\int f dm = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \int f dm_n$.

corrigé

Soit $n \in \mathbb{N}$. n définit $\tilde{m}_n$ par $\tilde{m}_n(A) = \alpha_n m_n(A)$ pour tout $A \in T$. Il est facile de voir que $\tilde{m}_n$ est une mesure sur T, que $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m_n) = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,\tilde{m}_n)$ et que $\int f d\tilde{m}_n = \alpha_n \int f dm_n$ pour tout $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m_n)$.

On pose maintenant , par récurrence sur n, $\mu_0 = \tilde{m}_0$ et $\mu_n = \mu_{n-1} + \tilde{m}_n$ pour $n \in \mathbb{N}^\star$. La question précédente montre, par récurrence sur n, que μ_n est une mesure sur T et donne que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,\mu_n$ si et seulement si $f \in \cap_{p\le n} \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,\tilde{m}_n) = \cap_{p\le n} \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m_n)$. Enfin, la question précédente donne aussi, toujours par récurrence sur n :

$$\int f d\mu_n = \sum_{p=0}^{n} \int f d\tilde{m}_n = \sum_{p=0}^{n} \alpha_n \int f dm_n.$$

Pour tout $A \in T$, on a $m(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n m_n(A) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu_n(A)$. On peut donc utiliser les résultats de l'exercice précédent. On obtient que m est une mesure sur T et que $f \in \mathcal{L}^1_R(E,T,m)$ implique $f \in \mathcal{L}^1_R(E,T,\mu_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\int f dm = \lim_{n\to\infty} \int f d\mu_n$. Si $f \in \mathcal{L}^1_R(E,T,m)$ on a donc $f \in \mathcal{L}^1_R(E,T,m_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\int f dm = \lim_{n\to\infty} \sum_{p=0}^n \alpha_p \int f dm_p$, c'est-à-dire $\int f dm = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \int f dm_n$.

Corrigé 57 (Mesure de Dirac)
Soit δ_0 la mesure de Dirac en 0, définie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. (cf exemple 2.1.) Soit $f \in \mathcal{M}_+$, calculer $\int f d\delta_0$.

corrigé

Comme $\delta_0(\{0\}^c) = 0$, on a $f = f(0)1_{\{0\}}$ p.p., on en déduit $\int f d\delta_0 = f(0)\delta_0(\{0\}) = f(0)$.

Corrigé 58 (Restrictions de la mesure de Lebesgue)
Soit A et B deux boréliens de $\mathbb{R}$ t.q. $A \subset B$. On note λ_A [resp. λ_B] la restriction à $\mathcal{B}(A)$ [resp. $\mathcal{B}(B)$] de la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(B,\mathcal{B}(B),\lambda_B)$. Montrer que $f_{|A} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(A,\mathcal{B}(A),\lambda_A)$ et que $\int f_{|A} d\lambda_A = \int f 1_A d\lambda_B$. [Considérer d'abord le cas $f \in \mathcal{E}_+$ puis $f \in \mathcal{M}_+$ et enfin $f \in \mathcal{L}^1$.]

corrigé

On rappelle que $\mathcal{B}(A) = \{C \in \mathcal{B}(\mathbb{R});\, C \subset A\}$ et $\mathcal{B}(B) = \{C \in \mathcal{B}(\mathbb{R});\, C \subset B\}$ (voir l'exercice 2.3).

1. Soit $f \in \mathcal{E}_+(B,\mathcal{B}(B))$. Il existe donc $a_1,\ldots,a_p \in \mathbb{R}_+$ et $A_1,\ldots,A_p \in \mathcal{B}(B) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $f = \sum_{i=1}^p a_i 1_{A_i}$.

   La fonction $f1_A$ appartient donc aussi à $\mathcal{E}_+(B,\mathcal{B}(B))$ (car $A_i \cap A \in \mathcal{B}(B)$) et elle s'écrit $f = \sum_{i=1}^p a_i 1_{A_i} 1_A = \sum_{i=1}^p a_i 1_{A_i\cap A}$, de sorte que
   $$\int f1_A d\lambda_B = \sum_{i=1}^p a_i \lambda(A_i \cap A).$$
   La fonction $f_{|A}$ (c'est-à-dire la restriction de f à A) est définie sur A, elle s'écrit $f_{|A} = \sum_{i=1}^p a_i 1_{A_i\cap A}$. Cette fonction appartient à $\mathcal{E}_+(A,\mathcal{B}(A))$ car $A_i \cap A \in \mathcal{B}(A)$ pour tout i et on a
   $$\int f_{|A} d\lambda_A = \sum_{i=1}^p a_i \lambda(A_i \cap A).$$
   On a bien montré que
   $$\int f1_A d\lambda_B = \int f_{|A} d\lambda_A, \tag{12.22}$$
   pour tout $f \in \mathcal{E}_+(B,\mathcal{B}(B))$.

2. Soit $f \in \mathcal{M}_+(B,\mathcal{B}(B))$. il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+(B,\mathcal{B}(B))$ t.q. $f_n \uparrow f$, quand $n \to \infty$. On a donc aussi $(f_n 1_A)_{n\in\mathbb{N}} \uparrow f1_A$ et $(f_{n|A})_{n\in\mathbb{N}} \uparrow f_{|A}$, quand $n \to \infty$. Comme $f_{n|A} \in \mathcal{E}_+(A,\mathcal{B}(A))$, la caractérisation de la mesurabilité positive (proposition 3.3) donne $f_{|A} \in \mathcal{M}_+(A,\mathcal{B}(A))$. On a aussi $f1_A \in \mathcal{M}_+(B,\mathcal{B}(B))$. Puis, en écrivant (12.22) avec f_n au lieu de f et en passant à la limite quand $n \to \infty$, la définition de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+(A,\mathcal{B}(A))$ et sur $\mathcal{M}_+(B,\mathcal{B}(B))$ donne (12.22).

   On a donc montré (12.22) pour tout $f \in \mathcal{M}_+(B,\mathcal{B}(B))$.

3. Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(B, \mathcal{B}(B), \lambda_B)$. On remarque d'abord que $f_{|_A} \in \mathcal{M}(A, \mathcal{B}(A))$. En effet, si $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a $(f_{|_A})^{-1}(C) = f^{-1}(C) \cap A \in \mathcal{B}(A)$. Puis, on applique (12.22) à $|f|$, qui appartient à $\mathcal{M}_+(B, \mathcal{B}(B))$, pour obtenir
$$\int |f_{|_A}| d\lambda_A = \int |f|_{|_A} d\lambda_A = \int |f| 1_A d\lambda_B < \int |f| d\lambda_B < \infty,$$
ce qui montre que $f_{|_A} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(A, \mathcal{B}(A)), \lambda_A)$.

Enfin, en appliquant (12.22) avec f^+ et f^- au lieu de f, on obtient
$$\int f^+ 1_A d\lambda_B = \int {f^+}_{|_A} d\lambda_A = \int (f_{|_A})^+ d\lambda_A < \infty$$
et
$$\int f^- 1_A d\lambda_B = \int {f^-}_{|_A} d\lambda_A = \int (f_{|_A})^- d\lambda_A < \infty,$$
ce qui donne, en faisant la différence,
$$\int f 1_A d\lambda_B = \int f_{|_A} d\lambda_A.$$

Corrigé 59 (Intégrale de Lebesgue et intégrale des fonctions continues)

Soit $f \in C([0,1], \mathbb{R})$. Montrer que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ et que $\int f d\lambda = \int_0^1 f(x)dx$ (cette dernière intégrale est à prendre au sens de "l'intégrale des fonctions continues" vue au Chapitre 1). On rappelle que l'on note (un peu abusivement...) par λ la restriction à $\mathcal{B}([0,1])$ de la mesure de Lebesgue (aussi notée λ...) sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

corrigé

Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction en escalier. Il existe donc $p \in \mathbb{N}^\star$, une famille $(\alpha_i)_{i \in \{0,\ldots,p\}}$, avec : $\alpha_0 = 0$, $\alpha_i < \alpha_{i+1}$, pour tout $i \in \{0, \ldots, p-1\}$, $\alpha_p = 1$, et une famille $(a_i)_{i \in \{0,\ldots,p-1\}} \subset \mathbb{R}$ tels que :
$$g(x) = a_i, \quad \forall x \in]\alpha_i, \alpha_{i+1}[, \quad \forall i \in \{0, \ldots, p-1\}.$$
On sait que
$$\int_0^1 g(x)dx = \sum_{i=0}^{p-1} a_i(\alpha_{i+1} - \alpha_i).$$
D'autre part, cette fonction g est mesurable (c'est-à-dire $g \in \mathcal{M}([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$ car, pour tout $C \subset \mathbb{R}$, $g^{-1}(C)$ est une réunion (finie) d'intervalles du type $]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$ à laquelle on ajoute éventuellement certains des points α_i. On a donc $g^{-1}(C) \in \mathcal{B}([0,1])$. On a bien montré que $g \in \mathcal{M}([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$. Enfin, comme les singletons sont de mesure nulle, on a $|g| = \sum_{i=0}^{p-1} |a_i| 1_{]\alpha_i, \alpha_{i+1}[}$ p.p., et donc
$$\int |g| d\lambda = \sum_{i=0}^{p-1} |a_i|(\alpha_{i+1} - \alpha_i) < \infty.$$
Donc, $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$. Finalement, puisque $g = \sum_{i=0}^{p-1} a_i 1_{]\alpha_i, \alpha_{i+1}[}$ p.p., on a aussi

$$\int g d\lambda = \sum_{i=0}^{p-1} a_i(\alpha_{i+1} - \alpha_i).$$

On a donc montré que $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ et

$$\int g d\lambda = \int_0^1 g(x)dx. \tag{12.23}$$

Soit maintenant $f \in C([0,1], \mathbb{R})$. On remarque tout d'abord que f est mesurable (parce que, par exemple, les ouverts de $[0,1]$ engendre $\mathcal{B}([0,1])$ et que l'image réciproque, par f, d'un ouvert de $[0,1]$ est un ouvert de $[0,1]$, donc un élément de $\mathcal{B}([0,1])$). Puis, on remarque que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1], \mathcal{B}([0,1], \lambda)$ car $\int |f| d\lambda \leq \|f\|_u = \max_{x\in[0,1]} |f(x)| < \infty$.

On compare maintenant $\int f d\lambda$ et $\int_0^1 f(x)dx$.

Il existe une suite de fonctions en escalier, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, t.q. $f_n \to f$ uniformément sur $[0,1]$, c'est-à-dire $\|f_n - f\|_u \to 0$, quand $n \to \infty$.

La définition de l'intégrale des fonctions continues donne que $\int_0^1 f_n(x)dx \to \int_0^1 f(x)dx$ quand $n \to \infty$.

D'autre part, on a aussi $\int f_n d\lambda \to \int f d\lambda$, quand $n \to \infty$, car $|\int f_n d\lambda - \int f d\lambda| \leq \int |f_n - f| d\lambda \leq \|f_n - f\|_u \to 0$, quand $n \to \infty$. En passant à la limite quand $n \to \infty$ dans (12.23) avec f_n au lieu de g, on obtient bien

$$\int f d\lambda = \int_0^1 f(x)dx.$$

Corrigé 60 (Fonctions continues et fonctions intégrables)

Soit m une mesure finie sur $\mathcal{B}([0,1])$. Montrer que $C([0,1], \mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1], \mathcal{B}([0,1]), m)$.

corrigé

Soit $f \in C([0,1], \mathbb{R})$. On montre tout d'abord que f est mesurable.

Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$. Comme f est continue, l'ensemble $f^{-1}(O) = \{x \in [0,1],\ f(x) \in O\}$ est une ouvert de $[0,1]$ et donc $f^{-1}(O) \in \mathcal{B}([0,1])$. Les ouverts de $\mathbb{R}$ engendrant la tribu borélienne de $\mathbb{R}$, on en déduit que f est mesurable de $[0,1]$ (muni de sa tribu borélienne) dans $\mathbb{R}$ (muni de sa tribu borélienne).

On montre maintenant que f est intégrable. Comme la fonction f est continue sur le compact $[0,1]$, elle est bornée. Il existe donc $M \in \mathbb{R}_+$ t.q. $|f| \leq M$ sur $[0,1]$. On a donc, par monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$:

$$\int |f| dm \leq M m([0,1]) < \infty.$$

On a donc $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1], \mathcal{B}([0,1]), m)$.

Corrigé 61 (f positive intégrable implique f finie p.p.)

Soit (E, T, m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}_+$. Montrer que si $\displaystyle\int f dm < +\infty$, alors $f < +\infty$ p.p..

corrigé

Soit $A = f^{-1}(\{\infty\})$. On a $A \in T$ car f est mesurable et $\{\infty\} \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $f \geq n1_A$, donc, par monotonie de l'intégrale, $\int f dm \geq nm(A)$, ou encore

$$m(A) \leq \frac{1}{n} \int f dm.$$

En passant à la limite quand $n \to \infty$, on en déduit $m(A) = 0$. On a donc $f < \infty$ p.p. car $f(x) < \infty$ pour tout $x \in A^c$.

Corrigé 62 (Une caractérisation de l'intégrabilité)
Soient (E, T, m) un espace mesuré fini, u une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = \{x \in E, |u(x)| \geq n\}$ et $B_n = \{x \in E, n < |u(x)| \leq n+1\}$.

1. Montrer que :

$$\int |u| dm < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n\, m(B_n) < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} m(A_n) < +\infty. \tag{12.24}$$

corrigé

On remarque tout d'abord que $B_n, A_n \in T$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} n 1_{B_n} \leq |u| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} (n+1) 1_{B_n}.$$

On en déduit (en utilisant le théorème de convergence monotone et la monotonie de l'intégrale) que :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} n\, m(B_n) \leq \int |u| dm \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} (n+1) m(B_n). \tag{12.25}$$

Si $\int |u| dm < +\infty$, on a donc $\sum_{n \in \mathbb{N}} n\, m(B_n) < \infty$.

Réciproquement, si $\sum_{n \in \mathbb{N}} n\, m(B_n) < \infty$, on a aussi $\sum_{n \in \mathbb{N}} (n+1) m(B_n) < \infty$ car $\sum_{n \in \mathbb{N}} m(B_n) \leq m(E) < \infty$ (remarquer que $B_n \cap B_m = \emptyset$ si $n \neq m$). On déduit donc de (12.25) que $\int |u| dm < +\infty$.

On a ainsi montré que :

$$\int |u| dm < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n\, m(B_n).$$

On peut utiliser le même raisonnement en remplaçant B_n par $C_n = \{x \in E, n \leq |u(x)| < n+1\}$. On a donc aussi :

$$\int |u| dm < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n\, m(C_n). \tag{12.26}$$

Pour terminer la question, il suffit de montrer que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n\, m(C_n) < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} m(A_n) < +\infty. \tag{12.27}$$

Pour montrer (12.27), on remarque que $C_n = A_n \setminus A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc, comme $A_{n+1} \subset A_n$ et que $m(A_{n+1}) \le m(A_n) \le m(E) < \infty$:

$$m(C_n) = m(A_n) - m(A_{n+1}).$$

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{n} p\, m(C_p) = \sum_{p=0}^{n} p\, m(A_p) - \sum_{p=0}^{n} p\, m(A_{p+1}) &= \sum_{p=0}^{n} p\, m(A_p) - \sum_{p=1}^{n+1} (p-1) m(A_p) \\ &= \sum_{p=1}^{n} m(A_p) - n\, m(A_{n+1}).\end{aligned}$$

On a donc :

$$\sum_{p=0}^{n} p\, m(C_p) \le \sum_{p=1}^{n} m(A_p), \tag{12.28}$$

et :

$$\sum_{p=1}^{n} m(A_p) = \sum_{p=0}^{n} p\, m(C_p) + n\, m(A_{n+1}). \tag{12.29}$$

Si $\sum_{n=0}^{+\infty} m(A_n) < +\infty$, on déduit donc de (12.28) que $\sum_{n=0}^{+\infty} n\, m(C_n) < +\infty$.

Réciproquement, si $\sum_{n=0}^{+\infty} n\, m(C_n) < +\infty$. On a, par (12.26), $\int |u| dm < \infty$ et donc, comme $n\, 1_{A_{n+1}} \le |u|$, on a aussi $n\, m(A_{n+1}) \le \int |u| dm < \infty$. On déduit donc de (12.29) que $\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) < \infty$. Comme $m(A_0) \le m(E) < \infty$, on a bien finalement $\sum_{n=0}^{\infty} m(A_n) < \infty$.

On a bien montré (12.27), ce qui termine la question.

---

2. Soit $p \in]1, +\infty[$, montrer que $|u|^p$ est une fonction mesurable et que :

$$\int |u|^p dm < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n^p\, m(B_n) < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n^{p-1}\, m(A_n) < +\infty. \tag{12.30}$$

corrigé

La fonction $|u|^p$ est mesurable car composée d'une fonction mesurable et d'une fonction continue.

On reprend maintenant le raisonnement de la question précédente. On remarque que :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} n^p\, m(B_n) \le \int |u|^p dm \le \sum_{n \in \mathbb{N}} (n+1)^p m(B_n). \tag{12.31}$$

Si $\int |u|^p dm < +\infty$, on a donc $\sum_{n \in \mathbb{N}} n^p\, m(B_n) < \infty$.

Réciproquement, si $\sum_{n \in \mathbb{N}} n^p\, m(B_n) < \infty$, on a aussi $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^p m(B_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} 2^p n^p m(B_n) < \infty$ et $m(B_0) \le m(E) < \infty$. On a donc $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^p m(B_n) < \infty$. Ceci donne $\int |u|^p dm < +\infty$ par (12.31).

On a ainsi montré que :

$$\int |u|^p dm < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n^p\, m(B_n) < +\infty.$$

Ici aussi, on peut utiliser le même raisonnement en remplaçant B_n par $C_n = \{x \in E, n \leq |u(x)| < n+1\}$. On a donc aussi :

$$\int |u|^p dm < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n^p\, m(C_n) < +\infty. \tag{12.32}$$

Pour terminer la question, il suffit donc de montrer que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^p\, m(C_n) < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n^{p-1} m(A_n) < +\infty. \tag{12.33}$$

Pour montrer (12.33), on utilise, comme dans la question précédente que $C_n = A_n \setminus A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc :

$$m(C_n) = m(A_n) - m(A_{n+1}).$$

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=0}^N n^p\, m(C_n) = \sum_{n=0}^N n^p\, m(A_n) - \sum_{n=0}^N n^p\, m(A_{n+1}) = \sum_{n=0}^N n^p\, m(A_n) - \sum_{n=1}^{N+1} (n-1)^p m(A_n) = \sum_{n=1}^N (n^p - (n-1)^p) m(A_n) - N^p\, m(A_{N+1})$. On a donc :

$$\sum_{n=0}^{N} n^p\, m(C_n) \leq \sum_{n=1}^{N} (n^p - (n-1)^p) m(A_n), \tag{12.34}$$

et :

$$\sum_{n=1}^{N} (n^p - (n-1)^p) m(A_n) = \sum_{n=0}^{N} n^p\, m(C_n) + N^p\, m(A_{N+1}). \tag{12.35}$$

Pour conclure, on remarque que $\dfrac{n^p - (n-1)^p}{n^{p-1}} \to p$ quand $n \to \infty$. Il existe donc $\alpha, \beta > 0$ t.q. $\alpha n^{p-1} \leq n^p - (n-1)^p \leq \beta n^{p-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

Si $\sum_{n=0}^{\infty} n^{p-1} m(A_n) < \infty$, on déduit alors de (12.34) que $\sum_{n=0}^{+\infty} n\, m(C_n) < +\infty$.

Réciproquement, si $\sum_{n=0}^{+\infty} n^p\, m(C_n) < +\infty$. On a, par (12.32), $\int |u|^p dm < \infty$ et donc, comme $N\, 1_{A_{N+1}} \leq |u|$, on a aussi $N^p\, m(A_{n+1}) \leq \int |u|^p dm < \infty$. On déduit alors de (12.35) que $\sum_{n=0}^{\infty} n^{p-1} m(A_n) < \infty$.

On a bien montré (12.33), ce qui termine la question.

Corrigé 63 (Sur l'inégalité de Markov)
Soit (E, T, m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

1. Montrer que pour tout $a > 0$, on a $a\, m(\{|f| > a\}) \le \int_{\{|f|>a\}} |f|\, dm$.

corrigé

Comme $|f| \in \mathcal{M}_+$, la méthode pour faire les questions 1 et 2 a déjà été vue dans le cours (voir l'inégalité (4.8)).

Soit $a > 0$. On remarque que $|f| 1_{\{|f|>a\}} \ge a 1_{\{|f|>a\}}$. Par monotonie de l'intégrale, on en déduit :

$$am(\{|f| > a\}) = \int a 1_{\{|f|>a\}} dm \le \int |f| 1_{\{|f|>a\}} dm = \int_{\{|f|>a\}} |f| dm.$$

---

2. Montrer que pour tout $a > 0$, on a $m(\{|f| > a\}) \le (\int |f|\, dm)/a$. (Ceci est l'inégalité de Markov.)

corrigé

Comme $\int_{\{|f|>a\}} |f| dm \le \int |f| dm$, cette question découle immédiatement de ma précédente.

---

3. Montrer que

$$\lim_{a\to\infty} a\, m(\{|f| > a\}) = 0. \tag{12.36}$$

corrigé

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ t.q. $a_n \to \infty$, quand $n \to \infty$. On pose $g_n = |f| 1_{\{|f|>a_n\}}$. On a $g_n \to 0$ p.p. quand $n \to \infty$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|g_n| \le |f|$ p.p.. Grâce au théorème de convergence dominée, on en déduit que $\int g_n dm \to 0$ quand $n \to \infty$ et donc, avec la question 1, $a_n m(\{|f| > a_n\}) \to 0$ quand $n \to \infty$.

---

4. Donner des exemples de fonctions non intégrables qui vérifient la propriété (12.36) dans les 2 cas suivants : $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $(E, T, m) = (]0, 1[, \mathcal{B}(]0, 1[), \lambda)$.

corrigé

Dans le cas $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, il suffit de prendre $f = 1_{\mathbb{R}}$.
Dans le cas $(E, T, m) = (]0, 1[, \mathcal{B}(]0, 1[), \lambda)$, on peut prendre, par exemple, f définie par $f(x) = \frac{1}{x|\ln(2x)|}$ pour $x \in]0, 1[$. La fonction f est mesurable mais n'est pas intégrable. Pour $a > 0$, on a $am(\{|f| > a\}) = ax_a$ avec $x_a > 0$ t.q. $x_a|\ln(2x_a)| = \frac{1}{a}$. On a $x_a \to 0$ quand $a \to \infty$ et donc $am(\{|f| > a\}) = ax_a = \frac{1}{|\ln(2x_a)|} \to 0$ quand $a \to \infty$.

Corrigé 64 (Sur $f \ge 0$ p.p.)
Soit (E, T, m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Montrer que les 2 conditions suivantes sont équivalentes :

1. $f \ge 0$ p.p.,
2. $\int_A f\, dm \ge 0$ pour tout $A \in T$.

corrigé

- On suppose d'abord que $f \geq 0$ p.p.. Soit $A \in T$, on a alors $f1_A \geq 0$ p.p. et donc, par monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{L}^1$ (proposition 4.4 page 82), $\int_A f dm = \int f1_A dm \geq 0$.

  En fait, pour être tout à fait précis, la proposition 4.4 est énoncée avec l'hypothèse "$f \geq g$" et non seulement "$f \geq g$ p.p.". Toutefois il est clair que cette proposition est aussi vraie avec seulement "$f \geq g$ p.p.". Il suffit de remarquer que, si $f \geq g$ p.p., il existe $B \in T$ t.q. $m(B) = 0$ et $f \geq g$ sur B^c. On a donc $f1_{B^c} \geq g1_{B^c}$. Si $f, g \in \mathcal{L}^1$, la proposition 4.4 donne alors $\int f1_{B^c}dm \geq \int g1_{B^c}dm$. On en déduit $\int fdm \geq \int gdm$ car $\int fdm = \int f1_{B^c}dm$ et $\int gdm = \int g1_{B^c}dm$ (voir la proposition 4.5 page 84).

- On suppose maintenant que $\int_A f\, dm \geq 0$ pour tout $A \in T$. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, on choisit $A = A_n = \{f \leq -\frac{1}{n}\} = \{x \in E\colon\ f(x) \leq -\frac{1}{n}\}$, de sorte que $f1_{A_n} \leq -\frac{1}{n}1_{A_n}$. La monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{L}^1$ (proposition 4.4 page 82) donne alors

$$\int f1_{A_n}dm \leq -\frac{1}{n}m(A_n).$$

  Comme $\int f1_{A_n}dm \geq 0$ par hypothèse, on a donc nécessairement $m(A_n) = 0$.

  Par σ-sous additivité de m, on en déduit que $m(\{f < 0\}) = m(\cup_{n\in\mathbb{N}^\star}\{f \leq -\frac{1}{n}\}) = 0$, et donc $f \geq 0$ p.p..

Corrigé 65

Soient (E, T, m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{L}^1(= \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m))$.

1. Montrer que : $\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ t.q. $\forall A \in T$, $m(A) \leq \delta \Rightarrow \displaystyle\int_A |f|dm \leq \varepsilon$. [*Introduire* $f_n = \inf(|f|, n)$].

corrigé

On pose $f_n = \inf(|f|, n)$. Comme $|f| - f_n \to 0$ p.p. (et même partout), quand $n \to \infty$, et que $0 \leq |f| - f_n \leq |f| \in \mathcal{L}^1$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée à la suite $(|f| - f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ou la proposition 4.6). Il donne que $\int(|f| - f_n)dm \to 0$ quand $n \to \infty$.

Soit $\varepsilon > 0$, il existe donc $n \in \mathbb{N}$ t.q. $\int(|f| - f_n)dm \leq \varepsilon$. Pour $A \in T$, on a donc :

$$\int_A |f|dm \leq \int_A (|f| - f_n)dm + \int_A f_n dm \leq \int (|f| - f_n)dm + \int_A f_n dm \leq \varepsilon + nm(A).$$

En prenant $\delta = \frac{\varepsilon}{n}$, on en déduit :

$$A \in T,\ m(A) \leq \delta \Rightarrow \int_A |f|dm \leq 2\varepsilon.$$

NB : Au lieu d'appliquer le théorème de convergence dominée à la suite $(|f| - f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut aussi faire cet question en appliquant le théorème de convergence monotone à la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et en utilisant le fait que $f \in \mathcal{L}^1$.

---

2. Montrer que : $\forall \varepsilon > 0, \exists\, C \in T$ t.q. :

(i) $m(C) < +\infty$,

(ii) $\displaystyle\int_{C^c} |f|dm \le \varepsilon$,

(iii) $\displaystyle\sup_C |f| < +\infty$,

[*Considérer* $C_n = \{x \in E\,;\, \dfrac{1}{n} \le |f(x)| \le n\}$*, et montrer que pour* $n \ge n_0$ *où* n_0 *est bien choisi,* C_n *vérifie (i), (ii) et (iii).*]

corrigé

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $C_n = \{x \in E\,;\, \dfrac{1}{n} \le |f(x)| \le n\}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $|f| \le n$ sur C_n et $\frac{1}{n}m(C_n) \le \int |f|dm < \infty$. Les conditions (i) et (iii) sont donc vérifiées si on prend $C = C_n$.

Soit $\varepsilon > 0$. On va maintenant montrer qu'on peut choisir n de manière avoir aussi (ii). Pour cela, on pose $g_n = f1_{C_n^c}$, de sorte que $g_n \to 0$ p.p. (et même partout) et $|g_n| \le |f|$ p.p. (et même partout), pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée à la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ou la proposition 4.6). Il donne que $\int |g_n|dm \to 0$ quand $n \to \infty$. Il existe donc $n \in \mathbb{N}^\star$ t.q. (ii) soit vérifiée. En prenant $C = C_n$, on a donc (i), (ii) et (iii).

Corrigé 66 ($m-$mesurabilité)

Soit (E, T, m) un espace mesuré. Soit $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et f une application de A^c dans $\mathbb{R}$. Montrer que :
il existe g mesurable de E dans $\mathbb{R}$ t.q. $f = g$ p.p. si et seulement si il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, suite de fonctions étagées, t.q. $f_n \to f$ p.p., quand $n \to \infty$.

corrigé

- On suppose d'abord qu'il existe g mesurable de E dans $\mathbb{R}$ t.q. $f = g$ p.p.. Il existe donc $B \in T$ t.q. $m(B) = 0$ et $f = g$ sur B^c (et $B^c \subset A^c$, i.e. $A \subset B$).

  Comme $g \in \mathcal{M}$, la deuxième caractérisation de la mesurabilité (proposition 3.6 page 58) donne l'existence d'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ t.q. $f_n(x) \to g(x)$ pour tout $x \in E$. On a donc aussi $f_n(x) \to f(x)$ pour tout $x \in B^c$. Comme $m(B) = 0$, on a bien $f_n \to f$ p.p..

- On suppose maintenant qu'il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ t.q. $f_n \to f$ p.p.. Il existe donc $B \in T$ t.q. $m(B) = 0$ et $f_n(x) \to f(x)$ pour tout $x \in B^c$ (on a donc aussi $B^c \subset A^c$). On pose $g_n = f_n 1_{B^c}$ et on définit g par $g(x) = f(x)$ si $x \in B^c$ et $g(x) = 0$ si $x \in B$. Avec ces choix de g_n et g, on a $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}$ et $g_n(x) \to g(x)$ pour tout $x \in E$. On a donc, par la proposition 3.6, $g \in \mathcal{M}$. On a aussi $f = g$ p.p. car $f = g$ sur B^c et $m(B) = 0$.

Corrigé 67 (Mesure complète, suite de l'exercice 2.28)

On reprend les notations de l'exercice 2.28 page 47. On note donc $(E, \overline{T}, \overline{m})$ le complété de l'espace mesuré (E, T, m).

Montrer que $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,\overline{T},\overline{m})$. Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,\overline{T},\overline{m})$, montrer qu'il existe $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ t.q. $f = g$ p.p. et que $\displaystyle\int f d\overline{m} = \int g dm$.

corrigé

1. On commence par montrer que $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,\overline{T},\overline{m})$.

   Comme $T \subset \overline{T}$, on a $\mathcal{M}(E,T) \subset \mathcal{M}(E,\overline{T})$, $\mathcal{M}_+(E,T) \subset \mathcal{M}_+(E,\overline{T})$, $\mathcal{E}(E,T) \subset \mathcal{E}(E,\overline{T})$ et $\mathcal{E}_+(E,T) \subset \mathcal{E}_+(E,\overline{T})$. Puis, comme $\overline{m} = m$ sur T, on a $\int f dm = \int f d\overline{m}$ pour tout $f \in \mathcal{E}_+(E,T)$. Si $f \in \mathcal{M}_+(E,T)$, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+(E,T)$ t.q. $f_n \uparrow f$ quand $n \to \infty$, la définition de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$ donne alors :

$$\int f dm = \int f d\overline{m}, \text{ pour tout } f \in \mathcal{M}_+(E,T). \tag{12.37}$$

   Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$, on a donc $f \in \mathcal{M}(E,T) \subset \mathcal{M}(E,\overline{T})$ et (12.37) donne $\int |f| d\overline{m} = \int |f| dm < \infty$. Donc, $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,\overline{T},\overline{m})$. En appliquant (12.37) à $f^{\pm}$, on montre aussi que $\int f dm = \int f d\overline{m}$.

2. On va montrer la deuxième partie de la question en raisonnant en 3 étapes :

   (a) Soit $C \in \overline{T}$. Il existe donc $A \in T$, $N \in \mathcal{N}_m$ t.q. $C = A \cup N$. Il existe $B \in T$ t.q. $N \subset B$ et $m(B) = 0$. On a $\{1_A \neq 1_C\} \subset N \subset B$. Donc, $\{1_A \neq 1_C\} \in \mathcal{N}_m = \mathcal{N}_{\overline{m}}$, c'est-à-dire $1_A = 1_C$ m-p.p. et $\overline{m}$-p.p.. En fait, comme $\mathcal{N}_m = \mathcal{N}_{\overline{m}}$, il est identique de dire "m-p.p." et "$\overline{m}$-p.p.", on dira donc simplement "p.p.".

   (b) Soit $f \in \mathcal{E}(E,\overline{T})$. Il existe $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ et $C_1, \ldots, C_n \in \overline{T}$ t.q. $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{C_i}$. D'après (a), on trouve $A_1, \ldots, A_n \in T$ t.q. $1_{A_i} = 1_{C_i}$ p.p., pour tout i. On pose alors $g = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$, de sorte que $g \in \mathcal{E}(E,T)$ et $g = f$ p.p..

   (c) Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,\overline{T},\overline{m})$. Comme $f \in \mathcal{M}(E,\overline{T})$, il existe (d'après la proposition 3.6) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}(E,\overline{T})$ t.q. $f_n(x) \to f(x)$ pour tout $x \in E$. D'après (b), pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $g_n \in \mathcal{E}(E,T)$ t.q. $f_n = g_n$ p.p.. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $A_n \in T$ t.q. $m(A_n) = 0$ et $f_n = g_n$ sur A_n^c. On pose $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. On a $A \in T$, $m(A) = 0$ et $f_n = g_n$ sur A^c, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On définit alors g par $g = f$ sur A^c et $g = 0$ sur A. On a $g \in \mathcal{M}(E,T)$ car g est limite simple de $(g_n 1_{A^c}) \in \mathcal{E}(E,T)$ (cf. proposition 3.6) et $f = g$ p.p. (car $f = g$ sur A^c).

   Comme $|f|, |g| \in \mathcal{M}_+(E,\overline{T})$ et $|f| = |g|$ p.p., on a $\infty > \int |f| d\overline{m} = \int |g| d\overline{m}$. Puis, comme $|g| \in \mathcal{M}_+(E,T)$, (12.37) donne $\int |g| d\overline{m} = \int |g| dm$. On en déduit donc que $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$.

   Enfin, en utilisant le fait que $f^+ = g^+$ p.p., $f^- = g^-$ p.p. et (12.37) (avec g^+ et g^-) on a aussi :

$$\int f d\overline{m} = \int f^+ d\overline{m} - \int f^- d\overline{m} = \int g^+ d\overline{m} - \int g^- d\overline{m} = \int g^+ dm - \int g^- dm = \int g dm.$$

   On a bien trouvé $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ t.q. $f = g$ p.p. et $\int f d\overline{m} = \int g dm$.

Corrigé 68 (Petit lemme d'intégration)

Soit (E, T, m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}(E, T)$. (On rappelle que $\mathcal{M}(E, T)$ est l'ensemble des fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$.)

1. On suppose (dans cette question) que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Montrer que

$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T,\ m(A_n) \to 0 \ \Rightarrow \int f 1_{A_n} dm \to 0. \tag{12.38}$$

corrigé

Comme $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, La question 1 de l'exercice 4.14 page 101 donne :
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ t.q. $(A \in T,\ m(A) \leq \eta) \Rightarrow \int f 1_A dm \leq \varepsilon$.
Ceci donne (12.38)...

---

2. On prend (dans cette question) $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Donner un exemple de $f \in \mathcal{M}(E, T)$ t.q. $f \geq 0$ (de sorte que $f \in \mathcal{M}_+(E, T)$), pour lequel (12.38) est faux.

corrigé

On prend $f(x) = x 1_{\mathbb{R}_+}(x)$ et $A_n =]n, n + 1/n[$. On a $m(A_n) \to 0$ (quand $n \to \infty$) et $\int f 1_{A_n} d\lambda \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc, $\int f 1_{A_n} d\lambda \not\to 0$.

---

3. On suppose (dans cette question) que $m(E) < \infty$ et que $f > 0$ (c'est à dire $f(x) > 0$ pour tout $x \in E$). Montrer que

$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T,\ \int f 1_{A_n} dm \to 0 \ \Rightarrow m(A_n) \to 0. \tag{12.39}$$

On pourra utiliser le fait que, pour $p \in \mathbb{N}^\star$, $A_n \subset \{f < \frac{1}{p}\} \cup \{x \in A_n; f(x) \geq \frac{1}{p}\}$.

corrigé

On a $\{f < \frac{1}{p+1}\} \subset \{f < \frac{1}{p}\}$, $\cap_{p\in\mathbb{N}^\star}\{f < \frac{1}{p}\} = \emptyset$ et $m(\{f < \frac{1}{p}\}) < \infty$, pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$ (car $m(E) < \infty$). La propriété de continuité décroissante de la mesure m donne alors que $m(\{f < \frac{1}{p}\}) \to 0$ quand $p \to \infty$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe donc $p \in \mathbb{N}^\star$ t.q. $m(\{f < \frac{1}{p}\}) \leq \varepsilon$. On a alors $m(A_n) \leq \varepsilon + m(\{x \in A_n; f(x) \geq \frac{1}{p}\}) \leq \varepsilon + p \int f 1_{A_n} dm$. Comme $\int f 1_{A_n} dm \to 0$, il existe donc n_0 t.q. $m(A_n) \leq 2\varepsilon$ pour $n \geq n_0$. Ce qui prouve (12.39).

---

4. On prend (dans cette question) $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ (de sorte que $m(E) = \infty$). Montrer que si $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et $f > 0$, alors (12.39) est faux. Donner un exemple de $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ t.q. $f > 0$.

corrigé

On prend $A_n =]n, n + 1[$. En appliquant la proposition 4.6 page 85 (ou le théorème de convergence dominée) à la suite $(f 1_{A_n})_{n\in\mathbb{N}}$, on obtient que $\int f 1_{A_n} d\lambda \to 0$ (quand $n \to \infty$). D'autre part $\lambda(A_n) = 1 \not\to 0$. La propriété (4.35) est donc fausse.

On obtient un exemple de $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ t.q. $f > 0$ en prenant $f(x) = \exp(-|x|)$.

Corrigé 69 (Fatou sans positivité)
Soit (E, T, m) un espace mesuré. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et $h \in \mathcal{M}(E, T)$. (On rappelle que $\mathcal{M}(E, T)$ est l'ensemble des fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$.)

1. On suppose que $f_n \to h$ p.p. quand $n \to \infty$, $f_n \geq f$ p.p. pour tout $n \in \mathbb{N}$, et on suppose qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ t.q. $\int f_n dm \leq C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Montrer qu'il existe $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ t.q.
   - $f_n = g_n$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f = g$ p.p.,
   - $g_n(x) \to h(x)$, quand $n \to \infty$, pour tout $x \in E$,
   - $g_n \geq g$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   corrigé

   Soit $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et $f_n(x) \to h(x)$ pour tout $x \in A^c$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $A_n \in T$ t.q. $m(A_n) = 0$ et $f_n(x) \geq f(x)$ pour tout $x \in (A_n)^c$.
   On pose $B = A \cup (\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n)$. On a $B \in T$, $m(B) = 0$, $f_n(x) \to h(x)$ pour tout $x \in B^c$ et $f_n(x) \geq f(x)$ pour tout $x \in B^c$.
   On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $g_n = f_n 1_{B^c} + h 1_B$ et $g = f 1_{B^c} + h 1_B$. On a bien $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et les 3 conditions demandées sont vérifiées.

   (b) Montrer que $h \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

   corrigé

   On applique le lemme de Fatou à la suite $(g_n - g)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$ (noter aussi que $(h - g) \in \mathcal{M}_+$).
   On obtient $\int (h - g) dm \leq \liminf_{n\to\infty} \int (g_n - g) dm \leq C - \int g dm < \infty$.
   On en déduit que $(h - g) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et donc $h = h - g + g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

   ---

2. (question plus difficile) On reprend les hypothèses de la question précédente sauf "$f_n \geq f$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$" que l'on remplace par l'hypothèse (plus faible) "il existe $D \in \mathbb{R}$ t.q. $\int f_n dm \geq D$ pour tout $n \in \mathbb{N}$". Donner un exemple pour lequel $h \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. [Prendre $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.]

   corrigé

   On prend $f_n = 1_{[1/n, n+1/n]} - n^2 1_{[0,1/n[}$ et $h = 1_{\mathbb{R}_+}$. On a $f_n \to h$ p.p., $\int f_n dm = 0$ et $h \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

Corrigé 70
Soient $T > 0$ et $f \in \mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1([0, T], \mathcal{B}([0, T]), \lambda)$ (λ désigne donc ici la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}([0, T])$).

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction $x \mapsto e^{nx} f(x)$ appartient à $\mathcal{L}^1$.

   corrigé

   La fonction $x \mapsto e^{nx}$ est continue donc mesurable (de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, tous deux munis de la tribu borélienne). La fonction $x \mapsto e^{nx} f(x)$ est donc mesurable comme produit de fonctions mesurables.

On remarque ensuite que $\int |e^{nx}f(x)|d\lambda(x) \leq e^n\|f\|_1 < \infty$. On en déduit que la fonction $x \mapsto e^{nx}f(x)$ appartient à $\mathcal{L}^1$.

On suppose, dans la suite de l'exercice, que $f \geq 0$ p.p. et qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ t.q. que $\int e^{nx}f(x)\,d\lambda(x) \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que $f = 0$ p.p.. [Appliquer le théorème de convergence monotone.]

corrigé

On pose $A = \{f > 0\} = \{x \in E;\ f(x) > 0\}$ et $B = A \setminus \{0\}$. Comme f est mesurable, on a $A, B \in \mathcal{B}([0,1])$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $g_n(x) = e^{nx}|f(x)|$ pour $x \in [0,1]$. On a $g_n \in \mathcal{M}_+$ et $g_n \uparrow g$ avec g définie par :

$$
\begin{aligned}
&g(x) = \infty, \ \text{ si } x \in B,\\
&g(x) = 0, \ \text{ si } x \in]0,1] \setminus B,\\
&g(0) = |f(0)|.
\end{aligned}
$$

Le théorème de convergence monotone donne que $g \in \mathcal{M}_+$ et $\int g_n dm \to \int gdm$ quand $n \to \infty$. Comme $g_n = e^{n\cdot}f$ p.p., on a $\int g_n dm = \int e^{nx}f(x)\,d\lambda(x) \leq M$ et donc, en passant à limite quand $n \to \infty$, $\int gdm \leq M$.

On a aussi $h_n \uparrow g$ avec $h_n = n1_B + |f(0)|1_{\{0\}}$. La définition de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$ donne alors $\int gdm = \lim_{n\to\infty} n\lambda(B)$ et donc $\int gdm = \infty$ si $\lambda(B) > 0$. Comme $\int gdm \leq M$, on a donc $\lambda(B) = 0$ et donc aussi $\lambda(A) = 0$. Ce qui donne $f = 0$ p.p..

---

3. On suppose de plus que f est continue. Montrer que $f(x) = 0$ pour tout $x \in [0,T]$.

corrigé

On pose toujours $A = \{f > 0\} = \{x \in E;\ f(x) > 0\}$. Comme f est continue, l'ensemble A est un ouvert de $[0,1]$. Si $A \neq \emptyset$, il existe un intervalle ouvert non vide inclus dans A et donc $\lambda(A) > 0$ en contradiction avec le résultat de la question précédente qui donne $\lambda(A) = 0$. On a donc $A = \emptyset$, c'est-à-dire $f = 0$ sur tout $[0,1]$.

12.4.2 Espace L^1

Corrigé 71 (Mesure de densité)
Soit (E,T,m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}_+$. Pour $A \in T$, on pose $\mu(A) = \int_A fdm$.

1. Montrer que μ est une mesure sur T.

corrigé

On rappelle que, par définition, pour tout $A \in T$, on a $\int_A fdm = \int f1_A dm$ avec $f1_A = 0$ sur A^c et $f1_A = f$ sur A (on a bien $f1_A \in \mathcal{M}_+$ et donc $\int_A fdm$ est bien définie).

On montre maintenant que μ est une mesure.

Il est clair que $\mu(\emptyset) = 0$ car $f1_A = 0$ (sur tout E) si $A = \emptyset$. Pour montrer que μ est un mesure, il reste à montrer que μ est σ-additive.

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ t.q. $A_n \cap A_m = \emptyset$ si $n \neq m$. On pose $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et on remarque que $1_A(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 1_{A_n}(x)$ pour tout $x \in E$ et donc $f1_A(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f1_{A_n}(x)$ pour tout $x \in E$. Le premier corollaire du théorème de convergence monotone (corollaire 4.1) donne alors

$$\int f1_A dm = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int f1_{A_n} dm,$$

c'est-à-dire $\mu(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$. Ceci prouve que μ est σ-additive et donc que μ est une mesure.

---

2. Soit $g \in \mathcal{M}$. Montrer que $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,\mu)$ si et seulement si $fg \in L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ (on pose $fg(x) = 0$ si $f(x) = \infty$ et $g(x) = 0$). Montrer que, pour $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,\mu)$, $\int g d\mu = \int fg dm$.

corrigé

On raisonne en 3 étapes :

(a) Soit $g \in \mathcal{E}_+ \setminus \{0\}$. Il existe donc $a_1,\ldots,a_p \in \mathbb{R}_+^\star$ et $A_1,\ldots,A_p \in T$ t.q. $g = \sum_{i=1}^p a_i 1_{A_i}$. On a alors (en posant $fg(x) = 0$ si $f(x) = \infty$ et $g(x) = 0$) $fg = \sum_{i=1}^p a_i f 1_{A_i} \in \mathcal{M}_+$ et :

$$\int fg dm = \sum_{i=1}^p a_i \int f 1_{A_i} dm = \sum_{i=1}^p a_i \mu(A_i) = \int g d\mu.$$

(Ce qui, bien sûr, est aussi vrai pour $g = 0$.)

(b) Soit $g \in \mathcal{M}_+$. Il existe alors $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ t.q. $g_n \uparrow g$. L'item précédent donne que $\int fg_n dm = \int g_n d\mu$. Avec le théorème de convergence monotone (pour μ et pour m, puisque $fg_n \uparrow fg$ en posant toujours $fg(x) = 0$ si $f(x) = \infty$ et $g(x) = 0$), on en déduit que $fg \in \mathcal{M}_+$ et :

$$\int fg dm = \int g d\mu. \tag{12.40}$$

(c) Soit maintenant $g \in \mathcal{M}$. En appliquant (12.40) à $|g| \in \mathcal{M}_+$, on a :

$$\int |fg| dm = \int f|g| dm = \int |g| d\mu,$$

et donc :

$$fg \in L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m) \Leftrightarrow g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,\mu).$$

En fait, on peut ne pas avoir $fg \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ car fg peut prendre les valeurs $\pm\infty$. L'assertion "$fg \in L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$" est à prendre, comme d'habitude, au sens "il existe $h \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ t.q. $fg = h$ p.p.". Ceci est vérifié car si $\int |fg| dm < \infty$, on a $|fg| < \infty$ p.p.. Il suffit alors de changer fg sur un ensemble de mesure nulle pour avoir une fonction mesurable prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}$.

Si $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,\mu)$, en écrivant (12.40) avec g^+ et g^- (qui sont bien des éléments de $\mathcal{M}_+$) et en faisant la différence on obtient bien que $\int fg dm = \int g d\mu$.

Corrigé 72

Soient (E,T,m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ $(= L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m))$ et $f \in L^1$; on suppose que $f_n \geq 0$ pp $\forall n \in \mathbb{N}$, que $f_n \to f$ pp et que $\int f_n dm \to \int f dm$ lorsque $n \to +\infty$. Montrer que $f_n \to f$ dans L^1. [*on pourra examiner la suite* $(f - f_n)^+$.]

corrigé

On pose $h_n = (f - f_n)^+$. On a donc $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ et $h_n \to 0$ p.p.. De plus, comme $f_n \geq 0$ p.p., on a $0 \leq h_n \leq f^+$ p.p.. En effet, soit $x \in E$ t.q. $h_n(x) \neq 0$. On a alors, si $f_n(x) \geq 0$ (ce qui est vrai pour presque tout x), $0 < h_n(x) = f(x) - f_n(x) \leq f(x) = f^+(x)$.

Comme $f^+ \in L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée à cette suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il donne que $h_n \to 0$ quand $n \to \infty$, c'est-à-dire

$$\int (f - f_n)^+ dm \to 0, \text{ quand } n \to \infty. \tag{12.41}$$

On remarque ensuite que

$$\int (f - f_n)^- dm = \int (f - f_n)^+ dm - \int (f - f_n) dm,$$

et donc, comme $\int f_n dm \to \int f dm$ lorsque $n \to +\infty$,

$$\int (f - f_n)^- dm \to 0, \text{ quand } n \to \infty. \tag{12.42}$$

De (12.41) et (12.42), on déduit

$$\int |f - f_n| dm \to 0, \text{ quand } n \to \infty,$$

c'est-à-dire $f_n \to f$ dans $L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$, quand $n \to \infty$.

Corrigé 73 (Théorème de Beppo-Lévi)

Soient (E,T,m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ $(= L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m))$ et $f\colon E \to \mathbb{R}$, t.q. :

(i) $f_n \to f$ p.p. lorsque $n \to +\infty$.

(ii) La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, c'est-à-dire :
$f_{n+1} \geq f_n$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$,
ou
$f_{n+1} \leq f_n$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Construire $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1 (= \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m))$ et $g \in \mathcal{M}$ t.q. $f_n = g_n$ p.p., $f = g$ p.p., $g_n(x) \to g(x)$ pour tout $x \in E$, et $g_{n+1} \geq g_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou $g_{n+1} \leq g_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

corrigé

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on choisit un représentant de f_n, que l'on note encore f_n.

L'hypothèse (i) donne qu'il existe $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et $f_n(x) \to f(x)$ pour tout $x \in A^c$.

L'hypothèse (ii) donne que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$est monotone. On suppose que cette suite est monotone croissante (le cas "monotone décroissante" est similaire). Il existe alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \in T$ t.q. $m(A_n) = 0$ et $f_{n+1} \geq f_n$ sur A_n^c.

On pose $B = A \cup (\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n)$. On a donc $B \in T$ et $m(B) = 0$. Puis on pose $g_n = f_n 1_{B^c}$ et on définit g par $g(x) = f(x)$ si $x \in B^c$ et $g(x) = 0$ si $x \in B$. On a bien $f = g$ p.p., $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m))$, $f_n = g_n$ p.p. et $g_{n+1} \geq g_n$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$). Enfin $g_n(x) \to g(x)$ pour tout $x \in E$, et $g \in \mathcal{M}$ car g est limite simple d'éléments de $\mathcal{M}$ (voir la proposition 3.5 sur la stabilité de $\mathcal{M}$).

On remarque aussi que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n et g_n sont deux répresentants du même élément de $L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et $\int f_n dm = \int g_n dm$.

---

2. Montrer que $f \in L^1 \Leftrightarrow \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int f_n dm \in \mathbb{R}$.

corrigé

On reprend la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la fonction g construites à la question précédente et on distingue maintenant les 2 cas de l'hypothèse (ii).

Cas 1 : La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est supposée monotone croissante.

Dans ce cas, on a $(g_n - g_0) \uparrow (g - g_0)$ quand $n \to \infty$ et, comme $(g_n - g_0) \in \mathcal{M}_+$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut utiliser le théorème de convergence monotone dans $\mathcal{M}_+$ (théorème 4.1). Il donne $((g - g_0) \in \mathcal{M}_+$ et)

$$\int (g_n - g_0)dm \to \int (g - g_0)dm \text{ quand } n \to \infty. \tag{12.43}$$

On sait déjà que $(g - g_0) \in \mathcal{M}$ et que $\int |g - g_0|dm = \int (g - g_0)dm$ car $(g - g_0) \in \mathcal{M}_+$. la propiétée (12.43) donne alors que $(g - g_0) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ si et seulement si la limite de la suite (croissante) $(\int (g_n - g_0)dm)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire différente de ∞).

Comme $g_n, g_0 \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, on a $\int (g_n - g_0)dm = \int g_n dm - \int g_0 dm$ et donc $(g - g_0) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ si et seulement si la limite de la suite (croissante) $(\int g_n dm)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans $\mathbb{R}$.

Enfin, comme $g = (g - g_0) + g_0$ et que $g_0 \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, on a $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ si et seulement $(g - g_0) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et finalement on obtient bien que $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ si et seulement la limite de la suite (croissante) $(\int g_n dm)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans $\mathbb{R}$.

On conclut en remarquant que $\int f_n dm = \int g_n dm$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $f = g$ p.p.. Plus précisement :

- Si la limite de la suite (croissante) $(\int f_n dm)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans $\mathbb{R}$, on obtient que $g \in \mathcal{L}^1$) et donc que $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ au sens "il existe $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ t.q. $f = g$ p.p." (on confond donc f et la classe de g, c'est-à-dire $\{h \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m);\ h = g \text{ p.p.}\}$).
- Réciproquement, si $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, cela signifie qu'il existe $h \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ t.q. $f = h$ p.p. (on a donc confondu f et la classe de h). Comme $f = g$ p.p., on a aussi $h = g$ p.p.. Comme $g \in \mathcal{M}$, on obtient donc que $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et donc $(g - g_0) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ ce qui donne, par (12.43), que la limite de la suite (croissante) $(\int f_n dm)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans $\mathbb{R}$.

Cas 2 : La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est supposée monotone décroissante.

La démonstration est très voisine de la précécende. On remarque que $(g_0 - g_n) \uparrow (g_0 - g)$ quand $n \to \infty$ et, comme $(g_0 - g_n) \in \mathcal{M}_+$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut utiliser le théorème de convergence monotone dans $\mathcal{M}_+$ (théorème 4.1). Il donne ($(g_0 - g) \in \mathcal{M}_+$ et)

$$\int (g_0 - g_n)dm \to \int (g_0 - g)dm \text{ quand } n \to \infty. \tag{12.44}$$

On sait déjà que $(g - g_0) \in \mathcal{M}$ et que $\int |g - g_0|dm = \int (g_0 - g)dm$ car $(g_0 - g) \in \mathcal{M}_+$. La propriétée (12.44) donne alors que $(g - g_0) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ si et seulement si la limite de la suite (croissante) $(\int (g_0 - g_n)dm)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire différente de ∞).

Comme $g_n, g_0 \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, on a $\int (g_0 - g_n)dm = \int g_0 dm - \int g_n dm$ et donc $(g - g_0) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ si et seulement si la limite de la suite (décroissante) $(\int g_n dm)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire différente de $-\infty$).

Enfin, comme $g = (g - g_0) + g_0$ et que $g_0 \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, on a $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ si et seulement $(g - g_0) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et finalement on obtient bien que $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ si et seulement la limite de la suite (décroissante) $(\int g_n dm)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans $\mathbb{R}$.

On conclut en remarquant que $\int f_n dm = \int g_n dm$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $f = g$ p.p., comme dans le premier cas.

---

3. On suppose ici que $f \in L^1$, montrer que $f_n \to f$ dans L^1, lorsque $n \to +\infty$.

corrigé

On utilise toujours la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la fonction g construites à la première question.

Comme $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ on a $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et la propriété (12.43) (ou la propriété (12.44)) donne $\int g_n dm \to \int g dm$ quand $n \to \infty$ et donc

$$\int |g_n - g|dm \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$

(On a utilisé ici le fait que $(g_n - g)$ a un signe constant et que $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.)

Comme $\|f_n - f\|_1 = \int |g_n - g|dm$, on en déduit que $f_n \to f$ dans $L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, quand $n \to \infty$.

Corrigé 74 (Préliminaire pour le théorème de Vitali)
Soient (E, T, m) un espace mesuré et $f \in L^1 (= L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m))$.

1. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ t.q. :

$$A \in T, \ m(A) \leq \delta \Rightarrow \int_A |f|dm \leq \varepsilon.$$

[*Choisir un représentant de* f *et introduire* $f_n = \inf(|f|, n)$].

corrigé

En choisissant un représentant de f, cette question est démontrée à la question 1 de l'exsercice 4.14.

---

2. Soit $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe $C \in T$ t.q. $m(C) < +\infty$ et $\displaystyle\int_{C^c} |f|dm \le \varepsilon$. [*Choisir un représentant de f et considérer $C_n = \{x \in E\,;\ \dfrac{1}{n} \le |f(x)|\}$.*]

corrigé

On choisit un représentant de f, encore noté f et pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $C_n = \{|f| \ge \frac{1}{n}\}$.

Comme $|f| \ge \frac{1}{n} 1_{C_n}$, on a, par monotonie de l'intégrale, $m(C_n) \le n\|f\|_1 < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

On pose maintenant $g_n = |f| 1_{C_n^c}$. On remarque que $g_n(x) \to 0$ pour tout $x \in E$ et que $|g_n| \le |f|$. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée à la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ou la proposition préliminaire 4.6). Il donne que $\int g_n dm \to 0$ quand $n \to \infty$.

Soit $\varepsilon > 0$, il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}^\star$ t.q. $\int g_n dm \le \varepsilon$. On prend alors $C = C_{n_0}$, on a bien $m(C) < +\infty$ et $\int_{C^c} |f| dm \le \varepsilon$.

Corrigé 75 (Théorème de Vitali)
Soient (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1 (= L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m))$ et $f\colon E \to \mathbb{R}$ t.q. $f_n \to f$ p.p..

1. On suppose $m(E) < +\infty$. Montrer que : $f \in L^1$ et $f_n \to f$ dans L^1 lorsque $n \to +\infty$ si et seulement si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-intégrable (i.e. : Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe δ t.q. $(A \in T,\ n \in \mathbb{N},\ m(A) \le \delta \Rightarrow \int_A |f_n| dm \le \varepsilon)$. [*Pour montrer le sens $\Rightarrow$, utiliser la question 1 de l'exercice 4.29. Pour le sens $\Leftarrow$, remarquer que $\int |f_n - f| dm = \int_A |f_n - f| dm + \int_{A^c} |f_n - f| dm$, utiliser le théorème d'Egorov et le lemme de Fatou...*]

corrigé

Sens($\Rightarrow$) Soit $\varepsilon > 0$. D'après l'exercice 4.29 (première question), il existe, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\delta_n > 0$ t.q. :

$$A \in T,\ m(A) \le \delta_n \Rightarrow \int_A |f_n| dm \le \varepsilon. \tag{12.45}$$

On ne peut pas déduire de (12.45) l'équi-intégrabilité de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ car on peut avoir $\min_{n\in\mathbb{N}} \delta_n = 0$.

Comme $f \in L^1$, il existe aussi $\delta > 0$ t.q. :

$$A \in T,\ m(A) \le \delta \Rightarrow \int_A |f| dm \le \varepsilon. \tag{12.46}$$

On va déduire l'équi-intégrabilité de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en utilisant (12.45) et (12.46).

Soit $A \in T$, on a :

$$\int_A |f_n| dm \le \int_A |f_n - f| dm + \int_A |f| dm \le \int |f_n - f| dm + \int_A |f| dm. \tag{12.47}$$

Comme $f_n \to f$ dans L^1 quand $n \to \infty$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $\|f_n - f\|_1 \le \varepsilon$ si $n > n_0$. Pour $n > n_0$ et $m(A) \le \delta$, (12.47) et (12.46) donne donc $\int_A |f_n| dm \le 2\varepsilon$. On choisit alors $\overline{\delta} = \min\{\delta_0, \ldots, \delta_{n_0}, \delta\} > 0$ et on obtient, avec aussi (12.45) (pour tout $n \le n_0$) :

$$n \in \mathbb{N}, A \in T,\ m(A) \le \overline{\delta} \Rightarrow \int_A |f_n| dm \le 2\varepsilon.$$

Ce qui donne l'équi-intégrabilité de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Sens $(\Leftarrow)$
on veut montrer ici que $f \in L^1$ et $\|f_n - f\|_1 \to 0$ quand $n \to \infty$.

Soit $\varepsilon > 0$. L'équi-intégrabilité de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donne l'existence de $\delta > 0$ t.q. :

$$n \in \mathbb{N}, A \in T,\ m(A) \le \overline{\delta} \Rightarrow \int_A |f_n| dm \le 2\varepsilon. \tag{12.48}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on choisit maintenant un représentant de f_n, encore noté f_n. Comme $f_n \to f$ p.p., il existe $B \in T$ t.q. $m(B) = 0$ et $f_n \to f$ sur B^c. En remplaçant f par $f1_{B^c}$ (ce qui ne change f que sur un ensemble de mesure nulle, donc ne change pas les hypothèses du théorème), on a alors $f \in \mathcal{M}$ car f est limite simple de la suite $(f_n 1_{B^c})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ (noter que f est bien à valeurs dans $\mathbb{R}$). Comme $m(E) < \infty$, on peut utiliser le théorème d'Egorov (théorème 3.2), il donne l'existence de $A \in T$ t.q. $f_n \to f$ uniformément sur A^c, c'est-à-dire $\sup_{x\in A^c} |f_n(x) - f(x)| \to 0$ quand $n \to \infty$. On a donc aussi, pour ce choix de A,

$$\int_{A^c} |f_n - f| dm \le m(E) \sup_{x\in A^c} |f_n(x) - f(x)| \to 0,\ \text{quand } n \to \infty.$$

Il existe donc $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ t.q. $\int_{A^c} |f_n - f| dm \le \varepsilon$ pour tout $n \ge n_0(\varepsilon)$. Avec (12.48), on en déduit, pour tout $n \ge n_0(\varepsilon)$:

$$\int |f_n - f| dm \le \int_{A^c} |f_n - f| dm + \int_A |f_n| dm + \int_A |f| dm \le 2\varepsilon + \int_A |f| dm.$$

Pour majorer par ε le dernier terme de l'inégalité précédente, on utilise le lemme de Fatou sur la suite $(|f_n|1_A)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$. Comme $\liminf_{n\to\infty} |f_n|1_A = |f|1_A$, il donne avec (12.48),

$$\int_A |f| dm \le \liminf_{n\to\infty} \int |f_n| 1_A \le \varepsilon.$$

On a donc, finalement,

$$n \ge n_0(\varepsilon) \Rightarrow \int |f_n - f| dm \le 3\varepsilon. \tag{12.49}$$

En choisissant $n = n_0(1)$, on déduit de (12.49) que $f_n - f \in L^1$ et donc que $f = (f - f_n) + f_n \in L^1$. Cette appartenance étant, comme d'habitude à prendre au sens "il existe $g \in \mathcal{L}^1$ t.q. $f = g$ p.p." (en fait, ici, comme nous avons remplacé f par $f1_{B^c}$ ci dessus, on a même $f \in \mathcal{L}^1$).

Puis, (12.49) étant vraie pour tout $\varepsilon > 0$, on a bien montré que $\|f_n - f\|_1 \to 0$ quand $n \to \infty$.

---

2. On suppose maintenant $m(E) = +\infty$. Montrer que : $f \in L^1$ et $f_n \to f$ dans L^1 lorsque $n \to +\infty$ si et seulement si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-intégrable et vérifie : $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, C \in T,\ m(C) < +\infty$ et $\int_{C^c} |f_n| dm \le \varepsilon$ pour tout n. [*Pour montrer le sens $\Rightarrow$, utiliser l'exercice 4.29. Pour le sens $\Leftarrow$, utiliser l'exercice 4.29, le lemme de Fatou et le résultat de la question 1.*]

corrigé

Sens $(\Rightarrow)$

(a) L'hypothèse $m(E) < \infty$ n'a pas été utilisée à la question précédente. La même démonstration donne donc ici l'équi-intégrabilité de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(b) On utilise maintenant la deuxième question de l'exercice 4.29.

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $C_n \in T$ t.q. $m(C_n) < \infty$ et $\int_{C_n^c} f_n dm \le \varepsilon$. Comme $f \in L^1$, il existe aussi $D \in T$ t.q. $m(D) < \infty$ et $\int_{D^c} f dm \le \varepsilon$. Enfin, comme $f_n \to f$ dans L^1 quand $n \to \infty$, il existe n_0 t.q. $\|f_n - f\|_1 \le \varepsilon$ pour tout $n \ge n_0$.

On choisit maintenant $C = D \cup (\cup_{n=0}^{n_0} C_n)$, de sorte que $m(C) < m(D) + \sum_{n=0}^{n_0} m(C_n) < \infty$, $C^c \subset D^c$ et $C^c \subset C_n^c$ si $n \le n_0$. Ce choix de C nous donne, pour tout $n \ge n_0$,

$$\int_{C^c} |f_n| dm \le \int_{D^c} |f| dm + \int |f_n - f| dm \le 2\varepsilon,$$

et, pour tout $n \le n_0$,

$$\int_{C^c} |f_n| dm \le \int_{C_n^c} |f_n| dm \le \varepsilon.$$

On a donc $m(C) < \infty$ et $\int_{C^c} |f_n| dm \le 2\varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Sens ($\Leftarrow$)

on veut montrer ici que $f \in L^1$ et $\|f_n - f\|_1 \to 0$ quand $n \to \infty$.

Soit $\varepsilon > 0$. La deuxième hypothèse donne l'existence de $C \in T$ t.q. $m(C) < \infty$ et

$$\int_{C^c} |f_n| dm \le \varepsilon \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \tag{12.50}$$

Comme dans la question précédente, on peut supposer (en changeant éventuellement f sur un ensemble de mesure nulle) que $f \in \mathcal{M}$. En appliquant le lemme de Fatou à la suite $(|f_n| 1_{C^c})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$, on déduit de (12.50) que

$$\int_{C^c} |f| dm \le \varepsilon. \tag{12.51}$$

La première hypothèse (c'est-à-dire l'équi-intégrabilité de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$) donne l'existence de $\delta > 0$ t.q.

$$n \in \mathbb{N},\ A \in T,\ m(A) \le \delta \Rightarrow \int_A |f_n| dm \le \varepsilon. \tag{12.52}$$

On peut maintenant utiliser le théorème d'Egorov sur la suite $(f_{n|_C})_{n\in\mathbb{N}}$ (qui converge p.p. vers $f_{|_C}$) dans l'espace mesurable (C, T_C) où T_C est la tribu $\{B \in T;\ B \subset C\}$. Il donne l'existence de $A \subset C$, $A \in T$, t.q. $m(A) \le \delta$ et $f_n \to f$ uniformément sur $A^c \cap C$. On en déduit que

$$\int_{A^c\cap C} |f_n - f| dm \le m(C) \sup_{x\in A^c\cap C} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$

Il existe donc n_0 t.q.

$$n \ge n_0 \Rightarrow \int_{A^c\cap C} |f_n - f| dm \le \varepsilon. \tag{12.53}$$

Enfin, en appliquant le lemme de Fatou à la suite $(|f_n|1_A)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$, on déduit de (12.52) que

$$\int_A |f|dm \leq \varepsilon. \tag{12.54}$$

Il suffit maintenant de remarquer que

$$\int |f_n - f|dm \leq \int_{A^c\cap C} |f_n - f|dm + \int_A |f_n|dm + \int_A |f|dm + \int_{C^c} |f_n|dm + \int_{C^c} |f|dm,$$

pour déduire de (12.53), (12.52), (12.54), (12.50) et (12.51) que

$$n \geq n_0 \Rightarrow \int |f_n - f|dm \leq 5\varepsilon.$$

On conclut comme à la question précédente. En prenant d'abord $\varepsilon = 1$, on montre que $f \in L^1$ puis, comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on montre que $f_n \to f$ dans L^1 quand $n \to \infty$.

---

3. Montrer que le théorème de convergence dominée de Lebesgue peut être vu comme une conséquence du théorème de Vitali.

corrigé

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ et $F \in L^1$ t.q. $|f_n| \leq F$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En utilisant l'exercice 4.29 sur F, on montre facilement l'équi-intégrabilité de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et l'existence, pour tout $\varepsilon > 0$, de $C \in T$ t.q. $m(C) < \infty$ et $\int_{C^c} |f_n|dm \leq \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (noter que si $m(E) < \infty$ cette propriété est immédiate en prenant $C = E$). Il est alors facile de montrer le théorème de convergence dominée à partir du théorème de Vitali.

Corrigé 76 (Théorème de "Vitali-moyenne")
Soit (E, T, m) un espace mesuré. On note $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1$ et $f \in \mathcal{M}(E, T)$.

1. On suppose que $m(E) < \infty$. On se propose ici de montrer que :

$$\left.\begin{array}{l} f \in \mathcal{L}^1 \text{ et} \\ \|f_n - f\|_1 \to 0 \text{ quand } n \to \infty \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1.\ f_n \to f \text{ en mesure, quand } n \to \infty, \\ 2.\ (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ équi-intégrable.} \end{array}\right. \tag{12.55}$$

   (a) Montrer le sens $(\Rightarrow)$ de (12.55).

corrigé

On montre tout d'abord la convergence en mesure. Soit $\eta > 0$. On a alors :

$$m(\{|f_n - f| \geq \eta\}) \leq \frac{1}{\eta} \int |f_n - f|dm \to 0, \text{ quand } n \to \infty.$$

Ce qui donne que $f_n \to f$ en mesure, quand $n \to \infty$.

Pour montrer l'équi-intégrabilité, il suffit de remarquer que, pour tout $A \in T$, on a :

$$\int_A |f_n|dm \leq \int |f_n - f|dm + \int_A |f|dm.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $f \in \mathcal{L}^1$, il existe (voir la proposition 4.9) $\delta > 0$ t.q.

$$m(A) \leq \delta \Rightarrow \int_A |f| dm \leq \varepsilon.$$

Comme $\|f_n - f\|_1 \to 0$, quand $n \to \infty$, il existe n_0 t.q.

$$n \geq n_0 \Rightarrow \int |f_n - f| dm \leq \varepsilon.$$

On en déduit :

$$(n \geq n_0 \text{ et } m(A) \leq \delta) \Rightarrow \int_A |f_n| dm \leq 2\varepsilon. \tag{12.56}$$

Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe (voir la proposition 4.9) $\delta_n > 0$ t.q.

$$m(A) \leq \delta_n \Rightarrow \int_A |f_n| dm \leq \varepsilon. \tag{12.57}$$

En posant $\overline{\delta} = \min\{\delta, \delta_0, \ldots, \delta_n\}$ on a donc, avec (12.56) et (12.57):

$$(n \in \mathbb{N} \text{ et } m(A) \leq \overline{\delta}) \Rightarrow \int_A |f_n| dm \leq 2\varepsilon.$$

Ce qui montre l'équi-intégrabilité de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Pour montrer le sens ($\Leftarrow$), on suppose maintenant que $f_n \to f$ en mesure, quand $n \to \infty$, et que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-intégrable.

i. Montrer que pour tout $\delta > 0$ et $\eta > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ t.q. : $p, q \geq n \Rightarrow m(\{|f_p - f_q| \geq \eta\} \leq \delta$.

corrigé

On remarque que, pour tout $p, q \in \mathbb{N}$ et tout $x \in E$, $|f_p - f|(x) \leq \frac{\eta}{2}$ et $|f_q - f|(x) \leq \frac{\eta}{2}$ implique $|f_p - f_q|(x) \leq \eta$. On a donc $\{|f_p - f_q| \geq \eta\} \subset \{|f_p - f| \geq \frac{\eta}{2}\} \cup \{|f_p - f| \geq \frac{\eta}{2}\}$. Ce qui donne :

$$m(\{|f_p - f_q| \geq \eta\}) \leq m(\{|f_p - f| \geq \frac{\eta}{2}\}) + \{|f_q - f| \geq \frac{\eta}{2}\}.$$

Comme $f_n \to f$ en mesure, il existe $n \in \mathbb{N}$ t.q. :

$$p \geq n \Rightarrow m(\{|f_p - f| \geq \frac{\eta}{2}\}) \leq \frac{\delta}{2},$$

on en déduit :

$$p, q \geq n \Rightarrow m(\{|f_p - f_q| \geq \eta\}) \leq \delta.$$

---

ii. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans L^1.

corrigé

Soit $p, q \in \mathbb{N}$ et $\eta > 0$, on a :

$$\|f_p - f_q\|_1 = \int_{\{|f_p - f_q| \geq \eta\}} |f_p| dm + \int_{\{|f_p - f_q| \geq \eta\}} |f_q| dm + \eta m(E). \tag{12.58}$$

Soit $\varepsilon > 0$. D'après l'équi-intégrabilité de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il existe $\delta > 0$ t.q.

$$(A \in T,\ m(A) \le \delta \text{ et } n \in \mathbb{N}) \Rightarrow \int_A |f_n| \le \varepsilon. \tag{12.59}$$

On commence à choisir $\eta > 0$ t.q. $\eta m(E) \le \varepsilon$. Puis, la question précédente donne l'existence de n t.q. $m(\{|f_p - f_q| \ge \eta\}) \le \delta$ si $p, q \ge n$. On a donc, par (12.59) :

$$\int_{\{|f_p - f_q| \ge \eta\}} |f_p| \le \varepsilon \text{ et } \int_{\{|f_p - f_q| \ge \eta\}} |f_q| \le \varepsilon \text{ si } p, q \ge n.$$

Finalement, (12.58) donne :

$$p, q \ge n \Rightarrow \|f_p - f_q\|_1 \le 3\varepsilon.$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc de Cauchy dans L^1.

---

iii. Montrer que $f \in \mathcal{L}^1$ et que $\|f_n - f\|_1 \to 0$ quand $n \to \infty$.

corrigé

Comme L^1 est complet, il existe $g \in L^1$ t.q. $f_n \to g$ dans L^1, quand $n \to \infty$. On peut supposer $g \in \mathcal{L}^1$ (en confondant g avec l'un de ses représentants). La question (a) donne alors que $f_n \to g$ en mesure, quand $n \to \infty$. Comme $f_n \to f$ en mesure, on a donc nécessairement $f = g$ p.p.. ce qui donne bien $f \in \mathcal{L}^1$ et $\|f_n - f\|_1 = \|f_n - g\|_1 \to 0$, quand $n \to \infty$.

---

2. On ne suppose plus que $m(E) < \infty$. Montrer que :

$$\left.\begin{array}{l} f \in \mathcal{L}^1 \text{ et} \\ \|f_n - f\|_1 \to 0 \text{ quand } n \to \infty \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1.\ \ f_n \to f \text{ en mesure, quand } n \to \infty, \\ 2.\ \ (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ équi-intégrable,} \\ 3.\ \ \forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in T \text{ t.q. } m(A) < \infty \text{ et ,} \\ \qquad \int_{A^c} |f_n| dm \le \varepsilon,\ \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{array}\right. \tag{12.60}$$

corrigé

Etape 1 On montre tout d'abord le sens $(\Rightarrow)$.

Les propriétés 1 et 2 ont déjà été démontrées dans la question 1-(a) (car l'hypothèse $m(E) < \infty$ n'avait pas été utilisée).

Pour démontrer la propriété 3, on utilise la proposition 4.9 du cours. Soit $\varepsilon > 0$. pour tout $n \in \mathbb{N}$, Il existe $B_n \in T$ t.q. $m(B_n) < \infty$ et

$$\int_{B_n^c} |f_n| dm \le \varepsilon. \tag{12.61}$$

Il existe aussi $B \in T$ t.q. $m(B) < \infty$ et

$$\int_{B^c} |f| dm \le \varepsilon. \tag{12.62}$$

En remarquant que

$$\int_{B^c} |f_n| dm \le \int |f_n - f| dm + \int_{B^c} |f| dm,$$

on obtient, en utilisant le fait que $\|f_n - f\|_1 \to 0$, quand $n \to \infty$, et (12.62), l'existence de n_0 t.q.

$$n \geq n_0 \Rightarrow \int_{B^c} |f_n| dm \leq 2\varepsilon.$$

En prenant $A = B \cup (\cup_{p=0}^{n_0} B_p)$, on obtient alors (avec (12.61)) $m(A) < \infty$ et :

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow \int_{A^c} |f_n| dm \leq 2\varepsilon.$$

Etape 1 On montre maintenant le sens ($\Leftarrow$).

On reprend la même méthode que dans le cas $m(E) < \infty$.

On remarque tout d'abord que pour tout $\delta > 0$ et $\eta > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ t.q. : $p, q \geq n \Rightarrow m(\{|f_p - f_q| \geq \eta\} \leq \delta$. La démonstration est la même que précédemment (l'hypothèse $m(E) < \infty$ n'avait pas été utilisée).

On montre maintenant que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans L^1. Soit $p, q \in \mathbb{N}$, $A \in T$ et $\eta > 0$, on a :

$$\|f_p - f_q\|_1 \leq \int_{A^c} (|f_p| + |f_q)| dm + \int_{\{|f_p - f_q| \geq \eta\}} (|f_p| + |f_q|) dm + \eta m(A). \tag{12.63}$$

Soit $\varepsilon > 0$. D'après l'équi-intégrabilité de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il existe $\delta > 0$ t.q.

$$(B \in T,\ m(B) \leq \delta \text{ et } n \in \mathbb{N}) \Rightarrow \int_B |f_n| \leq \varepsilon. \tag{12.64}$$

D'après la propriété 3 de (12.60), il existe $A \in T$ t.q. $m(A) < \infty$ et

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow \int_{A^c} |f_n| dm \leq \varepsilon. \tag{12.65}$$

On commence à choisir $\eta > 0$ t.q. $\eta m(A) \leq \varepsilon$. Maintenant que δ et η sont fixés, il existe $n \in \mathbb{N}$ t.q. $m(\{|f_p - f_q| \geq \eta\}) \leq \delta$ si $p, q \geq n$. On a donc, par (12.64), $\int_{\{|f_p - f_q| \geq \eta\}} |f_p| \leq \varepsilon$ et $\int_{\{|f_p - f_q| \geq \eta\}} |f_q| \leq \varepsilon$ si $p, q \geq n$. Avec (12.63) et (12.65), on obtient alors :

$$p, q \geq n \Rightarrow \|f_p - f_q\|_1 \leq 5\varepsilon.$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc de Cauchy dans L^1.

On conclut, comme dans le cas $m(E) < \infty$, que $f \in \mathcal{L}^1$ et $\|f_n - f\|_1 \to 0$, quand $n \to \infty$ (car l'hypothèse $m(E) < \infty$ n'avait pas été utilisée pour cette partie).

Corrigé 77 (Continuité de $p \mapsto \|\cdot\|_p$)
Soient (E, T, m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}(E, T)$.

1. Pour $p \in [1, +\infty[$, on pose $\|f\|_p = \left(\int |f|^p dm\right)^{\frac{1}{p}}$ (noter que $|f|^p \in \mathcal{M}_+$) et on dit que $f \in \mathcal{L}^p$ si $\|f\|_p < +\infty$. On pose $I = \{p \in [1, +\infty[, f \in \mathcal{L}^p\}$.

(a) Soient p_1 et $p_2 \in [1,+\infty[$, et $p \in [p_1,p_2]$. Montrer que si $f \in \mathcal{L}^{p_1} \cap \mathcal{L}^{p_2}$, alors $f \in \mathcal{L}^p$. En déduire que I est un intervalle. [*On pourra introduire* $A = \{x; |f(x)| \le 1\}$.]

corrigé

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^\star$. On remarque que $\alpha^p \le \alpha^{p_2}$ si $1 \le \alpha$ et $\alpha^p \le \alpha^{p_1}$ si $\alpha \le 1$. On en déduit que $|f|^p \le |f|^{p_1} + |f|^{p_2}$ (en fait, on a $|f|^p \le |f|^{p_1}$ sur $A = \{|f| \le 1\}$ et $|f|^p \le |f|^{p_2}$ sur A^c) et donc que $f \in \mathcal{L}^p$ si $f \in \mathcal{L}^{p_1} \cap \mathcal{L}^{p_2}$.

On suppose que $I \ne \emptyset$. On pose $a = \inf I$ et $b = \sup I$. On a donc $1 \le a \le b \le \infty$ et $I \subset [a,b]$. On montre maintenant que $]a,b[\subset I$ (ce qui donne que I est bien un intervalle dont les bornes sont a et b).

Soit $p \in]a,b[$. La défintion de a et b permet d'affirmer qu'il existe $p_1 \in I$ t.q. $p_1 < p$ et qu'il existe $p_2 \in I$ t.q. $p_2 > p$. On a donc $f \in \mathcal{L}^{p_1} \cap \mathcal{L}^{p_2}$ et $p \in]p_1,p_2[$, d'où l'on déduit que $p \in I$. on a donc bien monté que $]a,b[\subset I$ et donc que I est un intervalle.

(b) On montre sur des exemples que les bornes de I peuvent être ou ne pas être dans I. On prend pour cela: $(E,T,m) = ([2,+\infty[, \mathcal{B}([2,\infty[), \lambda)$ (λ est ici la restriction à $[2,\infty[$ de la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$). Calculer I dans les deux cas suivants:

i. $f(x) = \frac{1}{x}, x \in [2,+\infty[$.
ii. $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}, x \in [2,+\infty[$.

corrigé

i. $f(x) = \frac{1}{x}, x \in [2,+\infty[$. Soit $1 \le p < \infty$. Pour savoir si $f \in \mathcal{L}^p$ ou non, on utilise le théorème de convergence monotone et l'intégrale des fonctions continues sur un intervalle compact de $\mathbb{R}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n = |f|^p 1_{[2,n]}$. On a donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$ et $f_n \uparrow |f|^p$ ce qui donne, grâce au théorème de convergence monotone,

$$\int f_n d\lambda \to \int |f|^p d\lambda, \text{ quand } n \to \infty.$$

Les intégrales ci dessus sont des intégrales sur l'espace mesuré $([2,+\infty[, \mathcal{B}([2,\infty[), \lambda)$. La comparaison entre l'intégrale des fonctions continues et l'intégrale de Lebesgue (voir les exercices corrigés 58 et 59) donne que

$$\int f_n d\lambda = \int_2^n \frac{1}{x^p} dx.$$

On distingue maintenant les cas $p = 1$ et $p > 1$.

Si $p > 1$, on a $\int f_n d\lambda = \frac{1}{p-1}(\frac{1}{2^{p-1}} - \frac{1}{n^{p-1}}) \to \frac{1}{p-1}\frac{1}{2^{p-1}} < \infty$, quand $n \to \infty$. On a donc $f \in \mathcal{L}^p$.

Si $p = 1$, on a $\int f_n d\lambda = \ln(n) - \ln(2) \to \infty$ quand $n \to \infty$. On a donc $f \notin \mathcal{L}^1$.

On a donc $I =]1,\infty[$.

ii. $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}, x \in [2,+\infty[$. Pour $1 < p < \infty$, on a clairement $f \in \mathcal{L}^p$ car la fonction f est positive et majorée par $\frac{1}{\ln(2)^2} g$ où g est la fonction de l'exemple précédent, c'est-à-dire $g(x) = \frac{1}{x}$. Pour $p = 1$, on utilise la même méthode que pour l'exemple précédent :

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n = |f|1_{[2,n]}$, de sorte que $f_n \uparrow |f| = f$ et donc

$$\int f_n d\lambda \to \int |f| d\lambda, \text{ quand } n \to \infty.$$

On a ici

$$\int f_n d\lambda = \int_2^n \frac{1}{x(\ln x)^2} dx = \ln(2)^{-1} - \ln(n)^{-1} \to \ln(2)^{-1} < \infty, \text{ quand } n \to \infty.$$

On en déduit que $f \in \mathcal{L}^1$, donc $I = [1, \infty[$.

(c) Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset I$ et $p \in \overline{I}$, ($\overline{I}$ désigne l'adhérence de I dans $\mathbb{R}$), t.q. $p_n \uparrow p$ (ou $p_n \downarrow p$). Montrer que $\int |f|^{p_n} dm \to \int |f|^p dm$ quand $n \to +\infty$. [*On pourra encore utiliser l'ensemble* A].

corrigé

On utilise ici $A = \{|f| \le 1\} \in T$.

(a) On suppose d'abord que $p_n \uparrow p$ quand $n \to \infty$. On pose $g_n = |f|^{p_n} 1_A$ et $h_n = |f|^{p_n} 1_{A^c}$, de sorte que $g_n \in \mathcal{L}^1$, $h_n \in \mathcal{L}^1$ et

$$\int g_n dm + \int h_n dm = \int |f|^{p_n} dm.$$

On remarque alors que $h_n \uparrow h = |f|^p 1_{A^c}$, quand $n \to \infty$. Comme $(h_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$, le théorème de convergence monotone donne

$$\int h_n dm \to \int h dm, \text{ quand } n \to \infty. \tag{12.66}$$

Noter que ceci est vrai même si $p \notin I$ (dans ce cas, on a, en fait, $\int h dm = \infty$).

On remarque maintenant que $g_n \to g = |f|^p 1_A$ p.p., quand $n \to \infty$, et que $0 \le g_n \le |f|^{p_0}$ car la suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est ici décroissante. Comme $p_0 \in I$, on a $|f|^{p_0} \in \mathcal{L}^1$ et on peut appliquer le théorème de convergence dominée (ou la proposition 4.6). Il donne

$$\int g_n dm \to \int g dm, \text{ quand } n \to \infty. \tag{12.67}$$

Avec (12.66) et (12.67) on obtient

$$\int |f|^{p_n} dm = \int g_n dm + \int h_n dm \to \int g dm + \int h dm = \int |f|^p dm, \text{ quand } n \to \infty.$$

(b) On suppose maintenant que $p_n \downarrow p$ quand $n \to \infty$ et on reprend la même méthode que ci dessus. On pose $g_n = |f|^{p_n} 1_A$ et $h_n = |f|^{p_n} 1_{A^c}$, de sorte que $g_n \in \mathcal{L}^1$, $h_n \in \mathcal{L}^1$ et

$$\int g_n dm + \int h_n dm = \int |f|^{p_n} dm.$$

les rôles de g_n et h_n sont inversés par rapport au cas précécent : On remarque que $g_n \uparrow g = |f|^p 1_A$, quand $n \to \infty$. Comme $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$, le théorème de convergence monotone donne

$$\int g_n dm \to \int g dm, \text{ quand } n \to \infty. \tag{12.68}$$

Ceci est vrai même si $p \notin I$ (dans ce cas, on a, en fait, $\int g dm = \infty$).

On remarque que $h_n \to h = |f|^p 1_{A^c}$ p.p., quand $n \to \infty$, et que $0 \le h_n \le |f|^{p_0}$ car la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ici décroissante. Comme $p_0 \in I$, on a $|f|^{p_0} \in \mathcal{L}^1$ et on peut appliquer le théorème de convergence dominée (ou la proposition 4.6). Il donne

$$\int h_n dm \to \int h dm, \text{ quand } n \to \infty. \tag{12.69}$$

Avec (12.68) et (12.69) on obtient

$$\int |f|^{p_n} dm = \int g_n dm + \int h_n dm \to \int g dm + \int h dm = \int |f|^p dm, \text{ quand } n \to \infty.$$

La conséquence de cette question est que l'application $p \mapsto \|f\|_p$ est continue de $\overline{I}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, où $\overline{I}$ est l'adhérence de I dans $\mathbb{R}$. Dans la suite de l'exercice, on va introduire le cas $p = \infty$ et montrer la continuité de $p \mapsto \|f\|_p$ sur l'adhérence de I dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

---

2. On dit que $f \in \mathcal{L}^\infty$ s'il existe $C \in \mathbb{R}$ t.q. $|f| < C$ p.p.. On note $\|f\|_\infty = \inf\{C \in \mathbb{R}$ t.q. $|f| < C$ p.p.$\}$. Si $f \notin \mathcal{L}^\infty$, on pose $\|f\|_\infty = +\infty$.

   (a) Montrer que $f \le \|f\|_\infty$ p.p.. A-t-on $f < \|f\|_\infty$ p.p. ?

   corrigé

   Si $\|f\|_\infty = +\infty$, on a, bien sûr, $f \le \|f\|_\infty$ p.p.. On suppose donc maintenant que $\|f\|_\infty < +\infty$. Par définition d'une borne inférieure, il existe $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \{C \in \mathbb{R}$ t.q. $|f| < C$ p.p.$\}$ t.q. $C_n \downarrow \|f\|_\infty$ quand $n \to \infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $A_n \in T$ t.q. $m(A_n) = 0$ et $|f| < C_n$ sur A_n^c.

   On pose $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. On a donc $A \in T$, $m(A) = 0$ et $|f(x)| < C_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $x \in A^c$. Comme $C_n \downarrow \|f\|_\infty$ quand $n \to \infty$, on en déduit $|f| \le \|f\|_\infty$ sur A^c et donc que $|f| \le \|f\|_\infty$ p.p..

   En prenant $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $f(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a $\|f\|_\infty = 1$ et l'assertion $f < \|f\|_\infty$ p.p. est fausse.

   Noter aussi que $\|f\|_\infty = \inf\{C \in \mathbb{R}$ t.q. $|f| \le C$ p.p.$\}$.

   On pose $J = \{p \in [1, +\infty]; f \in \mathcal{L}^p\} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$.

   (b) Remarquer que $J = I$ ou $J = I \cup \{+\infty\}$. Montrer que si $p \in I$ et $+\infty \in J$, alors $[p, +\infty] \subset J$. En déduire que J est un intervalle de $\overline{\mathbb{R}}_+$.

   corrigé

Soit $p \in I$ et on suppose que $\infty \in J$. Soit $q \in]p, \infty[$. Comme $|f| \leq \|f\|_\infty$ p.p., On a $|f|^q \leq \|f\|_\infty^{q-p}|f|^p$ p.p.. On en déduit que $f \in \mathcal{L}^q$, c'est-à-dire $q \in I$. On a ainsi montré que $]p, \infty[\subset I$ et donc $[p, \infty] \subset J$.

On raisonne maintenant comme dans la question 1. On pose $a = \inf J$ et $b = \sup J$, de sorte que $J \subset [a, b]$. Puis, soit p t.q. $a < p < b$. On a nécessairement $a < \infty$ et il existe $p_1 \in I$ t.q. $p_1 < p$. On a $b \leq \infty$ et il existe $p_2 \in J$ t.q. $p < p_2$. Si $p_2 \in I$, on utilise la question 1 pour montrer que $p \in I$ et si $p_2 = \infty$ la première partie de cette question donne que $p \in I$. On a bien ainsi montré que $]a, b[\subset J$. J est donc un intervalle dont les bornes sont a et b.

Noter aussi que $\inf I = \inf J$ et $\sup I = \sup J$.

(c) Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset I$ t.q. $p_n \uparrow +\infty$. On suppose que $\|f\|_\infty > 0$ (noter que $f = 0$ p.p. $\Leftrightarrow \|f\|_\infty = 0$).

i. Soit $0 < c < \|f\|_\infty$. Montrer que : $\liminf_{n\to+\infty} \|f\|_{p_n} \geq c$. [*On pourra remarquer que* $\int |f|^p dm \geq c^p m(\{x; |f(x)| \geq c\})$.]

corrigé

Comme $|f|^p \geq c^p 1_{\{|f|\geq c\}}$, la monotonie de l'intégrale donne bien

$$\int |f|^p dm \geq c^p m(\{|f| \geq c\}),$$

et donc, comme $\int |f|^p dm \neq 0$,

$$\|f\|_p \geq c m(\{|f| \geq c\})^{\frac{1}{p}}. \tag{12.70}$$

Comme $c < \|f\|_\infty$, on a $m(\{|f| \geq c\}) > 0$, d'où l'on déduit que $m(\{|f| \geq c\})^{\frac{1}{p}} \to 1$ quand $p \to \infty$ ($p \in [1, \infty[$).

En passant à la limite inférieure quand $n \to \infty$ dans (12.70) pour $p = p_n$, on obtient alors

$$\liminf_{n\to\infty} \|f\|_{p_n} \geq c.$$

Comme c est arbitrairement proche de $\|f\|_\infty$, on en déduit :

$$\liminf_{n\to\infty} \|f\|_{p_n} \geq \|f\|_\infty. \tag{12.71}$$

---

ii. On suppose que $\|f\|_\infty < +\infty$. Montrer que : $\limsup_{n\to+\infty} \|f\|_{p_n} \leq \|f\|_\infty$. [*On pourra considérer la suite* $g_n = \Big(\frac{|f|}{\|f\|_\infty}\Big)^{p_n}$ *et noter que* $g_n \leq g_0$ *p.p.*.]

corrigé

Comme $\frac{f}{\|f\|_\infty} \leq 1$ p.p. et que $p_n \geq p_0$ (car la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante), on a $g_n \leq g_0$ p.p. et donc $\int g_n dm \leq \int g_0 dm$, d'où l'on déduit (en notant que toutes les normes de f sont non nulles) :

$$\|f_n\|_{p_n} \leq \|f\|_\infty (\int g_0 dm)^{\frac{1}{p_n}}.$$

On passe à la limite supérieure dans cette inégalité et, en remarquant que $\int g_0 dm \neq 0$, on obtient bien :

$$\limsup_{n\to\infty} \|f\|_{p_n} \leq \|f\|_\infty. \tag{12.72}$$

---

iii. Déduire de (a) et (b) que $\|f\|_{p_n} \to \|f\|_\infty$ lorsque $n \to +\infty$.

corrigé

On distingue deux cas :

Cas 1 On suppose ici que $\|f\|_\infty = \infty$. (12.71) donne alors que $\|f\|_{p_n} \to \infty$ et donc $\|f\|_{p_n} \to \|f\|_\infty$ quand $n \to \infty$.

Cas 2 . On suppose ici que $\|f\|_\infty < \infty$, de sorte que $0 < \|f\|_\infty < \infty$. Les assertions (12.71) et (12.72) donnent alors $\limsup_{n\to\infty} \|f\|_{p_n} \leq \|f\|_\infty \leq \liminf_{n\to\infty} \|f\|_{p_n}$ et donc que $\|f\|_{p_n} \to \|f\|_\infty$ quand $n \to \infty$.

---

3. Déduire des deux parties précédentes que $p \to \|f\|_p$ est continue de $\overline{J}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, où $\overline{J}$ désigne l'adhérence de J dans $\overline{\mathbb{R}}$ (c'est-à-dire $\overline{J} = [a,b]$ si $J = |a,b|$, avec $1 \leq a \leq b \leq +\infty$, et $|$ désigne $]$ ou $[$).

corrigé

Si $f = 0$ p.p., on a $J = \overline{J} = [1,\infty]$ et $\|f\|_p = 0$ pour tout $p \in J$. Donc, $p \to \|f\|_p$ est continue de $\overline{J}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

On suppose maintenant que f n'est pas "$= 0$ p.p.". On a donc $\|f\|_p > 0$ pour tout $p \in [1,\infty]$.

On pose $\overline{J} = [a,b]$ (si $J \neq \emptyset$). On distingue 3 cas :

Cas 1 . Soit $p \in]a,b[$, de sorte que $p \in I$.

(a) Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset I$ t.q. $p_n \uparrow p$. La question 1-c donne que $\|f\|_{p_n}^{p_n} \to \|f\|_p^p$ quand $n \to +\infty$. On en déduit que $\|f\|_{p_n} \to \|f\|_p$ quand $n \to \infty$ (pour s'en convaincre, on peut remarquer que $\ln(\|f\|_{p_n}) = \frac{1}{p_n}\ln(\|f\|_{p_n}^{p_n}) \to \frac{1}{p}\ln(\|f\|_p^p) = \ln(\|f\|_p)$). Ceci donne la continuité à gauche de $q \to \|f\|_q$ au point p.

(b) Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset I$ t.q. $p_n \downarrow p$. La question 1-c donne aussi $\|f\|_{p_n}^{p_n} \to \|f\|_p^p$ quand $n \to +\infty$ et on en déduit, comme précédemment, que $\|f\|_{p_n} \to \|f\|_p$ quand $n \to \infty$. Ceci donne la continuité à droite de $q \to \|f\|_q$ au point p.

Cas 2 . On prend ici $p = a$ et on suppose $a \neq \infty$ (sinon $a = b$ et ce cas est étudié au Cas 3). Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset I$ t.q. $p_n \downarrow a$.

(a) On suppose d'abord que $a \in I$. Ici encore, la question 1-c donne $\|f\|_{p_n}^{p_n} \to \|f\|_a^a$ quand $n \to +\infty$ et on en déduit que $\|f\|_{p_n} \to \|f\|_a$ quand $n \to \infty$. Ceci donne la continuité à droite de $q \to \|f\|_q$ au point a.

(b) On suppose maintenant que $a \notin I$, de sorte que $\|f\|_a = \infty$. La question 1-c donne alors $\|f\|_{p_n}^{p_n} \to \infty$ quand $n \to +\infty$ et donc $\|f\|_{p_n} \to \infty$ quand $n \to \infty$. Ceci donne la continuité à droite de $q \to \|f\|_q$ au point a.

Cas 2 . On prend ici $p = b$. Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset I$ t.q. $p_n \uparrow a$.

(a) On suppose d'abord que $b \in I$. Ici encore, la question 1-c donne $\|f\|_{p_n}^{p_n} \to \|f\|_b^b$ quand $n \to +\infty$ et on en déduit que $\|f\|_{p_n} \to \|f\|_b$ quand $n \to \infty$. Ceci donne la continuité à gauche de $q \to \|f\|_q$ au point b.

(b) On suppose maintenant que $b \notin I$.

Si $b \neq \infty$, on a donc $\|f\|_b = \infty$. La question 1-c donne alors $\|f\|_{p_n}^{p_n} \to \infty$ quand $n \to +\infty$ et donc $\|f\|_{p_n} \to \infty$ quand $n \to \infty$. Ceci donne la continuité à gauche de $q \to \|f\|_q$ au point b.

Si $b = \infty$, la continuité à gauche de $q \to \|f\|_q$ au point b a été démontré à la question 2-c-iii.

Corrigé 78 (Continuité d'une application de L^1 dans L^1)
Soient (E, T, m) un espace mesuré fini et soit g une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ t.q. :

$$\exists\, C \in \mathbb{R}_+^\star \,;\ |g(s)| \leq C|s| + C,\ \forall s \in \mathbb{R}. \tag{12.73}$$

1. Soit $u \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Montrer que $g \circ u \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

corrigé

u est mesurable de E (muni de la tribu T) dans $\mathbb{R}$ (muni de la tribu $\mathcal{B}(R)$) et g est borélienne (c'est-à-dire mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de la tribu $\mathcal{B}(R)$). On en déduit que $g \circ u$ est mesurable (de E dans $\mathbb{R}$).

Puis, comme $|g \circ u(x)| = |g(u(x))| \leq C|u(x)| + C$ pour tout $x \in E$, on a

$$\int |g \circ u| dm \leq C\|u\|_1 + Cm(E).$$

Donc, $g \circ u \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

On pose $L^1 = L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Pour $u \in L^1$, on pose $G(u) = \{h \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m);\ h = g \circ v \text{ p.p.}\} \in L^1$, avec $v \in u$.

2. Montrer que la définition précédente a bien un sens, c'est à dire que $G(u)$ ne dépend pas du choix de v dans u.

corrigé

Soient $v, w \in u$. Il existe $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et $v = w$ sur A^c. On a donc aussi $g \circ v = g \circ w$ sur A^c et donc $g \circ v = g \circ w$ p.p.. On en déduit que $\{h \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m);\ h = g \circ v \text{ p.p.}\} = \{h \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m);\ h = g \circ w \text{ p.p.}\}$.

$G(u)$ ne dépend donc pas du choix de v dans u.

---

3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1$. On suppose que $u_n \to u$ p.p. et qu'il existe $F \in L^1$ t.q. $|u_n| \leq F$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $G(u_n) \to G(u)$ dans L^1.

corrigé

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on choisit un représentant de u_n, encore notée u_n. On choisit aussi des représentants de u et F, notés toujours u et F. Comme $u_n \to u$ p.p. quand $n \to \infty$ et que g est continu, il est facile de voir que $g \circ u_n \to g \circ u$ p.p.. On a donc $G(u_n) \to G(u)$ p.p..

On remarque aussi que $|g \circ u_n| \leq C|u_n| + C \leq CF + C$ p.p. et donc $|G(u_n)| \leq CF + C$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Comme $CF+C \in L^1$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée, il donne que $G(u_n) \to G(u)$ dans L^1 quand $n \to \infty$.

---

4. Montrer que G est continue de L^1 dans L^1. [*On pourra utiliser la question 3. et le théorème appelé "réciproque partielle de la convergence dominée".*]

corrigé

On raisonne par l'absurde. On suppose que G n'est pas continue de L^1 dans L^1. Il existe donc $u \in L^1$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ t.q. $u_n \to u$ dans L^1 et $G(u_n) \not\to G(u)$ dans L^1 quand $n \to \infty$.

Comme $G(u_n) \not\to G(u)$, il existe $\varepsilon > 0$ et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ t.q. $\varphi(n) \to \infty$ quand $n \to \infty$ et :

$$\|G(u_{\varphi(n)}) - G(u)\|_1 \geq \varepsilon \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \tag{12.74}$$

(La suite $(G(u_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous suite de la suite $(G(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$.)

Comme $u_{\varphi(n)} \to u$ dans L^1, on peut appliquer le théorème appelé "réciproque partielle de la convergence dominée" (théorème 4.7). Il donne l'existence de $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et de $F \in L^1$ t.q. $\psi(n) \to \infty$ quand $n \to \infty$, $u_{\varphi\circ\psi(n)} \to u$ p.p. et $|u_{\varphi\circ\psi(n)}| \leq F$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$. (La suite $(u_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous suite de la suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$).

On peut maintenant appliquer la question 3 à la suite $(u_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Elle donne que $G(u_{\varphi\circ\psi(n)}) \to G(u)$ dans L^1 quand $n \to \infty$. Ce qui est en contradiction avec (12.74).

12.4.3 Espérance et moments des variables aléatoires

Corrigé 79 (Inégalité de Jensen)

Rappel : Une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est convexe si et seulement si pour tout $a \in \mathbb{R}$ il existe c_a t.q. $f(x) - f(a) \geq c_a(x-a)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Soit f une fonction convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et X une v.a. sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que X et $f(X)$ sont intégrables. Montrer l'**inégalité de Jensen**, c'est-à-dire :

$$\int f(X)dP \geq f(\int XdP).$$

[Utiliser le rappel avec a bien choisi.]

corrigé

On utilise le rappel avec $a = E(X) = \int XdP$. On obtient pour tout $\omega \in \Omega$

$$f(X(\omega)) - f(a) \geq X(\omega) - a.$$

Comme les fonctions $f(X) - f(a)$ et $X - a$ sont intégrables, la monotonie de l'intégrale donne alors

$$\int (f(X) - f(a))dP \geq \int (X - a)dP.$$

Comme $\int X dp = a$, on en déduit $\int (f(X) - f(a))dP \geq 0$, ce qui donne le résultat demandé.

Corrigé 80 (Sur l'équi-intégrabilité)
Soit $(E, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. (réelles). On rappelle que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-intégrable si $\int_A |X_n|dP \to 0$, quand $P(A) \to 0$ (avec $A \in \mathcal{A}$), uniformément par rapport à $n \in \mathbb{N}$. Montrer l'équivalence entre les deux propriétés suivantes :

1. $\lim_{a\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\{|X_n|>a\}} |X_n|dP = 0,$

2. $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int |X_n|dP < +\infty$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ équi-intégrable.

corrigé

En attente.

Corrigé 81 (Caractérisation de l'indépendance)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilités, $n \geq 2$ et $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n variables aléatoires réelles. Montrer que l'indépendance de $(X_1, X_2, \ldots X_n)$ est équivalente à la propriété suivante :

$$\forall (a_1, \ldots, a_n) \in]-\infty, +\infty[^n, P[X_1 \leq a_1, \ldots, X_n \leq a_n] = \prod_{i=1}^{n} P[X_i \leq a_i].$$

(La notation $P[X \leq a]$ est identique à $P(\{X \leq a\})$, elle désigne la probabilité de l'ensemble $\{\omega \in \Omega, X(\omega) \leq a\}$.)

corrigé

En attente.

Corrigé 82 (Sign(X) et $|X|$ pour une gaussienne)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une v.a.r. gaussienne centrée (c'est-à-dire $P_X = f\lambda$ avec, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, où $\sigma > 0$ est la racine carré de la variance de X). Montrer que sign(X) et $|X|$ sont indépendantes et préciser leurs lois. Même question avec sign(X) et X^2.

corrigé

En attente.

Corrigé 83 (V.a. gaussiennes dépendantes)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilités, $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$ et X_1, X_2 deux variables aléatoires indépendantes et telles que :

$$X_1 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_1^2) \text{ et } X_2 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_2^2).$$

(le signe "$\sim$" signifie "a pour loi".) Construire deux v.a. Y_1 et Y_2 t.q. $X_1 \sim Y_1$, $X_2 \sim Y_2$ et Y_1 et Y_2 soient dépendantes.

corrigé

En attente.

Corrigé 84 (V.a. gaussiennes dépendantes, à covariance nulle)
soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace de probabilités et X, S deux v.a. réelles, indépendantes, t.q. $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et S a pour loi $P_S = \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1}$. (Il est possible de construire un espace de probabilités et des v.a. indépendantes ayant des lois prescrites, voir le Chapitre 7.)

1. Montrer que $SX \sim \mathcal{N}(0,1)$.

   corrigé

   Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ de sorte que la loi de X est de densité f par rapport à la mesure de Lebesgue. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on note $-A = \{-x,\, x \in A\}$. Comme f est paire, on a :

   $$P(X \in (-A)) = \int_{-A} f(x)dx = \int_A f(-x)dx = \int_A f(x)dx = P(X \in A).$$

   On remarque maintenant que $P(SX \in A) = P(S = 1, X \in A) + P(S = -1, X \in (-A))$. Comme S et X sont indépendantes, on a :

   $$P(S = 1, X \in A) = P(S = 1)P(X \in A) = \frac{1}{2}P(X \in A),$$
   $$P(S = -1, X \in (-A)) = P(S = -1)P(X \in (-A)) = \frac{1}{2}P(X \in (-A)).$$

   Comme $P(X \in (-A)) = P(X \in A)$, on en déduit $P(SX \in A) = P(X \in A)$. Les v.a.r. SX et X ont donc même loi, et donc $SX \sim \mathcal{N}(0,1)$.

   ---

2. Montrer que SX et X sont dépendantes.

   corrigé

   On raisonne par l'absurde. On suppose que SX et X sont indépendantes. La proposition 4.10 donne alors $E(|SX||X|) = E(|SX|)E(|X|)$ (noter que la fonction $s \mapsto |s|$ est borélienne positive). Comme $|S| = 1$ p.s., on a donc :

   $$E(X^2) = E(|SX||X|) = E(|SX|)E(|X|) = E(|X|)^2.$$

   Comme $E(|X|) < +\infty$, on en déduit que $\mathrm{Var}(|X|) = 0$, ce qui est impossible car $|X|$ n'est pas égale p.s. à sa moyenne (sinon, la loi de $|X|$ serait une masse de Dirac et non pas une loi de densité par rapport à la mesure de Lebesgue).

   ---

3. Montrer que $\mathrm{Cov}(SX, X) = 0$.

   corrigé

   Comme $SX \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, on a $E(SX) = E(X) = 0$. Comme S et X sont indépendantes (et S et X^2 intégrables), on a (proposition 4.10) SX^2 intégrable et $E(SX^2) = E(S)E(X^2) = 0$. On en déduit $\mathrm{Cov}(SX, X) = E([SX - E(SX)][X - E(X)]) = E(SX^2) = E(S)E(X^2) = 0$.

   ---

4. (Question subsidiaire.) On ne suppose plus l'existence de S, mais on suppose qu'il existe Y v.a. gaussienne indépendante de X. Montrer que si $Y \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, avec $\sigma > 0$, il est possible d'utiliser Y pour construire S, v.a. indépendante de X et telle que $P_S = \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1}$.

corrigé

Il suffit de prendre $S = \text{sign}(Y)$ avec $\text{sign}(s) = -1$ si $s < 0$, $\text{sign}(s) = 1$ si $s > 0$ et (par exemple) $\text{sign}(0) = 0$ (la fonction sign est une fonction borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$). On a bien X et S indépendantes (par la proposition 3.10, mais la preuve est facile ici car la tribu engendrée par $\varphi(Y)$ est incluse dans celle engendrée par Y dés que φ est borélienne). Enfin, on a $P(S = 1) = P(Y > 0) = \frac{1}{2} = P(Y < 0) = P(S = -1)$, ce qui donne bien $P_S = \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1}$.

Corrigé 85 (Identités de Wald)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite v.a.r.i.i.d. et N une v. a. à valeurs dans $\mathbb{N}^\star$. On pose $S_N = X_1 + \ldots + X_N$ (c'est-à-dire que, pour $\omega \in \Omega$, $S_N(\omega) = \sum_{n=1}^{N(\omega)} X_n(\omega)$).

1. On suppose, dans cette question, que la suite $N, X_1, \ldots, X_N, \ldots$ est indépendante.
   (a) On suppose que N et X_1 sont intégrables . Montrer que S_N est intégrable et calculer $E(S_N)$ en fonction de $E(N)$ et $E(X_1)$.
   (b) On suppose que N et X_1 sont de carré intégrable, montrer que S_N est de carré intégrable et calculer sa variance en utilisant les variances de N et X_1.
2. On suppose maintenant que $\{N = n\} \in \sigma(X_1, .., X_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et que $E(X_1) = 0$.
   (a) Montrer que $1_{\{n \le N\}}$ et X_n sont des v.a. indépendantes.
   (b) Reprendre les questions $1(a)$ et $1(b)$. [On pourra écrire $S_N = \sum_{n\in\mathbb{N}^\star} 1_{\{n\le N\}} X_n$.]

   N.B. : Le cas $E(X_1) \neq 0$ peut aussi être traité. Il se ramène au cas $E(X_1) = 0$ en considérant $Y_n = X_n - E(X_n)$.

corrigé

En attente.

Corrigé 86 (Limite p.s. et indépendance)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite v.a.r. et X, Y deux v.a.r.. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, X_n et Y sont indépendantes et on suppose que $X_n \to X$ p.s., quand $n \to \infty$. Montrer que X et Y sont indépendantes.

corrigé

Soit ϕ, $\psi \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Comme X_n et Y sont indépendantes, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$E(\varphi(X_n)\psi(Y)) = E(\varphi(X_n))E(\psi(Y)). \tag{12.75}$$

Comme φ est continue, on a $\varphi(X_n) \to \varphi(X)$ p.s. et $\varphi(X_n)\psi(Y) \to \varphi(X)\psi(Y)$ p.s.. les convergences sont dominées car $|\varphi(X_n)| \le \sup\{\varphi(x),\ x \in \mathbb{R}\}$ (et $|\psi(Y)| \le \sup\{\psi(x),\ x \in \mathbb{R}\}$). On peut donc utiliser le théprème de convergence dominée, il donne $\lim_{n\to\infty} E(\varphi(X_n)\psi(Y)) = E(\varphi(X)\psi(Y))$ et $\lim_{n\to\infty} E(\varphi(X_n)) = E(\varphi(X))$. En passant à la limite dans (12.75), on en déduit que

$$E(\varphi(X)\psi(Y)) = E(\varphi(X))E(\psi(Y)).$$

La proposition 4.12 permet de conclure que X et Y sont indépendantes.

12.5 Exercices du chapitre 5

Corrigé 87

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^1(]0,1[,\mathbb{R})$ convergeant simplement vers la fonction $f :]0,1[\to\mathbb{R}$; on suppose que la suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(\subset C(]0,1[,\mathbb{R})$) converge simplement vers la fonction constante et égale à 1.

1. A-t-on $f \in C^1(]0,1[,\mathbb{R})$ et $f' = 1$?

corrigé

La réponse est "non". La fonction f peut même ne pas être continue, comme le montre l'exemple suivant :

Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, on définit g_n de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\begin{array}{l} g_n(x) = 1, \text{ si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ g_n(x) = 1 + n^2(x - \frac{1}{2}), \text{ si } \frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n}, \\ g_n(x) = 1 - n^2(x - \frac{1}{2} - \frac{2}{n}), \text{ si } \frac{1}{2} + \frac{1}{n} < x \leq \frac{1}{2} + \frac{2}{n}, \\ g_n(x) = 1, \text{ si } \frac{1}{2} + \frac{2}{n} < x \leq 1. \end{array}$$

Il est facile de voir que $g_n \in C([0,1],\mathbb{R})$ et que $g_n(x) \to 1$ pour tout $x \in [0,1]$.

Pour $n \geq 4$, on définit f_n par :

$$f_n(x) = \int_0^x g_n(t)dt, \text{ pour tout } x \in]0,1[,$$

de sorte que $f_n \in C^1(]0,1[,\mathbb{R})$ et $f'_n = g_n$ sur $]0,1[$. On a donc bien que $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction constante et égale à 1. (On prend n'importe quelles fonctions C^1 pour f_n, $0 \leq n \leq 3$).

On remarque maintenant que, pour $n \geq 4$, $f_n(x) = x$ pour tout $x \in]0, \frac{1}{2}]$ et que $f_n(x) = x+1$ pour tout $x \in]\frac{1}{2} + \frac{2}{n}, 1[$. On en déduit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $f :]0,1[\to\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x$ pour tout $x \in]0, \frac{1}{2}]$ et $f_n(x) = x+1$ pour tout $x \in]\frac{1}{2}, 1[$. Cette fonction n'est pas continue en $\frac{1}{2}$, donc $f \notin C^1(]0,1[,\mathbb{R})$.

---

2. On suppose maintenant que la suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la fonction constante et égale à 1 dans $L^1_{\mathbb{R}}(]0,1[,\mathcal{B}(]0,1[),\lambda)$. A-t-on $f \in C^1(]0,1[,\mathbb{R})$ et $f' = 1$?

corrigé

La réponse maintenant est "oui". En effet, soit $0 < x < 1$. Comme $f_n \in C^1(]0,1[,\mathbb{R})$, on a $f_n(x) = f_n(\frac{1}{2}) + \int_{\frac{1}{2}}^x f'_n(t)dt$, c'est-à-dire

$$f_n(x) = f_n(\frac{1}{2}) + s_x \int f'_n 1_{I_x} d\lambda, \tag{12.76}$$

avec $s_x = 1$ et $I_x =]\frac{1}{2}, x[$ si $x \geq \frac{1}{2}$, $s_x = -1$ et $I_x =]x, \frac{1}{2}[$ si $x < \frac{1}{2}$.

Quand $n \to \infty$, on a

$$|\int f'_n 1_{I_x} d\lambda - \int 1_{I_x} d\lambda| \leq \|f'_n - 1\|_1 \to 0,$$

et $f_n(x) \to f(x)$ (ainsi que $f_n(\frac{1}{2}) \to f(\frac{1}{2})$). On déduit donc de (12.76), quand $n \to \infty$,

$$f(x) = f(\frac{1}{2}) + s_x \int 1_{I_x} d\lambda,$$

c'est-à-dire $f(x) = f(\frac{1}{2}) + x - \frac{1}{2}$.

On a bien montré que $f \in C^1(]0,1[,\mathbb{R})$ et $f' = 1$.

Corrigé 88 (Intégrale impropre)

On définit l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} &f(x) = 0, \text{ si } x \le 0,\\ &f(x) = x^2 \sin \tfrac{1}{x^2}, \text{ si } x > 0. \end{aligned}$$

1. Montrer que f est continue et dérivable en tout point de $\mathbb{R}$.

corrigé

La fonction f est continue et dérivable en tout point de $\mathbb{R}^\star$ et on a $f'(x) = 0$ pour $x < 0$ et $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}$ si $x > 0$.

Pour montrer la continuité et la dérivablité de f en 0, il suffit de remarquer que, pour tout $x > 0$, on a $|f(x)| \le x^2$ et donc $|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}| \le x$. On en déduit que f est continue et dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$.

---

2. Soit $0 < a < b < \infty$. Montrer que $f'1_{]a,b[} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. On pose $\int_a^b f'(t)dt = \int f'1_{]a,b[} d\lambda$. Montrer que :

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt.$$

corrigé

La fonction f' est continue sur $]0, \infty[$. La restriction de f' à $[a, b]$ est donc continue (on utilise ici le fait que $a > 0$). On a donc, voir la proposition 5.1 (ou l'exercice 4.5) :

$$f'_{|[a,b]} \in \mathcal{L}^1([a, b], \mathcal{B}([a, b]), \lambda_{[a,b)}),$$

où $\lambda_{[a,b)}$ désigne la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $[a, b]$ (c'est-à-dire la restriction à $\mathcal{B}([a, b])$ de la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$) et l'intégrale (de Lebesgue) de $f'_{|[a,b]}$ coïncide avec l'intégrale des fonctions continues, c'est-à-dire :

$$\int f'_{|[a,b]} d\lambda_{[a,b)} = \int_a^b f'(x)dx.$$

Le terme de droite de l'égalité précédente est à prendre au sens de l'intégrale des fonctions continues. Comme f est de classe C^1 sur un intervalle ouvert contenant $[a, b]$, il est alors classique que :

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

Pour se convaincre de cette dernière égalité, on rappelle que f et $x \mapsto \int_a^x f'(t)dt$ sont deux primitives de f', leur différence est donc constante sur $[a,b]$.

Enfin, comme $f'_{|[a,b]} \in \mathcal{L}^1([a,b],\mathcal{B}([a,b]),\lambda_{[a,b)})$, il est facile d'en déduire que $f'1_{]a,b[} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ et que

$$\int f'_{|[a,b]} d\lambda_{[a,b)} = \int f'1_{]a,b[} d\lambda.$$

Plus précisement, on pose $f' = g$ et on considère d'abord le cas $g_{|[a,b]} \in \mathcal{E}_+([a,b],\mathcal{B}([a,b])$ puis $g_{|[a,b]} \in \mathcal{M}_+([a,b],\mathcal{B}([a,b])$ et enfin $g_{|[a,b]} \in \mathcal{L}^1([a,b],\mathcal{B}([a,b]),\lambda_{[a,b)})$, comme dans l'exercice 4.4. Ceci termine la question.

Un autre moyen de montrer $f'1_{]a,b[} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ est de procéder de la manière suivante :

La fonction f' est la limite simple, quand $n \to \infty$, de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ où f_n est défnie, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, par :

$$f_n(x) = \frac{f(x+\frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}}, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

La fonction f est mesurable (c'est-à-dire borélienne car $\mathbb{R}$ est muni de la tribu de Borel). Grâce à la stabilité de l'ensemble des fonctions mesurables (voir la proposition 3.5), on en déduit que f_n est mesurable pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et donc que f' est mesurable (comme limite simple de fonctions mesurables). La fonction $f'1_{]a,b[}$ est donc aussi mesurable (comme produit de fonctions mesurables). La mesurabilité de $f'1_{]a,b[}$ est donc vraie pour tout $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$ (noter cependant que f' n'est pas continue en 0).

Pour montrer que $f'1_{]a,b[}$ est intégrable, il suffit de remarquer que f' est bornée sur $]a,b[$, car f' est continue sur $[a,b]$ (on utilise ici le fait que $a > 0$) et que $\lambda(]a,b[) < \infty$. On a donc bien montré que $f'1_{]a,b[} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$.

---

3. Soit $a > 0$.

(a) Montrer $f'1_{]0,a[} \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$.

corrigé

La restriction de f' à $]0,a[$ est continue, c'est donc une fonction mesurable (c'est-à-dire borélienne) de $]0,a[$ dans $\mathbb{R}$. On en déduit facilement que $f'1_{]0,a[}$ est borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. (On a aussi vu à la question précédente que f' était borélienne. Ceci montre également que $f'1_{]0,a[}$ est borélienne.)

On a $f'1_{]0,a[} = g_1 1_{]0,a[} - g_2 1_{]0,a[}$, avec :

$$g_1(x) = 2x \sin\frac{1}{x^2} \text{ et } g_2(x) = \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2} \text{ si } x \in]0,a[.$$

Il est clair que $g_1 1_{]0,a[} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ (car g_1 est continue et bornée sur $]0,a[$). Pour montrer que $f'1_{]0,a[} \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$, il suffit donc de montrer que $g_2 1_{]0,a[} \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$. Pour cela, on remarque maintenant que :

$$|g_2(x)| \geq \sqrt{2}\sqrt{n\pi - \frac{\pi}{4}}, \text{ si } \frac{1}{\sqrt{n\pi + \frac{\pi}{4}}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{n\pi - \frac{\pi}{4}}},\ n \geq n_0, \tag{12.77}$$

avec $n_0 \in \mathbb{N}^\star$ t.q. $\frac{1}{\sqrt{n_0\pi - \frac{\pi}{4}}} \le a$. On déduit alors de (12.77), par monotonie de l'intégrale, que, pour tout $N \ge n_0$:

$$\int |g_2| 1_{]0,a[} d\lambda \ge \sum_{n=n_0}^{N} \sqrt{2}\sqrt{n\pi - \frac{\pi}{4}}\Big(\frac{1}{\sqrt{n\pi - \frac{\pi}{4}}} - \frac{1}{\sqrt{n\pi + \frac{\pi}{4}}}\Big) = \sum_{n=n_0}^{N} \sqrt{2}\frac{\sqrt{n\pi + \frac{\pi}{4}} - \sqrt{n\pi - \frac{\pi}{4}}}{\sqrt{n\pi + \frac{\pi}{4}}},$$

et donc :

$$\int |g_2| 1_{]0,a[} d\lambda \ge \sum_{n=n_0}^{N} \frac{\sqrt{2}\pi}{2\sqrt{n\pi + \frac{\pi}{4}}(\sqrt{n\pi + \frac{\pi}{4}} + \sqrt{n\pi - \frac{\pi}{4}})} \ge \sum_{n=n_0}^{N} \frac{\sqrt{2}\pi}{4(n\pi + \frac{\pi}{4})}.$$

En faisant tendre N vers ∞, on en déduit que $\int |g_2| 1_{]0,a[} d\lambda = \infty$ et donc que $g_2 1_{]0,a[} \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $f' 1_{]0,a[} \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

(b) Pour $0 < x < a$, on pose $g(x) = \int_x^a f'(t)dt$. Montrer que $g(x)$ a une limite (dans $\mathbb{R}$) quand $x \to 0$, avec $x > 0$, et que cette limite est égale à $f(a) - f(0)$. (Cette limite est aussi notée $\int_0^a f'(t)dt$, improprement... car $f' 1_{]0,a[} \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, la restriction de f' à $]0, a[$ n'est donc pas intégrable pour la mseure de Lebesgue sur $]0, a[$.)

corrigé

On a $g(x) = f(a) - f(x)$, pour tout $x > 0$. Comme f est continue en 0, on en déduit bien que $g(x)$ a une limite (dans $\mathbb{R}$) quand $x \to 0$, avec $x > 0$, et que cette limite est égale à $f(a) - f(0)$.

Corrigé 89

Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. On définit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par: $F(x) = \int f 1_{[0,x]} d\lambda (= \int_0^x f(t)dt)$, pour $x \ge 0$, et $F(x) = -\int f 1_{[x,0]} d\lambda (= -\int_x^0 f(t)dt)$ pour $x < 0$. Montrer que F est uniformément continue.

corrigé

On remarque que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$,

$$F(y) - F(x) = \int f 1_{]x,y[} d\lambda = \int_{]x,y[} f d\lambda.$$

Soit $\varepsilon > 0$, comme $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, l'exercice 4.14 (ou l'exercice 4.29) montre qu'il existe $\delta > 0$ t.q.

$$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \lambda(A) \le \delta \Rightarrow \int_A |f| d\lambda \le \varepsilon.$$

Soit $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. On a donc, comme $\lambda(]x, y[) = y - x$,

$$|y - x| \le \delta \Rightarrow |F(y) - F(x)| \le \int_{]x,y[} |f| d\lambda \le \varepsilon,$$

ce qui montre bien la continuité uniforme de F.

Corrigé 90 (Intégrabilité et limite à l'infini)

Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda) = \mathcal{L}^1$.

1. On suppose que $f(x)$ admet une limite quand $x \to \infty$. Montrer que cette limite est nulle.

corrigé

On pose $l = \lim_{x\to\infty} f(x)$ et on suppose $l \neq 0$. Il existe alors $a \in \mathbb{R}$ t.q. $|f(x)| \geq \frac{|l|}{2}$ pour tout $x > a$. On en déduit, par monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$,

$$\int |f| d\lambda \geq \int_{]a,\infty[} \frac{|l|}{2} d\lambda = \infty,$$

en contradiction avec l'hypothèse $f \in \mathcal{L}^1$.

---

2. On suppose que $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; a-t-on : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$?

corrigé

La réponse est "non", comme le montre l'exemple suivant. On définit, pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, f_n par :

$$\begin{array}{l} f_n(x) = 0, \text{ si } x \leq n - \frac{1}{n^2}, \\ f_n(x) = n^2(x - n + \frac{1}{n^2}), \text{ si } n - \frac{1}{n^2} < x \leq n, \\ f_n(x) = -n^2(x - n - \frac{1}{n^2}), \text{ si } n < x \leq n + \frac{1}{n^2}, \\ f_n(x) = 0, \text{ si } x > n + \frac{1}{n^2}. \end{array}$$

Puis, on pose $f(x) = \sum_{n\geq 2} f_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On remarque que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série définissant $f(x)$ a au plus 1 terme non nul. Plus précisément, il existe n (dépendant de x) t.q. $f = f_n$ dans un voisinage de x. On en déduit que f prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$ et que f est continue (car les f_n sont continues).

Comme $f_n \in \mathcal{M}_+$ pour tout n, le premier corollaire du théorème de convergence monotone (corollaire 4.1) donne que $f \in \mathcal{M}_+$ et

$$\int f dm = \sum_{n\geq 2} \int f_n dm = \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

On a donc $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $f(x) \not\to 0$ quand $x \to \infty$ car $f_n(n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

---

3. On suppose que f est uniformément continue ; a-t-on : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$? [On pourra commencer par montrer que, pour $\eta > 0$ quelconque et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ t.q. $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{x_n-\eta}^{x_n+\eta} |f(x)| d\lambda(x) = 0.] \tag{12.78}$$

corrigé

On commence par montrer le résultat prélimaire suggéré. Soient $\eta > 0$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ t.q. $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

On pose $f_n = |f|1_{]x_n-\eta,x_n+\eta[}$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) \to 0$ quand $n \to \infty$ (on a même $f_n(x) = 0$ pour n t.q. $x_n - \eta > x$). On a aussi $|f_n| \le |f| \in \mathcal{L}^1$. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée (ou la proposition préliminaire 4.6). Il donne que $\int f_n dm \to 0$, c'est-à-dire :

$$\int |f|1_{]x_n-\eta,x_n+\eta[} d\lambda \to 0, \text{ quand } n \to \infty. \tag{12.79}$$

On montre maintenant que $f(x) \to 0$ quand $x \to \infty$.

On raisonne par l'absurde. On suppose que $f(x) \not\to 0$ quand $x \to \infty$. Il existe donc $\varepsilon > 0$ et une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ t.q. $x_n \to \infty$ quand $n \to \infty$ et $|f(x_n)| \ge \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La continuité uniforme de f donne l'existence de $\eta > 0$ t.q.

$$x, y \in \mathbb{R}, |x - y| \le \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a donc $|f(x)| \ge \frac{\varepsilon}{2}$ pour $x \in]x_n - \eta, x_n + \eta[$ et tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que $\int |f|1_{]x_n-\eta,x_n+\eta[} d\lambda \ge \varepsilon\eta > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui est en contradiction avec (12.79).

On a donc bien finalement montré que $f(x) \to 0$ quand $x \to \infty$.

---

4. On suppose que $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $f' \in L^1$; a-t-on : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$?

corrigé

Comme $f \in C^1$, on a, pour $y > x$, $f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t)dt = \int_{]x,y[} f' d\lambda$. Comme $f' \in \mathcal{L}^1$, l'exercice 5.7 donne que f est uniformément continue. La question précédente donne alors que $f(x) \to 0$ quand $x \to \infty$ (c'est seulement pour ce dernier point qu'on utilise $f \in \mathcal{L}^1$).

Une autre démonstration possible est :

Comme $f \in C^1$, on a $f(x) = f(0) + \int_{]0,x[} f' d\lambda$. Comme $f' \in \mathcal{L}^1$, on en déduit que $f(x)$ a une limite (dans $\mathbb{R}$) quand $x \to \infty$. En effet, le théorème de convergence dominée donne que $\int_{]0,x[} f' d\lambda \to \int_{]0,\infty[} f' d\lambda$ (dans $\mathbb{R}$) quand $x \to \infty$. Enfin, la première question donne que la limite de $f(x)$ quand $x \to \infty$ est nécessairement 0 (et ici aussi, c'est seulement pour ce dernier point qu'on utilise $f \in \mathcal{L}^1$).

Corrigé 91 (Continuité en moyenne)

Pour $f \in L^1 = L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $h \in \mathbb{R}$, on définit f_h ("translatée" de f) par : $f_h(x) = f(x + h)$, pour $x \in \mathbb{R}$. (noter que $f_h \in L^1$).

1. Soit $f \in C_c = C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, montrer que $\|f_h - f\|_1 \to 0$ lorsque $h \to 0$.

corrigé

Comme $f \in C_c$, f est uniformément continue, ce qui donne

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x + h) - f(x)| \to 0 \text{ quand } h \to 0.$$

Soit $a > 0$ t.q. $f = 0$ sur $[-a, a]^c$. Pour $h \in \mathbb{R}$ t.q. $|h| \leq 1$, on a donc, comme $f(x+h) - f(x) = 0$ si $x \notin [-a-1, a+1]$,

$$\int |f(x+h) - f(x)|dx \leq (2a+2) \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x+h) - f(x)| \to 0, \text{ quand } h \to 0,$$

et donc que $\|f(\cdot + h) - f\|_1 \to 0$ quand $h \to 0$.

---

2. Soit $f \in L^1$, montrer que $\|f_h - f\|_1 \to 0$ lorsque $h \to 0$.

corrigé

L'invariance par translation de la mesure de Lebesgue donne que $f(\cdot + h) \in L^1$ pour tout $h \in \mathbb{R}$. On veut maintenant montrer que $\|f(\cdot + h) - f\|_1 \to 0$ quand $h \to 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. D'après la densité de C_c dans L^1 (théorème 5.5), il existe $\varphi \in C_c$ t.q. $\|f - \varphi\|_1 \leq \varepsilon$. L'invariance par translation de la mesure de Lebesgue donne $\|f(\cdot + h) - \varphi(\cdot + h)\|_1 = \|f - \varphi\|_1$. On a donc, pour tout $h \in \mathbb{R}$:

$$\|f(\cdot + h) - f\|_1 \leq 2\|f - \varphi\|_1 + \|\varphi(\cdot + h) - \varphi\|_1 \leq 2\varepsilon + \|\varphi(\cdot + h) - \varphi\|_1.$$

D'après la première question, il existe $\eta > 0$ t.q.

$$|h| \leq \eta \Rightarrow \|\varphi(\cdot + h) - \varphi\|_1 \leq \varepsilon.$$

Donc,

$$|h| \leq \eta \Rightarrow \|f(\cdot + h) - f\|_1 \leq 3\varepsilon.$$

Ce qui prouve bien que $f(\cdot + h) \to f$ dans L^1, quand $h \to 0$.

Corrigé 92 (Sur la concentration d'un borélien)
Soit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $A \in \mathcal{B}(]a, b[)$ et $\rho \in]0, 1[$. On suppose que $\lambda(A \cap]\alpha, \beta[) \leq \rho(\beta - \alpha)$ pour tout α, β t.q. $a \leq \alpha < \beta \leq b$. Montrer que $\lambda(A) = 0$. [On pourra, par exemple, commencer par montrer que $\lambda(A \cap O) \leq \rho\lambda(O)$ pour tout ouvert O de $]a, b[$.]

Conséquence de cet exercice : Soit $A \in \mathcal{B}(]a, b[)$ t.q. $\lambda(A) > 0$. Alors, pour tout $\rho < 1$, il existe α, β t.q. $a \leq \alpha < \beta \leq b$ et $\lambda(A \cap]\alpha, \beta[) \geq \rho(\beta - \alpha)$.

corrigé

Soit O un ouvert de $]a, b[$. Comme O est un ouvert de $\mathbb{R}$, il peut s'écrire comme une réunion dénombrable d'intervalles ouverts disjoints 2 à 2 (lemme 2.4). On a donc $O = \cup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ avec $I_n \cap I_m = \emptyset$ si $n \neq m$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n =]a_n, b_n[$ avec $a \leq a_n \leq b_n \leq b$. La $\sigma-$additivité de λ et l'hypothèse $\lambda(A \cap]\alpha, \beta[) \leq \rho(\beta - \alpha)$ pour tout α, β t.q. $a \leq \alpha < \beta \leq b$ donne alors :

$$\lambda(A \cap O) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(A \cap]a_n, b_n[) \leq \rho \sum_{n \in \mathbb{N}} (b_n - a_n) = \rho \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(]a_n, b_n[) = \rho\lambda(O). \quad (12.80)$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$. D'après la régularité de λ (et le fait que $A \in \mathcal{B}(]a, b[) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$), il existe O ouvert de $\mathbb{R}$ t.q. $A \subset O$ et $\lambda(O \setminus A) \leq \varepsilon$. En remplaçant O par $O \cap]a, b[$, on peut supposer que O est un ouvert de $]a, b[$. En utilisant (12.80) et l'additivité de λ, on a donc :

$$\lambda(A) = \lambda(A \cap O) \leq \rho\lambda(O) = \rho(\lambda(A) + \lambda(O \setminus A)) \leq \rho(\lambda(A) + \varepsilon).$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitrairement petit, on en déduit $\lambda(A) \le \rho\lambda(A)$, ce qui n'est possible (comme $\rho < 1$) que si $\lambda(A) = 0$ ou si $\lambda(A) = \infty$.

Il reste donc à montrer que le cas $\lambda(A) = \infty$ est impossible. Pour cela, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = A \cap [-n, n]$. Soit $n \in \mathbb{N}$, la monotonie de λ donne $\lambda(A_n \cap]\alpha, \beta[) \le \lambda(A \cap]\alpha, \beta[)$, on a donc aussi $\lambda(A_n \cap]\alpha, \beta[) \le \rho(\beta - \alpha)$ pour tout α, β t.q. $a \le \alpha < \beta \le b$. Comme $\lambda(A_n) < \infty$, la démonstration précédente, appliquée à A_n au lieu de A, donne $\lambda(A_n) = 0$. Enfin, comme $A = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, on en déduit $\lambda(A) = 0$.

Corrigé 93 (Points de Lebesgue)

On désigne par λ la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}$, par L^1 l'espace $L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda)$ et par $\mathcal{L}^1$ l'espace $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda)$. On note $dt = d\lambda(t)$.

1. Soit $(I_1, \ldots, I_n)$ des intervalles ouverts non vides de $\mathbb{R}$ t.q. chaque intervalle n'est pas contenu dans la réunion des autres. On pose $I_k =]a_k, b_k[$ et on suppose que la suite $(a_k)_{k=1,\ldots,n}$ est croissante. Montrer que la suite $(b_k)_{k=1,\ldots,n}$ est croissante et que les intervalles d'indices impairs [resp. pairs] sont disjoints 2 à 2.

   corrigé

   Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$. Comme $a_k \le a_{k+1}$, on a $b_k < b_{k+1}$ (sinon $I_{k+1} \subset I_k$). La suite $(b_k)_{k \in \{1,\ldots,n\}}$ est donc (strictement) croissante.

   Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$. On a $b_k \le a_{k+2}$ (sinon $I_k \cup I_{k+2} =]a_k, b_{k+2}[$ et donc $I_{k+1} \subset I_k \cup I_{k+2}$ car $a_k \le a_{k+1} < b_{k+1} \le b_{k+2}$). On a donc $I_k \cap I_{k+2} = \emptyset$. ceci prouve (avec la croissance de $(a_k)_{k=1,\ldots,n}$) que les intervalles d'indices impairs [resp. pairs] sont disjoints 2 à 2.

   ---

2. Soit J une famille finie d'intervalles ouverts non vide de $\mathbb{R}$ dont la réunion est notée A. Montrer qu'il existe une sous-famille finie de J, notée $(I_1, \ldots, I_m)$, formée d'intervalles disjoints 2 à 2 et t.q. $\lambda(A) \le 2 \sum_{k=1}^{m} \lambda(I_k)$. [Utiliser la question 1.]

   corrigé

   On commence par montrer la propriété suivante :

   Pour toute famille finie, notée J, d'intervalles ouverts non vide de $\mathbb{R}$, il existe une sous famille, notée K, t.q. :

   (a) Chaque élément de K n'est pas contenu dans la réunion des autres éléments de K,

   (b) La réunion des éléments de K est égale à la réunion des éléments de J.

   Cette propriété se démontre par récurrence sur le nombre d'éléments de J. Elle est immédiate si J a 1 élément (on prend K= J). Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On suppose que la propriété est vraie pour toutes les familles de n éléments. Soit J une famille de $(n + 1)$ éléments. Si chaque élément de J n'est pas contenu dans la réunion des autres éléments de J, on prend K= J. Sinon, on choisit un élément de J, noté I, contenu dans la réunion des autres éléments de J. On applique alors l'hypothèse de récurrence à la famille J $\setminus\{I\}$, on obtient une sous famille de J $\setminus\{I\}$ (et donc de J), notée K, vérifiant bien les assertions (a) et (b) (en effet, La réunion des éléments de J $\setminus\{I\}$ est égale à la réunion des éléments de J). Ceci termine la démonstration de la propriété désirée.

Soit maintenant J une famille finie d'intervalles ouverts non vide de $\mathbb{R}$ dont la réunion est notée A (remarquer que $A \in B(\mathbb{R})$). Grâce à la propriété démontrée ci dessus, on peut supposer que chaque élément de J n'est pas contenu dans la réunion des autres éléments de J. On note J_1, $\ldots J_n$ les éléments de J, $J_i =]a_i, b_i[$, $i = 1, \ldots, n$. En réordonnant, on peut aussi supposer que la suite $(a_k)_{k=1,\ldots,n}$ est croissante. On peut alors appliquer la question 1, elle donne, en posant $P = \{i = 1, \ldots, n;\ i \text{ pair}\}$ et $I = \{i = 1, \ldots, n;\ i \text{ impair}\}$ que les familles $(J_i)_{i\in P}$ et $(J_i)_{i\in I}$ sont formées d'éléments disjoints 2 à 2, de sorte que :

$$\lambda(\cup_{i\in P} J_i) = \sum_{i\in P} \lambda(J_i), \quad \lambda(\cup_{i\in I} J_i) = \sum_{i\in I} \lambda(J_i).$$

Enfin, comme $A = \cup_{i=1}^n J_i$, la sous-additivité de λ donne $\lambda(A) \leq \sum_{i\in P} \lambda(J_i) + \sum_{i\in I} \lambda(J_i)$.

Une sous-famille de J satisfaisant les conditions demandées est alors $(J_i)_{i\in P}$ si $\sum_{i\in P} \lambda(J_i) \geq \sum_{i\in I} \lambda(J_i)$ et $(J_i)_{i\in I}$ si $\sum_{i\in I} \lambda(J_i) > \sum_{i\in P} \lambda(J_i)$.

On se donne maintenant $f \in L^1$ et on suppose qu'il existe $a > 0$ t.q. $f = 0$ p.p. sur $[-a, a]^c$. Le but de l'exercice est de montrer que :

$$\frac{n}{2} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f(x+t)dt \to f(x), \text{ pour presque tout } x \in \mathbb{R}, \text{ quand } n \to \infty. \tag{12.81}$$

Pour $\varepsilon > 0$, on définit $f_\varepsilon^\star$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f_\varepsilon^\star(x) = \sup_{h\geq\varepsilon} \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} |f(x+t)|dt. \tag{12.82}$$

3. (a) Montrer que $f_\varepsilon^\star$ est bornée.

corrigé

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, pour $h \geq \varepsilon$, $\frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} |f(x+t)|dt \leq \frac{1}{2\varepsilon}\|f\|_1$ donc $f_\varepsilon^\star(x) \in \mathbb{R}$ et $|f_\varepsilon^\star(x)| \leq \frac{1}{2\varepsilon}\|f\|_1$. La fonction $f_\varepsilon^\star$ est donc bornée par $\frac{1}{2\varepsilon}\|f\|_1$.

(b) Montrer que $f_\varepsilon^\star$ est borélienne. [On pourra montrer que $f_\varepsilon^\star$ est le sup de fonctions continues.]

corrigé

Soit $h > 0$. On définit f_h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f_h(x) = \int_{-h}^{h} |f(x+t)|dt$. La fonction f_h est continue car

$$\begin{aligned}|f_h(x+\eta) - f_h(x)| = |\int_{-h}^{h}(|f(x+\eta+t)| - |f(x+t)|)dt| &\leq \int_{-h}^{h} |f(x+\eta+t) - f(x+t)|dt \\ &\leq \int |f(x+\eta+t) - f(x+t)|dt = \|f(\cdot+\eta) - f\|_1 \to 0, \text{ quand } \eta \to 0,\end{aligned}$$

par le théorème de continuité en moyenne. (Ceci donne même la continuité uniforme.)

On en déduit que $f_\varepsilon^\star$ est borélienne comme "sup" de fonctions continues (en effet, si $\alpha \in \mathbb{R}$, $(f_\varepsilon^\star)^{-1}(]\alpha, \infty[) = \cup_{h\geq\varepsilon}(\frac{1}{2h} f_h)^{-1}(]\alpha, \infty[)$ est un ouvert, et donc aussi un borélien).

(c) Montrer que $f_\varepsilon^\star(x) \to 0$ quand $|x| \to \infty$.

corrigé

Soit $\eta > 0$. On a (avec la notation de la question précédente), pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{2h} f_h(x) \le \eta$ si $h \ge \frac{\|f\|_1}{2\eta}$. D'autre part, on a $f_h(x) = 0$ si $h \le \frac{\|f\|_1}{2\eta}$ et $|x| \ge a + \frac{\|f\|_1}{2\eta}$. On en déduit que $0 \le f_\varepsilon^\star(x) \le \eta$ si $|x| \ge a + \frac{\|f\|_1}{2\eta}$. Ceci prouve que $f_\varepsilon^\star(x) \to 0$ quand $|x| \to \infty$.

---

4. Pour $y > 0$, on pose $B_{y,\varepsilon} = \{x \in \mathbb{R},\ f_\varepsilon^\star(x) > y\}$.

(a) Montrer que tout $x \in B_{y,\varepsilon}$ est le centre d'un intervalle ouvert $I(x)$ t.q.

i. $\lambda(I(x)) \ge 2\varepsilon$,

ii. $\frac{1}{\lambda(I(x))} \int_{I(x)} |f| d\lambda > y$.

Montrer que parmi les intervalles $I(x)$, $x \in B_{y,\varepsilon}$, ainsi obtenus, il en existe un nombre fini $I(x_1), \ldots I(x_n)$ dont la réunion recouvre $B_{y,\varepsilon}$. [On pourra d'abord remarquer que $B_{y,\varepsilon}$ est borné.]

corrigé

Si $x \in B_{y,\varepsilon}$, il existe $h \ge \varepsilon$ t.q. $\frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |f(t)| dt = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} |f(x+t)| dt > y$. On choisit alors $I(x) =]x-h, x+h[$. On a bien i. et ii..

$B_{y,\varepsilon}$ est borné car $f_\varepsilon^\star(x) \to 0$ quand $|x| \to \infty$. $\overline{B}_{y,\varepsilon}$ est donc fermé et borné (donc compact). De plus, Si $z \in \overline{B}_{y,\varepsilon}$, il existe $x \in B_{y,\varepsilon}$ t.q. $|x - z| < \varepsilon$. On a donc $z \in I(x)$. Ceci montre que $\{I(x),\ x \in B_{y,\varepsilon}\}$ forme un recouvrement ouvert de $\overline{B}_{y,\varepsilon}$. Par compacité, on peut donc en extraire un sous recouvrement fini. Il existe donc $x_1, \ldots, x_n \in B_{y,\varepsilon}$ t.q. $B_{y,\varepsilon} \subset \cup_{i=1}^n I(x_i)$.

(b) Montrer que $\lambda(B_{y,\varepsilon}) \le \frac{2}{y} \|f\|_1$. [Utiliser la question 2.]

corrigé

En appliquant la question 2 à la famille $\{I(x_i),\ i \in \{1, \ldots, n\}\}$, il existe $E \subset \{1, \ldots, n\}$ t.q. $I(x_i) \cap I(x_j) = \emptyset$, si $i, j \in E$ $i \ne j$, et t.q. $\lambda(B_{y,\varepsilon}) \le \lambda(\cup_{i=1}^n I(x_i)) \le 2 \sum_{i \in E} \lambda(I(x_i))$. Comme $\lambda(I(x_i)) < \frac{1}{y} \int_{I(x_i)} |f(t)| dt$ et comme $I(x_i) \cap I(x_j) = \emptyset$, si $i, j \in E$ $i \ne j$, on a aussi $\sum_{i \in E} \lambda(I(x_i)) < \frac{1}{y} \int |f(t)| dt$ et donc $\lambda(B_{y,\varepsilon}) \le \frac{2}{y} \|f\|_1$.

On définit maintenant $f^\star$ de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ par :

$$f^\star(x) = \sup_{h>0} \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} |f(x+t)| dt. \tag{12.83}$$

5. Montrer que $f^\star$ est borélienne et que $\lambda(\{f^\star > y\}) \le \frac{2}{y} \|f\|_1$, pour tout $y > 0$.

corrigé

$f^\star$ est borélienne (de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$) car c'est le "sup" de fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On remarque ensuite que $\{f^\star > y\} = \{x \in \mathbb{R},\ f^\star(x) > y\} = \cup_{n \in \mathbb{N}^\star} B_{y,\frac{1}{n}}$ et que $B_{y,\frac{1}{n}} \subset B_{y,\frac{1}{n+1}}$ (car $f^\star_{\frac{1}{n}} \le f^\star_{\frac{1}{n+1}}$). Par continuité croissante de λ, on a donc $\lambda(\{f^\star > y\}) = \lim_{n\to\infty} \lambda(B_{y,\frac{1}{n}}) \le \frac{2}{y} \|f\|_1$.

---

6. Montrer (12.81) si f admet un représentant continu. [cette question n'utilise pas les questions précédentes.]

corrigé

On confond f (qui est dans L^1) avec ce représentant continu. On a alors $\frac{n}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f(x+t)dt \to f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, quand $n \to \infty$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^\star$, par continuité de f, il existe $\theta_{x,n} \in]x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}[$ t.q. $\frac{n}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f(x+t)dt = f(\theta_{x,n})$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a bien $f(\theta_{x,n}) \to f(x)$, quand $n \to \infty$ (par continuité en x de f).

---

7. Montrer (12.81). [Approcher f, dans L^1 et p.p., par une suite d'éléments de $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$, notée $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$. On pourra utiliser $(f-f_p)^\star$.]

corrigé

On confond f (qui est dans L^1) avec l'un de ses représentants (de sorte que $f \in \mathcal{L}^1$). Par densité de $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans L^1, il existe une suite $(f_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ t.q. $f_p \to f$ dans L^1. Après extraction éventuelle d'une sous suite, on peut supposer aussi que $f_p \to f$ p.p..

Pour $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^\star$ et $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$|f(x) - \frac{n}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f(x+t)dt| \le |f(x) - f_p(x)| + |f_p(x) - \frac{n}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f_p(x+t)dt| + (f-f_p)^\star(x). \quad (12.84)$$

Pour $m \in \mathbb{N}^\star$ et $p \in \mathbb{N}$, on pose :

$$A_{m,p} = \{(f-f_p)^\star > \frac{1}{m}\},\ B_{m,p} = \cap_{q\ge p} A_{m,q} \text{ et } B = \cup_{m\in\mathbb{N}^\star}(\cup_{p\in\mathbb{N}} B_{m,p}).$$

On remarque que, par la question 5, $\lambda(A_{m,p}) \le 2m\|f-f_p\|_1 \to 0$ quand $p \to \infty$ (avec m fixé). On a donc $\lambda(B_{m,p}) \le \inf_{q\ge p}\lambda(A_{m,q}) = 0$. On en déduit, par σ-sous-additivité de λ, que $\lambda(B) = 0$.

On choisit $C \in B(\mathbb{R})$ t.q. $\lambda(C) = 0$ et $f_p(x) \to f(x)$ pour tout $x \in C^c$.

On va maintenant montrer (grâce à (12.84)) que $(f(x) - \frac{n}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f(x+t)dt) \to 0$ pour tout $x \in (B\cup C)^c$ (ce qui permet de conclure car $\lambda(B\cup C) = 0$).

Soit donc $x \in (B\cup C)^c$ et soit $\eta > 0$. Comme $x \in C^c$, il existe $p_1 \in \mathbb{N}$ t.q. $|f(x) - f_p(x)| \le \eta$ pour $p \ge p_1$. Comme $x \in B^c$, $x \in \cap_{m\in\mathbb{N}^\star}(\cap_{p\in\mathbb{N}} B^c_{m,p})$. On choisit $m \in \mathbb{N}^\star$ t.q. $\frac{1}{m} \le \eta$. On a $x \in \cap_{p\in\mathbb{N}} B^c_{m,p} = \cap_{p\in\mathbb{N}} \cup_{q\ge p} A^c_{m,q} \subset \cup_{q\ge p_1} A^c_{m,q}$. Il existe donc $p \ge p_1$ t.q. $x \in A^c_{m,p}$, on en déduit $(f-f_p)^\star(x) \le \frac{1}{m} \le \eta$. Enfin, p étant maintenant fixé, la question 6 donne l'existence de $n_1 \in \mathbb{N}$ t.q. $|f_p(x) - \frac{n}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f_p(x+t)dt| \le \eta$ pour $n \ge n_1$. On a donc $|f(x) - \frac{n}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f(x+t)dt| \le 3\eta$ pour $n \ge n_1$. Ce qui termine la démonstration.

Corrigé 94 (Convergence vague et convergence etroite)
Soit $(m_n)n \in \mathbb{N}$ une suite de mesures (positives) finies sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ $(d \ge 1)$ et m une mesure (positive) finie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. On suppose que :

- $\int \varphi dm_n \to \int \varphi dm$, quand $n \to \infty$, pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$.

- $m_n(\mathbb{R}^d) \to m(\mathbb{R}^d)$ quand $n \to \infty$.

1. Soit $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Montrer que $\int \varphi dm_n \to \int \varphi dm$, quand $n \to \infty$. [On pourra utiliser le fait que φ est limite uniforme d'une suite d'élement de $C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$.]

corrigé

Soit $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ t.q. $\rho \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^d} \rho(x)dx = 1$ et $\rho(x) = 0$ si $|x| \geq 1$. Pour $p \in \mathbb{N}^\star$, on définit ρ_p par $\rho_p(x) = p^d \rho(px)$ pour $x \in \mathbb{R}^d$, de sorte que $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_p(x)dx = 1$ et $\rho(x) = 0$ si $|x| \geq 1/p$. La suite $(\rho_p)_{p \in \mathbb{N}^\star}$ s'appelle "suite régularisante" (ou "suite de noyaux régularisants").

Soit $\psi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, on définit la suite $(\psi_p)_{p \in \mathbb{N}^\star}$ en posant $\psi_p(x) = \int \psi(y)\rho_p(x-y)dy$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. Comme ρ_p et ψ sont des fonctions à support compact, il est clair que ψ_p est aussi une fonction à support compact. Grâce au théorème de dérivabilité sous le signe intégral (théorème 4.10), il est assez facile de voir que ψ_p est indéfiniment dérivable. On a donc $(\psi_p)_{p \in \mathbb{N}^\star} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$. Enfin, du fait que ψ est uniformément continue, on déduit que ψ_p converge uniformément (sur $\mathbb{R}^d$) vers ψ quand $p \to \infty$. Plus précisément, en notant $\|\cdot\|_u$ la norme de la convergence uniforme, on a, pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$,

$$\|\psi_p - \psi\|_u \leq \sup_{z \in \mathbb{R}^d,\, |z| \leq 1/p} \|\psi(\cdot + z) - \psi\|_u,$$

dont on déduit bien $\|\psi_p - \psi\|_u \to 0$ quand $p \to \infty$.

Soit $\varepsilon > 0$. On remarque maintenant que, pour $p \in \mathbb{N}^\star$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int \psi dm_n - \int \psi dm = \int (\psi - \psi_p)dm_n + \int \psi_p dm_n - \int \psi_p dm + \int (\psi_p - \psi)dm,$$

on a donc $|\int \psi dm_n - \int \psi dm| \leq \|\psi_p - \psi\|_u (\sup_{n \in \mathbb{N}} m_n(\mathbb{R}^d) + m(\mathbb{R}^d)) + |\int \psi_p dm_n - \int \psi_p dm|$. Comme $\sup_{n \in \mathbb{N}} m_n(\mathbb{R}^d) + m(\mathbb{R}^d) < \infty$ (car $\lim_{n \to \infty} m_n(\mathbb{R}^d) = m(\mathbb{R}^d)$), il existe donc $p_0 \in \mathbb{N}^\star$ t.q., pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|\int \psi dm_n - \int \psi dm| \leq \varepsilon + |\int \psi_{p_0} dm_n - \int \psi_{p_0} dm|.$$

Comme $\psi_{p_0} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, la première hypothèse sur la suite $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donne qu'il existe n_0 t.q. $n \geq n_0$ implique $|\int \psi_{p_0} dm_n - \int \psi_{p_0} dm| \leq \varepsilon$. on a donc, finalement,

$$n \geq n_0 \Rightarrow |\int \psi dm_n - \int \psi dm| \leq 2\varepsilon.$$

Ce qui prouve bien que $\int \psi dm_n \to \int \psi dm$, quand $n \to \infty$, pour tout $\psi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$.

---

2. Pour $p \in \mathbb{N}^\star$, on note B_p la boule fermée de centre 0 et de rayon p (pour la norme euclidienne de $\mathbb{R}^d$). Montrer qu'il existe une suite $(\varphi_p)_{p \in \mathbb{N}^\star} \subset C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ t.q., pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$, $0 \leq \varphi_p \leq 1$, $\varphi_p = 1$ sur B_p et $\varphi_p \leq \varphi_{p+1}$. On utilise cette suite $(\varphi_p)_{p \in \mathbb{N}^\star}$ dans les questions suivantes.

corrigé

Il suffit de prendre φ_p définie ainsi :

$$\begin{aligned}
&\varphi_p(x) = 1 \text{ si } x \in B_p,\\
&\varphi_p(x) = p + 1 - |x| \text{ si } x \in B_{p+1} \setminus B_p,\\
&\varphi_p(x) = 0 \text{ si } x \notin B_{p+1}.
\end{aligned}$$

---

3. Soit $\varepsilon > 0$.

   (a) Montrer qu'il existe $p_0 \in \mathbb{N}^\star$ t.q. : $p \geq p_0 \Rightarrow \displaystyle\int (1-\varphi_p)dm \leq \varepsilon$.

   corrigé

   On utilise ici le théorème de convergence dominée, la suite $(1-\varphi_p)_{p\in\mathbb{N}^\star}$ converge p.p. vers 0 et est dominée par la fonction constante et égale à 1 (qui est bien une fonction intégrable pour la mesure m). On a donc $\lim_{p\to\infty}\int(1-\varphi_p)dm = 0$, ce qui donne le résultat demandé.

   (b) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$, $\displaystyle\int (1-\varphi_p)dm_n \to \int (1-\varphi_p)dm$ quand $n \to \infty$.

   corrigé

   On a $\int(1-\varphi_p)dm_n = m_n(\mathbb{R}^d) - \int \varphi_p dm_n$. comme $\varphi_p \in C_c(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$, on a $\int \varphi_p dm_n \to \int \varphi_p dm$ (quand $n\to\infty$). D'autre part, on a $\lim_{n\to\infty} m_n(\mathbb{R}^d) = m(\mathbb{R}^d)$. On a donc finalement, quand $n \to \infty$,

   $$\int (1-\varphi_p)dm_n \to m(\mathbb{R}^d) - \int \varphi_p dm = \int (1-\varphi_p)dm.$$

   (c) Montrer qu'il existe $p_1 \in \mathbb{N}^\star$ t.q. : $n \in \mathbb{N}$, $p \geq p_1 \Rightarrow \displaystyle\int (1-\varphi_p)dm_n \leq \varepsilon$.

   corrigé

   D"après a), il existe p_2 t.q. $\int(1-\varphi_{p_2})dm \leq \varepsilon/2$. D'après b), il existe n_0 t.q.

   $$n \geq n_0 \Rightarrow \int (1-\varphi_{p_2})dm_n \leq \int (1-\varphi_{p_2})dm + \varepsilon/2.$$

   On a donc

   $$n \geq n_0 \Rightarrow \int (1-\varphi_{p_2})dm_n \leq \varepsilon.$$

   Comme $(1-\varphi_p) \leq (1-\varphi_{p_2})$ si $p \geq p_2$, on a aussi

   $$n \geq n_0,\, p \geq p_2 \Rightarrow \int (1-\varphi_p)dm_n \leq \varepsilon.$$

   D"autre part, le théorème de convergence dominée donne (comme en a)) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{p\to\infty}\int(1-\varphi_p)dm_n = 0$. Pour tout $n \in 0,\ldots,n_0$, il existe donc $p_{2,n}$ t.q.

   $$p \geq p_{2,n} \Rightarrow \int (1-\varphi_p)dm_n \leq \varepsilon.$$

   On choisit donc $p_1 = \max\{p_2, \max_{n=0,\ldots,n_0} p_{2,n}\}$ et on obtient bien $p \in \mathbb{N}^\star$ et :

   $$n \in \mathbb{N},\, p \geq p_1 \Rightarrow \int (1-\varphi_p)dm_n \leq \varepsilon.$$

4. Montrer que $\int \varphi dm_n \to \int \varphi dm$, quand $n \to \infty$, pour tout $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ (on dit alors que la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge étroitement vers m).

   corrigé

Soit $\varphi \in C_b[\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. En écrivant que $\varphi = \varphi\varphi_p + \varphi(1-\varphi_p)$, on a, pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$,

$$|\int \varphi dm_n - \int \varphi dm| \le |\int \varphi\varphi_p dm_n - \int \varphi\varphi_p dm| + \|\varphi\|_u \int (1-\varphi_p) dm_n + \|\varphi\|_u \int (1-\varphi_p) dm.$$

Les questions 2a) et 2c) permettent de trouver $p_0 \in \mathbb{N}^\star$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. les deux derniers de la précédente inégalité soient inférieurs à ε pour $p = p_0$ et $n \ge n_0$. Puis, comme $\varphi\varphi_{p_0} \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, il existe n_1 t.q. le premier du membre de droite de la précédente inégalité soit inférieur à ε pour $p = p_0$ et $n \ge n_1$. On a donc finalement

$$n \ge \max\{n_0, n_1\} \Rightarrow |\int \varphi dm_n - \int \varphi dm| \le 3\varepsilon.$$

Ce qui prouve la convergence étroite de m_n vers m (quand $n \to \infty$).

---

5. Indiquer brièvement comment obtenir le même résultat (c'est-à-dire le résultat de la question 4) si on remplace "$\mathbb{R}^d$" (dans les hypothèses et dans la question 4) par "Ω ouvert de $\mathbb{R}^d$".

corrigé

Pour la question 1, on remarque que toute fonction de $C_c(\Omega, \mathbb{R})$ est limite uniforme de fonctions de $C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ (la démonstration, semblable au cas $\Omega = \mathbb{R}^d$ utilise le fait que, si $\varphi \in C_c(\Omega, \mathbb{R})$, la disatnce entre le support de φ, qui est compact, et le complémentaire de Ω, qui est ouvert, est strictement positive. On rappelle que le support de φ est l'adhérence de l'ensemble des points où φ est non nulle).

Pour la question 2, on construit (avec la fonction "distance") une suite φ_p comme demandée en remplaçant simplement B_p par $B_p \cap \{x \in \Omega,\, d(x, \Omega^c) \ge 1/p\}$, avec $d(x, \Omega^c) = \max\{|x-y|,\, y \in \Omega^c\}$.

Pour les questions 3 et 4, on remplace simplement $\mathbb{R}^d$ par Ω.

12.6 Exercices du chapitre 6

12.6.1 Espaces L^p, $1 \le p \le \infty$

Corrigé 95

Soit (E,T,m) un espace mesuré, $p \in [1,\infty[$ et $A \in T$. On pose $F = \{f \in L^p_{\mathbb{R}}(E,T,m);\ f = 0$ p.p. sur $A\}$. Montrer que F est fermé (dans $L^p_{\mathbb{R}}(E,T,m)$).

corrigé

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F$ et $f \in L^p_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ t.q. $f_n \to f$ dans $L^p_{\mathbb{R}}(E,T,m)$.

Grâce à l'inégalité de Hölder (inégalité (6.3) pour $1 < p < \infty$ ou inégalité (6.13) qui contient aussi le cas $p = 1$), on a, pour tout $g \in L^q_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ avec $q = \frac{p}{p-1}$,

$$|\int f_n g dm - \int f g dm| \le \int |(f_n - f)g| dm \le \|f_n - f\|_p \|g\|_q \to 0, \text{ quand } n \to \infty,$$

et donc

$$\int f_n g dm \to \int f g dm, \text{ quand } n \to \infty. \tag{12.85}$$

On prend alors $g = (|f|)^{p-1} 1_{\{f>0\}} 1_A - (|f|)^{p-1} 1_{\{f<0\}} 1_A \in L^q_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ si $p > 1$ et on prend $g = 1_{\{f>0\}} 1_A - 1_{\{f<0\}} 1_A \in L^\infty_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ si $p = 1$.

Comme $f_n g = 0$ p.p., on déduit de (12.85) que $\int |f|^p 1_A dm = 0$ et donc que $f = 0$ p.p. sur A.

Un autre démonstration est possible en utilisant la réciproque partielle du théorème de convergence dominée (théorème 6.2).

Corrigé 96

Soit $p \in [1,\infty]$ et $C = \{f \in L^p(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda);\ f \ge 0$ p.p.$\}$. Montrer que C est d'intérieur vide pour $p < \infty$ et d'intérieur non vide pour $p = \infty$.

corrigé

Cas $p < \infty$

Soit $f \in C$ et soit $\varepsilon > 0$. On va construire $g \in L^p(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ t.q. $g \notin C$ et $\|f - g\|_p \le \varepsilon$. Comme ε est arbitraire, ceci montrera bien que f n'est pas dans l'intérieur de C et donc, comme f est arbitraire, que C est d'intérieur vide.

On choisit, comme d'habitude, un représentant de f. On pose $A_n = \{0 \le f \le n\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{f \ge 0\}$. Par continuité croissante de λ, on a donc $\lambda(A_n) \to \lambda(\{f \ge 0\}) = \infty$ quand $n \to \infty$. Il existe donc $n \in \mathbb{N}^\star$ t.q. $\lambda(A_n) > 0$. On choisit cette valeur de n et on pose $A = A_n$.

On prend maintenant $m > (\frac{n+1}{\varepsilon})^p$ (ce choix sera bientôt compréhensible…) et, pour $i \in \mathbb{Z}$, on pose $B_i = A \cap [\frac{i}{m}, \frac{i+1}{m}[$. Comme les B_i sont disjoints 2 à 2 et que $\cup_{i\in\mathbb{Z}} B_i = A$, on a $\lambda(A) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \lambda(B_i)$. Il existe donc $i \in \mathbb{Z}$ t.q. $\lambda(B_i) > 0$. On choisit cette valeur de i et on pose $B = B_i$ (noter que $\lambda(B) \le 1/m$).

On construit maintenant g en prenant $g(x) = f(x)$ si $x \in B^c$ et $g(x) = -1$ si $x \in B$. On a g mesurable et :

$$\int |g|^p dm = \int_{B^c} |g|^p dm + \int_B |g|^p dm \le \int |f|^p dm + \lambda(B) < \infty.$$

On a donc $g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ (et $g \in L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ en confondant g avec sa classe d'équivalence). On a aussi $g \notin C$ car $\lambda(B) > 0$ et $g < 0$ sur B. Enfin $\|f - g\|_p^p \leq (n+1)^p \lambda(B) \leq \frac{(n+1)^p}{m} \leq \varepsilon^p$ (par le choix de m), donc $\|f - g\|_p \leq \varepsilon$.

Ceci montre bien que C est d'intérieur vide.

Cas $p = \infty$

On prend $f = 1_{\mathbb{R}} \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ (et donc $f \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ en confondant f avec sa classe d'équivalence). On note $B(f, 1)$ la boule (dans L^∞) de centre f et de rayon 1. Soit $g \in B(f, 1)$. On a $|1 - g| = |f - g| \leq \|f - g\|_\infty \leq 1$ p.p.. On en déduit que $g \geq 0$ p.p. et donc que $g \in C$. La fonction f appartient donc à l'intérieur de C, ce qui prouve que C est d'intérieur non vide.

Corrigé 97 (Convergence essentiellement uniforme)

Soit (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$ et f une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$.

Montrer que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$, quand $n \to \infty$, si et seulement si il existe $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et $f_n \to f$ uniformément sur A^c, quand $n \to \infty$.

corrigé

On suppose que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$, quand $n \to \infty$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $|f_n - f| \leq \|f_n - f\|_\infty$ p.p. (voir, par exemple, l'exercice corrigé 4.32). Il existe donc $A_n \in T$ t.q. $m(A_n) = 0$ et $|(f_n - f)(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty$ pour tout $x \in A_n^c$.

On pose $A = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, on a alors, par $\sigma-$additivité de m, $m(A) = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sup_{x \in A^c} |f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty.$$

On en déduit que $f_n \to f$ uniformément sur A^c, quand $n \to \infty$. Ce qui donne la propriété désirée.

Réciproquement, on suppose maintenant qu'il existe $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et $f_n \to f$ uniformément sur A^c, quand $n \to \infty$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a, pour tout $x \in A^c$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{y \in A^c} |f_n(y) - f(y)|$. Comme $m(A) = 0$, on en déduit :

$$|f_n - f| \leq \sup_{y \in A^c} |f_n(y) - f(y)| \text{ p.p.},$$

et donc :

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \sup_{y \in A^c} |f_n(y) - f(y)|.$$

Comme $f_n \to f$ uniformément sur A^c, quand $n \to \infty$, ceci donne bien $\|f_n - f\|_\infty \to 0$, quand $n \to \infty$.

Corrigé 98 (Densité et continuité en moyenne)

1. Soit $p \in [1, \infty[$. Montrer que $C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est dense dans $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Soit $f \in L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, montrer que $\|f - f(\cdot + h)\|_p \to 0$ quand $h \to 0$.

corrigé

Densité de C_c dans L^p

On reprend ici la démonstration faite pour $p = 1$ (voir le théorème 5.5)

Il est clair que $C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. En confondant un élément de $\mathcal{L}^p$ avec sa classe d'équivalence, on a donc aussi $C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset L^p = L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ (ceci est aussi vrai pour $p = \infty$). L'objectif est donc de montrer que pour tout $f \in \mathcal{L}^p$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ t.q. $\|f - \varphi\|_p \le \varepsilon$. On va raisonner en plusieurs étapes (fonctions caractéristiques, $\mathcal{E}_+$, $\mathcal{M}_+$ et enfin $\mathcal{L}^p$).

(a) On suppose ici que $f = 1_A$ avec $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $\lambda(A) < \infty$.
Soit $\varepsilon > 0$. On prend la même fonction φ que pour $p = 1$ (démonstration du téorème 5.5). On a $\varphi \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\varphi = 1$ sur K, $\varphi = 0$ sur O^c et $0 \le \varphi \le 1$ (partout). Les ensembles K et O sont t.q. $K \subset A \subset O$ et $\lambda(O \setminus K) \le 2\varepsilon$. On en déduit que $f - \varphi = 0$ sur $K \cup O^c$ et $0 \le |f - \varphi| \le 1$, ce qui donne
$$\|f - \varphi\|_p^p \le \lambda(O \setminus K) \le 2\varepsilon,$$
et donc
$$\|f - \varphi\|_p \le (2\varepsilon)^{\frac{1}{p}}.$$
Comme ε est arbitrairement petit, ceci termine la première étape.

(b) On suppose ici que $f \in \mathcal{E}_+ \cap \mathcal{L}^p$. Comme $f \in \mathcal{E}_+$, il existe $a_1, \ldots, a_n > 0$ et $A_1, \ldots, A_n \in T$ t.q. $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$. Comme $f \in \mathcal{L}^p$, on a, pour tout i, $a_i^p \lambda(A_i) \le \int |f|^p dm < \infty$. Donc, $\lambda(A_i) < \infty$.

Soit $\varepsilon > 0$, l'étape 1 donne, pour tout i, l'existence de $\varphi_i \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ t.q. $\|1_{A_i} - \varphi_i\|_p \le \varepsilon$. On pose $\varphi = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et on obtient $\|f - \varphi\|_p \le (\sum_{i=1}^n a_i)\varepsilon$ (ce qui est bien arbitrairement petit).

(c) On suppose ici que $f \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{L}^p$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $f \in \mathcal{M}_+$, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ t.q. $f_n \uparrow f$ quand $n \to \infty$. La suite $(f - f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc dominée par $f \in \mathcal{L}^p$. Le théorème de convergence dominée donne alors que $(f - f_n) \to 0$ dans L^p quand $n \to \infty$. On peut donc choisir $g = f_n \in \mathcal{E}_+$ t.q. $\|f - g\|_p \le \varepsilon$.

L'étape 2 donne alors l'existence de $\varphi \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ t.q. $\|g - \varphi\|_p \le \varepsilon$. D'où l'on déduit $\|f - \varphi\|_p \le 2\varepsilon$. Ce qui termine l'étape 3.

(d) On suppose enfin que $f \in \mathcal{L}^p$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $f^\pm \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{L}^p$, l'étape 3 donne qu'il existe $\varphi_1, \varphi_2 \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ t.q. $\|f^+ - \varphi_1\|_p \le \varepsilon$ et $\|f^- - \varphi_2\|_p \le \varepsilon$. On pose alors $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. On a $\varphi \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\|f - \varphi\|_p \le 2\varepsilon$. Ce qui prouve bien la densité de $C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans L^p.

Continuité en moyenne

On raisonne ici en 2 étapes :

(a) Soit $\varphi \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. La fonction φ est donc uniformément continue, ce qui donne
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x + h) - \varphi(x)| \to 0 \text{ quand } h \to 0.$$
Soit $a > 0$ t.q. $\varphi = 0$ sur $[-a, a]^c$. Pour $h \in \mathbb{R}$ t.q. $|h| \le 1$, on a donc, comme $\varphi(x+h) - \varphi(x) = 0$ si $x \notin [-a - 1, a + 1]$,
$$\int |\varphi(x + h) - \varphi(x)|^p dx \le (2a + 2) \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x + h) - \varphi(x)|^p \to 0, \text{ quand } h \to 0.$$

On en déduit que $\|\varphi(\cdot+h)-\varphi\|_p \to 0$ quand $h \to 0$.

(b) Soit $f \in L^p$. L'invariance par translation de la mesure de Lebesgue donne que $f(\cdot+h) \in L^p$ pour tout $h \in \mathbb{R}$. On veut maintenant montrer que $\|f(\cdot+h)-f\|_p \to 0$ quand $h \to 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. D'après la densité de C_c dans L^p, il existe $\varphi \in C_c$ t.q. $\|f-\varphi\|_p \le \varepsilon$. L'invariance par translation de la mesure de Lebesgue donne $\|f(\cdot+h)-\varphi(\cdot+h)\|_p = \|f-\varphi\|_p$. On a donc, pour tout $h \in \mathbb{R}$:

$$\|f(\cdot+h)-f\|_p \le 2\|f-\varphi\|_p + \|\varphi(\cdot+h)-\varphi\|_p \le 2\varepsilon + \|\varphi(\cdot+h)-\varphi\|_p.$$

D'après la première étape, il existe $\eta > 0$ t.q.

$$|h| \le \eta \Rightarrow \|\varphi(\cdot+h)-\varphi\|_p \le \varepsilon.$$

Donc,

$$|h| \le \eta \Rightarrow \|f(\cdot+h)-f\|_p \le 3\varepsilon.$$

Ce qui prouve bien que $f(\cdot+h) \to f$ dans L^p, quand $h \to 0$.

---

2. Les assertions précédentes sont-elles vraies pour $p = \infty$?

corrigé

Les assertions précédentes sont fausses pour $p = \infty$, comme cela est montré dans l'exercice 8.3.

(a) On a bien $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset L^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ mais le résultat de densité est faux. On prend, par exemple, $f = 1_{]0,1[}$. Il est facile de voir que $\|f-\varphi\|_\infty \ge \frac{1}{2}$, pour tout $\varphi \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

(b) On prend ici aussi $f = 1_{]0,1[}$. Il est facile de voir que $\|f(\cdot+h)-f\|_\infty = 1$ pour tout $h \neq 0$.

Corrigé 99 (Produit $L^p - L^q$)

Soient (E,T,m) un espace mesuré, $p \in [1,+\infty]$ et q le conjugué de p (i.e. $q = \frac{p}{p-1}$). Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p_{\mathbb{R}}(E,T,m)$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^q_{\mathbb{R}}(E,T,m)$, $f \in L^p_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ et $g \in L^q_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ t.q. $f_n \to f$ dans $L^p_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ et $g_n \to g$ dans $L^q_{\mathbb{R}}(E,T,m)$. Montrer que $\int f_n g_n dm \to \int fg dm$ lorsque $n \to +\infty$.

corrigé

On remarque d'abord que le lemme 6.2 (ou la proposition 6.9 pour avoir aussi le cas $p = \infty$ ou $q = \infty$) donne que $fg \in L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ et $f_n g_n \in L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puis, on utilise l'inégalité de Hölder (lemme 6.2 et proposition 6.9) pour obtenir

$$\begin{aligned}|\textstyle\int f_n g_n dm - \int fg dm| &\le |\textstyle\int (f_n-f) g_n dm| + |\int f(g_n-g) dm|\\ &\le \|f_n-f\|_p \|g_n\|_q + \|f\|_p \|g-g_n\|_q \to 0, \text{ quand } n \to \infty,\end{aligned}$$

car $\|f_n-f\|_p \to 0$, $\|g-g_n\|_q \to 0$ (quand $n \to \infty$) et la suite $(\|g_n\|_q)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée car la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans L^q.

Corrigé 100

Soient (E,T,m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^\infty_{\mathbb{R}}(E,T,m)$, $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ et $g \in L^\infty_{\mathbb{R}}(E,T,m)$. On suppose que $f_n \to f$ dans $L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$.

1. On suppose que $g_n \to g$ dans $L^\infty_{\mathbb{R}}(E,T,m)$. Montrer que $f_n g_n \to fg$ dans $L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$.

corrigé

Cette question a été faite dans l'exercice 6.7, corrigé 99.

---

2. On suppose maintenant que $g_n \to g$ p.p.. Montrer par un contre exemple qu'on peut ne pas avoir $f_n g_n \to fg$ dans $L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$.

corrigé

On prend $(E,T,m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. On prend $f = g = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$f_n = g_n = \sqrt{n} 1_{]0,\frac{1}{n}[}.$$

On a bien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^\infty_{\mathbb{R}}(E,T,m)$, $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ et $g \in L^\infty_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ (comme d'habitude, on confond un élément de $\mathcal{L}^p$ avec sa classe d'équivalence).

On a aussi $f_n \to 0$ dans $L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ (car $\|f_n\|_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}$), $g_n \to 0$ p.p. et $f_n g_n \not\to 0$ dans $L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ car $\|f_n g_n\|_1 = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

---

3. On suppose maintenant que $g_n \to g$ p.p. et qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ t.q. $\|g_n\|_\infty \le M$. Montrer qu'on a alors $f_n g_n \to fg$ dans $L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$.

corrigé

On remarque d'abord que $fg \in L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ et $f_n g_n \in L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (voir la proposition 6.9). Puis, on écrit

$$|\int f_n g_n dm - \int fg dm| \le \int |f_n - f||g_n| dm + \int |f||g_n - g| dm. \tag{12.86}$$

Le premier terme du membre de droite de cette inégalité tend vers 0 car il est majoré par $M\|f_n - f\|_1$ qui tend vers 0 quand $n \to \infty$.

Pour montrer que le deuxième terme de cette inégalité tend aussi vers 0, on pose $h_n = |f||g_n - g|$. On a $h_n \to 0$ p.p. car $g_n \to g$ p.p., quand $n \to \infty$. On a aussi $0 \le h_n \le 2M|f| \in L^1_R(E,T,m)$ (en effet, comme $g_n \to g$ p.p. et $|g_n| \le M$ p.p., on a aussi $|g| \le M$ p.p.). On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée. Il donne que $\int h_n dm \to 0$. On en déduit que le deuxième terme de (12.86) tend vers 0 quand $n \to \infty$ et donc que $f_n g_n \to fg$ dans $L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ quand $n \to \infty$.

Corrigé 101 (Inégalité de Hardy)

Soit $p \in]1,\infty[$. On note $\mathcal{L}^p$ l'espace $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(]0,\infty[, \mathcal{B}(]0,\infty[), \lambda)$ (λ est donc ici la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $]0,\infty[$).

Soit $f \in \mathcal{L}^p$. Pour $x \in]0,\infty[$, on pose $F(x) = \frac{1}{x}\int f 1_{]0,x[} d\lambda$. Le but de l'exercice est de montrer que $F \in \mathcal{L}^p$ et $\|F\|_p \le \frac{p}{p-1}\|f\|_p$.

1. On suppose, dans cette question, que $f \in C_c(]0,\infty[)$ (c'est-à-dire que f est continue et à support compact dans $]0,\infty[$).

   (a) Montrer $F \in C^1(]0,\infty[) \cap \mathcal{L}^p$. Montrer que $xF'(x) = -F(x) + f(x)$ pour tout $x > 0$.

   corrigé

   On pose $G(x) = \int f 1_{]0,x[} d\lambda$ pour $x \in]0,\infty[$. Comme f est continue, la fonction g est de classe C^1 sur $]0,\infty[$ (et $G' = f$). On en déduit que F est aussi de classe C^1 sur $]0,\infty[$.

   Comme f est à support compact dans $]0,\infty[$, il existe $a, A \in]0,\infty[$, $a \leq A$, t.q. $f(x) = 0$ si $x < a$ ou $x > A$. La fonction f est bornée (car continue sur le compact $[a, A]$ et nulle en dehors de ce compact), on note $M = \sup\{|f(x)|;\ x \in [a, A]\}$. On a alors $|F(x)| \leq \frac{M(A-a)}{x} 1_{[a,\infty[}(x)$ pour tout $x \in]0,\infty[$. On en déduit que $F \in \mathcal{L}^p$ car $p > 1$ (et on aussi $F \in \mathcal{L}^\infty$).

   Comme $xF(x) = G(x)$, on a bien $xF'(x) + F(x) = G'(x) = f(x)$ pour tout $x \in]0,\infty[$.

   (b) On suppose, dans cette question, que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in]0,\infty[$.

   Montrer que $\int_0^\infty F^p(x)dx = \frac{p}{p-1} \int_0^\infty F^{p-1}(x) f(x)dx$. [On pourra utiliser une intégration par parties.]

   Montrer que $\|F\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_p$.

   corrigé

   Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. En intégrant par parties (entre F^p et 1) sur $]0, n[$, on obtient :

$$\int_0^n F^p(x)dx = -\int_0^n pF^{p-1}F'(x)xdx + F^p(n)n = \int_0^n pF^p(x)dx - \int_0^n pF^{p-1}f(x)dx + F^p(n)n,$$

   et donc :

$$(p-1)\int_0^n F^p(x)dx = \int_0^n pF^{p-1}f(x)dx - F^p(n)n.$$

   Comme $0 \leq F^p(n)n \leq \frac{1}{n^{p-1}} M(A-a) \to 0$, quand $n \to \infty$ (où a, A, M sont définis à la question précédente) et que $F, f \in \mathcal{L}^p$, on en déduit :

$$\int_0^\infty F^p(x)dx = \frac{p}{p-1} \int_0^\infty F^{p-1}(x) f(x)dx.$$

   En utilisant l'inégalité de Hölder (entre $f \in \mathcal{L}^p$ et $F^{p-1} \in \mathcal{L}^{\frac{p}{p-1}}$) on déduit de la précédente inégalité :

$$\int_0^\infty F^p(x)dx \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_p \Big(\int_0^\infty F^p(x)dx\Big)^{\frac{p-1}{p}},$$

   et donc (comme $F \in \mathcal{L}^p$) $\|F\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_p$.

   (c) Monter que $\|F\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_p$ (on ne suppose plus que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in]0,\infty[$).

   corrigé

Il suffit de considérer $H(x) = \frac{1}{x} \int |f| 1_{]0,x[} d\lambda$ pour $x > 0$. La question précédente donne que $H \in \mathcal{L}^p$ et $\|H\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_p$. Comme $|F(x)| \leq H(x)$ pour tout $x > 0$, on a donc $\|F\|_p \leq \|H\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_p$.

2. On ne suppose plus que $f \in C_c(]0,\infty[)$.

   (a) Montrer qu'il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c(]0,\infty[)$ t.q $\|f_n - f\|_p \to 0$ quand $n \to \infty$. [On pourra utiliser la densité de $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$, exercice 6.4.]

   corrigé

   On définit g par $g = f$ sur $]0,\infty[$ et $g = 0$ sur $]-\infty,0]$. On a donc $g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$. il existe donc $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ t.q. $g_n \to g$ dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ quand $n \to \infty$. On note $\overline{g}_n$ la restriction de la fonction g_n à $]0,\infty[$. La suite $(\overline{g}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers f dans $\mathcal{L}^p$, mais les fonctions $\overline{g}_n$ ne sont pas nécessairement à support compact dans $]0,\infty[$. Il faut donc les modifier "légèrement".

   On se donne une fonction $\varphi \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ t.q. $\varphi = 0$ sur $]-1,1[$ et $\varphi = 1$ sur $]-2,2[^c$. On pose $\varphi_m(x) = \varphi(mx)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}^\star$. Le théorème de convergence dominée donne alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\varphi_m\overline{g}_n \to \overline{g}_n$ dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ quand $m \to \infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut donc choisir $m_n \in \mathbb{N}^\star$ t.q. $\|\varphi_{m_n}\overline{g}_n - \overline{g}_n\|_p \le \frac{1}{n+1}$. On pose $f_n = \varphi_{m_n}\overline{g}_n$, on a bien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c(]0,\infty[)$ et $\|f_n - f\|_p \to 0$ quand $n \to \infty$.

   (b) Montrer que $F \in C(]0,\infty[) \cap \mathcal{L}^p$ et que $\|F\|_p \le \frac{p}{p-1}\|f\|_p$.

   corrigé

   On pose $G(x) = \int f 1_{]0,x[} d\lambda$ pour $x \in]0,\infty[$. On remarque que $G \in C(]0,\infty[)$ car si $0 < x < y < \infty$, on a (en utilisant l'inégalité de Hölder) $|G(x) - G(y)| \le \int |f| 1_{]x,y[} d\lambda \le \|f\|_p (y-x)^{1-\frac{1}{p}}$. On a donc aussi $F \in C(]0,\infty[)$.

   Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c(]0,\infty[)$ t.q. $\|f_n - f\|_p \to 0$ quand $n \to \infty$. On pose $F_n(x) = \frac{1}{x}\int f_n 1_{]0,x[} d\lambda$. On a donc $F_n \in \mathcal{L}^p$ et

$$\|F_n\|_p \le \frac{p}{p-1}\|f_n\|_p. \tag{12.87}$$

   Pour $x \in]0,\infty[$, on a (en utilisant l'inégalité de Hölder) $|F_n(x) - F(x)| \le \frac{1}{x}\|f_n - f\|_p x^{1-\frac{1}{p}}$. On en déduit que $F_n \to F$ p.p.. Il suffit alors d'appliquer le lemme de Fatou à la suite $(|F_n|^p)_{n\in\mathbb{N}}$ pour déduire de (12.87) que $F \in \mathcal{L}^p$ et $\|F\|_p \le \frac{p}{p-1}\|f\|_p$.

   ---

3. Montrer que $\sup\{\frac{\|F\|_p}{\|f\|_p},\ f \in \mathcal{L}^p,\ \|f\|_p \ne 0\} = \frac{p}{p-1}$ (dans cette formule, F est donné comme précédemment à partir de f). [On pourra considérer la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par $f_n(t) = t^{-\frac{1}{p}} 1_{]1,n[}(t)$ pour $t \in]0,\infty[$.]

   corrigé

   Soit $n \ge 2$ et f_n définie par $f_n(t) = t^{-\frac{1}{p}} 1_{]1,n[}(t)$ pour $t \in]0,\infty[$. On a $f_n \in \mathcal{L}^p$ et $\|f_n\|_p = (\log n)^{\frac{1}{p}}$.

   On pose $F_n(x) = \frac{1}{x}\int f_n 1_{]0,x[} d\lambda$ et on cherche maintenant à minorer $\|F_n\|_p$. On remarque que $F_n(x) \ge 0$ pour tout $x \in]0,\infty[$ et :

$$F_n(x) = \frac{p}{p-1}\frac{1}{x}(x^{\frac{p-1}{p}} - 1), \text{ pour } x \in [1,n]. \tag{12.88}$$

   Soit $\eta > 0$. Il existe $A > 1$ t.q. :

$$x > A \Rightarrow x^{\frac{p-1}{p}} - 1 \ge (1-\eta)x^{\frac{p-1}{p}},$$

et donc, en utilisant (12.88), on obtient :

$$n > A \Rightarrow \|F_n\|_p \geq \frac{p}{p-1}(1-\eta)(\int_A^n \frac{1}{x}dx)^{\frac{1}{p}} = \frac{p}{p-1}(1-\eta)(\log n - \log A)^{\frac{1}{p}}.$$

Comme $\|f_n\|_p = (\log n)^{\frac{1}{p}}$, on en déduit que $\limsup_{n\to\infty} \frac{\|F_n\|_p}{\|f_n\|_p} \geq \frac{p}{p-1}(1-\eta)$. Comme $\eta > 0$ est arbitrairement petit, on a donc $\limsup_{n\to\infty} \frac{\|F_n\|_p}{\|f_n\|_p} \geq \frac{p}{p-1}$, ce qui donne :

$$\sup\{\frac{\|F\|_p}{\|f\|_p},\ f \in \mathcal{L}^p,\ \|f\|_p \neq 0\} \geq \frac{p}{p-1}.$$

La mojoration donnée à la question 3 permet de conclure :

$$\sup\{\frac{\|F\|_p}{\|f\|_p},\ f \in \mathcal{L}^p,\ \|f\|_p \neq 0\} = \frac{p}{p-1}.$$

Corrigé 102 (Continuité d'une application de L^p dans L^q)
Soit (E, T, m) un espace mesuré fini, $p, q \in [1, \infty[$ et g une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ t.q. :

$$\exists\, C \in \mathbb{R}_+^\star\ ;\ |g(s)| \leq C|s|^{\frac{p}{q}} + C,\ \forall s \in \mathbb{R}. \tag{12.89}$$

1. Soit $u \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Montrer que $g \circ u \in \mathcal{L}^q_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

corrigé

Cet exercice est très voisin de l'exercice 4.35 correspondant au cas $p = q = 1$, le corrigé des 3 premières questions va donc suivre essentiellement le corrigé 78.

La fonction u est mesurable de E (muni de la tribu T) dans $\mathbb{R}$ (muni de la tribu $\mathcal{B}(R)$) et g est borélienne (c'est-à-dire mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de la tribu $\mathcal{B}(R)$). On en déduit, par composition, que $g \circ u$ est mesurable (de E dans $\mathbb{R}$).

Pour $s \in [-1, 1]$, on a $|g(s)| \leq 2C$ et donc $|g(s)|^q \leq 2^q C^q$. Pour $s \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$, on a $|g(s)| \leq 2C|s|^{\frac{p}{q}}$ et donc $|g(s)|^q \leq 2^q C^q |s|^p$. On a donc, pour tout $s \in \mathbb{R}$, $|g(s)|^q \leq 2^q C^q + 2^q C^q |s|^p$. On en déduit que, pour tout $x \in E$, $|g \circ u(x)|^q = |g(u(x))|^q \leq 2^q C^q + 2^q C^q |u(x)|^p$, et donc :

$$\int |g \circ u|^q dm \leq 2^q C^q \|u\|_p^p + 2^q C^q m(E),$$

ce qui donne $g \circ u \in \mathcal{L}^q_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

On pose $L^r = L^r_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, pour $r = p$ et $r = q$. Pour $u \in L^p$, on pose $G(u) = \{h \in \mathcal{L}^q_{\mathbb{R}}(E, T, m);$ $h = g \circ v$ p.p.$\}$, avec $v \in u$. On a donc $G(u) \in L^q$ et cette définition a bien un sens, c'est à dire que $G(u)$ ne dépend pas du choix de v dans u.

corrigé

La démonstration du fait que cette définition a bien un sens est essentiellement identique à celle du cas $p = q = 1$ (exercice 4.35, corrigé 78). Elle n'est pas demandée ici.

---

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p$. On suppose que $u_n \to u$ p.p., quand $n \to \infty$, et qu'il existe $F \in L^p$ t.q. $|u_n| \le F$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $G(u_n) \to G(u)$ dans L^q.

corrigé

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on choisit un représentant de u_n, encore notée u_n. On choisit aussi des représentants de u et F, notés toujours u et F. Comme $u_n \to u$ p.p. quand $n \to \infty$ et que g est continu, il est facile de voir que $g \circ u_n \to g \circ u$ p.p.. On a donc $G(u_n) \to G(u)$ p.p..

On remarque aussi que $|g \circ u_n| \le C|u_n|^{\frac{p}{q}} + C \le C|F|^{\frac{p}{q}} + C$ p.p. et donc $|G(u_n)| \le C|F|^{\frac{p}{q}} + C$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Comme $F \in F^p$, on a $|F|^{\frac{p}{q}} \in L^q$. Les fonctions constantes sont aussi dans L^q (car $m(E) < \infty$). On a donc $C|F|^{\frac{p}{q}} + C \in L^q$. On peut alors appliquer le théorème de convergence dominée dans L^q (théorème 6.1), il donne que $G(u_n) \to G(u)$ dans L^q quand $n \to \infty$.

---

3. Montrer que G est continue de L^p dans L^q.

corrigé

On raisonne par l'absurde. On suppose que G n'est pas continue de L^p dans L^q. Il existe donc $u \in L^p$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p$ t.q. $u_n \to u$ dans L^p et $G(u_n) \not\to G(u)$ dans L^q quand $n \to \infty$.

Comme $G(u_n) \not\to G(u)$, il existe $\varepsilon > 0$ et $\varphi\ :\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ t.q. $\varphi(n) \to \infty$ quand $n \to \infty$ et :

$$\|G(u_{\varphi(n)}) - G(u)\|_q \ge \varepsilon \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \tag{12.90}$$

(La suite $(G(u_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous suite de la suite $(G(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$.)

Comme $u_{\varphi(n)} \to u$ dans L^p, on peut appliquer le théorème 6.2 (“réciproque partielle de la convergence dominée dans L^q”). Il donne l'existence de $\psi\ :\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et de $F \in L^p$ t.q. $\psi(n) \to \infty$ quand $n \to \infty$, $u_{\varphi\circ\psi(n)} \to u$ p.p. et $|u_{\varphi\circ\psi(n)}| \le F$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$. (La suite $(u_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous suite de la suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$).

On peut maintenant appliquer la question 2 à la suite $(u_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Elle donne que $G(u_{\varphi\circ\psi(n)}) \to G(u)$ dans L^q quand $n \to \infty$. Ce qui est en contradiction avec (12.90).

---

4. On considère ici $(E, T, m) = ([0,1], \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et on prend $p = q = 1$. On suppose que g ne vérifie pas (12.89). On va construire $u \in L^1$ t.q. $G(u) \notin L^1$.

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, montrer qu'il existe $\alpha_n \in \mathbb{R}$ tel que : $|g(\alpha_n)| \ge n|\alpha_n|$ et $|\alpha_n| \ge n$.

   corrigé

   On raisonne par l'absurde. On suppose que $|g(s)| < n|s|$ pour tout s t.q. $|s| \ge n$. On pose $M = \max\{|g(s)|,\ s \in [-n, n]\}$. On a $M < \infty$ car g est continue sur le compact $[-n, n]$ (noter que n est fixé). en posant $C = \max\{n, M\}$, on a donc :

$$|g(s)| \le C|s| + C, \text{ pour tout } s \in \mathbb{R},$$

   en contradiction avec l'hypothèse que g ne vérifie pas (12.89).

Il existe donc s, t.q. $|s| \geq n$ et $|g(s)| \geq n|s|$. Ceci prouve l'existence de α_n.

(b) On choisit une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ vérifiant les conditions données à la question précédente. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ t.q.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha}{|\alpha_n| n^2} = 1.$$

—corrigé—

Comme $\alpha_n \geq n$, on a $\frac{1}{|\alpha_n|n^2} \leq \frac{1}{n^3}$ et donc :

$$0 < \beta = \sum_{n\in\mathbb{N}^\star} \frac{1}{|\alpha_n|n^2} < \infty.$$

On choisit alors $\alpha = \frac{1}{\beta}$.

(c) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite définie par : $a_1 = 1$ et $a_{n+1} = a_n - \dfrac{\alpha}{|\alpha_n|n^2}$ (où α_n et α sont définies dans les 2 questions précédentes). On pose $u = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n 1_{[a_{n+1},a_n[}$. Montrer que $u \in L^1$ et $G(u) \notin L^1$.

—corrigé—

Pour $n \geq 2$, on a $a_n = 1 - \sum_{p=1}^{n-1} \dfrac{\alpha}{|\alpha_p|p^2}$.

Grâce au choix de α, on a donc $a_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, et $a_n \downarrow 0$, quand $n \to \infty$.

La fonction u est bien mesurable et, par le théorème de convergence monotone (plus précisément, on utilise sa première conséquence, le corollaire 4.1) :

$$\int |u| d\lambda = \sum_{n\in\mathbb{N}^\star} |\alpha_n|(a_n - a_{n+1}) = \sum_{n\in\mathbb{N}^\star} \frac{\alpha}{n^2} < \infty.$$

Donc, $u \in \mathcal{L}^1$ et aussi $u \in L^1$ en confondant, comme d'habitude, u avec sa classe.

on remarque ensuite que $g \circ u = \sum_{n=1}^{+\infty} g(\alpha_n) 1_{[a_{n+1},a_n[}$. On a donc :

$$\int |g \circ u| d\lambda = \sum_{n\in\mathbb{N}^\star} |g(\alpha_n)|(a_n - a_{n+1}) \geq \sum_{n\in\mathbb{N}^\star} \frac{\alpha}{n} = \infty.$$

ceci montre que $g \circ u \notin \mathcal{L}^1$ et donc $G(u) \notin L^1$.

Corrigé 103 (Convergence p.p. et convergence des normes, par Egorov)
Soit (E, T, m) un espace mesuré et $1 \leq p \leq \infty$. On note L^p l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Soit $(f_n)_n$ une suite d'éléments de L^p et $f \in L^p$. On suppose que $f_n \to f$ p.p., quand $n \to \infty$.

1. Montrer que $\|f\|_p \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_p$. [Traiter séparément le cas $1 \leq p < \infty$ et $p = \infty$.]

—corrigé—

On suppose que $\liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_p < \infty$ (sinon, l'inégalité à démontrer est immédiate). Comme d'habitude, on choisit des représentants de f_n et de f (qui sont donc dans $\mathcal{L}^p$).

Pour $p < \infty$, on utilise le lemme de Fatou (lemme 4.6) à la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $g_n = |f_n|^p$. Comme $g_n \to |f|^p$ p.p., Il donne :

$$\int |f|^p dm \le \liminf_{n\to\infty} \int |f_n|^p dm.$$

On en déduit que $\|f\|_p \le \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_p$.

Pour $p = \infty$, il existe $A \in T$ t.q. $m(A^c) = 0$ et $f_n(x) \to f(x)$, quand $n \to \infty$, pour tout $x \in A$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $A_n \in T$ t.q. $m(A_n^c) = 0$ et $f_n(x) \le \|f_n\|_\infty$ pour tout $x \in A_n$. On pose $B = A \cap (\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n)$, de sorte que $B \in T$ et $m(B^c) = 0$. Pour $x \in B$, on a :

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x) \le \liminf_{n\to\infty} \|f\|_\infty.$$

On en déduit que $\|f\|_\infty \le \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_\infty$.

---

2. En prenant $(E, T, m) = (]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda)$ (où λ est la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $]0,1[$), donner un exemple pour lequel la suite $(\|f_n\|_p)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$ et $\|f\|_p < \lim_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_p$. [On pourra aussi traiter séparément les cas $1 \le p < \infty$ et $p = \infty$.]

corrigé

Pour $p < \infty$, on peut prendre $f_n = n^{\frac{1}{p}} 1_{]0,\frac{1}{n}[}$ (et $f = 0$ p.p.).

Pour $p = \infty$, on peut prendre $f_n = 1_{]0,\frac{1}{n}[}$ (et $f = 0$ p.p.).

Pour la suite de l'exercice, on suppose que $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$, quand $n \to \infty$.

3. Dans cette question, on suppose que $p = 1$.

   (a) On suppose que $m(E) < \infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on choisit un représentant de f_n, encore noté f_n. On choisit aussi un représentant de f, encore noté f. Soit $A \in T$ et $\varepsilon > 0$. On suppose que $f_n \to f$ uniformément sur A^c. Montrer qu'il existe n_0 t.q. :

$$n \ge n_0 \Rightarrow \int_A |f_n| dm \le \varepsilon + \int_A |f| dm.$$

corrigé

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}\int_A |f_n| dm &= \int_A |f| dm + \int_A (|f_n| - |f|) dm \\ &= \int_A |f| dm + \|f_n\|_1 - \|f\|_1 + \int_{A^c} (|f| - |f_n|) dm.\end{aligned} \tag{12.91}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par convergence uniforme de f_n vers f sur A^c (qui est de mesure finie car $m(E) < \infty$), il existe n_1 t.q.

$$n \ge n_1 \Rightarrow \int_{A^c} (|f| - |f_n|) dm \le \int_{A^c} |f_n - f| dm \le \varepsilon.$$

Comme $\|f_n\|_1 \to \|f\|_1$, quand $n \to \infty$, il existe n_2 t.q. $n \geq n_2 \Rightarrow \|f_n\|_1 - \|f\|_1 \leq \varepsilon$. Pour $n_0 = \max(n_1, n_2)$, on a donc :

$$n \geq n_0 \Rightarrow \int_A |f_n| dm \leq \int_A |f| dm + 2\varepsilon.$$

ce qui donne le résultat demandé.

(b) On suppose que $m(E) < \infty$. Montrer que $f_n \to f$ dans L^1, quand $n \to \infty$. [On pourra utiliser le théorème d'Egorov.]

corrigé

Soit $\varepsilon > 0$. D'après la proposition 4.9 page 91, il existe $\delta > 0$ t.q.

$$(A \in T,\ m(A) \leq \delta) \Rightarrow \int_A |f| dm \leq \varepsilon.$$

Le théorème d'Egorov (théorème 3.2) donne l'existence de $A \in T$ t.q. $m(A) \leq \delta$ et $f_n \to f$ uniformément sur A^c. On a donc :

$$\int |f_n - f| dm \leq \int_{A^c} |f_n - f| dm + \int_A |f_n| dm + \int_A |f| dm.$$

On a $\int_A |f| dm \leq \varepsilon$. Par la question précédente, il existe n_0 t.q.

$$n \geq n_0 \Rightarrow \int_A |f_n| dm \leq \int_A |f| dm + 2\varepsilon \leq 3\varepsilon.$$

Par convergence uniforme de f_n vers f sur A^c, il existe n_1 t.q.

$$n \geq n_1 \Rightarrow \int_{A^c} |f_n - f| dm \leq m(E) \sup_{A^c} |f_n - f| \leq \varepsilon.$$

On a donc finalement :

$$n \geq \max(n_0, n_1) \Rightarrow \int |f_n - f| dm \leq 5\varepsilon.$$

Ce qui prouve que $f_n \to f$ dans L^1, quand $n \to \infty$.

(c) On suppose que $m(E) = \infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $C \in T$ t.q. :

$$m(C) < \infty \text{ et } \int_{C^c} |f| dm \leq \varepsilon.$$

corrigé

Cette question est résolue dans la proposition 4.9 page 91.

(d) On suppose que $m(E) = \infty$. Montrer que $f_n \to f$ dans L^1, quand $n \to \infty$.

corrigé

Soit $\varepsilon > 0$. La question précédente donne l'existence de $C \in T$ t.q. $m(C) < \infty$ et $\int_{C^c} |f| dm \leq \varepsilon$.

La proposition 4.9 donne ici aussi l'existence de $\delta > 0$ t.q. $(A \in T, m(A) \le \delta) \Rightarrow \int_A |f| dm \le \varepsilon$.

Le théorème d'Egorov (appliqué à la mesure définie par $m_C(B) = m(B \cap C)$ pour $B \in T$, qui est bien une mesure finie sur T) donne l'existence de $A \in T$ t.q. $m(A \cap C) \le \delta$ et $f_n \to f$ uniformément sur A^c. On a donc :

$$\int |f_n - f| dm \le \int_{A^c \cap C} |f_n - f| dm + \int_{A \cup C^c} |f_n| dm + \int_{A \cup C^c} |f| dm.$$

Par le choix de A et de C, on a $\int_{A\cup C^c} |f| dm = \int_{(A\cap C)\cup C^c} |f| dm \le \int_{A\cap C} |f| dm + \int_{C^c} |f| dm \le 2\varepsilon$.

En reprenant la question 3a, on remarque que l'hypothèse $m(E) < \infty$ n'a été utilisée que pour dire que $m(A^c) < \infty$. Ici, comme $m(A^c \cap C) < \infty$, la même démonstration donne donc qu'il il existe n_0 t.q.

$$n \ge n_0 \Rightarrow \int_{A \cup C^c} |f_n| dm \le \int_{A\cup C^c} |f| dm + 2\varepsilon \le 4\varepsilon.$$

Enfin, par convergence uniforme de f_n vers f sur A^c, il existe n_1 t.q.

$$n \ge n_1 \Rightarrow \int_{A^c \cap C} |f_n - f| dm \le m(C) \sup_{A^c} |f_n - f| \le \varepsilon.$$

On a donc :

$$n \ge \max(n_0, n_1) \Rightarrow \int |f_n - f| dm \le 7\varepsilon.$$

Ce qui prouve que $f_n \to f$ dans L^1, quand $n \to \infty$.

---

4. Dans cette question, on suppose que $1 < p < \infty$. Montrer que $f_n \to f$ dans L^p, quand $n \to \infty$. [S'inspirer de la méthode suggérée pour le cas $p = 1$.]

corrigé

On traite directement le cas général (c'est-à-dire $m(E) \le \infty$). Soit $\varepsilon > 0$. Comme $|f|^p \in L^1$, La proposition 4.9 donne l'existence de $C \in T$ t.q. $m(C) < \infty$ et $\int_{C^c} |f|^p dm \le \varepsilon$. Elle donne ici aussi l'existence de $\delta > 0$ t.q. $(A \in T, m(A) \le \delta) \Rightarrow \int_A |f|^p dm \le \varepsilon$.

On applique maintenant le théorème d'Egorov avec la mesure m_C (comme à la question précédente) et pour les suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(|f_n|^p)_{n\in\mathbb{N}}$. On obtient (en prenant l'union des ensembles donnés par le théorème pour ces deux suites) l'existence de $A \in T$ t.q. $m(A \cap C) \le \delta$, $f_n \to f$ uniformément sur A^c et $|f_n|^p \to |f|^p$ uniformément sur A^c . On a :

$$\int |f_n - f|^p dm \le \int_{A^c\cap C} |f_n - f|^p dm + 2^p \int_{A\cup C^c} |f_n|^p dm + 2^p \int_{A\cup C^c} |f|^p dm.$$

Par le choix de A et de C, on a $\int_{A\cup C^c} |f|^p dm = \int_{(A\cap C)\cup C^c} |f|^p dm \le \int_{A\cap C} |f|^p dm + \int_{C^c} |f|^p dm \le 2\varepsilon$.

Comme à la question précédente, en reprenant la question 3a, on obtient qu'il existe n_0 t.q.

$$n \ge n_0 \Rightarrow \int_{A\cup C^c} |f_n|^p dm \le \int_{A\cup C^c} |f|^p dm + 2\varepsilon \le 4\varepsilon.$$

En fait, pour montrer cette inégalité avec la question 3a, on remplace (12.91) par :

$$\begin{aligned}\int_{A\cup C^c}|f_n|^p dm &= \int_{A\cup C^c}|f|^p dm + \int_{A\cup C^c}(|f_n|^p - |f|^p)dm\\ &= \int_{A\cup C^c}|f|^p dm + \|f_n\|_p^p - \|f\|_p^p + \int_{A^c\cap C}(|f|^p - |f_n|^p)dm,\end{aligned}$$

et on utilise la convergence de $\|f_n\|_p^p$ vers $\|f\|_p^p$, la convergence uniforme de $|f_n|^p$ vers $|f|^p$ et le fait que $m(C) < \infty$.

Enfin, par convergence uniforme de f_n vers f sur A^c, il existe n_1 t.q.

$$n \geq n_1 \Rightarrow \int_{A^c\cap C}|f_n - f|^p dm \leq m(C)\sup_{A^c}|f_n - f|^p \leq \varepsilon.$$

On a donc :

$$n \geq \max(n_0, n_1) \Rightarrow \int |f_n - f|^p dm \leq 2^p(7\varepsilon).$$

Ce qui prouve que $f_n \to f$ dans L^p, quand $n \to \infty$.

---

5. Dans cette question, on suppose que $p = \infty$ et que $(E, T, m) = (]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda)$. Donner un exemple pour lequel $f_n \not\to f$ dans L^∞, quand $n \to \infty$.

corrigé

Pour $n \geq 2$, on pose $f = 1_{]\frac{1}{2},1[}$ et on définit f_n ainsi :

$$\begin{aligned}&f_n(x) = 0 \text{ si } 0 \leq x \leq \tfrac{1}{2},\\ &f_n(x) = n(x - \tfrac{1}{2}) \text{ si } \tfrac{1}{2} \leq x \leq \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{n},\\ &f_n(x) = 1 \text{ si } \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{n} \leq x \leq 1.\end{aligned}$$

On a bien, quand $n \to \infty$, $f_n \to f$ p.p., $\|f_n\|_\infty \to \|f\|_\infty$ et $f_n \not\to f$ dans L^∞ (car $\|f_n - f\|_\infty = 1$ pour tout $n \geq 2$).

Corrigé 104 (Conv. p.p. et conv. des normes, par Fatou)

Soit (E, T, m) un espace mesuré. Pour $p \in [1, \infty]$, on note L^p l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

Soit $p \in [1, \infty[$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de L^p et $f \in L^p$. On suppose que $f_n \to f$ p.p. et que $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$, quand $n \to \infty$.

1. On suppose que $p = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $g_n = |f_n| + |f| - |f_n - f|$ (en ayant choisi des représentants de f_n et f). Montrer que $g_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En utilisant le lemme de Fatou, montrer que $f_n \to f$ dans L^1.

corrigé

Comme $|f - f_n| \leq |f| + |f_n|$, on a bien $g_n \geq 0$.Comme g_n tends p.p. vers $2|f|$, le lemme de Fatou (lemme 4.6) donne :

$$\int 2|f|dm \leq \liminf_{n\to\infty} \int g_n dm.$$

Comme $\|f_n\|_1 \to \|f\|_1$, on a $\liminf_{n\to\infty} \int g_n dm = 2\int |f|dm - \limsup_{n\to\infty} \int |f-f_n|dm$. On a donc :

$$\int 2|f|dm \leq 2\int |f|dm - \limsup_{n\to\infty} \int |f-f_n|dm.$$

On en déduit que $\limsup_{n\to\infty} \int |f-f_n|dm \leq 0$, et donc que $f_n \to f$ dans L^1.

---

2. On suppose maintenant que $p \in]1,\infty[$. En utilisant le lemme de Fatou pour une suite convenable, montrer que $f_n \to f$ dans L^p.

corrigé

On prend maintenant $g_n = 2^p|f_n|^p + 2^p|f|^p - |f_n - f|^p$. Comme $|f - f_n| \leq |f| + |f_n| \leq 2\max\{|f_n|, |f|\}$, on a $|f - f_n|^p \leq 2^p \max\{|f_n|, |f|\}^p \leq 2^p|f_n|^p + 2^p|f|^p$. On a donc $g_n \geq 0$. Comme g_n tends p.p. vers $2^{p+1}|f|^p$, le lemme de Fatou (lemme 4.6) donne :

$$\int 2^{p+1}|f|^p dm \leq \liminf_{n\to\infty} \int g_n dm.$$

Comme $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$, on a $\liminf_{n\to\infty} \int g_n dm = 2^{p+1} \int |f|^p dm - \limsup_{n\to\infty} \int |f-f_n|^p dm$. On a donc :

$$\int 2^{p+1}|f|^p dm \leq 2^{p+1} \int |f|^p dm - \limsup_{n\to\infty} \int |f-f_n|^p dm.$$

On en déduit que $\limsup_{n\to\infty} \int |f-f_n|^p dm \leq 0$, et donc que $f_n \to f$ dans L^p.

Corrigé 105 (Compacité $L^p - L^q$)

Dans cet exercice, (E, T, m) est un espace mesuré. Pour tout $1 \leq r \leq \infty$, on note L^r l'espace $L^r_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ (et $\mathcal{L}^r$ l'espace $\mathcal{L}^r_{\mathbb{R}}(E, T, m)$).

1. Soit $r > 1$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de L^r. Montrer que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-intégrable, c'est-à-dire que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ t.q. } n \in \mathbb{N},\ A \in T,\ m(A) \leq \delta \Rightarrow \int_A |g_n|dm \leq \varepsilon.$$

[Utiliser l'inégalité de Hölder.]

corrigé

En utilisant l'inégalité de Hölder (inégalité (6.3)) entre $r \in]1,\infty]$ et son conjugué et les fonctions g_n et 1_A, on obtient, pour tout $A \in T$ de mesure finie :

$$\int_A |g_n|dm \leq \|g_n\|_r m(A)^{1-\frac{1}{r}}.$$

Si C est un majorant de $\{\|g_n\|_r,\ n \in \mathbb{N}\}$, il suffit donc de prendre $\delta > 0$ t.q. $C\delta^{1-\frac{1}{r}} \leq \varepsilon$ (ce qui est possible car $r > 1$) pour avoir le résultat demandé.

Soit $1 \leq p < q \leq \infty$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de L^q. On suppose dans toute la suite que $f_n \to f$ p.p. quand $n \to \infty$.

2. (Compacité $L^p - L^q$.) On suppose que $m(E) < \infty$.

   (a) Montrer que $f \in L^q$ (au sens “il existe $g \in \mathcal{L}^q$ t.q. $f = g$ p.p.”).

   corrigé

   Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on choisit un représentant de f_n, encore noté f_n. Il existe $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et $f_n(x) \to f(x)$, quand $n \to \infty$, pour tout $x \in A^c$. On pose $g(x) = f(x)$ pour $x \in A^c$ et $g(x) = 0$ pour $x \in A$, de sorte que $g = f$ p.p. et $g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n 1_{A^c}(x)$ pour tout $x \in E$.

   Si $q < \infty$, on applique le lemme de Fatou à la suite $(|f_n|^q)_{n\in\mathbb{N}}$. Il donne :

   $$\int |g|^q dm \le \liminf_{n\to\infty} \int |f_n|^q dm \le C^q,$$

   où C est un majorant de $\{\|f_n\|_q,\, n \in \mathbb{N}\}$. On a donc $g \in \mathcal{L}^q$ et donc $f \in L^q$ (au sens demandé).

   Si $q = \infty$, comme $|f_n| \le \|f_n\|_\infty$ p.p., on déduit de $g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n 1_{A^c}(x)$ pour tout $x \in E$ le fait que $\|g\|_\infty \le C$ p.p., où C est un majorant de $\{\|f_n\|_\infty,\, n \in \mathbb{N}\}$. On a donc, ici aussi, $g \in \mathcal{L}^\infty$ et donc $f \in L^\infty$ (au sens demandé).

   (b) Montrer que $f_n \to f$ dans L^p quand $n \to \infty$. [Utiliser la question 1 avec $g_n = |f_n - f|^p$ et un théorème du cours.]

   corrigé

   La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans L^r, avec $r = \frac{q}{p} > 1$. Elle est donc équi-intégrable (par la question 1). Comme elle converge p.p. vers 0 et que $m(E) < \infty$, le théorème de Vitali (théorème 4.8) donne que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 dans L^1 et donc que $f_n \to f$ dans L^p quand $n \to \infty$.

3. On suppose que $m(E) = \infty$.

   (a) Soit $B \in T$ t.q. $m(B) < \infty$. Montrer que $f_n 1_B \to f 1_B$ dans L^p quand $n \to \infty$.

   corrigé

   On définit la mesure m_B sur T en posant $m(A) = m(A \cap B)$ pour tout $A \in T$. la mesure m_B est finie. On peut donc appliquer la question 2 avec cette mesure. On obtient que $f_n \to f$, quand $n \to \infty$, dans l'espae $L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m_B)$. Ceci qui donne que $f_n 1_B \to f 1_B$ dans L^p quand $n \to \infty$ (car, $\int |f_n - f|^p 1_B dm = \int |f_n - f|^p dm_B$).

   (b) On prend ici $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, $q = 2$, $p = 1$, $f = 0$. Donner un exemple pour lequel $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$, $f_n \not\to 0$ dans L^1 quand $n \to \infty$ (et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée dans L^2, $f_n \to 0$ p.p. quand $n \to \infty$).

   corrigé

   On peut prendre, par exemple, $f_n = 1_{]n,n+1[}$.

Corrigé 106 (Exemples de v.a. appartenant à L^q)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilités et X une v.a. (réelle). Dans les trois cas suivants, donner les valeurs de $q \in [1, \infty]$ pour lesquels la variable aléatoire X appartient à l'espace $L^q(\Omega, \mathcal{A}, P)$:

1. X suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ ($\lambda > 0$) (c'est-à-dire que la loi de X a une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue, avec $f(x) = \lambda \exp(-\lambda x) 1_{]0,+\infty[}$ pour $x \in \mathbb{R}$).

corrigé

Soit $q \in [1, \infty[$, on a :

$$\int_\Omega |X|^q dP = \int_{\mathbb{R}} |x|^q dP_X(x) = \int_0^\infty x^q \lambda \exp(-\lambda x) dx < \infty,$$

car la fonction $x \mapsto |x|^q \lambda \exp(-\lambda x)$ est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^+$. On a donc $X \in L^q(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit maintenant $q = \infty$. Pour tout $a > 0$, on a, avec $A =]a, \infty[$:

$$P[X > a] = \int_\Omega 1_A(X) dP = \int_{\mathbb{R}} 1_A(x) dP_X(x) = \int_a^\infty \lambda \exp(-\lambda x) dx > 0,$$

car $\lambda \exp(-\lambda x) > 0$ pour tout $x > a$. Donc $X \notin L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

---

2. X suit une loi de Cauchy de paramètre $c > 0$ (la loi de X a une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue, avec $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{c}{x^2 + c^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$).

corrigé

Il suffit ici de considérer le cas $q = 1$. On a :

$$\int_\Omega |X| dP = \int_{\mathbb{R}} |x| dP_X(x) \geq \frac{c}{\pi} \int_0^\infty \frac{x}{x^2 + c^2} dx \geq \frac{c}{\pi} \int_c^\infty \frac{1}{2x} dx = \infty.$$

On a donc $X \notin L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$, ce qui donne aussi $X \notin L^q(\Omega, \mathcal{A}, P)$ pour tout $q \in [1, \infty]$ (car $L^q(\Omega, \mathcal{A}, P) \subset L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ pour $q > 1$).

---

3. X suit une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ ($p \in]0, 1[$) (c'est-à-dire que $P(\{X = k\}) = p(1-p)^{k-1}$, pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$).

corrigé

On note $A_k = \{X = k\} = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) = k\}$ et $A = \cup_{k=1}^\infty A_k$. Par σ-additivité de P, on a $P(A) = \sum_{k=1}^\infty P(A_k) = \sum_{k=1}^\infty p(1-p)^{k-1} = 1$. On a donc $P(A^c) = 0$.

Soit $q \in [1, \infty[$, on a :

$$\int_\Omega |X|^q dP = \int_A |X|^q dP = \sum_{k=1}^\infty \int_{A_k} |X|^q dP = \sum_{k=1}^\infty k^q p(1-p)^{k-1} < \infty,$$

car la série de terme général $k^q p(1-p)^{k-1}$ est convergente (pour le voir, il suffit, par exemple, de remarquer que

$$\lim_{k \to \infty} \frac{(k+1)^q p(1-p)^k}{k^q p(1-p)^{k-1}} = \lim_{k \to \infty} \frac{(k+1)^q (1-p)}{k^q} = 1 - p < 1.$$

On a donc $X \in L^q(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit maintenant $q = \infty$. Pour tout $a > 0$, on a $P[X > a] \geq P(A_k) > 0$ si $k > a$. On a donc $X \notin L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

12.6.2 Espaces de Hilberts, espace L^2

Corrigé 107

Soit (E, T, m) un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'élements de $L^2_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ deux à deux orthogonaux. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge (dans L^2) si et seulement si $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_2^2$ est convergente (dans $\mathbb{R}$).

—————————————**corrigé**—————————————

Comme $L^2_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ est un espace complet, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est convergente dans $L^2_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ si et seulement la suite des sommes partielles, $(\sum_{k=0}^{n} f_k)_{n\in\mathbb{N}}$, est de Cauchy (dans L^2). Cette suite des sommes partielles est de Cauchy si et seulement si elle vérifie :

$$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ n_0 \text{ t.q. } m \geq n \geq n_0 \Rightarrow \|\sum_{k=n}^{m} f_k\|_2^2 \leq \varepsilon. \tag{12.92}$$

Le fait que les f_n soient deux à deux orthogonaux nous donne (théorème de Pythagore) que

$$\|\sum_{k=n}^{m} f_k\|_2^2 = \sum_{k=n}^{m} \|f_k\|_2^2.$$

L'assertion 12.92 est donc équivalente à dire que la suite $(\sum_{k=0}^{n} \|f_k\|_2^2)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy (dans $\mathbb{R}$), ce qui est équivalent à dire que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_2^2$ est convergente (dans $\mathbb{R}$).

———————————————————————————

Corrigé 108 (L^p n'est pas un espace de Hilbert si $p \neq 2$)

Montrer que $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ (muni de sa norme usuelle) n'est pas un espace de Hilbert si $1 \leq p \leq \infty$, $p \neq 2$. [Pour $p \neq 2$, chercher des fonctions f et g mettant en défaut l'identité du parallèlogramme, c'est-à-dire l'identité (6.18) page 143.]

—————————————**corrigé**—————————————

On prend $f = 1_{]0,1[}$ et $g = 1_{]1,2[}$, de sorte que $f \in L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, $g \in L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ (avec la confusion habituelle entre une classe et l'un de ses représentants) et que :

$$\|f\|_p = \|g\|_p = 1,\ \|f + g\|_p = \|f - g\|_p = 2^{\frac{1}{p}}.$$

Pour $p \neq 2$, on a donc $\|f + g\|_p^2 + \|f - g\|_p^2 = 2(2^{\frac{2}{p}}) \neq 4 = 2\|f\|_p^2 + 2\|g\|_p^2$.

L'identité du parallèlogramme, c'est-à-dire l'identité (6.18) page 143, n'est donc pas satisfaite (pour $p \neq 2$), ce qui prouve que, pour $p \neq 2$, la norme $\|\cdot\|_p$ (sur $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$) n'est pas induite par un produit scalaire.

———————————————————————————

Corrigé 109 (projection sur le cône positif de L^2)

Soit (X, T, m) un espace mesuré et $E = L^2_{\mathbb{R}}(X, T, m)$. On pose $C = \{f \in E,\ f \geq 0 \text{ p.p.}\}$.

1. Montrer que C est une partie convexe fermée non vide de E.

—————————————**corrigé**—————————————

- $C \neq \emptyset$ car $0 \in C$.

- Soit $f, g \in C$ et $t \in [0,1]$. On a $tf + (1-t)g \in L^2 = L^2_{\mathbb{R}}(X,T,m)$, car L^2 est un e.v., et $tf + (1-t)g \geq 0$ p.p.. On a donc $tf + (1-t)g \in C$, ce qui prouve que C est convexe.
- Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C$ t.q. $f_n \to f$ dans L^2 quand $n \to \infty$. On veut montrer que $f \in C$ (pour en déduire que C est fermée).

  Pour tout $\varphi \in L^2$, on a $\int f_n \varphi dm \to \int f\varphi dm$ (car $|\int f_n\varphi dm - \int f\varphi dm| \leq \|f_n - f\|_2 \|\varphi\|_2$).
  On choisit $\varphi = f^- \in L^2$. Comme $f_n f^- \geq 0$ p.p., on en déduit $-\int (f^-)^2 dm = \int f f^- dm \geq 0$. Ce qui prouve que $f^- = 0$ p.p. et donc que $f \geq 0$ p.p.. On a donc montré que $f \in C$ et donc que C est fermée.

  Pour montrer que C est fermée, il est aussi possible d'utiliser la réciproque partielle du théorème de convergence dominée (théorème 6.2).

---

2. Soit $f \in E$. Montrer que $P_C f = f^+$.

corrigé

On a $f^+ \in C$. Pour montrer que $P_C f = f^+$, on utilise la première caractérisation de la projection (proposition 6.15).

Soit $g \in C$, on a $(f - f^+/f^+ - g)_2 = -(f^-/f^+ - g)_2 = \int f^- g dm \geq 0$ (on a utilisé ici le fait que $f^- f^+ = 0$ p.p.). La proposition 6.15 donne alors $P_C f = f^+$.

Corrigé 110 (Exemple de non existence de la projection sur un s.e.v. fermé)
Dans cet exercice, on donne un exemple t.q. :
E est un espace de Banach réel, F est un sous espace vectoriel fermé de E, $g \in E \setminus F$ (et donc $d(g,F) = \inf\{\|g - f\|_E,\ f \in F\} > 0\ldots$) et il n'existe pas d'élément $f \in E$ t.q. $d(g,F) = \|g - f\|_E$.

On prend $E = C([0,1],\mathbb{R})$, on munit E de la norme habituelle, $\|f\|_E = \max\{|f(x)|,\ x \in [0,1]\}$. On pose $F = \{f \in E;\ f(0) = 0,\ \int_0^1 f(x)dx = 0\}$. Enfin, on prend $g \in E$ défini par $g(x) = x$, pour tout $x \in [0,1]$.

1. Montrer que E est un espace de Banach (réel).

corrigé

Il est clair que E est un e.v. sur $\mathbb{R}$ et que $\|\cdot\|_E$ est une norme sur E, c'est la norme associée à la convergence uniforme. On montre maintenant que E est complet.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de E. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc $n(\varepsilon)$ t.q. :

$$x \in [0,1],\ n, m \geq n(\varepsilon) \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon. \tag{12.93}$$

De (12.93) on déduit que, pour tout $x \in [0,1]$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Il existe donc $f\ :\ [0,1] \to \mathbb{R}$ t.q. $f_n(x) \to f(x)$ quand $n \to \infty$, pour tout $x \in [0,1]$. Pour montrer que la convergence de f_n vers f est uniforme, il suffit de reprendre (12.93) avec un x fixé et un n fixé ($n \geq n(\varepsilon)$) et de faire tendre m verts ∞, on obtient :

$$x \in [0,1],\ n \geq n(\varepsilon) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \tag{12.94}$$

ce qui donne bien la convergence uniforme de f_n vers f. Comme les f_n sont continues, on en déduit que f est continue (comme limite uniforme de fonctions continues), c'est-à-dire $f \in E$. Enfin, (12.94) donne $\|f_n - f\|_E \leq \varepsilon$ si $n \geq n(\varepsilon)$ et donc $f_n \to f$ dans E, quand $n \to \infty$. Ce qui prouve que E est complet.

---

2. Montrer que F est un sous espace vectoriel fermé de E.

corrigé

On note T et S les applications de E dans $\mathbb{R}$ définies par $T(f) = f(0)$ et $S(f) = \int_0^1 f(x)dx$. Il s'agit donc d'applications linéaires de E dans $\mathbb{R}$. Elles sont également continues car $|T(f)| \leq \|f\|_E$ et $|S(f)| \leq \|f\|_E$ pour tout $f \in E$.

On en déduit que F est un s.e.v. fermé de E en remarquant que $F = \mathrm{Ker}T \cap \mathrm{Ker}S$.

---

3. Soit $f \in F$. Montrer que $\|g - f\|_E \geq 1/2$. [On pourra remarquer que $\int_0^1 |(g-f)(x)|dx \geq \int_0^1 (g-f)(x)dx = 1/2$.]

corrigé

Comme $(g-f)(x) \leq |(g-f)(x)|$ pour tout $x \in [0,1]$, on a bien

$$\int_0^1 (g-f)(x)dx \leq \int_0^1 |(g-f)(x)|dx.$$

On remarque ensuite que, puisque $f \in F$, on a $\int_0^1 (g-f)(x)dx = \int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$. Et donc :

$$\frac{1}{2} \leq \int_0^1 |(g-f)(x)|dx.$$

Puis, comme $\int_0^1 |(g-f)(x)|dx \leq \|g-f\|_E$, on en déduit que $\|g - f\|_E \geq 1/2$.

---

4. Montrer qu'il n'existe pas d'élément $f \in F$ t.q. $\|g - f\|_E = 1/2$.

corrigé

Dans le raisonnement de la question précédente, on remarque que les $\|g - f\|_E > 1/2$ sauf si $\int_0^1 |(g-f)(x)|dx = \|g-f\|_E$ et $\int_0^1 (g-f)(x)dx = \int_0^1 |(g-f)(x)|dx$.

Soit $f \in F$ t.q. $\|g-f\|_E = 1/2$. On a donc $\int_0^1 (g-f)(x)dx = \int_0^1 |(g-f)(x)|dx$ et $\int_0^1 |(g-f)(x)|dx = \|g-f\|_E$. On en déduit que $(g-f)(x) = |(g-f)(x)| = \|g-f\|_E = 1/2$ pour tout $x \in [0,1]$. En effet, si il existe, par exemple, $x_0 \in [0,1]$ t.q. $(g-f)(x_0) < |(g-f)(x_0)|$, on peut alors trouver (par continuité de $g-f$) un intervalle ouvert non vide sur lequel $(g-f) < |(g-f)|$ et on en déduit $\int_0^1 (g-f)(x)dx < \int_0^1 |(g-f)(x)|dx$ (un raisonnement analogue donne $|(g-f)(x)| = \|g-f\|_E$ pour tout $x \in [0,1]$).

On a donc montré que $f(x) = g(x) - \frac{1}{2} = x - \frac{1}{2}$ pour tout $x \in [0,1]$ ce qui est en contradiction avec $f(0) = 0$.

---

5. Montrer que $d(g, F) = 1/2$. [On pourra, par exemple, montrer que $\|g - f_n\|_E \to 1/2$, avec f_n défini par $f_n(x) = -\beta_n x$, pour $x \in [0, 1/n]$, $f_n(x) = (x - 1/n) - \beta_n/n$, pour $x \in [1/n, 1]$, et β_n choisi pour que $f_n \in F$.]

corrigé

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et f_n définie par $f_n(x) = -\beta_n x$, pour $x \in [0, 1/n]$, $f_n(x) = (x - 1/n) - \beta_n/n$, pour $x \in [1/n, 1]$. En prenant $\beta_n = (n-1)^2/(2n-1)$ on a $\int_0^1 f_n(x)dx = 0$ et donc $f_n \in F$. On remarque ensuite que $\|f_n - g\|_E = 1/n - \beta_n/n \to 1/2$ quand $n \to \infty$. On en déduit que $d(g, F) = 1/2$.

Corrigé 111 (Lemme de Lax-Milgram)

Soit E est un espace de Hilbert réel et a une application bilinéaire de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$. On note $(\cdot/\cdot)$ le produit scalaire dans E et $\|\cdot\|$ la norme dans E. On suppose qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$ t.q. :

$$|a(u, v)| \leq C\|u\|\|v\|, \ \forall u, v \in E \text{ (continuité de } a),$$

$$a(u, u) \geq \alpha\|u\|^2, \ \forall u \in E \text{ (coercivité de } a).$$

Soit $T \in E'$. On va montrer, dans cet exercice, qu'il existe un et un seul $u \in E$ t.q. $T(v) = a(u, v)$ pour tout $v \in E$ (ceci est le lemme de Lax-Milgram).

1. On suppose, dans cette question, que a est symétrique. On définit une application bilinéaire, notée $(\cdot/\cdot)_a$ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ par $(u/v)_a = a(u, v)$. Montrer que $(\cdot/\cdot)_a$ est un produit scalaire sur E et que la norme induite par ce produit scalaire est équivalente à la norme $\|\cdot\|$. En déduire qu'il existe un et un seul $u \in E$ t.q. $T(v) = a(u, v)$ pour tout $v \in E$. [Utiliser le théorème de représentation de Riesz.]

corrigé

L'application $(\cdot/\cdot)_a \ : \ E \times E \to \mathbb{R}$ est symétrique, linéaire par rapport à son premier argument, et $(u/u)_a > 0$ pour $u \in E \setminus \{0\}$ (grâce à la coercivité de a). C'est donc un produit scalaire sur E.

La norme induite par ce produit scalaire est équivalente à la norme sur E, notée $\|\cdot\|$. En effet, les hypothèses de continuité et coercivité de a donnent

$$\sqrt{\alpha}\|u\| \leq \|u\|_a \leq \sqrt{C}\|u\|, \ \forall u \in E.$$

Comme T est dans E', c'est-à-dire linéaire et continu pour la norme $\|\cdot\|$, T est aussi linéaire et continu pour la norme $\|\cdot\|_a$. Or, E muni de la norme $\|\cdot\|_a$ est un espace de Hilbert car la norme $\|\cdot\|_a$ est induite par un produit scalaire et E est complet avec cette norme car il est complet avec la norme $\|\cdot\|$ qui est équivalente. On peut donc appliquer le théorème de représentation de Riesz (théorème 6.8) avec E muni de la norme $\|\cdot\|_a$. Il donne qu'il existe un et seul $u \in E$ t.q. $T(v) = (u/v)_a$ pour tout $v \in E$, c'est-à-dire qu'il existe un et un seul $u \in E$ t.q. :

$$T(v) = a(u, v) \text{ pour tout } v \in E.$$

---

2. On ne suppose plus que a est symétrique.

(a) Soit $u \in E$, Montrer que l'application $v \mapsto a(u,v)$ est un élément de E'. En déduire qu'il existe un et un seul élément de E, notée Au, t.q. $(Au/v) = a(u,v)$ pour tout $v \in E$.

corrigé

L'application $\psi_u : E \to \mathbb{R}$, définie par $\psi_u(v) = a(u,v)$ pour tout $v \in E$, est bien linéaire de E dans $\mathbb{R}$. Elle est aussi continue car $|\psi_u(v)| = |a(u,v)| \leq C\|u\|\|v\|$ pour tout v dans E. On a donc $\psi_u \in E'$ (et $\|\psi_u\|_{E'} \leq C\|u\|$).

Comme $\psi_u \in E'$, le théorème de représentation de Riesz (théorème 6.8) donne qu'il existe un élément de E, noté Au t.q. $(Au/v) = \psi_u(v)$ pour tout $v \in E$, c'est-à-dire :

$$(Au/v) = a(u,v) \text{ pour tout } v \in E.$$

On note, dans la suite A l'application qui à $u \in E$ associe $Au \in E$.

(b) Montrer que A est linéaire continue de E dans E.

corrigé

Soit $u_1, u_2 \in E$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. On note $w = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$. Comme a est linéaire par rapport à son premier argument, on a :

$$a(w,v) = \alpha_1 a(u_1,v) + \alpha_2 a(u_2,v) \text{ pour tout } v \in E,$$

et donc $(Aw/v) = \alpha_1(Au_1/v) + \alpha_2(Au_2/v)$ pour tout $v \in E$, ou encore

$$(Aw - \alpha_1 Au_1 - \alpha_2 Au_2/v) = 0 \text{ pour tout } v \in E.$$

On en déduit que $Aw = \alpha_1 Au_1 - \alpha_2 Au_2$ (il suffit de prendre $v = Aw - \alpha_1 Au_1 - \alpha_2 Au_2$ dans l'égalité précédente) et donc que A est une application linéaire de E dans E.

Pour montrer la continuité de A, on remarque que (pour tout $u \in E$) $|(Au/v)| = |a(u,v)| \leq C\|u\|\|v\|$ pour tout $v \in E$. D'où l'on déduit, en prenant $v = Au$, que $\|Au\| \leq C\|u\|$.

L'application A est donc linéaire continue de E dans E.

Il est important, pour la suite, de remarquer que la coercivité de a donne :

$$\alpha\|u\|^2 \leq a(u,u) = (Au/u) \leq \|Au\|\|u\|, \text{ pour tout } u \in E,$$

et donc :

$$\|u\| \leq \frac{1}{\alpha}\|Au\|, \text{ pour tout } u \in E. \tag{12.95}$$

(c) Montrer que $\mathrm{Im}(A)$ est fermé

corrigé

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{Im}(A)$ et $f \in E$ t.q. $f_n \to f$ dans E quand $n \to \infty$. On veut montrer que $f \in \mathrm{Im}(A)$.

Comme $f_n \in \mathrm{Im}(A)$, il existe, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in E$ t.q. $Au_n = f_n$. L'inégalité (12.95) donne alors, pour tout $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\|u_n - u_m\| \leq \frac{1}{\alpha}\|f_n - f_m\|.$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant de Cauchy (car convergente), on en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et donc convergente (car E est complet).

Il existe donc $u \in E$ t.q. $u_n \to u$ (dans E) quand $n \to \infty$. D'où l'on déduit, comme A est continue, que $f_n = Au_n \to Au$ (dans E) quand $n \to \infty$. On a donc $f = Au$, ce qui prouve que $f \in \mathrm{Im}(A)$ et donc que $\mathrm{Im}(A)$ est fermé.

(d) Montrer que $(\mathrm{Im}(A))^\perp = \{0\}$.

corrigé

Soit $u \in (\mathrm{Im}(A))^\perp$. On a donc $(Av/u) = 0$ pour tout $v \in E$. On prend $v = u$, on obtient, grâce à la coercivité de a :

$$\alpha\|u\|^2 \le a(u,u) = (Au/u) = 0,$$

et donc $u = 0$. Ceci prouve bien que $(\mathrm{Im}(A))^\perp = \{0\}$.

(e) Montrer que A est bijective et en déduire qu'il existe un et un seul $u \in E$ t.q. $T(v) = a(u,v)$ pour tout $v \in E$.

corrigé

L'inégalité (12.95) donne l'injectivité de A. Pour montrer la surjectivité de A, on remarque que $\mathrm{Im}(A)$ est un s.e.v. fermé de E, on a donc $E = \mathrm{Im}(A) \oplus (\mathrm{Im}(A))^\perp$ (cf. théorème 6.7). Comme $(\mathrm{Im}(A))^\perp = \{0\}$, on a donc $E = \mathrm{Im}(A)$, c'est-à-dire A surjective.

On a bien bien montré que A est bijective.

Le théorème de représentation de Riesz (théorème 6.8) donne l'existence d'un et un seul $z \in E$ t.q.

$$T(v) = (z/v),\ \forall v \in E.$$

D'autre part, la définition de A donne :

$$a(u,v) = (Au/v),\ \forall v \in E.$$

Pour $u \in E$, on a donc :

$$(T(v) = a(u,v),\ \forall v \in E) \Leftrightarrow (z = Au).$$

La bijectivité de A donne l'existence d'un et d'un seul $u \in E$ t.q. $Au = z$. On a donc un et un seul $u \in E$ t.q. $T(v) = a(u,v)$ pour tout $v \in E$.

Corrigé 112 (Exemple de projection dans L^2)

On désigne par λ la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $]0,1[$, par L^p l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(]0,1[, B(]0,1[), \lambda)$ et par $\mathcal{L}^p$ l'espace $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(]0,1[, B(]0,1[), \lambda)$.

Soit $g \in L^2$.

1. Soit $v \in L^2$ et $\phi \in C_c^\infty(]0,1[,\mathbb{R})$ (on rappelle que $\phi \in C_c^\infty(]0,1[,\mathbb{R})$ signifie que ϕ est une application de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^∞, et qu'il existe $K \subset]0,1[$, K compact, t.q. $\phi(x) = 0$ pour tout $x \in]0,1[\setminus K$) . Montrer que $vg\phi' \in L^1$.

corrigé

Comme d'habitude, on va confondre un élément de L^p avec l'un de ses représentants.

Comme $g, v \in L^2$, on a $vg \in L^1$ (d'après le lemme 6.2). Puis, comme $\phi' \in C_c^\infty(]0,1[,\mathbb{R})$, on a $\phi' \in L^\infty$ et donc (par la proposition 6.9) $vg\phi' \in L^1$.

On pose $\mathcal{C} = \{v \in L^2;\ v \leq 1$ p.p., $\int vg\phi' d\lambda \leq \int \phi d\lambda$, pour tout $\phi \in C_c^\infty(]0,1[,\mathbb{R})$, $\phi \geq 0\}$. (On rappelle que $\phi \geq 0$ signifie $\phi(x) \geq 0$ pour tout $x \in]0,1[$.)

2. Montrer que $\mathcal{C}$ est un convexe fermé non vide de L^2.

corrigé

- $\mathcal{C} \neq \emptyset$ car $0 \in \mathcal{C}$.
- On montre la convexité de $\mathcal{C}$. Soient $v, w \in \mathcal{C}$ et $t \in [0,1]$. On a $tv + (1-t)w \in L^2$ (car L^2 est un e.v.). Du fait que $v \leq 1$ p.p. et $w \leq 1$ p.p., on déduit immédiatement (comme $t \geq 0$ et $(1-t) \geq 0$) que $tv + (1-t)w \leq t + (1-t) = 1$ p.p.. Enfin, soit $\phi \in C_c^\infty(]0,1[,\mathbb{R})$, $\phi \geq 0$. Comme $t \geq 0$ et $(1-t) \geq 0$, on remarque que

  $$t \int vg\phi' d\lambda \leq t \int \phi d\lambda,$$
  $$(1-t) \int wg\phi' d\lambda \leq (1-t) \int \phi d\lambda.$$

  Ce qui donne, en additionnant,

  $$\int (tv + (1-t)w) g\phi' d\lambda \leq \int \phi d\lambda.$$

  On en déduit que $(tv + (1-t)w) \in \mathcal{C}$ et donc que $\mathcal{C}$ est convexe.
- On montre enfin que $\mathcal{C}$ est fermée. Soient $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$ et $v \in L^2$ t.q. $v_n \to v$ dans L^2 quand $n \to \infty$. On veut montrer que $v \in \mathcal{C}$.

  On remaque tout d'abord que, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz (inégalité (6.14)), on a :

  $$\int v_n w d\lambda \to \int v w d\lambda, \text{ quand } n \to \infty, \forall w \in L^2. \tag{12.96}$$

  On prend $w = v1_{v>1} \in L^2$ dans (12.96). Comme $v_n w \leq w$ p.p., on a $\int v_n w d\lambda \leq \int w d\lambda$. On déduit alors de (12.96) que $\int vw d\lambda \leq \int w d\lambda$ et donc que $\int (v-1)v1_{v>1} d\lambda \leq 0$. Comme $v(v-1)1_{v>1} \geq 0$ p.p., on a donc nécessairement $v(v-1)1_{v>1} = 0$ p.p. et donc $\lambda(\{v > 1\}) = 0$, c'est-à-dire $v \leq 1$ p.p..

  Soit maintenant $\phi \in C_c^\infty(]0,1[,\mathbb{R})$, $\phi \geq 0$. Par les inégalités de Cauchy-Schwarz et Hölder, on a :

  $$\int v_n g\phi' d\lambda \to \int vg\phi' d\lambda, \text{ quand } n \to \infty.$$

  En effet, $|\int v_n g\phi' d\lambda - \int vg\phi' d\lambda| \leq \|\phi'\|_\infty \int |v_n - v||g| d\lambda \leq \|\phi'\|_\infty \|v_n - v\|_2 \|g\|_2 \to 0$, quand $n \to \infty$.

  Du fait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int v_n g\phi' d\lambda \leq \int \phi d\lambda$, on obtient donc, passant à limite quand $n \to \infty$, que $\int vg\phi' d\lambda \leq \int \phi d\lambda$. Ce qui montre bien que $v \in \mathcal{C}$.

  On a bien montré que $\mathcal{C}$ est fermée.

3. On désigne par $\mathbf{1}$ la fonction constante et égale à 1 sur $]0,1[$. Soit $u \in \mathcal{C}$. Montrer que : $(\|u-\mathbf{1}\|_2 \leq \|v-\mathbf{1}\|_2$ pour tout $v \in \mathcal{C}) \Leftrightarrow (\int(\mathbf{1}-u)(u-v)d\lambda \geq 0$ pour tout $v \in \mathcal{C})$.

corrigé

On remarque d'abord que

$$(\|u-\mathbf{1}\|_2 \leq \|v-\mathbf{1}\|_2 \text{ pour tout } v \in \mathcal{C}) \Leftrightarrow u = P_{\mathcal{C}}\mathbf{1}.$$

On utilise maintenant la première caractérisation de la projection (proposition 6.15), elle donne que

$$u = P_{\mathcal{C}}\mathbf{1} \Leftrightarrow ((\mathbf{1}-u/u-v)_2 \geq 0 \text{ pour tout } v \in \mathcal{C}),$$

et donc que

$$u = P_{\mathcal{C}}\mathbf{1} \Leftrightarrow (\int(\mathbf{1}-u)(u-v)d\lambda \geq 0 \text{ pour tout } v \in \mathcal{C}). \tag{12.97}$$

4. Soit $u \in \mathcal{C}$ t.q. $\|u-\mathbf{1}\|_2 \leq \|v-\mathbf{1}\|_2$ pour tout $v \in \mathcal{C}$. On suppose que $u, g \in C^1(]0,1[,\mathbb{R})$.

   (a) Montrer que $(ug)'(x) \geq -1$ pour tout $x \in]0,1[$.

corrigé

On raisonne par l'absurde. On suppose qu'il existe $c \in]0,1[$ t.q. $(ug)'(c) < -1$. Par continuité de $(ug)'$ en c, il existe donc a, b t.q. $0 < a < c < b < 1$ et $(ug)'(x) < -1$ pour tout $x \in]a,b[$.

On peut construire $\varphi \in C_c^\infty(]0,1[,\mathbb{R})$ t.q. $\varphi \geq 0$, $\varphi(c) > 0$ et $\varphi = 0$ sur $]a,b[^c$. une telle fonction φ est obtenue, par exemple, en prenant :

$$\varphi(x) = \varphi_0(\frac{2y-(a+b)}{b-a}),\ x \in]0,1[, \tag{12.98}$$

avec :

$$\begin{aligned} &\varphi_0(x) = \exp\tfrac{1}{x^2-1},\ x \in]-1,1[, \\ &\varphi_0(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}\setminus]-1,1[. \end{aligned} \tag{12.99}$$

Comme $u \in \mathcal{C}$, on a, d'après la définition de $\mathcal{C}$ (car φ est un choix possible pour ϕ) :

$$\int_a^b u(x)g(x)\varphi'(x)dx = \int ug\varphi' d\lambda \leq \int \phi d\lambda = \int_a^b \varphi(x)dx.$$

Comme ug est de classe C^1 sur $[a,b]$, on peut intégrer par parties sur $[a,b]$ pour obtenir (noter que $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$) $\int_a^b -(ug)'(x)\varphi(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx$, ou encore :

$$\int_a^b ((ug)'(x)+1)\varphi(x)dx \geq 0.$$

Ce qui impossible car $((ug)'+1)\varphi$ est une fonction continue négative, non identiquement nulle sur $[a,b]$ (car non nulle au point c).

(b) Soit $x \in]0,1[$ t.q. $u(x) < 1$. Montrer que $(ug)'(x) = -1$.

corrigé

On raisonne encore par l'absurde. On suppose donc qu'il existe $c \in]0,1[$ t.q. $u(c) < 1$ et $(ug)'(c) \neq -1$. Comme on sait déjà que $(ug)'(x) \geq -1$ pour tout $x \in]0,1[$, on a donc $(ug)'(c) > -1$.

Par continuité de u et $(ug)'$ en c, il existe donc a, b, avec $0 < a < c < b < 1$, et $\delta > 0$ t.q. $u(x) \leq 1 - \delta$ et $(ug)'(x) > -1 + \delta$ pour tout $x \in]a, b[$.

On utilise la même fonction φ qu'à la question précédente, c'est-à-dire donnée, par exemple, par (12.98) et (12.99). La propriété importante est que $\varphi \in C_c^\infty(]0,1[, \mathbb{R})$ soit t.q. $\varphi \geq 0$, $\varphi(c) > 0$ et $\varphi = 0$ sur $]a, b[^c$.

On va montrer que pour $\varepsilon > 0$ assez petit, on a $u + \varepsilon\varphi \in \mathcal{C}$.

On remarque d'abord que $u + \varepsilon\varphi \in L^2$ (pour tout $\varepsilon > 0$). Puis, en prenant $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1 = \frac{\delta}{\|\varphi\|_\infty}$, on a $u + \varepsilon\varphi \leq 1$ p.p.. Enfin, soit $\phi \in C_c^\infty(]0,1[, \mathbb{R})$, $\phi \geq 0\}$. On a, en utilisant une intégration par parties sur un intervalle compact de $]0,1[$ contenant le support de ϕ :

$$\int ((u + \varepsilon\varphi)g)\phi' d\lambda = -\int (ug)'\phi d\lambda - \varepsilon \int (\varphi g)'\phi d\lambda.$$

En utilisant le fait que $(ug)' \geq -1$ (partout) et $(ug)' > -1 + \delta$ sur $]a, b[$, on en déduit

$$\int ((u + \varepsilon\varphi)g)\phi' d\lambda \leq \int \phi d\lambda - \delta \int_a^b \phi(x)dx - \varepsilon \int_a^b (\varphi g)'\phi d\lambda \leq \int \phi d\lambda,$$

si $0 < \varepsilon \leq \frac{\delta}{M}$, avec $M = \max_{x \in [a,b]} |(\varphi g)'(x)| < \infty$ car $(\varphi g)'$ est continue sur $[a, b]$.

En prenant $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2) > 0$, on obtient donc $u + \varepsilon\varphi \in \mathcal{C}$. Comme $u = P_{\mathcal{C}}\mathbf{1}$, on peut maintenant prendre $v = u + \varepsilon\varphi$ dans la caractérisation de $P_{\mathcal{C}}\mathbf{1}$, on obtient, comme $\varepsilon > 0$:

$$\int_a^b (1 - u(x))\varphi(x)dx = \int (1 - u)\varphi d\lambda \leq 0.$$

Ce qui est impossible car $(1 - u)\varphi$ est une fonction continue positive, non identiquement nulle sur $]a, b[$ (car non nulle en c).

(c) Montrer que u est solution du problème suivant:
$(ug)'(x) \geq -1$, pour tout $x \in]0,1[$,
$u(x) \leq 1$, pour tout $x \in]0,1[$,
$(1 + (ug)'(x))(u(x) - 1) = 0$, pour tout $x \in]0,1[$.

corrigé

Cette question est immédiate. On a déjà vu que $(ug)'(x) \geq -1$, pour tout $x \in]0,1[$. Comme $u \in \mathcal{C}$, on a $u \leq 1$ p.p.. Mais, comme u est continue sur $]0,1[$, l'ensemble $\{u > 1\}$ est un ouvert, cet ensemble est donc vide (car un ouvert de mesure de Lebesgue nulle est toujours vide). On a donc $u \leq 1$ partout. Enfin, le fait que $(1 + (ug)'(x))(u(x) - 1) = 0$, pour tout $x \in]0,1[$, découle de la question précédente qui montre justement que $(1 + (ug)'(x)) = 0$ si $u(x) < 1$.

Corrigé 113 (Approximation dans L^2)
On désigne par λ la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}$, par L^p l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda)$ et par $\mathcal{L}^p$ l'espace $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda)$. On note $dt = d\lambda(t)$.
Pour $f \in L^2$ et $k \in \mathbb{N}^\star$, on définit $T_k f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$T_k f(x) = k \int_{\frac{n(x)}{k}}^{\frac{n(x)+1}{k}} f(t)dt, \tag{12.100}$$

où $n(x)$ est l'entier de $\mathbb{Z}$ tel que $\dfrac{n(x)}{k} \leq x < \dfrac{n(x)+1}{k}$ (l'entier n dépend donc de x).

1. Soit $k \in \mathbb{N}^\star$ et $f \in L^2$. Montrer que $T_k f \in L^2$ (plus précisément, $T_k f \in \mathcal{L}^2$ et on confond alors, comme d'habitude, $T_k f$ avec $\{g \in \mathcal{L}^2,\ g = T_k f \text{ p.p.}\}$) et que $\|T_k f\|_2 \leq \|f\|_2$, pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$.

corrigé

Comme $f\mathbf{1}_{]\frac{n}{k},\frac{n+1}{k}[} \in L^1$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $T_k(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. On pose $c_n = k\int_{\frac{n}{k}}^{\frac{n+1}{k}} f(t)dt$, pour $n \in \mathbb{Z}$, de sorte que $T_k(x) = c_n$ pour tout $x \in [\frac{n}{k}, \frac{n+1}{k}[$.

$T_k f$ est mesurable car $(T_k f)^{-1}(A) = \cup_{n\in\mathbb{Z}, c_n \in A}[\frac{n}{k}, \frac{n+1}{k}[\in B(\mathbb{R})$, pour tout $A \subset \mathbb{R}$.

Pour $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in [\frac{n}{k}, \frac{n+1}{k}[$, on a (en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz) $(T_k(x))^2 = c_n^2 \leq k\int_{\frac{n}{k}}^{\frac{n+1}{k}} f^2(t)dt$. On déduit (on utilise ici le premier corollaire du théorème de convergence monotone, corollaire 4.1) :

$$\int (T_k f)^2 d\lambda = \sum_{n\in Z} \frac{1}{k} c_n^2 \leq \sum_{n \in Z} \int_{\frac{n}{k}}^{\frac{n+1}{k}} f^2(t)dt = \int f^2 d\lambda.$$

On a donc $T_k f \in L^2$ et $\|T_k f\|_2 \leq \|f\|_2$.

---

2. Soit $f \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (i.e. f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et à support compact). Montrer que $T_k f \to f$ dans L^2 quand $k \to \infty$.

corrigé

Soit $a > 0$ t.q. $f = 0$ sur $[-a, a]^c$. Comme f est uniformément continue, on a $T_k f \to f$ uniformément (sur $\mathbb{R}$) quand $k \to \infty$. En remarquant que $T_k f = 0$ sur $[-a-1, a+1]^c$pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, on en déduit

$$\|T_k f - f\|_2^2 = \int (T_k f - f)^2 d\lambda \leq 2(a+1)\|T_k f - f\|_\infty^2 \to 0, \text{ quand } k \to \infty.$$

---

3. Soit $f \in L^2$. Montrer que $T_k f \to f$ dans L^2 quand $k \to \infty$.

corrigé

Soit $\varepsilon > 0$. Par densité de $C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans L^2, il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ t.q. $\|f - \varphi\|_2 \leq \varepsilon$. Comme T_k est un opérateur linéaire, on a, en utilisant la question 1 :

$$\|T_k f - f\|_2 \le \|T_k f - T_k\varphi\|_2 + \|T_k\varphi - \varphi\|_2 + \|\varphi - f\|_2 \le 2\|\varphi - f\|_2 + \|T_k\varphi - \varphi\|_2. \qquad (12.101)$$

La question 2 donne l'existence de $k_0 \in \mathbb{N}$ t.q. le dernier terme de (12.101) soit inférieur à ε pour $k \ge k_0$. On a donc $\|T_k f - f\|_2 \le 3\varepsilon$ pour $k \ge k_0$, ce qui prouve que $T_k f \to f$, dans L^2, quand $k \to \infty$.

Corrigé 114 (Projections orthogonales)
On pose $H = L^2_{\mathbb{R}}(]-1,+1[,\mathcal{B}(]-1,+1[),\lambda)$. (On rappelle que $\mathcal{B}(]-1,+1[)$ est la tribu borélienne de $]-1,1[$ et λ la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(]-1,+1[)$.) Soit $F = \{f \in H$ t.q. $\int_{]-1,+1[} f\, d\lambda = 0\}$. Soit $G = \{f \in H$ t.q. $\int_{]-1,0[} f\, d\lambda = \int_{]0,1[} f\, d\lambda\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels fermés de H. Déterminer les sous-espaces $F^\perp$, $G^\perp$ et $F \cap G$.

corrigé

Pour $f \in H$, on pose $T(f) = \int_{]-1,+1[} f\, d\lambda$ et $S(f) = \int_{]-1,0[} f\, d\lambda - \int_{]0,1[} f\, d\lambda$.

L'inégalité de Cauchy Scharwz entre f et $1_{]-1,+1[}$, pour T, et f et $(1_{]-1,0[} - 1_{]0,1[})$, pour S, montre que $T(f)$ et $S(f)$ sont bien définis pour tout $f \in H$ et que, pour tout $f \in H$:

$$|T(f)| \le \sqrt{2}\|f\|_2,\ |S(f)| \le \sqrt{2}\|f\|_2.$$

On en déduit que T et S sont des éléments de H' et donc que $F = \mathrm{Ker}T$ et $G = \mathrm{Ker}S$ sont des s.e.v. fermés de H.

De plus, comme $T \ne 0$ et $S \ne 0$, on a $\dim(F^\perp) = \dim(G^\perp) = 1$. Pour s'en convaincre, il suffit de prendre $v \in F^\perp$, $v \ne 0$ (un tel v existe car $T \ne 0$ et $H = F \oplus F^\perp$). Pour tout $w \in F^\perp$, on a alors $w = w - \frac{T(w)}{T(v)}v + \frac{T(w)}{T(v)}v$. On en déduit que $(w - \frac{T(w)}{T(v)}v) \in F \cap F^\perp = \{0\}$ et donc que $w \in \mathbb{R}v = \mathrm{vect}\{v\}$. Ce qui donne $F^\perp = \mathbb{R}v$ et donc $\dim(F^\perp) = 1$. Un raisonnement semblable donne $\dim(G^\perp) = 1$.

Soit f l'élément de H t.q. $f = 1$ p.p.. On a clairement $f \in F^\perp$ (car $(f/h)_2 = T(h) = 0$ pour tout $h \in F$) et donc, comme $\dim F^\perp = 1$, $F^\perp = \mathbb{R}f$.

Soit g l'élément de H t.q. $g = 1$ p.p. sur $]-1,0[$ et $g = -1$ sur $]0,1[$. On a clairement $g \in G^\perp$ (car $(g/h)_2 = S(h) = 0$ pour tout $h \in G$) et donc, comme $\dim G^\perp = 1$, $G^\perp = \mathbb{R}g$.

Il reste à déterminer $F \cap G$. Soit $h \in F \cap G$. On a donc $\int_{]-1,0[} h\, d\lambda = \int_{]0,1[} h\, d\lambda$, car $h \in G$, et donc, comme $h \in F$, $0 = \int_{]-1,+1[} f\, d\lambda = 2\int_{]-1,0[} h\, d\lambda = 2\int_{]0,1[} h\, d\lambda$. Ce qui donne $\int_{]-1,0[} h\, d\lambda = \int_{]0,1[} h\, d\lambda = 0$.

Réciproquement, si $h \in H$ est t.q. $\int_{]-1,0[} h\, d\lambda = \int_{]0,1[} h\, d\lambda = 0$, on a bien $S(h) = T(h) = 0$ et donc $h \in F \cap G$. On a donc :

$$F \cap G = \{h \in H;\ \int_{]-1,0[} h\, d\lambda = \int_{]0,1[} h\, d\lambda = 0\}.$$

---

2. Calculer, pour $g \in H$, les projections orthogonales $P_F(g)$ et $P_G(g)$ de g sur F et G.

corrigé

Soit $h \in H$. Comme $h - P_F h \in F^{\perp}$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ t.q. $h - P_F h = \alpha$ p.p.. Comme $P_F h \in F$, on a $T(P_F h) = 0$. On en déduit que $2\alpha = \int_{-1}^{1} h(t)dt$ et donc

$$P_F h = h - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} h(t)dt \text{ p.p..}$$

Comme $h - P_G h \in G^{\perp}$, il existe $\beta \in \mathbb{R}$ t.q. $h - P_G h = \beta$ p.p. sur $]-1,0[$ et $h - P_G h = -\beta$ p.p. sur $]0,1[$. Comme $P_G h \in G$, on a $S(P_G h) = 0$. On en déduit que $2\beta = \int_{-1}^{0} h(t)dt - \int_{0}^{1} h(t)dt$ et donc

$$\begin{array}{l} P_G h = h - \frac{1}{2}(\int_{-1}^{0} h(t)dt - \int_{0}^{1} h(t)dt) \text{ p.p. sur }]-1,0[, \\ P_G h = h + \frac{1}{2}(\int_{-1}^{0} h(t)dt - \int_{0}^{1} h(t)dt) \text{ p.p. sur }]1,0[. \end{array}$$

Corrigé 115 (Projection orthogonale dans L^2)
On pose $L^2 = L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ (muni de sa structure hilbertienne habituelle) et, pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ donnés, $\alpha < \beta$, $\mathcal{C} = \{f \in L^2;\ \alpha \le f \le \beta \text{ p.p.}\}$.

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est vide si et seulement si $\alpha\beta > 0$.

corrigé

- Si $\alpha\beta > 0$ (c'est-à-dire α et β non nuls et de même signe), on a alors pour tout $f \in \mathcal{C}$, $f \ge \gamma = \min(|\alpha|, |\beta|) > 0$ p.p.. Donc, $\int f^2 d\lambda \ge \gamma^2 \lambda(\mathbb{R}) = \infty$, en contradiction avec $f \in L^2$. On a donc $\mathcal{C} = \emptyset$.
- On suppose maintenant $\alpha\beta \le 0$. On a alors $\alpha \le 0 \le \beta$ et donc $0 \in \mathcal{C}$. Ce qui prouve que $\mathcal{C} \neq \emptyset$.

---

2. On suppose maintenant que $\alpha\beta \le 0$. Montrer que $\mathcal{C}$ est une partie convexe fermée non vide de L^2. Soit $f \in L^2$, montrer que $P_{\mathcal{C}} f(x) = \max\{\min\{f(x), \beta\}, \alpha\}$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$. ($P_{\mathcal{C}} f$ désigne la projection de f sur $\mathcal{C}$.)

corrigé

(a) On sait déjà que $\mathcal{C} \neq \emptyset$. On montre maintenant que $\mathcal{C}$ est convexe. Soient $f, g \in \mathcal{C}$ et $t \in [0,1]$. On a $tf + (1-t)g \in L^2$ car L^2 est un e.v.. Puis, du fait que $\alpha \le f \le \beta$ p.p. et $\alpha \le g \le \beta$ p.p., on déduit immédiatement que $\alpha \le tf + (1-t)g \le \beta$ p.p.. Donc, $tf + (1-t)g \in \mathcal{C}$.

Pour montrer que $\mathcal{C}$ est fermée, soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$ et $f \in L^2$ t.q. $f_n \to f$ dans L^2, quand $n \to \infty$. On peut montrer que $\alpha \le f \le \beta$ p.p. comme dans le corrigé 112 (question 2) ou (pour changer de méthode...) de la manière suivante :

D'après le théorème 6.2 (réciproque partielle de la convergence dominée), il existe une sous suite de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant p.p. vers f, c'est-à-dire il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ t.q. $\varphi(n) \to \infty$ quand $n \to \infty$ et $f_{\varphi(n)} \to f$ p.p. quand $n \to \infty$. Comme $\alpha \le f_{\varphi(n)} \le \beta$ p.p., on en déduit $\alpha \le f \le \beta$ p.p., et donc que $f \in \mathcal{C}$. ce qui prouve que $\mathcal{C}$ est fermée.

(b) On montre maintenant que $P_{\mathcal{C}}f = \max\{\min\{f, \beta\}, \alpha\}$.

On confond comme d'habitude f avec l'un de ses représentants, et on définit g par

$$g = \max\{\min\{f, \beta\}, \alpha\} = \alpha 1_{\{f<\alpha\}} + f 1_{\{\alpha \leq f \leq \beta\}} + \beta 1_{\{f>\beta\}}.$$

g est donc une fonction mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Puis, comme $|g| \leq |f|$ p.p., on a bien $g \in \mathcal{L}^2$ (et donc $g \in L^2$ avec la confusion habituelle). Enfin, il est immédiat que $\alpha \leq g \leq \beta$ p.p.. Donc, $g \in \mathcal{C}$.

Pour montrer que $g = P_{\mathcal{C}}f$, on utilise la première caractérisation de la projection (proposition 6.15). Soit $h \in \mathcal{C}$, on a :

$$(f-g/g-h)_2 = \int (f-g)(g-h)d\lambda = \int (f-\alpha)(\alpha-h)1_{\{f<\alpha\}}d\lambda + \int (f-\beta)(\beta-h)1_{\{f>\beta\}}d\lambda \geq 0,$$

car $\alpha \leq h \leq \beta$ p.p.. On en déduit que $g = P_{\mathcal{C}}f$.

Corrigé 116

Soit (E, T, m) un espace mesuré et $L^p = L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

1. On suppose ici qu' il existe A et $B \in T$ t.q. $A \cap B = \emptyset$, et $0 < m(B) < +\infty$, $0 < m(A) < +\infty$. Montrer que L^p est un Hilbert si et seulement si $p = 2$. [On pourra utiliser l'identité du parallèlogramme avec des fonctions de L^p bien choisies.]

corrigé

On sait déjà que L^2 est un espace de Hilbert.

On suppose maintenant que $p \neq 2$ (et $p \in [1, \infty]$) et on va montrer que L^p n'est pas un espace de Hilbert. Pour cela , On pose $f = 1_A$ et $g = 1_B$. On a bien $f, g \in L^p$. On va montrer que l'identité du parallèlogramme n'est pas vérifiée pour ces deux fonctions. On distingue les cas $p < \infty$ et $p = \infty$.

Premier cas : $p < \infty$. On pose $a = m(A)$ et $b = m(B)$ (noter que $a, b \in]0, \infty[$). On a :

$$\frac{1}{2}(\|f+g\|_p^2 + \|f-g\|_p^2) = (a+b)^{\frac{2}{p}}, \ \|f\|_p^2 + \|g\|_p^2 = a^{\frac{2}{p}} + b^{\frac{2}{p}}.$$

On en déduit $\frac{1}{2}(\|f+g\|_p^2 + \|f-g\|_p^2) - \|f\|_p^2 + \|g\|_p^2 = (a+b)^\alpha(1 - h_a(t))$ avec $\alpha = \frac{2}{p}$ et $h_\alpha(t) = t^\alpha + (1-t)^\alpha$, $t = \frac{a}{a+b} \in]0, 1[$.

Un étude de la fonction h_α montre que :

- Si $\alpha \in]0, 1[$, on a $h_\alpha(t) > 1$ pour tout $t \in]0, 1[$,
- Si $\alpha \in]1, \infty[$, on a $h_\alpha(t) < 1$ pour tout $t \in]0, 1[$.

L'identité du parallèlogramme n'est donc pas vérifiée pour ces fonctions f et g, ce qui prouve que la norme de L^p n'est pas induite pas un produit scalaire.

Deuxième cas : $p = \infty$. Dans ce cas, on a :

$$\frac{1}{2}(\|f+g\|_p^2 + \|f-g\|_p^2) = 1, \ \|f\|_p^2 + \|g\|_p^2 = 2.$$

On en déduit $\frac{1}{2}(\|f+g\|_p^2 + \|f-g\|_p^2) - \|f\|_p^2 + \|g\|_p^2 = -1 \neq 0$. L'identité du parallèlogramme n'est donc pas vérifiée pour ces fonctions f et g, ce qui prouve que la norme de L^p n'est pas induite pas un produit scalaire.

---

2. Montrer que pour $m = \delta_0$ (mesure de Dirac en 0), $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$ est un Hilbert pour tout $p \in [1, +\infty]$.

corrigé

Soit $f \in L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$. On a $\|f\|_p = |f(0)|$ (noter que tous les représentants de f ont la même valeur en 0 car $m(\{0\}) > 0$).

Il est facile de voir que la norme de L^p est induite pas un produit scalaire, notée $(\cdot/\cdot)$, ce produit scalaire est défini par :

$$(f/g) = f(0)g(0), \text{ pour } f, g \in L^p.$$

L'espace L^p est donc un espace de Hilbert.

Corrigé 117 (Espace l^2)

On note m la mesure du dénombrement sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, c'est-à-dire $m(A) = \text{card}(A)$ si A est fini et $m(A) = \infty$ si A n'est pas fini.

On note $l^2 = L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$.

1. Montrer que chaque élément de l^2 ne contient qu'un seul élément de l'espace $\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$.

corrigé

(Noter d'abord que m est bien une mesure sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.)

Soient $f, g \in \mathcal{L}^2 = \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$ t.q. $f = g$ p.p.. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(n) = g(n)$ car $m(\{n\}) = 1 > 0$. On en déduit que $f = g$. Ceci montre bien que chaque élément de l^2 ne contient qu'un seul élément de l'espace $\mathcal{L}^2$.

---

2. Montrer que l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur l^2 donne :

$$(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n)^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^2 \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n^2$$

pour toutes suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ t.q. $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^2 < \infty$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n^2 < \infty$.

corrigé

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ t.q. $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^2 < \infty$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n^2 < \infty$ (on peut aussi prendre $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ au lieu de $\mathbb{R}_+$).

On définit $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ par $f(n) = a_n$ et $g(n) = b_n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Les fonctions f et g sont mesurables (toute fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ est mesurable car la tribu choisie sur $\mathbb{N}$ est $\mathcal{P}(\mathbb{N})$) et on a bien $f, g \in \mathcal{L}^2$ car :

$$\int f^2 dm = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^2 < \infty \text{ et } \int g^2 dm = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n^2 < \infty. \tag{12.102}$$

En effet, pour montrer (12.102), il suffit, par exemple, de remarquer que $f^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^2 1_{\{n\}}$ (et $g^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} g_n^2 1_{\{n\}}$) et d'utiliser le premier corollaire du théorème de convergence monotone (corollaire 4.1).

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne alors que $fg \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$, c'est-à-dire :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n b_n| < \infty,$$

et que $(f/g)_2 \leq \|f\|_2\|g\|_2$. On en déduit :

$$(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n)^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^2 \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n^2.$$

---

3. Soit $\varphi : \mathbb{N}^\star \to \mathbb{N}^\star$, bijective. Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}^\star} \frac{\varphi(n)}{n^2} = \infty$. [On pourra commencer par montrer que $\sum_{p=1}^n \frac{1}{\varphi(p)} \leq \sum_{p=1}^n \frac{1}{p}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ puis utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.]

corrigé

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On peut ordonner l'ensemble des $\varphi(p)$, $p \in \{1,\ldots,n\}$, selon l'ordre croissant, c'est-à-dire : $\{\varphi(p),\, p \in \{1,\ldots,n\}\} = \{p_1,\ldots,p_n\}$ avec $p_i < p_{i+1}$ pour tout $i \in \{1,\ldots,n-1\}$ (on utilise ici l'injectivité de φ). Comme φ prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^\star$, on a $p_1 \geq 1$. On en déduit (par récurrence finie sur i) que $p_i \geq i$, pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$, et donc :

$$\sum_{p=1}^n \frac{1}{\varphi(p)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} \leq \sum_{p=1}^n \frac{1}{p}. \tag{12.103}$$

On utilise maintenant l'inégalité de Cauchy-Schwarz de la question précédente avec $a_p = \frac{\sqrt{\varphi(p)}}{p}$, $b_p = \frac{1}{\sqrt{\varphi(p)}}$ pour $p = 1,\ldots,n$ et $a_p = b_p = 0$ pour $p > n$, on obtient :

$$(\sum_{p=1}^n \frac{1}{p})^2 = (\sum_{p=1}^n a_p b_p)^2 \leq \sum_{p=1}^n \frac{\varphi(p)}{p^2} \sum_{p=1}^n \frac{1}{\varphi(p)}.$$

En utilisant (12.103), on en déduit :

$$\sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \leq \sum_{p=1}^n \frac{\varphi(p)}{p^2},$$

et donc $\lim_{n\in\mathbb{N}} \sum_{p=1}^n \frac{\varphi(p)}{p^2} \geq \lim_{n\in\mathbb{N}} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} = \infty$.

(Noter que cette démonstration reste vraie lorsque φ est seulement injective.)

Corrigé 118 (Isométrie d'un espace de Hilbert avec l^2)

Soit H un espace de Hilbert réel, de dimension infinie et séparable. Soit $\{e_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ une base hilbertienne de H (une telle base existe, cf. proposition 6.17).

Pour $u \in H$, on définit $a_u \in l^2$ (l^2 est défini à l'exercice 6.31) par $a_u(n) = (u/e_n)_H$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. (On montrera tout d'abord que a_u est bien un élément de l^2.)

Montrer que l'application $A\ : u \mapsto a_u$ (est linéaire et) est une isométrie de H dans l^2, c'est-à-dire que $\|a_u\|_{l^2} = \|u\|_H$ pour tout $u \in H$.

Montrer que A est bijective (il faut donc montrer que, pour tout $a \in l^2$, il existe $u \in H$ t.q. $a = a_u$).

corrigé

La fonction a_u est mesurable de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ (toute fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ est mesurable car la tribu choisie sur $\mathbb{N}$ est $\mathcal{P}(\mathbb{N})$). En notant m la mesure du dénombrement sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (voir l'exercice 6.31, corrigé 117), on a $\int a_u^2 dm = \sum_{n\in\mathbb{N}} (u/e_n)_H^2$. L'égalité de Bessel (voir la proposition 6.18) donne alors que $a_u \in l^2$ et $\|a_u\|_{l^2} = \|u\|_H$.

Il est immédiat de voir que l'application $A\ : u \mapsto a_u$ est linéaire, l'application A est donc une isométrie de H dans l^2 (ceci donne, en particulier, que A est injective). Il reste à montrer que A est surjective.

Soit $a \in l^2$. On note $a_n = a(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$, de sorte que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^2 < \infty$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n = \sum_{p=1}^{n} a_p e_p$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans H car, pour $m > n$, $\|f_m - f_n\|_H^2 = \sum_{p=n+1}^{m} a_p^2 \le \sum_{p=n+1}^{\infty} a_p^2 \to 0$ quand $n \to \infty$. Il existe donc $u \in H$ t.q. $f_n \to u$, dans H, quand $n \to \infty$. Le troisième item de la proposition 6.18 page 154 donne alors que $a = a_u$. Ceci montre bien que A est surjective.

12.6.3 Théorème de Radon-Nikodym et Dualité dans les espaces L^p

Corrigé 119 (Fonctions absolument continues)

Soit $-\infty < a < b < +\infty$. On admet les 2 résultats suivant :

- Toute fonction monotone définie sur $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, est dérivable en presque tout point de $]a, b[$.
- Soit $f \in L^1_{\mathbb{R}}(]a, b[, \mathcal{B}(]a, b[), \lambda)$. Pour $x \in [a, b]$, on pose $F(x) = \int f 1_{]a,x[} d\lambda$. La fonction F est alors dérivable en presque tout point de $]a, b[$ et on a $F' = f$ p.p..

1. (Fonctions monotones.) Soit f une fonction monotone croissante définie sur $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

   (a) Montrer que $f' \in L^1_{\mathbb{R}}(]a, b[, \mathcal{B}(]a, b[), \lambda)$ et que
   $$\int f' 1_{]a,b[} d\lambda \le f(b) - f(a).$$
   [On pourra poser $f(x) = f(b)$ pour $x > b$, considérer $f_n(x) = n(f(x + \frac{1}{n}) - f(x))$ et remarquer que $f_n \to f'$ p.p. sur $]a, b[$.]

   corrigé

   On remarque tout d'abord que f est mesurable (de $]a, b[$, muni de la tribu borélienne, dans $\mathbb{R}$, muni de la tribu borélienne) car l'image réciproque par f d'un intervalle de $\mathbb{R}$ est un intervalle de $]a, b[$). Comme $|f|$ est bornée (par $\max(|f(b)|, |f(a)|)$), on a aussi $f \in L^1_{\mathbb{R}}(]a, b[, \mathcal{B}(]a, b[), \lambda)$.

On pose $f(x) = f(b)$ pour $x > b$ (de sorte que f est maintenant monotone croissante, et donc mesurable, de $]a, \infty[$ dans $\mathbb{R}$), et on définit pour $n \in \mathbb{N}^\star$ la fonction f_n par $f_n(x) = n(f(x+\frac{1}{n}) - f(x))$ pour $x \in]a, b[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est donc mesurable (de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$) positive et (en notant que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(]a, b[, \mathcal{B}(]a, b[), \lambda)$ et $f(\cdot + \frac{1}{n}) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(]a, b[, \mathcal{B}(]a, b[), \lambda))$ on a :

$$\int_{]a,b[} f_n d\lambda = f(b) - n \int_{]a,a+\frac{1}{n}[} f d\lambda \leq f(b) - f(a) \tag{12.104}$$

Comme f est dérivable p.p., on a $f_n \to f'$ p.p. sur $]a, b[$, c'est-à-dire qu'il existe $A \in \mathcal{B}(]a, b[)$ t.q. $\lambda(]a, b[\setminus A) = 0$ et $f_n(x) \to f'(x)$ pour tout $x \in A$. On pose $g(x) = f'(x)$ si $x \in A$ et $g(x) = 0$ sinon. Le lemme de Fatou appliqué à la suite f_n donne (par (12.104)) que g est mesurable positive (de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}_+$) et

$$\int_{]a,b[} g d\lambda \leq f(b) - f(a).$$

On a donc $f' \in L^1_{\mathbb{R}}(]a, b[, \mathcal{B}(]a, b[), \lambda)$ (au sens où l'on confond f' et la classe de g car $f' = g$ p.p.) et

$$\int_{]a,b[} f' d\lambda \leq f(b) - f(a).$$

(b) Donner un exemple pour lequel l'inégalité de la question précédente est stricte. (Les courageux pourront chercher un exemple pour lequel f est continue...)

corrigé

Un exemple facile est obtenu en prenant $f(x) = 0$ si $x \in [a, \frac{a+b}{2}]$ et $f(x) = 1$ si $x \in]\frac{a+b}{2}, b]$. On a alors $f' = 0$ p.p. et $f(b) - f(a) = 1$.

On peut obtenir un exemple avec f continue en construisant f à partir de l'ensemble de Cantor (f est prise constante sur chacun des intervalles ouverts formant le complémentaire de l'ensemble de Cantor, on a ainsi $f' = 0$ p.p.).

---

2. (Fonctions absolument continues.)

Une fonction définie sur $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est dite *absolument continue* si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour toute famille finie d'intervalles deux à deux disjoints $(]a_k, b_k[)_{1 \leq k \leq n}$ dont la somme des longueurs est inférieure à δ, on a $\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$.

(a) Montrer que "absolue continuité" implique "uniforme continuité".

corrigé

Il suffit de prendre $n = 1$, on remarque alors que :

$$a \leq a_1 < b_1 \leq b,\ b_1 - a_1 \leq \delta \Rightarrow |f(b_1) - f(a_1)| < \varepsilon.$$

Ce qui donne l'uniforme continuité de f.

(b) Montrer que l'ensemble des fonctions absolument continues sur $[a, b]$ forme un espace vectoriel.

corrigé

Soit f, g deux fonction absolument continues. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_1 > 0$ [resp. $\delta_2 > 0$] t.q. pour toute famille finie d'intervalles deux à deux disjoints $(]a_k, b_k[)_{1\leq k\leq n}$ dont la somme des longueurs est inférieure à δ_1 [resp. δ_2], on a $\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$ [resp. $\sum_{k=1}^{n} |g(b_k) - g(a_k)| < \varepsilon$]. On en déduit que pour toute famille finie d'intervalles deux à deux disjoints $(]a_k, b_k[)_{1\leq k\leq n}$ dont la somme des longueurs est inférieure à $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0$, on a $\sum_{k=1}^{n} |(f+g)(b_k) - (f+g)(a_k)| < 2\varepsilon$. Ce qui prouve que $f+g$ est absolument continue.

Il est facile de voir que αf est absolument continue si f est absolument continue et $\alpha \in \mathbb{R}$.

L'ensemble des fonctions absolument continues sur $[a, b]$ forme donc un espace vectoriel.

---

3. (Fonctions absolument continues et fonctions monotones.) Une fonction f définie sur $[a, b]$ (et à valeurs dans $\mathbb{R}$) est dite *à variation bornée* s'il existe C t.q. pour toute subdivision du segment $[a, b]$, $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$, on ait $\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq C$. Pour une fonction f à variation bornée, on peut définir, pour $a < x \leq b$, $V_a^x[f]$ par :

$$V_a^x[f] = \sup\{\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|\,,\ a = x_0 < x_1 < ... < x_n = x,\ n \in \mathbb{N}^\star\}.$$

On pose aussi $V_a^a[f] = 0$.

(a) Montrer que toute fonction absolument continue est à variation bornée.

(b) Montrer pour toute fonction f (définie sur $[a, b]$ et) absolument continue, la fonction $x \mapsto V_a^x[f]$ est absolument continue sur $[a, b]$. En déduire que toute fonction absolument continue (définie sur $[a, b]$) est la différence de deux fonctions absolument continues monotones croissantes (et est donc dérivable en presque tout point de $]a, b[$).

corrigé

La question 3 est admise.

---

4. Soit $f \in L^1_{\mathbb{R}}(]a, b[, \mathcal{B}(]a, b[), \lambda)$. Pour $x \in [a, b]$, on pose $F(x) = \int f 1_{]a,x]} d\lambda$. Montrer que F absolument continue.

corrigé

Cette question est une conséquence de la proposition 4.9 du cours. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ t.q.

$$(A \in \mathcal{B}(]a, b[),\ \lambda(A) \leq \delta) \Rightarrow \int_A |f| d\lambda \leq \varepsilon.$$

Si $(]a_k, b_k[)_{1\leq k\leq n}$ est une famille finie d'intervalles deux à deux disjoints dont la somme des longueurs est inférieure à δ, on pose $A = \cup_{k=1}^{n}]a_k, b_k[$. On a $\lambda(A) = \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) \leq \delta$ et donc $\int_A |f| d\lambda \leq \varepsilon$. On en déduit le résultat désiré car :

$$\sum_{k=1}^{n} |F(b_k) - F(a_k)| = \sum_{k=1}^{n} |\int_{]a_k,b_k[} f d\lambda| \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{]a_k,b_k[} |f|\, d\lambda = \int_A |f| d\lambda \leq \varepsilon.$$

---

5. Soit F une fonction absolument continue et monotone croissante de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On prolonge cette fonction sur $\mathbb{R}$ en posant $F(x)=F(a)$ si $x<a$ et $F(x)=F(b)$ si $x>b$. Une version étendue du théorème de Carathéodory (cette version étendue est donnée par le théorème de Lebesgue-Stieltjes, théorème 2.5, pour ce résultat il suffit de F continue croissante) donne l'existence d'une (et une seule) mesure m_F sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $m_F(]\alpha,\beta[)=F(\beta)-F(\alpha)$ pour tout $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha<\beta$.

   (a) Montrer que m_F est absolument continue par rapport à λ. [Utiliser la régularité de λ et l'absolue continuité de F.]

   corrigé

   Soit $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $\lambda(A)=0$. On veut montrer que $m_F(A)=0$ (ceci donnera bien que m_F est absolument continue par rapport à λ).

   Soit $\varepsilon>0$. Comme F est absolument continue sur $[a,b]$, il existe $\delta>0$ t.q. pour toute famille finie d'intervalles (de $[a,b]$) deux à deux disjoints $(]a_k,b_k[)_{1\le k\le n}$ dont la somme des longueurs est inférieure à δ, on a $\sum_{k=1}^{n}|F(b_k)-F(a_k)|<\varepsilon$. Comme F est constante et égale à $F(a)$ sur $]-\infty,a]$ et constante et égale à $F(b)$ sur $[b,+\infty[$, cette propriété est aussi vrai si les intervalles sont des intervalles de $\mathbb{R}$ non nécessairement inclus dans $[a,b]$.

   Par la régularité de λ, il existe un ouvert $O\supset A$ t.q. $\lambda(O)\le\delta$. Cet ouvert O peut s'écrire comme une réunion au plus dénombrable d'intervalles ouverts disjoints deux à deux, $O=\cup_{k=1}^{\infty}]a_k,b_k[$ (avec éventuellement $a_k=b_k$ pour certaines valeurs de k). Pout tout $n\in\mathbb{N}^\star$, on a $\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)\le\sum_{k=1}^{\infty}(b_k-a_k)=\lambda(O)\le\delta$ et donc :

   $$m_F(\cup_{k=1}^{n}]a_k,b_k[)=\sum_{k=1}^{n}(F(b_k)-F(a_k))\le\varepsilon.$$

   En faisant tendre n vers l'infini, la continuité croissante de m_F donne :

   $$m_F(O)=\lim_{n\to\infty}m_F(\cup_{k=1}^{n}]a_k,b_k[)\le\varepsilon,$$

   et donc $m_F(A)\le\varepsilon$ (car $A\subset O$). Comme $\varepsilon>0$ est arbitrairement petit, on en déduit bien $m_F(A)=0$.

   (b) Montrer qu'il existe $g\in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ t.q. $F(\beta)-F(\alpha)=\int g1_{]\alpha,\beta[}d\lambda$, pour tout $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha<\beta$. Montrer que $g=F'$ p.p. sur $]a,b[$.

   corrigé

   Comme m_F est absolument continue par rapport à λ, le théorème de Radon-Nikodym (théorème 6.10) donne l'existence de $g\in\mathcal{M}_+(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ t.q. $m_F=g\lambda$. On a donc, pour tout $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, avec $\alpha<\beta$:

   $$F(\beta)-F(\alpha)=m_F(]\alpha,\beta[)=\int g1_{]\alpha,\beta[}d\lambda.$$

   En faisant tendre α vers $-\infty$ et β vers $+\infty$, on en déduit $\int gd\lambda=F(b)-F(a)<\infty$ et donc $g\in L^1(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),d\lambda)$ (au sens de la confusion habituelle, c'est-à-dire "il existe $h\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),d\lambda)$ t.q. $g=h$ p.p.").

   Pour tout $x\in[a,b]$, on a $F(x)=F(a)+\int g1_{]a,x[}d\lambda$. Le deuxième résultat admis donné au début de l'énoncé donne donc que F est dérivable p.p. sur $]a,b[$ et $F'=g$ p.p. sur $]a,b[$.

   ---

6. Soit F une fonction absolument continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que F est dérivable en presque tout point de $]a,b[$, que $F' \in L^1_{\mathbb{R}}(]a,b[,\mathcal{B}(]a,b[),\lambda)$ et que pour tout $x \in [a,b]$ on a

$$F(x) - F(a) = \int F' 1_{]a,x[} d\lambda.$$

corrigé

D'après la question 3-(b), la fonction F est la différence de deux fonctions absolument continues monotones croissantes, notées F_1 et F_2. On peut alors appliquer la question 5-(b) à F_1 et F_2, elle donne que F_1 et F_2 sont dérivables p.p. sur $]a,b[$, que $F_1', F_2' \in L^1_{\mathbb{R}}(]a,b[,\mathcal{B}(]a,b[),\lambda)$ et que, pour tout $x \in [a,b]$:

$$F_1(x) - F_1(a) = \int F_1' 1_{]a,x[} d\lambda, \; F_2(x) - F_2(a) = \int F_2' 1_{]a,x[} d\lambda.$$

Comme $F = F_1 - F_2$, on en déduit que F est dérivable p.p. sur $]a,b[$, que $F' \in L^1_{\mathbb{R}}(]a,b[,\mathcal{B}(]a,b[),\lambda)$ et que, pour tout $x \in [a,b]$:

$$F(x) - F(a) = \int F' 1_{]a,x[} d\lambda.$$

Corrigé 120 (Dualité L^1-L^∞ par le théorème de Radon-Nikodym)

Soit (E,T,m) un espace mesuré fini et $T \in (L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m))'$. On suppose que T est positive, c'est à dire que, pour $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$, $f \geq 0$ p.p. implique $T(f) \geq 0$.

1. Pour $A \in T$, on pose $\mu(A) = T(1_A)$. Montrer que μ est bien définie et que μ est une mesure finie sur T.

   Attention, il y a toujours cette confusion malheureuse de notations, la même lettre T désigne la tribu sur E et un elément de $(L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m))'$.

   On note $L^r = L^r_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ et $\mathcal{L}^r = \mathcal{L}^r_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ (pour $r = 1$ et $r = \infty$).

   corrigé

   Soit $A \in T$ (tribu sur E), comme m est une mesure finie, on a $1_A \in \mathcal{L}^1$ (et donc $1_A \in L^1$ en confondant un élément de $\mathcal{L}^1$ avec sa classe dans L^1). On peut définir $\mu(A)$ par $T(1_A)$.

   Pour montrer que μ est une mesure sur T, on remarque tout d'abord que $\mu(\emptyset) = T(1_\emptyset) = T(0) = 0$. Puis, soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ t.q. $A_n \cap A_m = \emptyset$ si $n \neq m$. On pose $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. En utilisant le théorème de convergence dominée, on remarque que $\sum_{n=0}^N 1_{A_n} \to 1_A$ dans L^1 quand $N \to \infty$ (en effet, on a bien une convergence p.p. et une domination par 1_E qui est intégrable). Comme $T \in (L^1)'$, on a donc $\sum_{n=0}^N T(1_{A_n}) = T(\sum_{n=0}^N 1_{A_n}) \to T(1_A)$ quand $N \to \infty$. Avec la définition de μ, on en déduit :

   $$\sum_{n=0}^{N} \mu(A_n) \to \mu(A) \text{ quand } N \to \infty.$$

   Ce qui montre bien que μ est une mesure sur T.

   Pour montrer que μ est finie, il suffit de remarquer que $\mu(E) = T(1_E) \in \mathbb{R}$ (noter que $1_E \in \mathcal{L}^1$).

2. En utilisant le théorème de Radon-Nikodym, montrer qu'il existe $g \in \mathcal{M}_+$ t.q. $T(1_A) = \int g 1_A dm$ pour tout $A \in T$.

corrigé

Soit $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$. On a donc $1_A = 0$ p.p.. On en déduit que $\mu(A) = T(1_A) = 0$ (la fonction 1_A est un élément de la classe de 0 dans L^p).

La mesure μ est donc absolument continue par rapport à la mesure m. On peut appliquer le théorème de Radon-Nikodym (théorème 6.10), il donne l'existence de $g \in \mathcal{M}_+$ t.q. :

$$T(1_A) = \mu(A) = \int g 1_A dm \text{ pour tout } A \in T. \qquad (12.105)$$

---

3. Montrer que $g \in L^\infty_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ (plus précisément, il existe $h \in \mathcal{L}^\infty_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ t.q. $h = g$ p.p.). [On pourra montrer que $\|g\|_\infty \le \|T\|_{(L^1)'}$ en choisissant bien A dans la formule trouvée à la question précédente.]

corrigé

On prend $A = \{g > \|T\|_{(L^1)'}\}$. Si $m(A) > 0$, on a, avec (12.105), en remarquant que $\|1_A\|_1 = m(A)$:

$$\|T\|_{(L^1)'} m(A) < \int g 1_A dm = T(1_A) \le \|T\|_{(L^1)'} m(A),$$

ce qui est impossible. On a donc $m(A) = 0$, ce qui prouve que $g = h$ p.p. avec h définie par $h = g$ sur A^c et $h = 0$ sur A. Comme $h \in \mathcal{L}^\infty$, on a donc $g \in L^\infty$ (au sens "il existe $h \in \mathcal{L}^\infty_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ t.q. $h = g$ p.p.").

On a aussi montré que $\|g\|_\infty = \|h\|_\infty \le \|T\|_{(L^1)'}$.

---

4. Montrer que $T(f) = \int g f dm$ pour tout $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

corrigé

Grâce à (12.105), on a, pour tout $f = 1_A$ avec $A \in T$:

$$T(f) = \int g f dm. \qquad (12.106)$$

Par linéarité de T (sur L^1) et par linéarité de l'intégrale, on en déduit que (12.106) est encore vraie si $f \in \mathcal{E}_+ \cap \mathcal{L}^1$ (on confond encore f et sa classe).

Puis, si $f \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{L}^1$, il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}_+$ t.q. $f_n \uparrow f$ quand $n \to \infty$. Comme $f \in \mathcal{L}^1$ et $gf \in \mathcal{L}^1$, le théorème de convergence dominée donne $f_n \to f$ dans L^1 et $gf_n \to gf$ dans L^1 quand $n \to \infty$ (noter que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par f et $(gf_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par gf). En écrivant (12.106) avec $f = f_n$ et en faisant $n \to \infty$, on en déduit (12.106). L'égalité (12.106) est donc vraie pour tout $f \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{L}^1$.

Soit enfin $f \in L^1$ (on confond f avec l'un de ses représentants). On écrit alors (12.106) pour $f = f^+ \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{L}^1$ et $f = f^- \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{L}^1$. En faisant la différence on en déduit (12.106).

L'égalité (12.106) est donc vraie pour tout $f \in L^1$.

Corrigé 121 (Une démonstration de la dualité $L^p - L^q$ pour $p < 2$)
Soit (E, T, m) un espace mesuré $\sigma-$fini et $1 \leq p < 2$. On pose $q = p/(p-1)$ et on note L^r l'espace $L^r_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ (pour $r = p$, $r = q$ et $r = 2$). Soit $T \in (L^p)'$. (Attention aux notations maladroites car T représente à la fois la tribu sur E et la forme linéaire continue sur $L^p \ldots$, cette confusion de notations sera corrigée dans une prochaine version !)

1. On considére d'abord le cas où $m(E) < +\infty$.

   (a) Montrer que $L^2 \subset L^p$ et que l'injection canonique de L^2 dans L^p est continue.

   corrigé

   Cette question est faite dans la proposition 6.8 page 138. En particulier, l'inégalité (6.12) donne $\|f\|_p \leq C\|f\|_2$ pour tout $f \in L^2$ avec C ne dépendant que de p et $m(E)$. En fait, si $m(E) > 0$, le plus petit C possible dans cette inégalité est $C = (m(E))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}$ (voir la remarque 6.6).

   (b) Montrer qu'il existe $g \in L^2$ t.q. $T(f) = \int fgdm$ pour tout $f \in L^2$.

   corrigé

   On appelle S la restriction de T a L^2. La question précédente montre que S est bien défini est que $S \in (L^2)'$. Comme L^2 est un espace de Hilbert, le théorème de représentation de Riesz (théorème 6.8) donne l'existence (et l'unicité) de $g \in L^2$ t.q. $S(f) = (f/g)_2 = \int fgdm$ pour tout $f \in L^2$. Comme $S = T$ sur L^2, on a donc bien :

   $$T(f) = \int fgdm \text{ pour tout } f \in L^2. \tag{12.107}$$

   (c) Montrer que la fonction g, trouvée à la question précédente, appartient à L^q [distinguer les cas $p > 1$ et $p = 1$. Dans le cas $p > 1$, on pourra considérer les fonctions $f_n = |g|^{(q-2)}g1_{\{|g|\leq n\}}$. Dans le cas $p = 1$, prendre $f = sgn(g)1_A$ où $A = \{|g| > \|T\|_{(L^p)'}\}$.]

   corrigé

   Dans toute la suite, on posera aussi $\mathcal{L}^r = \mathcal{L}^r_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ (pour $r = p$, $r = q$ et $r = 2$).

   Cas $p > 1$. Dans ce cas, on a $2 < q < \infty$. On confond, comme d'habitude, g avec l'un de ses représentants, de sorte que $g \in \mathcal{L}^2$. On pose alors $f_n = |g|^{(q-2)}g1_{\{|g|\leq n\}}$. La fonction f_n est mesurable (comme produit de fonctions mesurables et bornée, on a donc $f_n \in \mathcal{L}^\infty \subset \mathcal{L}^2 \subset \mathcal{L}^p$. On peut donc prendre $f = f_n$ dans (12.107), on obtient $\int f_n gdm = T(f_n)$ et donc, en notant $B_n = \{|g| \leq n\}$:

   $$\int_{B_n} |g|^q dm = T(f_n) \leq \|T\|_{(L^p)'}\|f_n\|_p.$$

   Comme $\|f_n\|_p^p = \int_{B_n} |g|^{p(q-1)}dm = \int_{B_n} |g|^q dm$, on en déduit :

   $$(\int_{B_n} |g|^q dm)^{\frac{1}{q}} \leq \|T\|_{(L^p)'}. \tag{12.108}$$

   On remarque maintenant que $|g|^q 1_{B_n} \uparrow |g|^q$ quand $n \to \infty$. On peut donc appliquer le théorème de convergence monotone à la suite $(|g|^q 1_{B_n})_{n\in\mathbb{N}}$, l'inégalité (12.108) donne alors :

   $$(\int |g|^q dm)^{\frac{1}{q}} \leq \|T\|_{(L^p)'}.$$

On a donc $g \in \mathcal{L}^q$ (et $g \in L^q$ en confondant g avec sa classe d'équivalence dans L^q) et $\|g\|_q \leq \|T\|_{(L^p)'}$.

Cas $p = 1$**.** Dans ce cas, on a $q = \infty$. On confond aussi g avec l'un de ses représentants, de sorte que $g \in \mathcal{L}^2$. On pose maintenant $A = \{|g| > \|T\|_{(L^1)'}\}$ et $f = sgn(g)1_A$. La fonction f est donc étagée et on a $f \in \mathcal{L}^\infty \subset \mathcal{L}^2 \subset \mathcal{L}^1$.

On obtient alors, avec (12.107) :

$$\int_A |g|dm = \int fgdm = T(f) \leq \|T\|_{(L^1)'}\|f\|_1 = \|T\|_{(L^1)'}(m(A)). \tag{12.109}$$

Or, si $m(A) > 0$, on a (par la définition de A), $\int_A |g|dm > \|T\|_{(L^1)'}m(A)$, en contradiction avec (12.109). On a donc $m(A) = 0$, ce qui donne $g \in \mathcal{L}^\infty$ (et $g \in L^\infty$ en confondant g avec sa classe d'équivalence dans L^∞) et $\|g\|_\infty \leq \|T\|_{(L^1)'}$.

(d) Si $f \in L^p$, montrer que $f_n = f1_{\{|f| \leq n\}} \in L^2$. En déduire que il existe $g \in L^q$ t.q. $T(f) = \int fgdm$, pour tout $f \in L^p$.

corrigé

La fonction g recherchée est, bien sûr, celle trouvée dans les questions précédentes.

Soit $f \in L^p$. On confond f avec l'un de ses représentants, de sorte que $f \in \mathcal{L}^p$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n = f1_{\{|f| \leq n\}}$. La fonction f_n est donc mesurable (comme produit de fonctions mesurables) et bornée, donc $f_n \in \mathcal{L}^\infty \subset \mathcal{L}^2$. On peut donc prendre $f = f_n$ dans (12.107), on obtient :

$$T(f_n) = \int f_n gdm \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \tag{12.110}$$

Le théorème de convergence dominée dans L^p (théorème 6.1) donne que $f_n \to f$ dans L^p quand $n \to \infty$ (la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge bien p.p. vers f et est dominée par $|f| \in L^p$). Comme $T \in (L^p)'$, on a donc $T(f_n) \to T(f)$ quand $n \to \infty$. D'autre part, comme $g \in L^q$, on a $\int f_n gdm \to \int fgdm$ quand $n \to \infty$ (en effet, l'inégalité de Hölder donne $|\int f_n gdm - \int fgdm| \leq \|f_n - f\|_p\|g\|_q$). On déduit donc de (12.110), quand $n \to \infty$, que $T(f) = \int fgdm$.

---

2. On considére maintenant le cas où $m(E) = +\infty$. Comme m est σ-finie, on peut écrire $E = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, avec $An \subset A_{n+1}$ et $m(A_n) < +\infty$. On note $T_n = \{A \in T,\ A \subset A_n\}$, $m_n = m_{|T_n}$ et $L^r(m_n) = L^r_{\mathbb{R}}(A_n, T_n, m_n)$ ($r = p$ ou q).

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $f \in L^p(m_n)$, on pose $T_n(f) = T(\tilde{f})$ avec $\tilde{f} = f$ p.p. sur A_n et $\tilde{f} = 0$ p.p. sur $(A_n)^c$. Montrer que $T_n \in (L^p(m_n))'$ et qu'il existe $g_n \in L^q(m_n)$ t.q. :

$$T_n(f) = \int fg_n dm_n,\ \forall f \in L^p(m_n).$$

corrigé

On a déjà vu que T_n est une tribu sur A_n (tribu trace) et que m_n est une mesure sur T_n (mesure trace, voir l'exercice 2.15 par exemple).

Attention ici aussi à la confusion de notations entre T_n tribu et T_n forme linéaire sur $L^p(m_n)$.

La définition de T_n est cohérente car, si $f \in L^p(m_n)$, on confond f avec l'un de ses représentants et la fonction $\tilde{f}$ est alors p.p. égale à f prolongée par 0 hors de A_n, qui est bien un élément de $\mathcal{L}^p$. On a donc $\tilde{f} \in L^p$ (avec la confusion habituelle) et $T(\tilde{f})$ est bien défini (il ne dépend du représentant choisi dans la classe de f).

On remarque aussi que T_n est linéaire et que, pour $f \in L^p(m_n)$,

$$|T_n(f)| = |T(\tilde{f})| \leq \|T\|_{(L^p)'} \|\tilde{f}\|_{L^p} = \|T\|_{(L^p)'} \|f\|_{L^p(m_n)}.$$

Donc, $T_n \in (L^p(m_n))'$ et $\|T_n\|_{(L^p(m_n))'} \leq \|T\|_{(L^p)'}$. Comme $m_n(A_n) = m(A_n) < \infty$, on peut alors utiliser la première partie, elle donne qu'il existe $g_n \in L^q(m_n)$ t.q. :

$$T_n(f) = \int f g_n dm_n, \ \forall f \in L^p(m_n).$$

La première partie donne aussi :

$$\|g_n\|_{L^q(m_n)} \leq \|T_n\|_{(L^p(m_n))'} \leq \|T\|_{(L^p(m))'}. \tag{12.111}$$

On utilise $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans les questions suivantes.

(b) Montrer que si $m \geq n$, $g_n = g_m$ p.p. sur A_n.

corrigé

Soit $f \in \mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ t.q. $f = 0$ p.p. sur A_n^c. On note f_n la restriction de f à A_n et f_m la restriction de f à A_m. En confondant, comme d'habitude, un élément de L^p avec l'un de ses représentants, on a $f_n \in L^p(m_n)$, $f_m \in L^p(m_m)$ et $T_n(f_n) = T_m(f_m) = T(f)$. Donc,

$$\int f_n g_n dm_n = \int f_m g_m dm_m.$$

Comme $f_n = f_m = f$ sur A_n et que m_n est aussi la restriction de m_m sur A_n, on a donc :

$$\int f_n(g_n - g_m) dm_n = 0.$$

En prenant $f = \text{sign}(g_n - g_m) 1_{\{g_n \neq g_m\}}$ sur A_n et $f = 0$ sur A_n^c (on a ici choisi des représentants pour g_n et g_m), on en déduit $g_n = g_m$ m_n-p.p. sur A_n, c'est-à-dire $g_n = g_m$ p.p. sur A_n, car m_n est la restriction de m sur A_n (p.p. est alors pris au sens m-p.p.).

(c) On définit $g : E \to \mathbb{R}$ par $g = g_n$ sur A_n.

i. Montrer que $g \in L^q(E)$. (Distinguer les cas $q < +\infty$ et $q = +\infty$.)

corrigé

Plus précisément, on peut choisir, pour tout $n \in \mathbb{N}$ un représentant de g_n de manière à avoir $g_n = g_m$ sur tout A_n pour $m \geq n$. On peut alors définir $g : E \to \mathbb{R}$ par $g = g_n$ sur A_n. La fonction g est mesurable de E dans $\mathbb{R}$ (car g_n est mesurable de A_n dans $\mathbb{R}$).

Cas $p > 1$. (c'est-à-dire $q < \infty$). Dans ce cas, on remarque que $h_n \uparrow |g|$ quand $n \to \infty$ avec h_n défini par $h_n = |g_n|$ sur A_n et $h_n = 0$ sur A_n^c. Le théorème de convergence monotone donne alors :

$$\int |g|^q dm = \lim_{n\to\infty} \int h_n^q dm = \lim_{n\to\infty} \int |g_n|^q dm_n.$$

Comme $\int |g_n|^q dm_n \leq \|T\|^q_{(L^p)'}$ (d'après 12.111), on en déduit que $g \in \mathcal{L}^q$ (et $\|g\|_q \leq \|T\|_{(L^p)'}$). Donc, $g \in L^q$ (en confondant g avec sa classe).

Cas $p = 1$. (c'est-à-dire $q = \infty$). Dans ce cas, on a, par (12.111), $\|g_n\|_{L^\infty(m_n)} \leq \|T\|_{(L^1)'}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que $\|g\|_\infty \leq \|T\|_{(L^1)'}$ (car $\{g > \|T\|_{(L^1)'}\} = \cup_{n\in\mathbb{N}}\{g_n > \|T\|_{(L^1)'}\}$). Donc, $g \in L^\infty$ (en confondant g avec sa classe).

---

ii. Montrer que $T(f) = \int fgdm$, pour tout $f \in L^p$.

corrigé

Soit $f \in L^p$, on pose $f_n = f1_{A_n}$. D'après théorème de convergence dominé dans L^p (théorème 6.1), on a $f_n \to f$ dans L^p quand $n \to \infty$. Donc :

$$T(f_n) \to T(f) \text{ quand } n \to \infty. \tag{12.112}$$

Or, $T(f_n) = T_n(h_n)$, où h_n est la restriction de f_n à A_n. On remarque alors que

$$T_n(h_n) = \int g_n h_n dm_n = \int g f_n dm.$$

Comme $g \in L^q$, l'inégalité de Hölder donne que $\int gf_n dm. \to \int gfdm$ quand $n \to \infty$ (car $|\int gf_n dm. - \int gfdm| \leq \|g\|_q \|f_n - f\|_p \to 0$ quand $n \to \infty$).
On a donc $T(f_n) = T_n(h_n) \to \int gfdm$ quand $n \to \infty$, ce qui, avec (12.112) donne $T(f) = \int fgdm$.

12.6.4 Convergence faible, faible-$\star$, étroite, en loi...

Corrigé 122

Soient (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2 = L^2(E, T, m)$ et $f \in L^2$ t.q. la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende faiblement vers f dans L^2, c'est-à-dire : $\int f_n \varphi dm \to \int f\varphi dm$ pour toute fonction $\varphi \in L^2$.

1. Montrer que $\|f\|_2 \leq \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_2$.

corrigé

Comme $f_n \to f$ faiblement vers f dans L^2 (quand $n \to \infty$) et que $f \in L^2$, on a :

$$\int f_n f dm \to \int f^2 dm = \|f\|_2^2 \text{ quand } n \to \infty.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $\int f_n f dm \leq \|f_n\|_2 \|f\|_2$. On en déduit, en faisant tendre n vers l'infini :

$$\|f\|_2^2 = \lim_{n\to\infty} \int f_n f dm = \liminf_{n\to\infty} \int f_n f dm \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_2 \|f\|_2 = \|f\|_2 \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_2,$$

et donc $\|f\|_2 \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_2$.

---

2. On suppose de plus que $\|f_n\|_2 \to \|f\|_2$ lorsque $n \to +\infty$. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers f dans L^2.

corrigé

On remarque que $\|f_n - f\|_2^2 = (f_n - f/f_n - f)_2 = \|f_n\|_2^2 + \|f\|_2^2 - 2\int f_n f dm$. On a $\|f_n\|_2^2 \to \|f\|_2^2$ et, comme $f_n \to f$ faiblement dans L^2, on a aussi $\int f_n f dm \to \int f^2 dm = \|f\|_2^2$, quand $n \to \infty$. On en déduit donc que $\|f_n - f\|_2 \to 0$ quand $n \to \infty$.

Corrigé 123 (Convergence faible)

Soit (E,T,m) un espace mesuré $\sigma-$fini. Pour $1 \le r \le \infty$, on note L^r l'espace $L^r_{\mathbb{R}}(E,T,m)$. Soit $1 \le p < \infty$ et $q = p/(p-1)$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p$ et $f \in L^p$.

1. Montrer que $f_n \to f$ faiblement dans L^p quand $n \to \infty$ (voir la dénition 6.17) si et seulement si

$$\int f_n g dm \to \int f g dm,\ \forall g \in L^q. \tag{12.113}$$

corrigé

Le cours (théorème de dualité 6.9 page 161) donne que $\{\varphi_g,\ g \in L^q\} = (L^p)'$, avec φ_g défini par $\varphi_g(f) = \int f g dm$ (pour $f \in L^p$). Ceci donne bien le résultat demandé (c'est-à-dire : $f_n \to f$ faiblement dans L^p si et seulement si $\varphi_g(f_n) \to \varphi_g(f)$ pour tout $g \in L^q$).

---

2. Montrer que $\|f\|_p \le \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_p$ si $f_n \to f$ faiblement dans L^p, quand $n \to \infty$. [Utiliser (6.48) avec un choix convenable de g.]

corrigé

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p$ et $f \in L^p$ t.q. $f_n \to f$ faiblement dans L^p, quand $n \to \infty$. On confond f avec l'un de ses représentant et on pose $g = |f|^{p-1}\mathrm{sign}(f)$. La fonction est mesurable (comme produit de fonctions mesurables). On a aussi $g \in \mathcal{L}^q$ et, comme $q(p-1) = p$, $\|g\|_q^q = \|f\|_p^p$. On en déduit, par l'inégalité de Hölder :

$$\int f_n g dm \le \|f_n\|_p \|g\|_q = \|f_n\|_p (\int |f|^p dm)^{1-\frac{1}{p}}.$$

Quand $n \to \infty$, on obtient :

$$\int |f|^p dm = \int f g dm = \lim_{n\to\infty} \int f_n g dm \le \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_p (\int |f|^p dm)^{1-\frac{1}{p}},$$

et donc $\|f\|_p \le \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_p$.

On suppose dans les questions suivantes (questions 3 à 7) que:

$$m(E) < \infty,\ f_n \to f \text{ p.p.},\ \exists C \text{ t.q. } \|f_n\|_p \le C,\ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{12.114}$$

3. On suppose, dans cette question, que $p > 1$.

(a) Soit $N \in \mathbb{N}$ et $g \in L^q$ t.q. $g = 0$ p.p. sur E_N^c avec $E_N = \cap_{n \geq N}\{x \in E;\, |f_n(x) - f(x)| \leq 1\}$. Montrer que $\int f_n g dm \to \int f g dm$, quand $n \to \infty$.

corrigé

Pour définir E_N, on a, comme d'habitude, confondu les fonctions f_n et f avec l'un de leurs représentants.

On remarque que $g(f_n - f) \to 0$ p.p. et que, pour $n \geq N$, $|g(f_n - f)| \leq |g|$ p.p.. Comme $g \in L^q \subset L^1$ (car $m(E) < \infty$), on peut appliquer le théorème de convergence dominée. Il donne que $g(f_n - f) \to 0$ dans L^1 et donc :

$$\int g f_n dm \to \int g f dm, \text{ quand } n \to \infty.$$

(b) Montrer que $f_n \to f$ faiblement dans L^p. [Pour $g \in L^q$, introduire $g_N = g1_{E_N}$.]

corrigé

Soit $g \in L^q$ (on confond g avec l'un de ses représentants). On pose $g_N = g1_{E_N}$ avec $E_N = \cap_{n \geq N}\{x \in E;\, |f_n(x) - f(x)| \leq 1\}$. On a alors :

$$\int f_n g dm - \int f g dm = \int f_n(g - g_N)dm + \int f_n g_N dm - \int f g_N dm + \int f(g_N - g)dm. \quad (12.115)$$

Comme $g_N \to g$ p.p. quand $N \to \infty$ (car $f_n \to f$ p.p. quand $n \to \infty$), et que $|g_N| \leq |g|$ p.p. (pour tout N), on peut appliquer le théorème de convergence dominée dans L^q (théorème 6.1) car $g \in L^q$ et $q < \infty$ (on a besoin ici de l'hypothèse $p > 1$). Il donne :

$$g_N \to g \text{ dans } L^q, \text{ quand } N \to \infty. \quad (12.116)$$

Soit $\varepsilon > 0$. En utilisant l'inégalité de Hölder, l'hypothèse $\|f_n\|_p \leq C$ et (12.116), on peut donc choisir N t.q. :

$$|\int f_n(g_N - g)dm| \leq \|f_n\|_p \|g_N - g\|_q \leq C\|g_N - g\|_q \leq \varepsilon, \quad (12.117)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et :

$$|\int f(g_N - g)dm| \leq \|f\|_p \|g_N - g\|_q \leq \varepsilon, \quad (12.118)$$

Puis, N étant fixé, la question précédente nous donne que $\int f_n g_N dm \to \int f g_N dm$ quand $n \to \infty$. Il existe donc $n(\varepsilon)$ t.q. :

$$n \geq n(\varepsilon) \Rightarrow |\int f_n g_N dm - \int f g_N dm| \leq \varepsilon. \quad (12.119)$$

Avec (12.117), (12.118) et (12.119), on déduit alors de (12.115) :

$$n \geq n(\varepsilon) \Rightarrow |\int f_n g dm - \int f g dm| \leq 3\varepsilon.$$

Ce qui prouve bien la convergence faible de f_n vers f dans L^p.

(c) Donner un exemple avec $(E,T,m) = (]0,1[,\mathcal{B}(]0,1[),\lambda)$ pour lequel $f_n \not\to f$ dans L^p.

corrigé

On prend $f_n = n^{\frac{1}{p}} 1_{]0,\frac{1}{n}[}$. On a $\|f_n\|_p = 1$, $f_n \to 0$ p.p. et $f_n \not\to 0$ dans L^p (quand $n \to \infty$).

---

4. On suppose, dans cette question, que $p = 1$. Montrer que $\|f\|_1 \le \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_1$. Donner un exemple avec $(E,T,m) = (]0,1[,\mathcal{B}(]0,1[),\lambda)$ pour lequel $f_n \not\to f$ faiblement dans L^1, quand $n \to \infty$.

corrigé

Le fait que $\|f\|_1 \le \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_1$ est une conséquence immédiate du lemme de Fatou, lemme 4.6 (en choisissant des représentants pour f_n et f).

On peut prendre, comme exemple, $f_n = n1_{]0,\frac{1}{n}[}$. On a $f_n \to 0$ p.p., $\|f_n\|_1 = 1$ et $\int f_n \varphi dm \to 1 \neq 0$ si $\varphi = 1_{]0,1[}$ (donc $f_n \not\to 0$ faiblement dans L^1, quand $n \to \infty$).

---

5. On suppose, dans cette question, que $p > 1$ et on prend $1 \le r < p$. Montrer que $f_n \to f$ dans L^r, quand $n \to \infty$. [On pourra, par exemple, utiliser le théorème de Vitali pour la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $g_n = |f_n - f|^r$.]

corrigé

On pose $g_n = |f_n - f|^r$. On a $g_n \to 0$ p.p. et, pour tout $A \in T$, on obtient en utilisant l'inégalité de Hölder avec les fonctions g_n et 1_A et les exposants $\frac{p}{r}$ et son conjugué :

$$\int_A g_n dm = \int_A |f_n - f|^r \le (\int_A |f_n - f|^p dm)^{\frac{r}{p}} (m(A))^{1-\frac{r}{p}} \le \|f_n - f\|_p^r (m(A))^{1-\frac{r}{p}}.$$

On en déduit, comme $\|f_n\|_p \le C$:

$$\int_A g_n dm \le (C + \|f\|_p)^r (m(A))^{1-\frac{r}{p}},$$

d'où l'on déduit que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équiintégrable. Le théorème de Vitali (théorème 4.8, voir aussi l'exercice 4.30) donne alors que $g_n \to 0$ dans L^1, d'où l'on conclut que $f_n \to f$ dans L^r, quand $n \to \infty$.

---

6. Pour cette question, on retire dans (6.49) l'hypothèse $m(E) < \infty$ et on suppose que $p > 1$. Montrer que $f_n \to f$ faiblement dans L^p.

corrigé

Il suffit ici de reprendre la même démonstration qu'à la question 3 avec E_N remplacé par $\tilde{E}_N = E_N \cap A_N$ où $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ est t.q. $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n = E$, $A_{n+1} \supset A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $m(A_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

---

7. Dans cette question, on conserve l'hypothèse (6.49) mais on ne suppose plus que $f \in L^p$. Montrer que f appartient nécessairement à L^p.

corrigé

Le fait que $f \in L^p$ est une conséquence immédiate du lemme de Fatou (appliqué à la suite $(|f_n|^p)_{n\in\mathbb{N}}$).

8. On prend maintenant $(E,T,m) = (]0,1[,\mathcal{B}(]0,1[),\lambda)$ et on définit f_n, pour $n \in \mathbb{N}$ par $f_n = 1$ p.p. sur $]2k/n,(2k+1)/n[$ pour $k \in \mathbb{N}$, $(2k+1)/n \le 1$ et $f_n = -1$ p.p. sur $]2k-1/n, 2k/n[$ pour $k \in \mathbb{N}^\star$, $2k/n \le 1$. Montrer que $f_n \to 0$ faiblement dans L^p, pour tout $1 \le p < \infty$. [On pourra, par exemple, utiliser la densité de $C([0,1],\mathbb{R})$ dans L^1.]

corrigé

On se limite à n pair (la démonstration pour n impair est similaire).

On prend d'abord $\varphi \in C([0,1],\mathbb{R})$. On a alors :

$$\int f_n\varphi d\lambda = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1}\int_{\frac{2k}{n}}^{\frac{2k+1}{n}}(\varphi(x)-\varphi(x+\frac{1}{n}))dx.$$

On en déduit :

$$|\int f_n\varphi d\lambda| \le \int_0^{1-\frac{1}{n}}|\varphi(x)-\varphi(x+\frac{1}{n})|dx \to 0 \text{ quand } n\to\infty. \tag{12.120}$$

Soit maintenant $\varphi \in L^1$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\psi \in C([0,1],\mathbb{R})$ t.q. $\|\varphi-\psi\|_1 \le \varepsilon$. On a alors :

$$|\int f_n\varphi d\lambda| \le |\int f_n\psi d\lambda| + |\int f_n(\psi-\varphi)d\lambda| \le |\int_0^1 f_n\psi d\lambda| + \varepsilon.$$

Comme $\psi \in C([0,1],\mathbb{R})$, on peut utiliser (12.120) (avec ψ au lieu de φ). Il existe donc $n(\varepsilon)$ t.q. $|\int_0^1 f_n\psi d\lambda| \le \varepsilon$ pour $n \ge n(\varepsilon)$, et donc :

$$n \ge n(\varepsilon) \Rightarrow |\int f_n\varphi d\lambda| \le 2\varepsilon,$$

ce qui donne bien $\int f_n\varphi d\lambda \to 0$, quand $n \to \infty$, pour tout $\varphi \in L^1$.

On en déduit bien que $f_n \to 0$ faiblement dans L^p pour tout $1 \le p < \infty$ en utilisant la question 1 et le fait que $L^q \subset L^1$ pour tout $q \ge 1$.

Corrigé 124 (Convergence faible et non linéarité)

On désigne par λ la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $]0,1[$, par L^p l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(]0,1[,B(]0,1[),\lambda)$ et par $\mathcal{L}^p$ l'espace $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(]0,1[,B(]0,1[),\lambda)$.

1. (Unicité de la limite faible). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ et $u,v \in L^1$. On suppose que $u_n \to u$ faiblement dans L^1, quand $n \to \infty$, (c'est-à-dire que $T(u_n) \to T(u)$ pour toute application T linéaire continue de L^1 dans $\mathbb{R}$) et que $u_n \to v$ faiblement dans L^1.

(a) Montrer que $\int (u-v)\phi d\lambda = 0$, pour tout $\phi \in L^\infty$.

corrigé

Soit $\phi \in L^\infty$. On sait que l'application $w \mapsto \int w\phi d\lambda$ est une application T linéaire continue de L^1 dans $\mathbb{R}$ (voir la section 6.3). On a donc, quand $n \to \infty$:

$$\int u_n \phi d\lambda \to \int u\phi d\lambda \text{ et } \int u_n \phi d\lambda \to \int v\phi d\lambda.$$

On en déduit bien que $\int u\phi d\lambda = \int v\phi d\lambda$ c'est-à-dire $\int (u-v)\phi d\lambda = 0$.

(b) Montrer que $u = v$ p.p.. [Choisir convenablement ϕ dans l'égalité précécente.]

corrigé

On choisit des représentants de u et v et on prend $\phi = \text{sign}(u-v)1\{u \neq v\}$. La fonction ϕ est mesurable (et même étagée) et bornée, donc $\phi \in \mathcal{L}^\infty$ (ou $\phi \in L^\infty$ avec la confusion habituelle). Ce choix de ϕ dans la question précédente donne alors $\|u-v\|_1 = 0$ et donc $u = v$ p.p..

---

2. (Convergence forte contre convergence faible) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^\infty$ et $v \in L^\infty$. On suppose qu'il existe $C > 0$ t.q. $\|v_n\|_\infty \leq C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $v_n \to v$ p.p., quand $n \to \infty$.

(a) Montrer que $v_n \to v$ dans L^p, quand $n \to \infty$, pour tout $1 \leq p < \infty$.

corrigé

Ceci est une conséquence immédiate du théorème de convergence dominée dans L^p (pour $1 \leq p < \infty$, théorème 6.1). En effet, on a $v_n \to v$ p.p., $|v_n| \leq C1_{]0,1[}$ p.p. (pour tout $n \in \mathbb{N}$) et la fonction $C1_{]0,1[}$ appartient à L^p.

(b) Donner un exemple pour lequel $v_n \not\to v$ dans L^∞.

corrigé

Il suffit de prendre $v_n = 1_{]0,\frac{1}{n}[}$ (plus précisément, v_n est l'élément de L^∞ donc $1_{]0,\frac{1}{n}[}$ est l'un des représentants) et $v = 0$. On a $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^\infty$, $\|v_n\|_\infty = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \to 0$ p.p. et $v_n \not\to 0$ dans L^∞ (quand $n \to \infty$),

---

(c) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ et $u \in L^1$. On suppose que $\|u_n\|_\infty \leq C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $u_n \to u$ faiblement dans L^1, quand $n \to \infty$. Montrer que $\int u_n v_n d\lambda \to \int uv d\lambda$, quand $n \to \infty$. [Ecrire $v_n = v + (v_n - v)$.]

corrigé

On remarque que

$$\int u_n v_n d\lambda = \int u_n v d\lambda + \int u_n (v_n - v) d\lambda. \tag{12.121}$$

Comme $u_n \to u$ faiblement dans L^1, on a $\int u_n v d\lambda \to \int uv d\lambda$, quand $n \to \infty$.

Le deuxième terme de (12.121) tends vers 0 car $|\int u_n(v_n - v)d\lambda| \leq \|u_n\|_\infty \|v_n - v\|_1 \leq C\|v_n - v\|_1 \to 0$, quand $n \to \infty$, car on a montré précédemment que $v_n \to v$ dans L^1.

On en déduit bien que $\int u_n v_n d\lambda \to \int uv d\lambda$, quand $n \to \infty$.

On se donne maintenant une fonction $\varphi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

3. Soit $u \in \mathcal{L}^\infty$. Montrer que $\varphi \circ u \in \mathcal{L}^\infty$.

corrigé

- Comme $\varphi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, φ est borélienne (c'est-à-dire mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ étant muni de la tribu de Borel). On en déduit que $\varphi \circ u$ est mesurable comme composée de fonctions mesurables.
- On note $M = \max\{|\varphi(s)|, |s| \le \|u\|_\infty\}$. On a $M < \infty$ (car φ est continue sur le compact $[-\|u\|_\infty, \|u\|_\infty]$) et $|\varphi \circ u| \le M$ p.p. car $|u| \le \|u\|_\infty$ p.p.. On en déduit que $\varphi \circ u \in \mathcal{L}^\infty$ et $\|\varphi \circ u\|_\infty \le M$.

---

4. Soit $u \in L^\infty$ et $v, w \in u$. Montrer que $\{h \in \mathcal{L}^\infty; \, h = \varphi \circ v \text{ p.p.}\} = \{h \in \mathcal{L}^\infty; \, h = \varphi \circ w \text{ p.p.}\}$.

corrigé

On a $v = w$ p.p. et donc $\varphi \circ v = \varphi \circ w$ p.p., puisque, pour $x \in]0,1[$. $u(x) = v(x)$ implique $\varphi(u(x)) = \varphi(v(x))$.

Si $h \, : \,]0,1[\to \mathbb{R}$, on a donc :

$$h = \varphi \circ u \text{ p.p. } \Leftrightarrow h = \varphi \circ v \text{ p.p. },$$

ce qui donne bien $\{h \in \mathcal{L}^\infty; \, h = \varphi \circ v \text{ p.p.}\} = \{h \in \mathcal{L}^\infty; \, h = \varphi \circ w \text{ p.p.}\}$.

Grâce aux 2 questions précédentes, pour $u \in L^\infty$, on pose, si $v \in u$:
$\underline{\varphi}(u) = \{h \in \mathcal{L}^\infty; \, h = \varphi \circ v \text{ p.p.}\}$, de sorte que $\underline{\varphi}(u) \in L^\infty$.

On se donne maintenant $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^\infty$. On suppose qu'il existe $C > 0$ t.q. $\|u_n\|_\infty \le C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et qu'il existe $u \in L^1$ et $f \, : \,]0,1[\to \mathbb{R}$ t.q. :

- $u_n \to u$ faiblement dans L^1, quand $n \to \infty$,
- $\underline{\varphi}(u_n) \to f$ p.p., quand $n \to \infty$.

Le but de l'exercice est de comparer f et $\underline{\varphi}(u)$.

5. Montrer que $|\int u 1_A d\lambda| \le C\lambda(A)$ pour tout $A \in B(]0,1[)$. Montrer que $u \in L^\infty$ que $\|u\|_\infty \le C$.

corrigé

Soit $A \in B(]0,1[)$. De l'hypothèse $\|u_n\|_\infty \le C$, on déduit :

$$|\int u_n 1_A d\lambda| \le \|u_n\|_\infty \|1_A\|_1 \le C\lambda(A). \tag{12.122}$$

Comme $u_n \to u$ faiblement dans L^1 quand $n \to \infty$, on a $\int u_n 1_A d\lambda \to \int u 1_A d\lambda$ quand $n \to \infty$. On déduit donc de (12.122), quand $n \to \infty$:

$$|\int u 1_A d\lambda| \leq C\lambda(A). \tag{12.123}$$

On choisit alors un représentant de u et on prend dans (12.123), $A = A_+ = \{u > C\}$. Si $\lambda(A_+) > 0$, on a $\int u 1_{A_+} d\lambda > C\lambda(A_+)$, en contradiction avec (12.123). Ce qui prouve que $\lambda(A_+) = 0$.

On prend ensuite $A = A_- = \{u < -C\}$. Si $\lambda(A_-) > 0$, on a $|\int u 1_{A_-} d\lambda| = \int(-u) 1_{A_-} d\lambda > C\lambda(A_-)$, en contradiction avec (12.123). Ce qui prouve que $\lambda(A_-) = 0$.

On a donc $\lambda(\{|u| > C\}) = \lambda(A_+) + \lambda(A_-) = 0$. Ce qui donne $u \in L^\infty$ et $\|u\|_\infty \leq C$.

---

6. On suppose, dans cette question, que φ est affine (c'est-à-dire qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.q. $\varphi(s) = \alpha s + \beta$ pour tout $s \in \mathbb{R}$). Montrer que $f = \underline{\varphi}(u)$ p.p.. [Utiliser, en particulier, la question 1.]

corrigé

On rappelle d'abord (voir la section 6.3) que si $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ et $w \in L^1$, la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tends vers w faiblement dans L^1 (quand $n \to \infty$) si et seulement $\int w_n \phi d\lambda \to \int w\phi d\lambda$ pour tout $\phi \in L^\infty$.

Soit $\phi \in L^\infty$, on a $\int \underline{\varphi}(u_n)\phi d\lambda = \int(\alpha u_n + \beta)\phi d\lambda = \alpha \int u_n \phi d\lambda + \beta \int \phi d\lambda$. Comme $u_n \to u$ faiblement dans L^1, on en déduit que $\int \underline{\varphi}(u_n)\phi d\lambda \to \alpha \int u\phi d\lambda + \beta \int \phi d\lambda = \int \underline{\varphi}(u)\phi d\lambda$ (quand $n \to \infty$). Ceci montre que $\underline{\varphi}(u_n) \to \underline{\varphi}(u)$ faiblement dans L^1 quand $n \to \infty$.

On utilse maintenant le fait que $\underline{\varphi}(u_n) \to f$ p.p.. En notant $M = \max\{|\varphi(s)|, |s| \leq C\}$, on a $M < \infty$ et $|\underline{\varphi}(u_n)| \leq M$ p.p. (car $|u_n| \leq C$ p.p.) pour tout $n \in \mathbb{N}$. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée (car les fonctions constantes sont intégrables, sur $(]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda)$). Il donne $f \in L^1$ et $\underline{\varphi}(u_n) \to f$ dans L^1 quand $n \to \infty$. On en déduit alors aussi que $\underline{\varphi}(u_n) \to f$ faiblement dans L^1 quand $n \to \infty$ (il suffit de remarquer que $|\int \underline{\varphi}(u_n)\phi d\lambda - \int f\phi d\lambda| \leq \|\underline{\varphi}(u_n) - f\|_1 \|\phi\|_\infty \to 0$, quand $n \to \infty$, pour tout $\phi \in L^\infty$).

Par la question 1 (unicité de la limite faible), on peut donc conclure que $f = \underline{\varphi}(u)$ p.p..

---

7. On suppose, dans cette question, que φ est injective. Montrer qu'il existe $v \in L^\infty$ t.q. $u_n \to v$ p.p. quand $n \to \infty$. En déduire que $v = u$ et $f = \underline{\varphi}(u)$ p.p..

corrigé

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on choisit un représentant de u_n, encore noté u_n. Comme $|u_n| \leq C$ p.p. (pour tout $n \in \mathbb{N}$) et $\varphi(u_n) \to f$ p.p., il existe $A \in \mathcal{B}(]0,1[)$ t.q. $\lambda(A) = 0$, $|u_n(x)| \leq C$, pour tout $x \in A^c$ et tout $n \in \mathbb{N}$, et $\varphi(u_n(x)) \to f(x)$, quand $n \to \infty$, pour tout $x \in A^c$.

Soit $x \in A^c$. La suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est incluse dans le compact $[-C, C]$. Soit a une valeur d'adhérence de cette suite (c'est-à-dire la limite d'une sous suite convergente). Par continuité de φ, $\varphi(a)$ est alors une valeur d'adhérence de de la suite $(\varphi(u_n(x)))_{n\in\mathbb{N}}$. Or, la suite $(\varphi(u_n(x)))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$. Donc, $\varphi(a) = f(x)$. Comme φ est injective, ceci montre que la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ n'a qu'une seule valeur d'adhérence et donc qu'elle est convergente (on rappelle qu'une suite dans un compact, qui n'a qu'une seule valeur d'adhérence, est convergente). On pose alors $v(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x)$.

On a ainsi défini v p.p. (car $\lambda(A) = 0$), et on a $u_n \to v$ p.p.. On a aussi obtenu que $\underline{\varphi}(v) = f$ p.p. (car $\varphi(v(x)) = f(x)$ pour tout $x \in A^c$).

Comme $|u_n| \leq C$ p.p. (pour tout n), le théorème de convergence dominée donne que $u_n \to v$ dans L^1 (quand $n \to \infty$). On en déduit, comme à la question précédente, que $u_n \to v$ faiblement dans L^1. La question 1 (unicité de la limite faible) donne alors $u = v$ p.p..

Enfin, on a déjà montré que $\underline{\varphi}(v) = f$ p.p. et donc $\underline{\varphi}(u) = f$ p.p..

---

8. (Astuce de Minty) On suppose, dans cette question, que φ est croissante.

   (a) Soit $v \in L^\infty$. Montrer que $\int (f - \underline{\varphi}(v))(u - v) d\lambda \geq 0$. [Utiliser la croissance de φ et la question 2 (c).]

   corrigé

   Soit $v \in L^\infty$. Comme φ est croissante, on a $(\underline{\varphi}(u_n) - \underline{\varphi}(v))(u_n - v) \geq 0$ p.p. et donc $\int (\underline{\varphi}(u_n) - \underline{\varphi}(v))(u_n - v) d\lambda \geq 0$.

   On remarque maintenant que :

   - $(\underline{\varphi}(u_n) - \underline{\varphi}(v)) \to (f - \underline{\varphi}(v))$ p.p. (quand $n \to \infty$) et $\|\underline{\varphi}(u_n) - \underline{\varphi}(v)\|_\infty \leq M_1 + M_2$ (pour tout n) avec $M_1 = \max\{|\varphi(s)|, |s| \leq C\}$ et $M_2 = \max\{|\varphi(s)|, |s| \leq \|v\|_\infty\}$ (pour tout n).
   - $(u_n - v) \to (u - v)$ faiblement dans L^1 (quand $n \to \infty$) et $\|u_n - v\|_\infty \leq C + \|v\|_\infty$.

   On peut utiliser la question 2 (c) et en déduire que $\int (\underline{\varphi}(u_n) - \underline{\varphi}(v))(u_n - v) d\lambda \to \int (f - \underline{\varphi}(v))(u - v) d\lambda$ quand $n \to \infty$ et donc :

   $$\int (f - \underline{\varphi}(v))(u - v) d\lambda \geq 0.$$

   (b) Soit $w \in L^\infty$. Montrer que $\int (f - \underline{\varphi}(u)) w d\lambda \leq 0$. [Utiliser la question précédente avec $v = u + (1/n)w$.]

   corrigé

   La question précédente avec $v = u + (1/n)w$ donne :

   $$\int (f - \underline{\varphi}(u + \frac{1}{n} w)) w d\lambda \leq 0.$$

   Comme φ est continue, on a $\underline{\varphi}(u + \frac{1}{n} w) \to \underline{\varphi}(u)$ p.p. quand $n \to \infty$. On a aussi $|\underline{\varphi}(u + \frac{1}{n} w)| \leq M$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $M = \max\{|\varphi(s)|, |s| \leq \|u\|_\infty + \|w\|_\infty\}$. Le théorème de convergence dominée donne alors $(f - \underline{\varphi}(u + \frac{1}{n} w)) \to (f - \underline{\varphi}(u))$ dans L^1, quand $n \to \infty$, et donc, comme $w \in L^\infty$:

   $$\int (f - \underline{\varphi}(u + \frac{1}{n} w)) w d\lambda \to \int (f - \underline{\varphi}(u)) w d\lambda.$$

   On en déduit que $\int (f - \underline{\varphi}(u)) w d\lambda \leq 0$.

(c) Montrer que $f = \underline{\varphi}(u)$ p.p..

corrigé

On choisit des représentants de f et $\underline{\varphi}(u)$ et on pose $w = \text{sign}(f - \underline{\varphi}(u))1_{\{f \neq \underline{\varphi}(u)\}}$. La question précédente donne alors, avec ce choix de w, $\|f - \underline{\varphi}(u)\|_1 = 0$ et donc $f = \underline{\varphi}(u)$ p.p..

---

9. On définit u_n, pour $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = 1$ p.p. sur $]2k/2n, (2k+1)/2n[$ pour $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, et $u_n = -1$ p.p. sur $]2k - 1/2n, 2k/2n[$ pour $k \in \{1, \ldots, n\}$.

(a) Montrer que $\int u_n \phi d\lambda \to 0$, quand $n \to \infty$, pour tout $\phi \in C([0,1], \mathbb{R})$.

corrigé

Cette question et la suivante ont déjà faites dans le corrigé 123. On reprend la même démonstration.

Soit $\phi \in C([0,1], \mathbb{R})$. On a :

$$\int u_n \phi d\lambda = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k}{n}+\frac{1}{2n}} (\phi(x) - \phi(x + \frac{1}{2n}))dx.$$

On en déduit, grâce à la continuité uniforme de ϕ :

$$|\int u_n \phi d\lambda| \leq \int_0^{1-\frac{1}{2}n} |\phi(x) - \phi(x + \frac{1}{2n})|dx \to 0 \text{ quand } n \to \infty. \tag{12.124}$$

(b) Montrer que $u_n \to 0$ faiblement dans L^1, quand $n \to \infty$. [On pourra, par exemple, utiliser la densité de $C([0,1], \mathbb{R})$ dans L^1.] Montrer que $u_n \not\to 0$ dans L^1, quand $n \to \infty$.

corrigé

Soit $\phi \in L^1$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\psi \in C([0,1], \mathbb{R})$ t.q. $\|\phi - \psi\|_1 \leq \varepsilon$. On a alors :

$$|\int u_n \phi d\lambda| \leq |\int u_n \psi d\lambda| + |\int u_n(\psi - \phi)d\lambda| \leq |\int_0^1 u_n \psi d\lambda| + \varepsilon.$$

Comme $\psi \in C([0,1], \mathbb{R})$, on peut utiliser la question précédente. Il existe donc $n(\varepsilon)$ t.q. $|\int_0^1 u_n \psi d\lambda| \leq \varepsilon$ pour $n \geq n(\varepsilon)$, et donc :

$$n \geq n(\varepsilon) \Rightarrow |\int u_n \phi d\lambda| \leq 2\varepsilon.$$

Ceci donne que $\int u_n \phi d\lambda \to 0$, quand $n \to \infty$, pour tout $\phi \in L^1$.

On en déduit bien que $u_n \to 0$ faiblement dans L^1 car $L^\infty \subset L^1$.

D'autre part, $u_n \not\to 0$ dans L^1, quand $n \to \infty$, car $\|u_n\|_1 = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) Donner un exemple de fonction $\varphi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ pour lequel $\underline{\varphi}(u_n) \to f$ p.p. et $f \neq \underline{\varphi}(0)$ p.p.. (et donc φ n'est pas croissante et n'est pas injective).

corrigé

Il suffit de prendre $\varphi(s) = s^2$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. On a alors $\underline{\varphi}(u_n) = 1$ p.p. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $\underline{\varphi}(u_n) \to f$ p.p. avec $f = 1$ p.p. alors que $\underline{\varphi}(0) = 0$ p.p..

(d) Donner un exemple de fonction $\varphi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ croissante pour lequel $\underline{\varphi}(u_n) \to f$ p.p. (et donc $f = \underline{\varphi}(0)$ p.p., par la question 8, et φ est non injective, par les questions 7 et 9 (b)).

corrigé

Il suffit de prendre $\varphi(s) = 0$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. On a alors $\underline{\varphi}(u_n) = 0$ p.p. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $\underline{\varphi}(u_n) \to f$ p.p. avec $f = \underline{\varphi}(0) = 0$ p.p..

Corrigé 125 (Convergence étroite de mesures)

Soit $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures finies sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (on rappelle que "m_n finie" signifie que "$m_n(\mathbb{R}) < \infty$") et m une mesure finie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On rappelle que $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et que $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$.

On suppose que :

$$\int g dm_n \to \int g dm, \text{ pour tout } g \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

Soit $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On ne suppose pas que f est bornée, mais on suppose que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. On pose $\alpha = \sup_{n\in\mathbb{N}} m_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\alpha < \infty$.

corrigé

La fonction constante et égale à 1 appartient à $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. L'hypothèse donne donc $m_n(\mathbb{R}) \to m(\mathbb{R})$, quand $n \to \infty$. La suite $(m_n(\mathbb{R}))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée (car convergente dans $\mathbb{R}$). Ce qui donne $\alpha < \infty$.

---

2. On suppose, dans cette question, que :

$$\beta = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int |f|^2 dm_n < \infty.$$

(a) Soit φ une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, à support compact et t.q. $0 \le \varphi(x) \le 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$, ne dépendant que de α et β (définis ci dessus), t.q. :

$$\int |f|\varphi dm \le C.$$

corrigé

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\int |f|\varphi dm_n \le (\int f^2 dm_n)^{\frac{1}{2}} (\int \varphi^2 dm_n)^{\frac{1}{2}} \le \beta^{\frac{1}{2}} m_n(\mathbb{R})^{\frac{1}{2}} \le (\alpha\beta)^{\frac{1}{2}}.$$

Comme $|f|\varphi \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$, l'hypothèse donne $\int |f|\varphi dm = \lim_{n\to\infty} \int |f|\varphi dm_n$. On déduit donc de la majoration précédente que $\int |f|\varphi dm \le (\alpha\beta)^{\frac{1}{2}}$.

(b) Montrer que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),m)$.

corrigé

On définit φ_1 en posant :

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(x) = 1, \text{ si } 0 \le x \le 1,\\
&\varphi_1(x) = 2-x, \text{ si } 1 < x \le 2,\\
&\varphi_1(x) = 0, \text{ si } 2 < x,\\
&\varphi_1(x) = \varphi_1(-x), \text{ si } x < 0.
\end{aligned}$$

Puis, pour $p \ge 2$, $\varphi_p(x) = \varphi_1(\frac{x}{p})$ pour $x \in \mathbb{R}$.

La question précédente donne $\int |f|\varphi_p dm \le (\alpha\beta)^{\frac{1}{2}}$ pour tout $p \ge 1$. Comme la suite $(\varphi_p)_{p\ge 1}$ converge simplement et en croissant vers la fonction constante égale à 1, le théorème de convergence monotone donne que $\int |f| dm \le (\alpha\beta)^{\frac{1}{2}}$ et donc que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),m)$.

(c) Montrer que $\displaystyle\int f dm_n \to \int f dm$, quand $n \to \infty$.

corrigé

On utilise encore la suite $(\varphi_p)_{p\ge 1}$ définie à la question précédente et on remarque que, pour tout $p \ge 1$,

$$\begin{aligned}
|\int f dm_n - \int f dm| \le \int |f|(1-\varphi_p) dm_n + \int |f|(1-\varphi_p) dm\\
+|\int f\varphi_p dm_n - \int f\varphi_p dm|.
\end{aligned} \tag{12.125}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $p \ge 1$, on a $|f|(1-\varphi_p) \le |f|$ p.p.. Comme $(1-\varphi_p) \to 0$ p.p. et $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),m)$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée. Il donne $\int |f|(1-\varphi_p) dm \to 0$ quand $p \to \infty$. Il existe donc $p_0 \ge 1$ t.q.

$$p \ge p_0 \Rightarrow \int |f|(1-\varphi_p) dm \le \varepsilon.$$

En utilisant encore le théorème de convergence dominée (les constantes étant intégrables pour la mesure m), il existe aussi $p_1 \ge 1$ t.q.

$$p \ge p_1 \Rightarrow \beta \int (1-\varphi_p) dm < \varepsilon^2.$$

On choisit maintenant $p = \max(p_0,p_1)$. Comme $(1-\varphi_p) \in C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on a donc $\int (1-\varphi_p) dm_n \to \int (1-\varphi_p) dm$ quand $n \to \infty$. Il existe donc n_0 t.q.

$$n \ge n_0 \Rightarrow \beta \int (1-\varphi_p) dm_n < \varepsilon^2.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que $(1-\varphi_p)^2 \le (1-\varphi_p)$, on en déduit, pour $n \ge n_0$,

$$\int |f|(1-\varphi_p) dm_n \le \beta^{\frac{1}{2}} (\int (1-\varphi_p) dm_n)^{\frac{1}{2}} \le \varepsilon.$$

Enfin, comme $f\varphi_p \in C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on a $\int f\varphi_p dm_n \to \int f\varphi_p dm$ quand $n \to \infty$. Il existe donc n_1 t.q.

$$n \geq n_1 \Rightarrow |\int f\varphi_p dm_n - \int f\varphi_p dm| \leq \varepsilon.$$

Finalement, avec ce choix de $p = \max(p_0, p_1)$, on déduit donc de (12.125) que

$$n \geq \max(n_0, n_1) \Rightarrow |\int f dm_n - \int f dm| \leq 3\varepsilon.$$

Ceci prouve bien que $\displaystyle\int f dm_n \to \int f dm$, quand $n \to \infty$.

---

3. On ne suppose plus que $\displaystyle\sup_{n\in\mathbb{N}} \int |f|^2 dm_n < \infty$.

   Montrer (en choisissant convenablement $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$, m et f) que l'on peut avoir $f \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),m)$.

corrigé

On peut prendre, par exemple, $m_0 = 0$ et, pour $n \geq 1$, $m_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2}\delta_p$ (où δ_p est la masse de Dirac en p). On prend f définie par $f(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Les hypothèses sur la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et m sont bien vérifiées avec $m = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2}\delta_p$.

On a bien $f \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),m_n) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),m_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ mais $f \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),m)$.

Corrigé 126 (Convergence faible et convexité)

Dans cet exercice (E,T,m) est un espace mesuré et on suppose que la mesure m est $\sigma-$finie.. Pour tout $1 \leq r \leq \infty$, on note L^r l'espace $L^r(E,T,m)$ (et $\mathcal{L}^r$ l'espace $\mathcal{L}^r(E,T,m)$). Soit $1 \leq p < \infty$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de L^p et $u \in L^p$ t.q. $u_n \to u$ faiblement dans L^p quand $n \to \infty$ (on rappelle que ceci signifie $T(u_n) \to T(u)$, quand $n \to \infty$, pour tout T dans $(L^p)'$, c'est-à-dire dans le dual topologique de L^p).

1. On pose $r = p/(p-1)$ si $p > 1$ et $r = \infty$, si $p = 1$. Montrer que, pour tout $v \in L^r$:

$$\int u_n v dm \to \int u v dm.$$

corrigé

Soit $v \in L^r$. Pour tout $w \in L^p$, on pose $T(w) = \int w v dm$. Comme cela a été vu en cours, l'inégalité de Hölder (proposition 6.9) donne que $T \in (L^p)'$, on a donc $T(u) = \lim_{n\to\infty} T(u_n)$.

Soit $\varphi \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On suppose que φ est strictement convexe (ce qui est équivalent à dire que φ' est strictement croissante).

2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $h_a(x) = \varphi(x) - \varphi(a) - \varphi'(a)(x-a)$.

   (a) Montrer que $h_a(x) > 0$ si $x \neq a$.

corrigé

Soit $x \neq a$. Le théorème des accroissements finis donne qu'il existe $y \in]a,x[$, si $x > a$, ou $y \in]x,a[$, si $x < a$, t.q. $\varphi(x) - \varphi(a) = \varphi'(y)(x-a)$. On a donc $h_a(x) = (\varphi'(y) - \varphi'(a))(x-a) > 0$.

(b) Montrer que h_a est décroissante sur $]-\infty, a[$ et croissante sur $]a, \infty($.

corrigé

La fonction h_a est de classe C^1 et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $h'_a(x) = \varphi'(x) - \varphi'(a)$. on a donc $h'_a(x) < 0$ si $x < a$ et $h'_a(x) > 0$ si $x > a$.

Soit $1 \leq q < \infty$. On suppose maintenant que la suite $(\varphi(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans L^q et qu'elle converge faiblement dans L^q, quand $n \to \infty$, vers une (classe de) fonction(s) $\overline{\varphi} \in L^q$.

Précision de notation : On choisit un représentant pour u_n. On désigne alors par $\varphi(u_n)$ la fonction (de E dans $\mathbb{R}$) $x \mapsto \varphi(u_n(x))$. Cette fonction est supposée être dans $\mathcal{L}^q$ et on l'identifie, comme d'habitude, avec l'élément de L^q qu'elle représente.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n = [\varphi(u_n) - \varphi(u) - \varphi'(u)(u_n - u)]$.

Précision de notation : Ici aussi, pour définir f_n, on choisit un représentant pour u. On désigne alors par $\varphi(u)$ et $\varphi'(u)$ les fonctions $x \mapsto \varphi(u(x))$ et $x \mapsto \varphi'(u(x))$.

3. Soit $k \in \mathbb{R}_+^\star$ et $B \in T$ t.q. $m(B) < \infty$. On pose $A_k = \{|u| \leq k\}$ (c'est-à-dire $A_k = \{x \in E$ t.q. $|u(x)| \leq k\}$.

Montrer que $\displaystyle\int f_n 1_{A_k} 1_B dm \to \int (\overline{\varphi} - \varphi(u)) 1_{A_k} 1_B dm$, quand $n \to \infty$.

corrigé

la fonction φ' est continue sur $\mathbb{R}$. Elle est donc bornée sur $[-k, k]$. On en déduit que $\varphi'(u)1_{A_k} \in L^\infty$. Comme $m(B) < \infty$, on a donc $\varphi'(u)1_{A_k}1_B \in L^r$ pour tout $r \in [1, \infty]$ en en particulier si r est le conjugué de p (c'est-à-dire $r = p/(p-1)$ si $p > 1$ et $r = \infty$, si $p = 1$). La question 1 donne donc :

$$\int \varphi'(u) 1_{A_k} 1_B (u_n - u) dm \to 0, \text{ quand } n \to \infty.$$

Puis, comme $\varphi(u_n) \to \overline{\varphi}$ faiblement dans L^q et que $1_{A_k}1_B \in L^r$ où r est maintenant le conjugué de q, on a aussi :

$$\int \varphi(u_n) 1_{A_k} 1_B dm \to \int \overline{\varphi} 1_{A_k} 1_B dm, \text{ quand } n \to \infty.$$

Enfin, on remarque que $\varphi(u)1_{A_k}1_B \in L^1$ (car $m(B) < \infty$ et φ bornée sur $[-k, k]$). Ce qui donne finalement que $f_n 1_{A_k} 1_B \in L^1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $\int f_n 1_{A_k} 1_B dm \to \int (\overline{\varphi} - \varphi(u)) 1_{A_k} 1_B dm$, quand $n \to \infty$.

---

4. Montrer $\overline{\varphi} \geq \varphi(u)$ p.p.. [Utiliser les questions 2(a) et 3.]

corrigé

La question 2(a) donne que $f_n \geq 0$ p.p.. On a donc, grâce à la question 3, avec les notations de la question 3 :

$$\int (\overline{\varphi} - \varphi(u)) 1_{A_k} 1_B dm \geq 0, \tag{12.126}$$

pour tout $k \in \mathbb{R}_+^\star$ et tout $B \in T$ t.q. $m(B) < \infty$.

On va déduire de (12.126) que $\overline{\varphi} \geq \varphi(u)$ p.p.. Pour cela, On choisit des représentants de u et $\overline{\varphi}$ et on pose $N = \{\overline{\varphi} - \varphi(u) < 0\} = \{x \in E; \overline{\varphi}(x) - \varphi(u(x)) < 0\}$.

Comme m est $\sigma-$finie, il existe une suite $(E_p)_{p\in\mathbb{N}^\star} \subset T$ t.q. $E = \cup_{p\in\mathbb{N}^\star} E_p$, $m(E_p) < \infty$ et $E_p \subset E_{p+1}$ pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$. Comme u prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$, on a donc aussi $E = \cup_{p\in\mathbb{N}^\star}(E_p \cap A_p)$ et finalement $N = \cup_{p\in\mathbb{N}^\star} N_p$, avec $N_p = N \cap E_p \cap A_p$.

Soit $p \in \mathbb{N}^\star$, on prend $k = p$ et $B = E_p \cap N$ dans (12.126), de sorte que $A_k \cap B = A_p \cap E_p \cap N = N_p$. Comme $\overline{\varphi} - \varphi(u) < 0$ sur N_p, on obtient que $(\overline{\varphi} - \varphi(u))1_{N_p} = 0$ p.p. et donc $m(N_p) = 0$. Comme $N = \cup_{p\in\mathbb{N}^\star} N_p$, on a finalement $m(N) = 0$ et donc $\overline{\varphi} \geq \varphi(u)$ p.p..

On suppose maintenant que $\overline{\varphi} = \varphi(u)$ p.p..

5. Soit $B \in T$ t.q. $m(B) < \infty$, $k \in \mathbb{R}_+^\star$ et $A_k = \{|u| \leq k\}$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous suite convergeant p.p. vers 0 sur $A_k \cap B$.

corrigé

La question 2(a) donne $f_n \geq 0$ p.p. (pour tout n) et la question 3 donne que $f_n 1_{A_k \cap B} = f_n 1_{A_k} 1_B \in L^1$ et $\|f_n 1_{A_k} 1_B\|_1 = \int f_n 1_{A_k} 1_B dm \to 0$, quand $n \to \infty$. D'après la réciproque partielle de convergence dominée (théorème 4.7), la suite $(f_n 1_{A_k} 1_B)_{n\in\mathbb{N}}$ admet donc une sous suite convergeant p.p. vers 0. Autrement dit, il existe une application strictement croissante ψ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ t.q. $(f_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge p.p. vers 0 sur $A_k \cap B$.

---

6. (Question plus difficile.) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous suite convergeant p.p. vers 0 sur E. [Utiliser le fait que la mesure m est $\sigma-$finie et un "procédé diagonal".]

corrigé

On reprend la suite $(E_p)_{p\in\mathbb{N}^\star}$ introduite à la question 4 (c'est-à-dire $(E_p)_{p\in\mathbb{N}^\star} \subset T$ t.q. $E = \cup_{p\in\mathbb{N}^\star} E_p$, $m(E_p) < \infty$ et $E_p \subset E_{p+1}$ pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$).

La question 5 donne que pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous suite convergeant p.p. vers 0 sur $A_p \cap E_p$. Plus précisément, le raisonnement de la question 5 donne que de toute sous suite de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on peut extraire une sous suite convergeant p.p. vers 0 sur $A_p \cap E_p$. Comme $E = \cup_{p\in\mathbb{N}^\star}(A_p \cap E_p)$, le procédé diagonal va nous permettre ci après de construire une sous suite de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant p.p. vers 0 sur E.

Dans une première épape, on montre, par récurrence, l'existence d'une suite d'applications strictement croissantes $(\psi_p)_{p\in\mathbb{N}^\star}$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ t.q., pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$, la suite $(f_{\psi_1 \circ \ldots \circ \psi_p}(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge p.p. vers 0 sur $A_p \cap E_p$.

L'existence de ψ_1 découle de de la question 5 avec $k = 1$ et $B = E_1$. Puis, pour $p \geq 1$, en supposant $\psi_1, \ldots, \psi_p$ construits, on utilise le raisonnement de la question 5 avec la suite $(f_{\psi_1 \circ \ldots \circ \psi_p(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, $k = p+1$ et $B = E_{p+1}$. On obtient l'existence d'une application srtictement croissante ψ_{p+1} de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ t.q. la suite $(f_{\psi_1 \circ \ldots \circ \psi_{p+1}}(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge p.p. vers 0 sur $A_{p+1} \cap E_{p+1}$. Ce qui termine la récurrence.

La deuxième étape consiste à définir ψ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ en posant

$$\psi(n) = \psi_1 \circ \ldots \circ \psi_n(n), \text{ pour } n \in \mathbb{N}.$$

La fonction ψ est strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et on va montrer que la suite $(f_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge p.p. vers 0 (sur E). En effet, soit $p \in \mathbb{N}^\star$. Pour $n > p$, on a :

$$\psi(n) = \psi_1 \circ \ldots \circ \psi_p(\psi_{p+1} \circ \ldots \circ \psi_n(n)).$$

La suite $(f_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est donc extraite, à partir de $n = p$, de la suite $(f_{\psi_1\circ\ldots\circ\psi_p(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Ceci prouve que $(f_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge p.p. vers 0 sur $A_p \cap E_p$. Comme $E = \cup_{p\in\mathbb{N}^\star}(A_p \cap E_p)$, on en déduit bien que la suite $(f_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge p.p. vers 0 (sur E).

---

7. Soit $x \in E$ t.q. $f_n(x) \to 0$, montrer que $u_n(x) \to u(x)$. [Soit $b \in \overline{\mathbb{R}}$, limite d'une sous suite de la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$. Utiliser la question 2 pour montrer que $b = u(x)$.]

corrigé

Le point x est ici fixé. On pose $a = u(x)$. On remarque alors que $f_n(x) = h_a(u_n(x))$ (avec h_a défini à la question 2).

Si la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est non bornée, il existe une sous suite, encore notée $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, t.q. $u_n(x) \notin [a-1, a+1]$ (on peut même supposer que $\lim_{n\to\infty} |u_n(x)| = \infty$). On a donc, grâce à la question 2 :

$$f_n(x) = h_a(u_n(x)) \geq \min(h_a(a+1), h_a(a-1)) > 0,$$

en contradiction avec $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. La suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée.

Si b est une valeur d'adhérence de la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, il existe une sous suite de la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, encore notée $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, t.q. $b = \lim_{n\to\infty} u_n(x)$. On a donc $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = h_a(b)$. Comme $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, la question 2(a) donne $b = a$. On a ainsi montré que $u(x)$ est la seule valeur d'adhérence de la suite bornée $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, ce qui prouve que $u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x)$.

---

8. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous suite convergeant p.p. vers u.

corrigé

La question 6 montre que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous suite convergeant p.p. vers 0. Il existe donc ψ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ t.q. la suite $(f_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge p.p. vers 0. Le raisonnement de la question 7 montre que

$$x \in E,\ \lim_{n\to\infty} f_{\psi(n)}(x) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x).$$

On en déduit que $(u_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge p.p. vers u.

---

9. On suppose ici que $p > 1$. Montrer que $u_n 1_B \to u 1_B$ dans L^r pour tout $r \in [1, p[$ et tout $B \in T$ t.q. $m(B) < \infty$. [Utiliser l'exercice 6.18.]

corrigé

On raisonne par l'absurde. On suppose qu'il existe $r \in [1, p[$ et $B \in T$ t.q. $m(B) < \infty$ et $u_n 1_B \not\to u 1_B$ dans L^r. Il existe alors $\varepsilon > 0$ et une sous suite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, notée $(u_{g(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ (avec g strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$), t.q.

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow \|u_{g(n)} 1_B - u 1_B\|_r \geq \varepsilon. \tag{12.127}$$

La suite $(u_{g(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les mêmes propriétés que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Par la question 8, on peut donc extraire de $(u_{g(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une sous suite convergeant p.p. vers u. Cette sous suite, notée $(u_{g\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ (avec ψ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$), étant bornée dans L^p, l'exercice 6.18 (corrigé 105 page 394) donne que $u_{g\circ\psi(n)})1_B \to u 1_B$ dans L^r, en contradiction avec (12.127).

---

10. En prenant $(E,T,m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $\varphi(s) = s^2$, donner un exemple pour lequel $u_n \not\to u$ p.p. sur E (toutefois, d'après la question 8, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous suite convergeant p.p. vers u).

corrigé

Il suffit de reprendre l'exemple vu en cours pour montrer que la convergence L^1 n'entraîne pas la convergence p.p.

Pour $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $m \in \mathbb{N}^\star$ t.q. $n \in \{\frac{m(m-1)}{2}, \ldots, \frac{m(m+1)}{2} - 1\}$ et on a :

$$n = \frac{m(m-1)}{2} + k \text{ avec } k \in \{0, \ldots m-1\}.$$

On prend alors $u_n = 1_{]\frac{k}{m}, \frac{k+1}{m}]}$.

On remarque que $\|u_n\|_p^p = \frac{1}{m}$ pour $n \in \{\frac{m(m-1)}{2}, \ldots, \frac{m(m+1)}{2} - 1\}$ et donc $u_n \to 0$ dans L^p quand $n \to \infty$. Comme $\varphi(u_n) = u_n$, on a aussi $\varphi(u_n) \to 0$ dans L^q quand $n \to \infty$ (et donc $\overline{\varphi} = \varphi(u)$). Enfin, pour cet exemple, $u_n \not\to 0$ p.p.

Corrigé 127 (Produit de convergences faibles)

Soit (E,T,m) un espace mesuré fini. Pour $p \in [1,\infty]$, on note L^p l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(E,T,m)$.
Soit $\alpha, \beta > 0$. Pour $a \in \mathbb{R}_+$, on définit ψ_a de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ par $\psi_a(t) = (t^\alpha - a^\alpha)(t^\beta - a^\beta)$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $\psi_a(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $t \neq a$.

   Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions positives appartenant à L^∞ et $l_\alpha, l_\beta, l_{\alpha+\beta} \in L^\infty$. On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans L^∞ et que $f_n^\gamma \to l_\gamma$ $\star$−faiblement dans L^∞, quand $n \to \infty$, pour $\gamma = \alpha$, $\gamma = \beta$ et $\gamma = \alpha + \beta$.

   On rappelle que $f_n^\gamma \to l_\gamma$ $\star$−faiblement dans L^∞ signifie que $\int f_n^\gamma \varphi dm \to \int l_\gamma \varphi dm$, quand $n \to \infty$, pour tout $\varphi \in L^1$.

2. Soit $\varphi \in L^1$ t.q. $\varphi \geq 0$ p.p.. Montrer que $\int l_a \varphi dm \geq 0$.
3. Montrer que $l_\alpha \geq 0$ p.p..
4. Montrer que $l_{\alpha+\beta} \geq l_\alpha l_\beta$ p.p.. [On pourra utiliser $\psi_a(t) \geq 0$ avec $t = f_n(x)$ et $a = (l_\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha}}$.]
5. On suppose maintenant que $l_{\alpha+\beta} = l_\alpha l_\beta$ p.p.. On pose $f = l_\alpha^{\frac{1}{\alpha}}$ et $g_n = (f_n^\alpha - f^\alpha)(f_n^\beta - f^\beta)$.
   (a) Montrer que $g_n \to 0$ dans L^1, quand $n \to \infty$.
   (b) Montrer qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante t.q. $g_{\varphi(n)} \to 0$ p.p., quand $n \to \infty$. Montrer que $f_{\varphi(n)} \to f$ p.p., quand $n \to \infty$. [Utiliser la question 1.]
   (c) Montrer que $f_n \to f$ dans L^q, quand $n \to \infty$, pour tout $q \in [1, \infty[$.

corrigé

En attente...

Corrigé 128 (Conv. étroite et conv. des mesures des intervalles)

Soit $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et m une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On suppose que $m_n \to m$ étroitement, quand $n \to \infty$, et que m est diffuse (c'est-à-dire que $m(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, montrer que $m_n(I) \to m(I)$ quand $n \to \infty$. Montrer (en donnant un contre-exemple) que cette propriété peut être fausse si m n'est pas diffuse.

corrigé

On remarque tout d'abord que $m_n(I) \to m(I)$ si $I = \mathbb{R}$, car $\int 1_{\mathbb{R}} dm_n \to \int 1_{\mathbb{R}} dm$.

Soit maintenant $a \in \mathbb{R}$, on va montrer que $m_n(I) \to m(I)$ si $I =]-\infty, a]$ ou $I =]-\infty, a]$. Pour cela, on définit, pour $p \in \mathbb{N}^\star$, φ_p, $\psi_p \in C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ en posant :

$$\begin{aligned}
&\varphi_p(x) = 1 \text{ si } x \le a - \tfrac{1}{p},\\
&\varphi_p(x) = -p(x-a) \text{ si } a - \tfrac{1}{p} < x < a,\\
&\varphi_p(x) = 0 \text{ si } a \le x,\\
&\psi_p(x) = \varphi_p(x - \tfrac{1}{p}) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Comme $\varphi_p \le 1_I \le \psi_p$ on a $\int \varphi_p dm_n \le m_n(I) \le \int \psi_p dm_n$ pour tout p, $n \in \mathbb{N}$. En passant à la limite quand $n \to \infty$, on a donc, pour tout $p \in \mathbb{R}$:

$$\int \varphi_p dm \le \liminf_{n\to\infty} m_n(I) \le \limsup_{n\to\infty} m_n(I) \le \int \psi_p dm.$$

Le théorème de convergence dominée donne $\lim_{p\to\infty} \int \varphi_p dm = m(]-\infty, a[)$ et $\lim_{p\to\infty} \int \psi_p dm = m(]-\infty, a])$. On en déduit :

$$m(]-\infty, a[) \le \liminf_{n\to\infty} m_n(I) \le \limsup_{n\to\infty} m_n(I) \le m(]-\infty, a]).$$

Comme $m(]-\infty, a]) = m(]-\infty, a[) + m(\{a\}) = m(]-\infty, a[) = m(I)$, on a, finalement, $m(I) \le \liminf_{n\to\infty} m_n(I) \le \limsup_{n\to\infty} m_n(I) \le m(I)$, c'est-à-dire $\lim_{n\to\infty} m_n(I) = m(I)$.

En écrivant que $m_n(J) = m(\mathbb{R}) - m(J^c)$, il est facile de voir que l'on a aussi $m_n(J) \to m(J)$ pour tout intervalle J de la forme $[a, +\infty[$ ou $]a, +\infty[$. Enfin, si $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, un intervalle, noté K, dont les bornes sont a et b peut s'écrire comme différence de deux intervalles dont les bornes supérieures sont a et b et dont la borne inférieure est $-\infty$. On en déduit alors facilement que $m_n(K) \to m(K)$, ce qui termine la démonstration.

La propriété démontré peut être fausse si m n'est pas diffuse. Pour le voir, il suffit de prendre, par exemple, $m = \delta_0$ et $m_n = \delta_{1/n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. On a bien $m_n \to m$ étroitement et pour $I =]-\infty, 0]$ (par exemple) on a $\lim_{n\to\infty} m_n(I) = 0 \neq 1 = m(I)$.

Corrigé 129 (Convergence en loi)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilités et X une v.a. réelle de loi uniforme sur $[-1, 1]$.

1. Montrer que $-X$ est une v.a. de même loi que X.

   corrigé

   On pose $Y = -X$ et on cherche à déterminer la loi de la v.a.r. Y. Soit φ une fonction borélienne bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (il suffit en fait de prendre pour φ la fonction caractéristique d'un borélien de $\mathbb{R}$). En posant $\psi(x) = \varphi(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, On remarque que $\int_\Omega \varphi(Y)dP = \int_\Omega \varphi(-X)dP = \int_\Omega \psi(X)dP = \int_{\mathbb{R}} \psi(x)dP_X(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(-x)dP_X(x)$. Comme $X \sim \mathcal{U}(-1, 1)$, on a donc :

   $$\int_\Omega \varphi(Y)dP = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \varphi(-x)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \varphi(x)dx,$$

ce qui prouve que $Y \sim \mathcal{U}(-1,1)$.

---

2. Donner un exemple de suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de v.a. t.q. :

   (a) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X,

   (b) $(X_n - X)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas en loi vers 0.

corrigé

On prend $X_n = -X$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a donc $P_{X_n} = P_X$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui donne bien la convergence en loi de X_n vers X quand $n \to \infty$. Mais, $X_n - X = -2X$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc $X_n - X$ ne converge pas en loi vers 0 car $P_0 = \delta_0$ et $P_{-2X} \neq \delta_0$. (Il est facile de voir, en raisonnant comme à la première question, que $-2X \sim \mathcal{U}(-2,2)$.)

---

3. Donner un exemple de trois v.a. X, Y, Z t.q. X et Y aient la même loi, mais sans que XZ et YZ aient la même loi.

corrigé

On prend $Y = -X$ (toujours avec $X \sim \mathcal{U}(-1,1)$) et $Z = X$. les v.a.r. X et Y ont donc même loi. Mais, on va montrer que XZ et YZ n'ont pas la même loi. En effet, soit φ une fonction borélienne bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On a :

$$\int_\Omega \varphi(XZ)dP = \int_\Omega \varphi(X^2)dP = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \varphi(x^2)dx = \int_0^1 \varphi(x^2)dx = \int_0^1 \varphi(s)\frac{1}{2\sqrt{s}}ds.$$

Ce qui prouve que $P_{XZ} = g\lambda$ avec $g(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ pour $x \in]0,1[$ et $g(x) = 0$ si $x \notin]0,1[$. Comme $XY = -XZ$, on a $P_{XY} = h\lambda$ avec $h(x) = g(-x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. On en déduit que $P_{XZ} \neq P_{XY}$.

Corrigé 130 (Convergence en loi + convergence en probabilité)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace de probabilité, X une v.a. réelle et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de v.a. réelles t.q. :

$$X_n \to X \text{ en loi}, Y_n \to 0 \text{ en probabilité, quand } n \to \infty.$$

Montrer que

$$X_n + Y_n \to X \text{ en loi, quand } n \to \infty.$$

[On pourra utiliser la convergence vague.]

corrigé

D'après la proposition 6.21, il suffit de démontrer la convergence vague de $P_{X_n+Y_n}$ vers P_X quand $n \to \infty$, c'est-à-dire que $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \varphi(X_n + Y_n)dP = \int_\Omega \varphi(X)dP$ pour tout $\varphi \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Soit $\varphi \in \mathbb{C}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On a $\int_\Omega \varphi(X_n + Y_n)dP - \int_\Omega \varphi(X)dP = A_n + B_n$ avec :

$$A_n = \int_\Omega \varphi(X_n + Y_n)dP - \int_\Omega \varphi(X_n)dP, \qquad B_n = \int_\Omega \varphi(X_n)dP - \int_\Omega \varphi(X)dP.$$

On sait déjà que $\lim_{n\to\infty} B_n = 0$ (car $X_n \to X$ en loi). Il suffit donc de montrer que $\lim_{n\to\infty} A_n = 0$.
Soit $\eta > 0$. Comme $\varphi \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, φ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ (on rappelle, par contre, que $\varphi \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \not\Rightarrow \varphi$ uniformément continue), il existe donc $\varepsilon > 0$ t.q. :

$$x, y \in \mathbb{R}, |x - y| \leq \varepsilon \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \eta.$$

On en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $\|\varphi\|_u = \max_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)|(< \infty)$:

$$|A_n| \leq \int_{|Y_n|\leq\varepsilon} |\varphi(X_n + Y_n) - \varphi(X_n)|dP + \int_{|Y_n|>\varepsilon} |\varphi(X_n + Y_n) - \varphi(X_n)|dP \leq \eta + 2\|\varphi\|_u P[|Y_n| > \varepsilon].$$

Comme $Y_n \to 0$ en probabilité, il existe n_0 (dépendant seulement de ε et donc de η et φ) t.q. :

$$n \geq n_0 \Rightarrow 2\|\varphi\|_u P[|Y_n| > \varepsilon] \leq \eta,$$

et donc :

$$n \geq n_0 \Rightarrow |A_n| \leq 2\eta.$$

Ce qui prouve que $\lim_{n\to\infty} A_n = 0$ et termine la démonstration.

Corrigé 131 (Convergence en loi versus convergence en probabilité)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité, X une v.a. réelle et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. réelles.

1. On suppose, dans cette question, que $X_n \to X$ en probabilité, quand $n \to \infty$. Montrer que :

   $$X_n \to X \text{ en loi, quand } n \to \infty.$$

   [Remarquer qu'il suffit de démontrer une convergence vague de P_{X_n} vers P_X.]

2. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ t.q. $X = a$ p.s.. On suppose aussi que $X_n \to X$ en loi, quand $n \to \infty$. Montrer que :

   $$X_n \to X \text{ en probabilité, quand } n \to \infty.$$

corrigé

En attente

12.7 Exercices du chapitre 7

12.7.1 Mesure produit

Corrigé 132

Montrer que, pour tout $n \geq 2$, on a $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$. [S'inspirer de la démonstration faite pour $n = 2$ dans l'exercice 2.5.]

corrigé

On note $T = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire la tribu (sur $\mathbb{R}^n$) engendrée par $\{A \times B;\ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1}),\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. On veut montrer que $T = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Etape 1, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset T$.

Soit O un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On va montrer que $O \in T$. On suppose $O \neq \emptyset$ (on sait déjà que $\emptyset \in T$). Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n)^t \in O$, il existe $r > 0$ t.q. $\prod_{i=1}^n]x_i - r, x_i + r[\subset O$. Comme les rationnels sont denses dans $\mathbb{R}$, on peut trouver, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $y_i \in \mathbb{Q} \cap]x_i - r, x_i[$ et $z_i \in \mathbb{Q} \cap]x_i, x_i + r[$. On a donc $x \in \prod_{i=1}^n]y_i, z_i[\subset O$.

On note alors $I = \{(y, z) \in \mathbb{Q}^{2n};\ \prod_{i=1}^n]y_i, z_i[\subset O\}$ (avec $y = (y_1, \ldots, y_n)^t$ et $z = (z_1, \ldots, z_n)^t$). Pour tout $x \in O$, il existe donc $(y, z) \in I$ t.q. $x \in \prod_{i=1}^n]y_i, z_i[$. On en déduit que $O = \cup_{(y,z) \in I} \prod_{i=1}^n]y_i, z_i[$.

L'ensemble $\prod_{i=1}^{n-1}]y_i, z_i[$ est un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$, il appartient donc à $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1})$ (qui est la tribu engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}^{n-1}$). L'ensemble $]y_n, z_n[$ appartient à $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Donc, $\prod_{i=1}^n]y_i, z_i[\in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Comme I est au plus dénombrable (car $\mathbb{Q}^{2n}$ est dénombrable), on en déduit que $O \in T$. On a ainsi montré que T est une tribu contenant tous les ouverts de $\mathbb{R}^n$, et donc contenant la tribu engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}^n$ (c'est-à-dire $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$). Donc, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset T$.

Etape 2, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \supset T$.

On reprend ici aussi le même démarche que dans l'exercice 2.5.

1. Soit A un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$ et $T_1 = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R});\ A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}$. On montre d'abord que T_1 est une tribu (sur $\mathbb{R}$)

   - $\emptyset \in T_1$ car $A \times \emptyset = \emptyset \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.
   - On montre ici que T_1 est stable par passage au complémentaire. Soit $B \in T_1$, on a donc $B^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $A \times B^c = A \times (\mathbb{R} \setminus B) = (A \times \mathbb{R}) \setminus (A \times B)$. Or, $(A \times \mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (car A est un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$ et $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$), on a donc $(A \times \mathbb{R}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. D'autre part, $(A \times B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ (car $B \in T_1$). Donc, $A \times B^c = (A \times \mathbb{R}) \setminus (A \times B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Ce qui prouve que $B^c \in T_1$ et donc que T_1 est stable par passage au complémentaire.
   - Enfin, T_1 est stable par union dénombrable. En effet, si $(B_p)_{p \in \mathbb{N}} \subset T_1$, on a $A \times (\cup_{p \in \mathbb{N}} B_p) = \cup_{p \in \mathbb{N}} A \times B_p \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ (car $A \times B_p \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$). Donc, $\cup_{p \in \mathbb{N}} B_p \in T_1$.

   On a donc montré que T_1 est une tribu.

   On montre maintenant que T_1 contient les ouverts de $\mathbb{R}$.

   Soit B un ouvert de $\mathbb{R}$. On a donc $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et, comme $A \times B$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on a $A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. On a donc $B \in T_1$.

   T_1 est donc une tribu contenant les ouverts de $\mathbb{R}$, donc contenant $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Donc, $T_1 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

La conséquence de ce résultat est :

$$A \text{ ouvert de } \mathbb{R}^{n-1} \text{ et } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n). \qquad (12.128)$$

2. Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $T_2 = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1});\ A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}$. On va montrer que $T_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1})$.

   On commence par remarquer que (12.128) donne que T_2 contient les ouverts de $\mathbb{R}^{n-1}$. En effet, soit A un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$, la propriété (12.128) donne que $A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, et donc $A \in T_2$.

   On montre maintenant que T_2 est une tribu (on en déduira que $T_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1})$).

   - $\emptyset \in T_2$ car $\emptyset \times B = \emptyset \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.
   - On montre ici que T_1 est stable par passage au complémentaire. Soit $A \in T_2$, on a $A^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1})$ et $A^c \times B = (\mathbb{R}^{n-1} \times B) \setminus (A \times B)$. La propriété (12.128) donne $(\mathbb{R}^{n-1} \times B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ car $\mathbb{R}^{n-1}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$. D'autre part, $(A \times B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ (car $A \in T_2$). Donc, $A^c \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Ce qui prouve que $A^c \in T_2$ et donc que T_2 est stable par passage au complémentaire.
   - Enfin, T_2 est stable par union dénombrable. En effet, si $(A_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset T_2$, on a $(\cup_{p\in\mathbb{N}} A_p) \times B = \cup_{p\in\mathbb{N}}(A_p \times B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ (car $A_p \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$). Donc, $\cup_{p\in\mathbb{N}} A_p \in T_2$.

   T_2 est donc une tribu (sur $\mathbb{R}^{n-1}$) contenant les ouverts de $\mathbb{R}^{n-1}$, ce qui prouve que $T_2 \supset \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1})$ et donc, finalement, $T_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1})$.

   On a donc obtenu le résultat suivant :

$$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1}), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n). \qquad (12.129)$$

3. On montre maintenant que $T \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ (et donc que $T = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$).

   Grâce à (12.129), on a $\{A \times B;\ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1}),\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. On en déduit que $T \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. On a donc bien, avec l'étape 1, $T = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Corrigé 133

Soient E_1, E_2 deux ensembles, T_1 une tribu sur E_1 et T_2 une tribu sur E_2. On note $E = E_1 \times E_2$ et on rappelle que $T_1 \times T_2 = \{A_1 \times A_2,\ A_1 \in T_1,\ A_2 \in T_2\}$.

Montrer que l'algèbre engendrée par $T_1 \times T_2$ est égale à l'ensemble des réunions finies disjointes d'éléments de $T_1 \times T_2$ c'est-à-dire que, pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, A appartient à l'algèbre engendrée par $T_1 \times T_2$ si et seulement si il existe $(A^{(p)})_{p=1,\ldots,n} \subset T_1 \times T_2$ t.q. $A^{(p)} \cap A^{(q)} = \emptyset$ si $p \neq q$ et $A = \cup_{p=1}^{n} A^{(p)}$.

corrigé

On note $\mathcal{A}$ l'algèbre engendrée par $T_1 \times T_2$ et $\mathcal{B}$ l'ensemble des réunions finies disjointes d'éléments de $T_1 \times T_2$.

Comme $\mathcal{A}$ contient $T_1 \times T_2$ et que $\mathcal{A}$ est stable par union finie, il est immédiat que $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. Pour montrer que $\mathcal{B} = \mathcal{A}$, il suffit alors de montrer que que $\mathcal{B}$ est une algèbre (puisque $\mathcal{A}$ est la plus petite algèbre contenant $T_1 \times T_2$ et que $\mathcal{B}$ contient $T_1 \times T_2$).

Pour montrer que $\mathcal{B}$ est une algèbre, on montre d'abord (étape 1) que $T_1 \times T_2$ est stable par intersection finie et que le complémentaire d'un élément de $T_1 \times T_2$ est la réunion de 2 éléments disjonts de $T_1 \times T_2$

(en fait, pour montrer que $\mathcal{B}$ est une algèbre, il suffirait de savoir que le complémentaire d'un élément de $T_1 \times T_2$ est une union finie disjointe d'éléments de $T_1 \times T_2$). Puis, on en déduit (étape 2) que $\mathcal{B}$ vérifie les propriétés (a) et (b) de la question 1 de l'exercice 2.8 (corrigé 15), ce qui donne que $\mathcal{B}$ est bien une algèbre.

Etape 1. Propiétés de $T_1 \times T_2$.

- Soient $A_1, B_1 \in T_1$ et $A_2, B_2 \in T_2$. On a clairement $(A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$. Comme T_1 et T_2 sont stables par intersection finie, on en déduit que $(A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) \in T_1 \times T_2$ et donc que $T_1 \times T_2$ est stable par intersection finie.
- Soient $A_1 \in T_1$ et $A_2 \in T_2$. On remarque que $(A_1 \times A_2)^c = (E_1 \times A_2^c) \cup (A_1^c \times A_2)$. Comme $(E_1 \times A_2^c) \in T_1 \times T_2$, $(A_1^c \times A_2) \in T_1 \times T_2$ et que $(E_1 \times A_2^c) \cap (A_1^c \times A_2) = \emptyset$, on a bien montré que le complémentaire d'un élément de $T_1 \times T_2$ est la réunion de 2 éléments disjonts $T_1 \times T_2$.

Etape 2. On montre maintenant que $\mathcal{B}$ vérifie les propriétés (a) et (b) de la question 1 de l'exercice 2.8. La propriété (a) est immédiate car $E = E_1 \times E_2 \in T_1 \times T_2 \subset \mathcal{B}$. Pour montrer (b), on montre d'abord que $\mathcal{B}$ est stable par passage au complémentaire.

Soit $B \in \mathcal{B}$. Il existe $(B^{(q)})_{q=1,\ldots,m} \subset T_1 \times T_2$ t.q. $B^{(p)} \cap B^{(q)} = \emptyset$ si $p \neq q$ et $B = \cup_{q=1}^m B^{(q)}$. On a alors $B^c = \cap_{q=1}^m (B^{(q)})^c$. Le complémentaire d'un élément de $T_1 \times T_2$ est la réunion de 2 éléments disjonts de $T_1 \times T_2$. Pout tout q, il existe donc $C_{q,1}, C_{q,2} \in T_1 \times T_2$ t.q. $(B^{(q)})^c = C_{q,1} \cup C_{q,2}$ et $C_{q,1} \cap C_{q,2} = \emptyset$. On a donc $B^c = \cap_{q=1}^m (C_{q,1} \cup C_{q,2}) = \cup_{\varphi \in I} (\cap_{q=1}^m C_{q,\varphi(q)})$ où I désigne l'ensemble des applications de $\{1, \ldots, m\}$ dans $\{1, 2\}$. Ceci prouve que $B^c \in \mathcal{B}$. En effet, on remarque d'abord que, pour tout $\varphi \in I$, on a $\cap_{q=1}^m C_{q,\varphi(q)} \in T_1 \times T_2$ car $T_1 \times T_2$ est stable par intersection finie. Puis, pour $\varphi, \psi \in I$ $\varphi \neq \psi$, il existe $k \in \{1, \ldots, m\}$ t.q. $\varphi(k) \neq \psi(k)$. On a donc $(\cap_{q=1}^m C_{q,\varphi(q)}) \cap (\cap_{q=1}^m C_{q,\psi(q)}) = \emptyset$ car $\cap_{q=1}^m C_{q,\varphi(q)} \subset C_{k,\varphi(k)}$, $\cap_{q=1}^m C_{q,\psi(q)} \subset C_{k,\psi(k)}$ et $C_{k,\varphi(k)} \cap C_{k,\psi(k)} = \emptyset$. On a donc bien montré que B^c est une union finie disjointe d'éléments de $T_1 \times T_2$, c'est-à-dire que $B^c \in \mathcal{B}$.

On montre maintenant que $\mathcal{B}$ vérifie la propriété (b) de la question 1 de l'exercice 2.8. Soit $A, B \in \mathcal{B}$. Comme on vient de voir que $B^c \in \mathcal{B}$, Il existe $(A^{(p)})_{p=1,\ldots,n} \subset T_1 \times T_2$ et $(C^{(q)})_{q=1,\ldots,m} \subset T_1 \times T_2$ t.q. $A^{(p)} \cap A^{(q)} = \emptyset$ si $p \neq q$, $C^{(p)} \cap C^{(q)} = \emptyset$ si $p \neq q$, $A = \cup_{p=1}^n A^{(p)}$ et $B^c = \cup_{q=1}^m C^{(q)}$. On a alors $A \setminus B = A \cap B^c = (\cup_{p=1}^n A^{(p)}) \cap (\cup_{q=1}^m C^{(q)}) = \cup_{p=1}^n \cup_{q=1}^m (A^{(p)} \cap C^{(q)})$. On en déduit que $A \setminus B \in \mathcal{B}$. En effet, $A^{(p)} \cap C^{(q)} \in T_1 \times T_2$ pour tout p et tout q (car $T_1 \times T_2$ est stable par intersection finie) et $(A^{(p_1)} \cap C^{(q_1)}) \cap (A^{(p_2)} \cap C^{(q_2)}) = \emptyset$ si $(p_1, q_1) \neq (p_2, q_2)$ (car $A^{(p_1)} \cap A^{(p_2)} = \emptyset$ si $p_1 \neq p_2$ et $C^{(q_1)} \cap C^{(q_2)} = \emptyset$ si $q_1 \neq q_2$).

On a donc montré que $\mathcal{B}$ vérifie les propriétés (a) et (b) de la question 1 de l'exercice 2.8, ce qui donne que $\mathcal{B}$ est bien une algèbre et donc que $\mathcal{B} = \mathcal{A}$.

Corrigé 134 (Exemple de mesure produit)
Soit m_1 et m_2 des mesures $\sigma-$finies, non nulles, sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et t.q. $m_1 \otimes m_2(\mathbb{R}^2 \setminus D) = 0$, où $D = \{(x, x), x \in \mathbb{R}\}$. Montrer qu'il existe a, α, $\beta \in \mathbb{R}$ t.q. $m_1 = \alpha\delta_a$ et $m_2 = \beta\delta_a$, où δ_a est la mesure de Dirac en a.

corrigé

On remarque d'abord que $\mathbb{R}^2 \setminus D$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, donc appartient à $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. la quantité $m_1 \otimes m_2(\mathbb{R}^2 \setminus D)$ est donc bien définie.

La construction de la mesure $m_1 \otimes m_2$ donne (voir la démonstration du théorème 7.1) :

$$m_1 \otimes m_2(\mathbb{R}^2 \setminus D) = \int m_2(\mathbb{R} \setminus \{x\}) dm_1(x).$$

Cette égalité est aussi une conclusion du théorème de Fubini-Tonelli (théorème 7.2) avec $f = 1_A$, $A = \mathbb{R}^2 \setminus D$.

De l'hypothèse $m_1 \otimes m_2(\mathbb{R}^2 \setminus D) = 0$, on déduit donc que $m_2(\mathbb{R} \setminus \{x\}) = 0$ m_1-p.p.. Comme $m_1(\mathbb{R}) \neq 0$, il existe donc $a \in \mathbb{R}$ t.q. $m_2(\mathbb{R} \setminus \{a\}) = 0$. Ceci donne que $m_2 = \alpha\delta_a$ avec $\alpha = m_2(\{a\})$. Comme $m_2 \neq 0$, on a $\alpha > 0$.

Dans la construction de la mesure $m_1 \otimes m_2$ (démonstration du théorème 7.1), on aurait pu inverser les rôles de m_1 et m_2. On aurait obtenu la même mesure $m_1 \otimes m_2$ (grâce à la partie "unicité" du théorème 7.1). On a donc aussi :

$$m_1 \otimes m_2(\mathbb{R}^2 \setminus D) = \int m_1(\mathbb{R} \setminus \{x\}) dm_2(x).$$

(Cette égalité est aussi une conclusion du théorème de Fubini-Tonelli (théorème 7.2) avec $f = 1_A$, $A = \mathbb{R}^2 \setminus D$.)

Comme $m_2 = \alpha\delta_a$, on a donc $m_1 \otimes m_2(\mathbb{R}^2 \setminus D) = \alpha m_1(\mathbb{R} \setminus \{a\})$. De l'hypothèse $m_1 \otimes m_2(\mathbb{R}^2 \setminus D) = 0$, on déduit donc $m_1(\mathbb{R} \setminus \{a\}) = 0$, ce qui donne $m_1 = \beta\delta_a$ avec $\beta = m_1(\{a\})$. (On peut aussi remarquer que, comme $m_1 \neq 0$, on a $\beta > 0$.)

Corrigé 135 (Fonction non borélienne dont les traces sont boréliennes)
Pour $B \subset \mathbb{R}^2$, on note $t(B)$ l'ensemble des $x_1 \in \mathbb{R}$ t.q. $(x_1, 0) \in B$. On pose $T = \{B \subset \mathbb{R}^2; t(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$.
Soit $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Pour $x = (x_1, x_2)^t \in \mathbb{R}^2$, on pose $g(x) = (x_1 \cos\theta - x_2 \sin\theta, x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta)^t$.

1. Montrer que T est une tribu contenant $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.
2. Soit $A \subset \mathbb{R}$ t.q. $A \notin \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On pose $B = A \times \{0\}$.
   (a) Montrer que $B \notin \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.
   (b) On pose $f = 1_B \circ g$. Montrer que la fonction f n'est pas une fonction borélienne de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ mais que les fonctions $f(x_1, \cdot)$ et $f(\cdot; x_2)$ sont boréliennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, pour tout $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

corrigé

En attente...

12.7.2 Fubini-Tonelli et Fubini

Corrigé 136 (Contre-exemple au théorème de Fubini)
Soit $L^1 = L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{(x+1)^2} & \text{si } x > 0 \text{ et } x < y \leq 2x \\ -\frac{1}{(x+1)^2} & \text{si } x > 0 \text{ et } 2x < y \leq 3x \\ 0 & \text{si } x > 0 \text{ et } y \notin]x, 3x[\\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases} \quad (12.130)$$

1. Montrer que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$- mesurable.

corrigé

On pose $A = \{(x,y)^t \in \mathbb{R}^2;\ x > 0,\ x < y \leq 2x\}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $A_n = \{(x,y)^t \in \mathbb{R}^2;\ x > 0,$ $x < y < 2x + \frac{1}{n}\}$. A_n est, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, un ouvert de $\mathbb{R}^2$, il appartient donc à $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. On en déduit que $A = \cap_{n\in\mathbb{N}^\star} A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

De même, en posant $B = \{(x,y)^t \in \mathbb{R}^2;\ x > 0,\ 2x < y \leq 3x\}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $B_n = \{(x,y)^t \in \mathbb{R}^2;$ $x > 0,\ 2x < y < 3x + \frac{1}{n}\}$, on montre que $B = \cap_{n\in\mathbb{N}^\star} B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

On pose maintenant $g(x,y) = \frac{1}{(|x|+1)^2}$ pour $(x,y)^t \in \mathbb{R}^2$. La fonction g est continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, elle est donc mesurable ($\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}$ étant munis de la tribu borélienne).

On remarque maintenant que $f = g1_A - g1_B$. On en déduit que f est mesurable (car f est une somme de produits de fonctions mesurables).

2. Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f(.,y) \in L^1$; on pose $\phi(y) = \int f(x,y)d\lambda(x)$. Montrer que $\phi \in L^1$.

corrigé

On note $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

Soit $y \in \mathbb{R}$. La fonction $f(\cdot,y)$ est mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (voir la proposition 7.2). Elle appartient aussi à $\mathcal{L}^1$ (et donc à L^1 en confondant $f(\cdot,y)$ avec sa classe dans L^1) car $\int |f(.,y)|d\lambda = 0$ si $y \leq 0$ et $\int |f(.,y)|d\lambda \leq y$ si $y > 0$ car $f(x,y) = 0$ si $x \notin [0,y]$ et $|f(x,y)| \leq 1$ pour tout x, y. On peut définir $\phi(y)$.

Pour $y \leq 0$, on a $\phi(y) = 0$ et pour $y > 0$, on a :

$$\begin{aligned}\phi(y) = \int f(\cdot,y)d\lambda = -\int_{\frac{y}{3}}^{\frac{y}{2}} \frac{1}{(x+1)^2}dx + \int_{\frac{y}{2}}^{y} \frac{1}{(x+1)^2}dx \\ = -\frac{3}{y+3} + \frac{4}{y+2} - \frac{1}{y+1} \\ = \frac{2y}{(y+3)(y+2)(y+1)}.\end{aligned}$$

La fonction ϕ est continue donc mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. elle prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$, on peut donc calculer son intégrale sur $\mathbb{R}$:

$$\int \phi d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_0^n (-\frac{3}{y+3} + \frac{4}{y+2} - \frac{1}{y+1})dy = -3\ln 3 + 4\ln(2).$$

Ceci donne bien, en particulier, $\phi \in L^1$ (en confondant ϕ avec sa classe dans L^1).

3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x,.) \in L^1$; on pose $\psi(x) = \int f(x,y)d\lambda(y)$. Montrer que $\psi \in L^1$.

corrigé

Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $f(x,\cdot)$ est mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (voir la proposition 7.2). Elle appartient aussi à $\mathcal{L}^1$ (et donc à L^1 en confondant $f(x,\cdot)$ avec sa classe dans L^1) car $\int |f(x,\cdot)|d\lambda = 0$ si $x \leq 0$ et $\int |f(x,\cdot)|d\lambda \leq 3x$ si $x > 0$ car $f(x,y) = 0$ si $y \notin [0,3x]$ et $|f(x,y)| \leq 1$ pour tout x, y. On peut donc définir $\psi(x)$.

Pour $x \le 0$, on a $\psi(x) = 0$ et pour $x > 0$, on a :

$$\psi(x) = \int f(x, \cdot)d\lambda = \int_x^{2x} \frac{1}{(x+1)^2}dy - \int_{2x}^{3x} \frac{1}{(x+1)^2}dy = 0$$

On a donc $\psi \in L^1$ et $\int \psi(x)dx = 0$.

---

4. Montrer que $\int \phi d\lambda \neq \int \psi d\lambda$ (ϕ et ψ sont définies dans les questions précédentes).

corrigé

On a déjà montré que $\int \phi d\lambda = -3\ln 3 + 4\ln(2) \neq 0 = \int \psi d\lambda$.

---

5. Pourquoi le théorème de Fubini ne s'applique-t-il pas ici ?

corrigé

Le théorème de Fubini ne s'applique pas ici car la fonction f n'est pas intégrale pour la mesure produit, c'est-à-dire la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$, notée λ_2. On peut d'ailleurs le vérifier en remarquant (par le théorème de Fubini-Tonelli) que :

$$\int |f| d\lambda_2 = \int (\int |f(x,y)|d\lambda(y))d\lambda(x) = \int_0^\infty \frac{2x}{(x+1)^2}dx = \infty.$$

Corrigé 137 (Intégrale d'une fonction positive)
Soit (E, T, m) un espace mesuré σ-fini, et $f : E \to \mathbb{R}_+$ une application mesurable. On pose $F = 1_A$ avec $A = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times E;\, 0 < t < f(x)\}$.

1. Montrer que F est $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes T$- mesurable

corrigé

Comme $f \in \mathcal{M}_+$, il existe $(f_n) \in \mathcal{E}_+$ t.q. $f_n \uparrow f$ quand $n \to \infty$. On a alors $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ avec $A_n = \{(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R};\, 0 < t < f_n(x)\}$. Pour montrer que F est mesurable (c'est-à-dire que $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes T$), il suffit donc de montrer que $A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes T$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit donc $n \in \mathbb{N}$. Il existe $a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{R}_+^\star$ et $B_1, \ldots, B_p \in T$ t.q. $B_i \cap B_j = \emptyset$ si $i \neq j$ et $f_n = \sum_{i=1}^p a_i 1_{B_i}$. On a donc $A_n = \cup_{i=1}^p]0, a_i[\times B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes T$ car $]0, a_i[\times B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times T \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes T$ pour tout i.

---

2. Montrer que $\int f dm = \int_0^{+\infty} m(\{x \in E; f(x) > t\})dt$ et que $\int f dm = \int_0^{+\infty} m(\{x \in E; f(x) \ge t\})dt$. [Utiliser le théorème de Fubini-Tonelli.]

corrigé

On peut appliquer le théorème de Fubini-Tonelli (théorème 7.2) à la fonction F, il donne :

$$\int (\int F(t,x)d\lambda(t))dm(x) = \int (\int F(t,x)dm(x))d\lambda(t). \qquad (12.131)$$

Pour $x \in E$, $\int F(t,x)d\lambda(t) = \lambda(]0, f(x)[) = f(x)$.

Pour $t \in \mathbb{R}$. Si $t \leq 0$, on a $F(t, \cdot) = 0$. Donc, $\int F(t,x)dm(x) = 0$. Si $t > 0$, on a $F(t, \cdot) = 1_{\{f>t\}}$. Donc, $\int F(t,x)dm(x) = m(\{f > t\})$.

On déduit donc de (12.131) :

$$\int f(x)dm(x) = \int_{\mathbb{R}_+} m(\{f > t\})d\lambda(t) = \int_0^{\infty} m(\{x \in E;\ f(x) > t\})dt.$$

Pour avoir l'égalité avec $m(\{f \geq t\})$ au lieu de $m(\{f > t\})$, on reprend le même raisonnement en remplaçant F par $G = 1_B$ avec $B = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times E;\ 0 < t \leq f(x)\}$. On remarque d'abord que B est $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes T$-mesurable. En effet, on a $B = \cap_{n \in \mathbb{N}^\star} B_n$ avec $B_n = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times E;\ 0 < t < f_n(x)\}$ et $f_n = f + \frac{1}{n}$. Comme $f_n \in \mathcal{M}_+$, la première question donne $B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes T$. On en déduit que $B \in B(\mathbb{R}) \otimes T$. On peut maintenant appliquer le théorème de Fubini-Tonelli à la fonction G, il donne :

$$\int \Big(\int G(t,x)d\lambda(t)\Big)dm(x) = \int \Big(\int G(t,x)dm(x)\Big)d\lambda(t). \tag{12.132}$$

Pour $x \in E$, $\int G(t,x)d\lambda(t) = \lambda(]0, f(x)]) = f(x)$.

Pour $t \in \mathbb{R}$. Si $t \leq 0$, on a $G(t, \cdot) = 0$. Donc, $\int G(t,x)dm(x) = 0$. Si $t > 0$, on a $G(t, \cdot) = 1_{\{f \geq t\}}$. Donc, $\int G(t,x)dm(x) = m(\{f \geq t\})$.

On déduit donc de (12.132) :

$$\int f(x)dm(x) = \int_0^{\infty} m(\{x \in E;\ f(x) \geq t\})dt.$$

Corrigé 138 (Une caractérisation de L^p)
On munit $\mathbb{R}$ [resp. $\mathbb{R}^2$] de sa tribu borélienne, notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ [resp. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$].

Soit f une application mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, on pose $A_y = \{x \in \mathbb{R};\ |f(x)| > y\}$. Pour tout $y \in \mathbb{R}_-^\star$, on pose $A_y = \emptyset$.

1. Montrer que l'application $(x,y)^t \mapsto 1_{A_y}(x)$ est mesurable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. [On pourra commencer par montrer que $\{(x,y)^t \in \mathbb{R}^2;\ |f(x)| > y\}$ est un borélien de $\mathbb{R}^2$.]

———————————————corrigé———————————————

On pose $B = \{(x,y)^t \in \mathbb{R}^2;\ |f(x)| > y\}$, de sorte que $B = (F - G)^{-1}(]0, \infty[)$ où F et G sont définies par :

$$F(x,y) = |f(x)|,\ G(x,y) = y,\ (x,y)^t \in \mathbb{R}^2.$$

La fonction $x \mapsto |f(x)|$ est mesurable (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) ainsi que l'application $y \mapsto 1$(application constante). La proposition 7.3 nous donne alors que F est mesurable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ (puisque $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$). La fonction G est aussi mesurable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ (il suffit de remarquer qu'elle est continue, ou d'utiliser une nouvelle fois la proposition 7.3). La fonction $F - G$ est donc mesurable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, ce qui prouve que $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. La fonction 1_B est donc mesurable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

On remarque maintenant que $1_B(x,y)1_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+}(x,y) = 1_{A_y}(x)$ pour tout $(x,y)^t \in \mathbb{R}^2$. L'application $(x,y)^t \mapsto 1_{A_y}(x)$ est donc mesurable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ car elle est égale à un produit de fonctions mesurables.

Soit $p \in [1,\infty[$. Pour $y \in \mathbb{R}$, on pose $g_p(y) = |y|^{p-1}\lambda(A_y)$ (en convenant que $g_p(0) = 0$ si $\lambda(A_0) = \infty$).

2. (a) Montrer que l'application $(x,y)^t \mapsto |y|^{p-1}1_{A_y}(x)$ est mesurable positive de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

corrigé

L'application $(x,y)^t \mapsto |y|^{p-1}1_{A_y}(x)$ est mesurable comme produit de fonctions mesurables. Cette application est, bien sûr, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Elle est donc mesurable positive de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que g_p est intégrable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$. [On pourra, par exemple, utiliser le théorème de Fubini-Tonelli.]

corrigé

On pose $H(x,y) = |y|^{p-1}1_{A_y}(x)$ pour $(x,y)^t \in \mathbb{R}^2$. La question précédente donne que $H \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^2,\mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$. On peut donc appliquer le théorème de Fubini-Tonelli (théorème 7.2) à la fonction H, il donne :

$$\int(\int H(x,y)d\lambda(x))d\lambda(y) = \int(\int H(x,y)d\lambda(y))d\lambda(x). \tag{12.133}$$

Pour $y \in \mathbb{R}$, on a $\int H(x,y)d\lambda(x) = |y|^{p-1}\lambda(A_y) = g_p(y)$ (en convenant que $g_p(0) = 0$ si $\lambda(A_0) = \infty$). Ceci donne, en particulier, que g_p est mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ (car l'une des conclusions du théorème 7.2 est que $y \mapsto \int H(x,y)d\lambda(x)$ est mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$).

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $\int H(x,y)d\lambda(y) = \int |y|^{p-1}1_{[0,|f(x)|[}(y)d\lambda(y) = \int_0^{|f(x)|}|y|^{p-1}dy = \frac{1}{p}|f(x)|^p$.

L'égalité (12.133) donne alors :

$$\int g_p d\lambda = \frac{1}{p}\int |f|^p d\lambda. \tag{12.134}$$

Si $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$, on remarque d'abord que g_p prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$ car $\lambda(A_y) \le \frac{1}{|y|^p}\int |f|^p d\lambda < \infty$ pour tout $y > 0$. La fonction g_p est donc mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ et (12.134) donne alors que $g_p \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$.

Réciproquement, si $g_p \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$, (12.134) donne que $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$.

On a donc bien montré :

$$g_p \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda) \Leftrightarrow f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda).$$

12.7.3 Mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$

Corrigé 139 (Propriétés élémentaires de λ_N)

Soit $N \geq 2$. On rappelle que λ_N est la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

1. Soit $A_1, \ldots, A_N \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Montrer que $\prod_{i=1}^N A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et $\lambda_N(\prod_{i=1}^N A_i) = \prod_{i=1}^N \lambda(A_i)$.

corrigé

On va démontrer cette question en supposant tout d'abord que $\lambda(A_i) < \infty$ pour tout i. Le cas général s'obtient alors en utilisant $A_i \cap [-p, p]$ au lieu de A_i et en faisant ensuite tendre p vers l'infini. On obtient bien la propriété voulue (en convenant que $0 \times \infty = 0$). Cette méthode est décrite dans la remarque 7.2.

On démontre donc, par récurrence sur N, la propriété suivante :

$$\begin{array}{l} A_1, \ldots, A_N \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \lambda(A_i) < \infty \text{ pour tout } i \Rightarrow \\ \prod_{i=1}^N A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \text{ et } \lambda_N(\prod_{i=1}^N A_i) = \prod_{i=1}^N \lambda(A_i). \end{array} \tag{12.135}$$

La propriété (12.135) est vraie pour $N = 2$. En effet, on sait que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (proposition 7.1) et que $\lambda_2 = \lambda \otimes \lambda$ (définition 7.3). On a donc bien (avec la défintion d'une mesure produit, théorème 7.1) :

$$A_1, A_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \lambda(A_1) < \infty,\ \lambda(A_2) < \infty \Rightarrow A_1 \times A_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \text{ et } \lambda_2(A_1 \times A_2) = \lambda(A_1)\lambda(A_2).$$

On suppose maintenant que la propriété (12.135) est vraie pour un certain $N \geq 2$, et on la démontre pour $N + 1$.

Soit donc $A_1, \ldots, A_{N+1} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $\lambda(A_i) < \infty$ pour tout i. Par (12.135), on a $\prod_{i=1}^N A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et $\lambda_N(\prod_{i=1}^N A_i) = \prod_{i=1}^N \lambda(A_i)$. On rappelle que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{N+1}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (proposition 7.1) et que $\lambda_{N+1} = \lambda_N \otimes \lambda$ (définition 7.3). On en déduit que $\prod_{i=1}^{N+1} A_i = (\prod_{i=1}^N A_i) \times A_{N+1} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{N+1})$ et

$$\lambda_{N+1}(\prod_{i=1}^{N+1} A_i) = \lambda_N(\prod_{i=1}^{N} A_i)\lambda(A_{N+1}) = \prod_{i=1}^{N+1} \lambda(A_i).$$

ce qui donne bien (12.135) avec $N+1$ au lieu de N et termine donc la démonstration par récurrence.

---

2. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{R}$ et $\beta_1, \ldots, \beta_N \in \mathbb{R}$ t.q. $\alpha_i < \beta_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$. Montrer que $\lambda_N(\prod_{i=1}^N]\alpha_i, \beta_i[) = \prod_{i=1}^N \lambda(]\alpha_i, \beta_i[)$.

corrigé

Cette question est une conséquence immédiate de la précédente en prenant $A_i =]\alpha_i, \beta_i[$.

---

3. Soit K est un compact de $\mathbb{R}^N$ (noter que $K \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$). Montrer que $\lambda_N(K) < +\infty$.

corrigé

Comme K est compact, il est borné. Il existe donc $a \in \mathbb{R}_+^\star$ t.q. $K \subset \prod_{i=1}^N]-a, a[$. On en déduit que $\lambda_N(K) \leq \lambda_N(\prod_{i=1}^N]-a, a[) = \prod_{i=1}^N \lambda(]-a, a[) = (2a)^N < \infty$.

---

4. Soit O un ouvert non vide de $\mathbb{R}^N$. Montrer que $\lambda_N(O) > 0$.

corrigé

Soit $x = (x_1, \ldots, x_N)^t \in O$. Comme O est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ t.q. $\prod_{i=1}^N]x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon[\subset O$. On a donc $\lambda_N(O) \geq \lambda_N(\prod_{i=1}^N]x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon[) = \prod_{i=1}^N \lambda(]x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon[) = (2\varepsilon)^N > 0$.

5. Soit $f, g \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Montrer que $f = g$ p.p. (c'est-à-dire λ_N-p.p.) implique $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$.

corrigé

Soit $O = \{f \neq g\} = \{x \in \mathbb{R}^N;\ f(x) \neq g(x)\}$. Comme f et g sont continues, O est ouvert. Comme $f = g$ p.p., on a nécessairement $\lambda_N(O) = 0$. Enfin, la question précédente donne alors que $O = \emptyset$ et donc que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$.

6. Montrer que $C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$.

corrigé

Soit $f \in C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Comme f est continue, on a f mesurable de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^N$ et $\mathbb{R}$ étant munis de leur tribu borélienne, on dit aussi que f est borélienne). Comme f est à support compact, il existe $a \in \mathbb{R}_+^\star$ t.q. $f = 0$ sur K^c avec $K = \prod_{i=1}^N [-a, a]$. Enfin, f est bornée, il existe donc M t.q. $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$. On en déduit que $\int |f| d\lambda_N \leq M(2a)^N < \infty$ et donc que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$.

Corrigé 140 (Régularité de λ_N)

Soit m une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ t.q. $m(K) < \infty$ pour tout compact K de $\mathbb{R}^N$. (noter que ceci est vrai pour $m = \lambda_N$.)

1. Soient$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe O ouvert de $\mathbb{R}^N$ et F fermé de $\mathbb{R}^N$ tels que :

$$F \subset A \subset O \text{ et } m(O \setminus F) \leq \varepsilon.$$

corrigé

On reprend ici la démonstration de la régularité d'une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, finie sur les compacts (théorème 2.3).

On appelle T l'ensemble des $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ t.q. pour tout $\varepsilon > 0$, il existe O ouvert et F fermé vérifiant $F \subset A \subset O$ et $m(O \setminus F) \leq \varepsilon$. On va montrer que T est une tribu contenant $\mathcal{C} = \{\prod_{i=1}^N]a_i, b_i[,\ -\infty < a_i < b_i < \infty$ pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}\}$. Comme $\mathcal{C}$ engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ (voir l'exercice 2.6, ou le corrigé 14, il est même démontré qu'on peut, dans la définition de $\mathcal{C}$, se limiter au cas où les a_i et b_i sont dans $\mathbb{Q}$), ceci donnera $T = \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

On démontre tout d'abord que $\mathcal{C} \subset T$. Soit $-\infty < a_i < b_i < \infty$ pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$ et $A = \prod_{i=1}^N]a_i, b_i[$. Soit $\varepsilon > 0$. On veut montrer qu'il existe O ouvert et F fermé t.q. $F \subset A \subset O$ et $m(O \setminus F) \leq \varepsilon$.

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $(2/n_0) < b_i - a_i$ pour tout $i \in \{1,\dots,N\}$. Pour $n \geq n_0$, on pose $F_n = \prod_{i=1}^N [a_i + (1/n), b_i - (1/n)]$ et $O = A$. On a bien F_n fermé, O ouvert et $F_n \subset A \subset O$. On remarque ensuite que $O \setminus F_n \subset C_n$ avec :

$$C_n = \cup_{q=1}^N C_{n,q}, \;\; C_{n,q} = \prod_{i=1}^N I_{i,q}^{(n)},$$
$$I_{i,q}^{(n)} =]a_i, b_i[\text{ si } i \neq q, \; I_{q,q}^{(n)} =]a_q, a_q + \frac{1}{n}[\cup]b_q - \frac{1}{n}, b_q[.$$

Soit $q \in \{1,\dots,N\}$. Comme $C_{n+1,q} \subset C_{n,q}$ (pour tout $n \geq n_0$), $\cap_{n \geq n_0} C_{n,q} = \emptyset$ et $m(C_{n,q}) \leq m(\prod_{i=1}^N [a_i, b_i]) < \infty$ (car m est finie sur les compacts), on peut utiliser la propriété de continuité décroissante d'une mesure. On obtient $m(C_{n,q}) \to 0$ quand $n \to \infty$. On a alors aussi $m(C_n) \leq \sum_{q=1}^N m(C_{n,q}) \to 0$ quand $n \to \infty$. Il existe donc n t.q. $m(C_n) < \varepsilon$. On prenant $F = F_n$, on a bien alors O ouvert, F fermé et $m(O \setminus F) \leq \varepsilon$. Ce qui montre que $A \in T$ et donc que $\mathcal{C} \subset T$.

On montre maintenant que T est une tribu. On remarque tout d'abord que $\emptyset \in T$ (il suffit de prendre $F = O = \emptyset$) et que T est stable par passage au complémentaire (car, si $F \subset A \subset O$, on a $O^c \subset A^c \subset F^c$ et $F^c \setminus O^c = O \setminus F$). Il reste à montrer que T est stable par union dénombrable.

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset T$ et $A = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. On veut montrer que $A \in T$. On va commencer par traiter le cas (simple) où $m(A) < \infty$ puis le cas (plus difficile) où $m(A) = \infty$.

Premier cas. On suppose que $m(A) < \infty$. La démonstration est ici identique à celle faite pour $N = 1$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe O_n ouvert et F_n fermé t.q. $F_n \subset A_n \subset O_n$ et $m(O_n \setminus F_n) \leq (\varepsilon/2^n)$. On pose $O = \cup_{n \in \mathbb{N}} O_n$ et $\tilde{F} = \cup_{n \in \mathbb{N}} F_n$. On a $\tilde{F} \subset A \subset O$, $m(O \setminus \tilde{F}) \leq 2\varepsilon$, car $(O \setminus \tilde{F}) \subset \cup_{n \in \mathbb{N}} (O_n \setminus F_n)$, et O ouvert mais $\tilde{F}$ n'est pas nécessairement fermé...

Cependant, puisque $m(A) < \infty$, on a aussi $m(\tilde{F}) < \infty$. Par continuité croissante de m on a $m(\cup_{p=0}^n F_n) \to m(\tilde{F})$, quand $n \to \infty$, d'où (puisque $m(\tilde{F}) < \infty$) $m(\tilde{F}) - m(\cup_{p=0}^n F_n) \to 0$. On prend alors $F = \cup_{p=0}^n F_n$ avec n assez grand pour que $m(\tilde{F}) - m(F) \leq \varepsilon$. On a bien $F \subset A \subset O$, O ouvert, F fermé et $m(O \setminus F) \leq 3\varepsilon$. Ceci prouve que $A \in T$.

Deuxième cas. On suppose maintenant que $m(A) = \infty$ (et le raisonnement précédent n'est plus correct si $m(\tilde{F}) = \infty$). On raisonne en 3 étapes, en adaptant la démonstration faite pour $N = 1$:

(a) Soit $p = (p_1, \dots, p_N) \in \mathbb{Z}^N$. On remarque d'abord que $A_n \cap \prod_{i=1}^N [p_i, p_i + 1[\in T$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En effet, soit $n \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$. Il existe O ouvert et F fermé t.q. $F \subset A_n \subset O$ et $m(O \setminus F) \leq \varepsilon$. Pour $k \in \mathbb{N}^\star$, on a donc :

$$F_k = F \cap \prod_{i=1}^N [p_i, p_i + 1 - \frac{1}{k}] \subset A_n \cap \prod_{i=1}^N [p_i, p_i + 1[\subset O_k = O \cap \prod_{i=1}^N]p_i - \frac{1}{k}, p_i + 1[.$$

On a F_k fermé, O_k ouvert et $(O_k \setminus F_k) \subset (O \setminus F) \cup D_k$, avec :

$$D_k = \cup_{q=1}^N D_{k,q}, \;\; D_{k,q} = \prod_{i=1}^N J_{i,q}^{(k)},$$
$$J_{i,q}^{(k)} =]p_i - \frac{1}{k}, p_i + 1[\text{ si } i \neq p, \; J_{q,q}^{(k)} =]p_q - \frac{1}{k}, p_q[\cup]p_q + 1 - \frac{1}{k}, p_q + 1[.$$

En utilisant la continuité décroissante de m et le fait que m est finie sur les compacts (ce qui donne $m(D_k) \le m(\prod_{i=1}^N [p_i - 1, p_i + 1]) < \infty$), on démontre (comme pour les C_n précédemment) que $m(D_k) \to 0$ quand $k \to \infty$. Il existe donc $k \in \mathbb{N}^\star$ t.q. $m(D_k) \le \varepsilon$ et donc $m(O_k \setminus F_k) \le m(O \setminus F) + m(D_k) \le 2\varepsilon$. Ce qui donne bien que $A_n \cap \prod_{i=1}^N [p_i, p_i + 1[\in T$.

(b) Soit $p = (p_1, \ldots, p_N) \in \mathbb{Z}^N$. Comme $m(A \cap \prod_{i=1}^N [p_i, p_i + 1[) < \infty$, on peut maintenant utiliser le premier cas avec $A \cap \prod_{i=1}^N [p_i, p_i + 1[= \cup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \cap \prod_{i=1}^N [p_i, p_i + 1[)$. Il donne que $A \cap \prod_{i=1}^N [p_i, p_i + 1[\in T$ pour tout $p = (p_1, \ldots, p_N) \in \mathbb{Z}^N$.

(c) On montre enfin que $A \in T$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $p = (p_1, \ldots, p_N) \in \mathbb{Z}^N$, il existe un ouvert O_p et un fermé F_p t.q. $F_p \subset A \cap \prod_{i=1}^N [p_i, p_i + 1[\subset O_p$ et $m(O_p \setminus F_p) \le \varepsilon / (2^{|p|})$, en posant $|p| = \sum_{i=1}^N |p_i|$. On prend $O = \cup_{p \in \mathbb{Z}^N} O_p$ et $F = \cup_{p \in \mathbb{Z}^N} F_p$. On obtient $F \subset A \subset O$, $m(O \setminus F) \le 3^N \varepsilon$ et O est ouvert. Il reste à montrer que F est fermé.

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset F$ t.q. $x_n \to x$ (dans $\mathbb{R}^N$) quand $n \to \infty$. On veut montrer que $x \in F$. Il existe $p = (p_1, \ldots, p_N) \in \mathbb{Z}^N$ t.q. $x \in \prod_{i=1}^N]p_i - 1, p_i + 1[$. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $x_n \in \prod_{i=1}^N]p_i - 1, p_i + 1[$ pour tout $n \ge n_0$. Comme $x_n \in \cup_{q \in \mathbb{Z}^N} F_q$ et que $F_q \subset \prod_{i=1}^N [q_i, q_i + 1[$ pour tout $q = (q_1, \ldots, q_N)^t \in Z^N$, on a donc $x_n \in \cup_{q \in E_p} F_q$, pour tout $n \ge n_0$, où $E_q = \{q = (q_1, \ldots, q_N)^t \in \mathbb{Z}^N ; q_i \in \{p_i, p_i - 1\}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}\}$. Comme E_q est de cardinal fini et que F_q est fermé pour tout q, l'ensemble $\cup_{q \in E_p} F_q$ est donc aussi fermé, on en déduit que $x \in \cup_{q \in E_p} F_q \subset F$ et donc que F est fermé.

Ceci montre bien que $A \in T$ et termine la démonstration du fait que T est une tribu. Comme cela a déjà été dit, on en déduit que $T = \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

---

2. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. Déduire de la question précédente que $m(A) = \inf\{m(O), O$ ouvert t.q. $A \subset O\}$.

corrigé

Par monotonie de m on a $m(A) \le m(O)$ si $A \subset O$, donc $m(A) \le \inf\{m(O), O$ ouvert t.q. $A \subset O\}$. Il reste donc à montrer que $m(A) \ge \inf\{m(O), O$ ouvert t.q. $A \subset O\}$.

Soit $\varepsilon > 0$, d'après la question précédente, il existe O ouvert et F fermé t.q $F \subset A \subset O$ et $m(O \setminus F) \le \varepsilon$. On a donc aussi $m(O \setminus A) \le \varepsilon$ et donc $m(O) = m(A) + m(O \setminus A) \le m(A) + \varepsilon$. Ceci montre bien que $\inf\{m(O), O$ ouvert t.q. $A \subset O\} \le m(A)$.

Corrigé 141 (Densité de C_c et C_c^∞ dans L^1)

Soit $d \ge 1$ et μ une mesure sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$. On suppose que μ vérifie les deux propriétés suivantes :

(p1) μ est est finie sur les compacts de $\mathbb{R}^d$, c'est-à-dire que $\mu(K) < +\infty$ si K est un compact de $\mathbb{R}^d$,

(p2) μ est régulière, c'est-à-dire que pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe O ouvert et F fermé t.q. $F \subset A \subset O$ et $\mu(O \setminus F) \le \varepsilon$.

En fait, la propriété (p1) entraîne la propriété (p2) (voir la proposition 7.5) mais cette démonstration n'est pas demandée ici.

On note $\mathcal{L}^1_\mu$ l'espace $\mathcal{L}^1_\mathbb{R}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mu)$. Pour $f \in \mathcal{L}^1_\mu$, on note $\|f\|_1 = \int |f| d\mu$. Enfin, pour $x \in \mathbb{R}^d$, on note $|x|$ la norme euclidienne de x.

1. Soit $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ (c'est-à-dire φ continue de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ et à support compact). Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}^1_\mu$.
2. Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$ et $\eta > 0$. Pour $x \in \mathbb{R}^d$, on pose $\varphi(x) = \frac{(\eta - d(x,K))^+}{\eta}$ avec $d(x, K) = \inf\{|x - y|, \, y \in K\}$. Montrer que $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ et que $\varphi(x) = 1$ si $x \in K$.
3. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ t.q. $\mu(A) < +\infty$.
   (a) Soit $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe O ouvert et K compact t.q. $K \subset A \subset O$ et $\mu(O \setminus K) \leq \varepsilon$.
   (b) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ t.q. $\|\varphi - 1_A\|_1 \leq \varepsilon$.
4. Soit f une fonction borélienne positive de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f \in \mathcal{L}^1_\mu$. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ t.q. $\|f - \varphi\|_1 \leq \varepsilon$. [On pourra approcher f par une fonction étagée.]
5. (Densité.) Soit $f \in \mathcal{L}^1_\mu$ et $\varepsilon > 0$.
   (a) Montrer qu'il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ t.q. $\|f - \varphi\|_1 \leq \varepsilon$.
   (b) Montrer qu'il existe $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ t.q. $\|f - \psi\|_1 \leq \varepsilon$. [On pourra montrer que, si $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, on a $\|\varphi - \varphi_n\|_1 \to 0$, quand $n \to \infty$, avec $\varphi_n = \varphi \star \rho_n$ et $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ une famille régularisante, voir la définition 8.4.]
6. (Continuité en moyenne ?)
   (a) Soit $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Montrer que $\|\varphi(\cdot + h) - \varphi\|_1 \to 0$ quand $h \to 0$.
   (b) Montrer, en donnant un exemple (c'est-à-dire en choisissant convenablement f et μ) qu'on peut avoir $f \in \mathcal{L}^1_\mu$ et $\|f(\cdot + h) - f\|_1 \not\to 0$ quand $h \to 0$.
7. On suppose maintenant que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et que μ est une mesure sur les boréliens de Ω, finie sur les sous ensembles compacts de Ω. Indiquer brièvement comment on peut montrer la densité de $C_c(\Omega, \mathbb{R})$ et $C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ dans $L^1_\mathbb{R}(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mu)$.

corrigé

En Attente...

Corrigé 142 (Invariance par translation de λ_N)
Soient $N \geq 1$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{R}^\star$ et $\beta_1, \ldots, \beta_N \in \mathbb{R}$. Pour $x = (x_1, \ldots, x_N)^t \in \mathbb{R}^N$, on pose $\varphi(x) = (\alpha_1 x_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_N x_N + \beta_N)^t$, de sorte que φ est une bijection de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$.

1. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, montrer que $\varphi(A) = \{\varphi(x), \, x \in A\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

   corrigé

   On pose $T = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \text{ t.q. } \varphi(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)\}$.

   Comme φ est bijective, il est facile de montrer que T est une tribu. En effet, il suffit de remarquer que $\varphi(\mathbb{R}^N) = \mathbb{R}^N$, $\varphi(A^c) = (\varphi(A))^c$ et $\varphi(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \cup_{n \in \mathbb{N}} \varphi(A_n)$.

   Comme φ est continue, φ transforme les compacts en compacts. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des compacts de $\mathbb{R}^N$, on a donc $\mathcal{C} \subset T$ (on rappelle que les compacts sont des boréliens). Comme l'ensemble des compacts de $\mathbb{R}^N$ engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ (noter que tout ouvert peut s'écrire comme une réunion dénombrable de compacts), on a donc $T = \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. Ce qui donne bien $\varphi(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

---

2. Montrer que $\lambda_N(\varphi(A)) = \prod_{i=1}^N |\alpha_i| \lambda_N(A)$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. [On pourra faire une récurrence sur N : La proposition 2.9 donne le résultat pour la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, notée λ. On suppose que le résultat est vrai pour λ_{N-1} (et pour toute famille $\alpha_1, \ldots, \alpha_{N-1} \in \mathbb{R}^\star$, $\beta_1, \ldots, \beta_{N-1} \in \mathbb{R}$). On le démontre alors pour λ_N en posant $m(A) = (\prod_{i=1}^N |\alpha_i|)^{-1} \lambda_N(\varphi(A))$ et en montrant que m est une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ égale à λ_N sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{N-1}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On utilise pour conclure la partie "unicité" du théorème 7.1 sur la mesure produit.]

corrigé

On procède par récurrence sur N. La proposition 2.9 donne le résultat pour la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire pour $N = 1$ en posant $\lambda_1 = \lambda$. On suppose maintenant que le résultat est vrai pour $N-1$ avec un certain $N \geq 2$, c'est-à-dire que $\lambda_{N-1}(\psi(B)) = \prod_{i=1}^{N-1} |\alpha_i| \lambda_{N-1}(B)$ pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{N-1})$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_{N-1} \in \mathbb{R}^\star$, $\beta_1, \ldots, \beta_{N-1} \in \mathbb{R}$ et ψ définie par $\psi(y) = (\alpha_1 y_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_{N-1} y_{N-1} + \beta_{N-1})^t$ pour tout $y = (y_1, \ldots, y_{N-1})^t \in \mathbb{R}^{N-1}$, et on démontre le résultat pour N.

Soit donc $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{R}^\star$, $\beta_1, \ldots, \beta_N \in \mathbb{R}$ et φ définie par $\varphi(x) = (\alpha_1 x_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_N x_N + \beta_N)^t$ pour tout $x = (x_1, \ldots, x_N)^t \in \mathbb{R}^N$.

Pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, on pose $m(A) = (\prod_{i=1}^N |\alpha_i|)^{-1} \lambda_N(\varphi(A))$.

On montre tout d'abord que m est une mesure. On a bien $m(\emptyset) = 0$ car $\varphi(\emptyset) = \emptyset$. Puis, soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ avec $A_n \cap A_m = \emptyset$ si $n \neq m$. On a $\varphi(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \cup_{n \in \mathbb{N}} \varphi(A_n)$ avec $\varphi(A_n) \cap \varphi(A_m) = \emptyset$ si $n \neq m$ (car φ est bijective). Donc, $\lambda_N(\varphi(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_N(\varphi(A_n))$ et donc $m(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} m(A_n)$. Ce qui prouve la σ-additivité de m et donc le fait que m est une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

On montre maintenant que $m(A_1 \times A_2) = \lambda_{N-1}(A_1)\lambda(A_2)$ pour tout $A_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{N-1})$ et pour tout $A_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $\lambda_{N-1}(A_1) < \infty$ et $\lambda(A_2) < \infty$.

Soit donc $A_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{N-1})$ et $A_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $\lambda_{N-1}(A_1) < \infty$ et $\lambda(A_2) < \infty$. On a $m(A_1 \times A_2) = (\prod_{i=1}^N |\alpha_i|)^{-1} \lambda_N(\varphi(A_1 \times A_2))$.

On pose $\psi(y) = (\alpha_1 y_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_{N-1} y_{N-1} + \beta_{N-1})^t$, pour tout $y = (y_1, \ldots, y_{N-1})^t \in \mathbb{R}^{N-1}$, et $\tau(z) = \alpha_N z + \beta_N$, pour tout $z \in \mathbb{R}$. On a donc $\varphi(A_1 \times A_2) = \psi(A_1) \times \tau(A_2)$. L'hypothèse de récurrence et la proposition 2.9 donne que $\lambda_{N-1}(\psi(A_1)) = \prod_{i=1}^{N-1} |\alpha_i| \lambda_{N-1}(A_1) < \infty$ et que $\lambda(\tau(A_2)) = \alpha_N \lambda(A_2) < \infty$. Comme $\lambda_N = \lambda_{N-1} \otimes \lambda$ (car c'est la définition de λ_N) on en déduit :

$$\lambda_N(\varphi(A_1 \times A_2)) = \lambda_{N-1}(\psi(A_1))\lambda(\tau(A_2)) = \prod_{i=1}^{N-1} |\alpha_i| \lambda_{N-1}(A_1) \alpha_N \lambda(A_2),$$

et donc :

$$m(A_1 \times A_2) = (\prod_{i=1}^{N} |\alpha_i|)^{-1} \lambda_N(\varphi(A_1 \times A_2)) = \lambda_{N-1}(A_1)\lambda(A_2).$$

On peut maintenant conclure. Comme m est une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{N-1}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$vérifiant $m(A_1 \times A_2) = \lambda_{N-1}(A_1)\lambda(A_2)$ pour tout $A_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{N-1})$ et pour tout $A_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $\lambda_{N-1}(A_1) < \infty$ et $\lambda(A_2) < \infty$, la partie "unicité" du théorème 7.1 donne que $m = \lambda_{N-1} \otimes \lambda$, c'est-à-dire $m = \lambda_N$. On a donc bien $\lambda_N(\varphi(A)) = \prod_{i=1}^N |\alpha_i| \lambda_N(A)$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

Corrigé 143 (Changement de variables simple)
Soient $N \geq 1$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{R}^\star$ et $\beta_1, \ldots, \beta_N \in \mathbb{R}$. Pour $x = (x_1, \ldots, x_N)^t \in \mathbb{R}^N$. On pose $\varphi(x) = (\alpha_1 x_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_N x_N + \beta_N)^t$ (de sorte que φ est une bijection de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$).

1. Soit $f \in \mathcal{E}_+ = \mathcal{E}_+(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$, montrer que $f \circ \varphi \in \mathcal{E}_+$ et que $\int f d\lambda_N = \prod_{i=1}^N |\alpha_i| \int (f \circ \varphi) d\lambda_N$. [Utiliser l'exercice 7.14.]

corrigé

Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et $f = 1_A$. On a alors $f \circ \varphi = 1_B$ avec $B = \varphi^{-1}(A)$. En appliquant l'exercice 7.14 (corrigé 142) à l'inverse de φ, noté ψ, on a donc $\lambda_N(B) = \lambda_N(\psi(A)) = (\prod_{i=1}^N |\alpha_i|)^{-1} \lambda_N(A)$, c'est-à-dire :

$$\int f d\lambda_N = \lambda_N(A) = (\prod_{i=1}^N |\alpha_i|) \lambda_N(B) = (\prod_{i=1}^N |\alpha_i|) \int f \circ \varphi d\lambda_N.$$

Soit maintenant $f \in \mathcal{E}_+ \setminus \{0\}$. Il existe donc $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+^\star$ et $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ t.q. $f = \sum_{i=1}^n a_i f_i$, avec $f_i = 1_{A_i}$. On a alors, par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned}\int f d\lambda_N &= \sum_{i=1}^n a_i \int f_i d\lambda_N = (\prod_{i=1}^N |\alpha_i|) \sum_{i=1}^n a_i \int f_i \circ \varphi d\lambda_N \\ &= (\prod_{i=1}^N |\alpha_i|) \int \sum_{i=1}^n a_i f_i \circ \varphi d\lambda_N = (\prod_{i=1}^N |\alpha_i|) \int f \circ \varphi d\lambda_N.\end{aligned}$$

(Ce qui est, bien sûr, aussi vrai si $f = 0$.)

2. Soit $f \in \mathcal{M}_+ = \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$, montrer que $f \circ \varphi \in \mathcal{M}_+$ et que $\int f d\lambda_N = \prod_{i=1}^N |\alpha_i| \int (f \circ \varphi) d\lambda_N$.

corrigé

Il existe $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ t.q. $f_n \uparrow f$ quand $n \to \infty$. On a donc aussi $(f_n \circ \varphi)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ et $f_n \circ \varphi \uparrow f \circ \varphi$ quand $n \to \infty$ (ce qui donne, en particulier que $f \circ \varphi \in \mathcal{M}_+$). La question précédente donne :

$$\int f_n d\lambda_N = (\prod_{i=1}^N |\alpha_i|) \int f_n \circ \varphi d\lambda_N.$$

La définition de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$ donne alors, quand $n \to \infty$:

$$\int f d\lambda_N = (\prod_{i=1}^N |\alpha_i|) \int f \circ \varphi d\lambda_N.$$

3. Soit $f \in \mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$, montrer que $f \circ \varphi \in \mathcal{L}^1$ et que $\int f d\lambda_N = \prod_{i=1}^N |\alpha_i| \int (f \circ \varphi) d\lambda_N$.

corrigé

Comme f est mesurable de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$ et φ est mesurable de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$ ($\mathbb{R}^N$ et $\mathbb{R}$ étant munis de leur tribu borélienne), on a bien $f \circ \varphi$ mesurable de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$.

En appliquant la question précédente à la fonction $|f|$ on obtient que $\int |f|\circ\varphi d\lambda_N = \int |f\circ\varphi| d\lambda_N < \infty$ car $\int |f| d\lambda_N < \infty$. On a donc $f\circ\varphi \in \mathcal{L}^1$.

Enfin, en remarquant que $(f\circ\varphi)^+ = f^+\circ\varphi$ et $(f\circ\varphi)^- = f^-\circ\varphi$ et en utilisant la question précédente avec f^+ et f^-, on obtient :

$$\int f^+ d\lambda_N = (\prod_{i=1}^N |\alpha_i|) \int f^+\circ\varphi d\lambda_N,$$
$$\int f^- d\lambda_N = (\prod_{i=1}^N |\alpha_i|) \int f^-\circ\varphi d\lambda_N.$$

En faisant la différence, on en déduit :

$$\int f d\lambda_N = (\prod_{i=1}^N |\alpha_i|) \int f\circ\varphi d\lambda_N.$$

Corrigé 144 (Primitives de fonctions L^p)
Soit $p \in [1,\infty[$. On note $L^p = L^p_{\mathbb{R}}(]0,1[,\mathcal{B}(]0,1[),\lambda)$. Soit $f,g \in L^p$. On définit F et G de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt \ \ (= \int_{]0,x[} f d\lambda), \quad G(x) = \int_0^x g(t)dt \ \ (= \int_{]0,x[} g d\lambda), \quad \text{pour tout } x \in [0,1].$$

1. Montrer que F et G sont des fonctions continues et qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ t.q. $|F(y) - F(x)| \le C|y-x|^{1-\frac{1}{p}}$ et $|G(y) - G(x)| \le C|y-x|^{1-\frac{1}{p}}$, pour tous $x,y \in [0,1]$, $x < y$.

corrigé

On note $L^1 = L^1_{\mathbb{R}}(]0,1[,\mathcal{B}(]0,1[),\lambda)$. F (et G) sont bien définies partout sur $[0,1]$ car $f1_{[0,x]} \in L^1$ (et $g1_{[0,x]} \in L^1$) pour tout $x \in [0,1]$ (on confond, comme d'habitude, un élément de L^1 ou L^p avec l'un de ses représentants).

Soit $x,y \in [0,1]$, $x < y$. En utilisant l'inégalité de Hölder avec f et $1_{[x,y]}$, on obtient, avec $q = p/(p-1)$:

$$|F(y) - F(x)| = |\int f1_{[x,y]} d\lambda| \le \|f\|_p \|1_{[x,y]}\|_q \le \|f\|_p |y-x|^{1-\frac{1}{p}}. \tag{12.136}$$

On a de même :

$$|G(y) - G(x)| \le \|g\|_p |y-x|^{1-\frac{1}{p}}. \tag{12.137}$$

Ce qui donne les inégalités demandées en prenant $C = \max(\|f\|_p, \|g\|_p)$.

Les inégalités (12.136) et (12.137) donnent aussi la continuité (uniforme) de F et G lorsque $p > 1$ (et donc $1 - (1/p) > 0$), mais pas pour $p = 1$.

Pour $p = 1$, on montre la continuité de F (et de G par un raisonnement semblable) en remarquant que, pour $x,y \in [0,1]$, $x < y$:

$$|F(y) - F(x)| \le \int |f| 1_{[x,y]} d\lambda \to 0, \text{ quand } \lambda([x,y]) = y - x \to 0,$$

ceci découle de l'exercice 4.14 et donne même la continuité uniforme de F comme cela a été démontré dans l'exercice 5.7.

---

2. On suppose $p > 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. Montrer que, pour tout $x \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$, on a $(F(x), G(x)) \in A_{n,k} \times B_{n,k}$, où $A_{n,k}$ et $B_{n,k}$ sont des intervalles de $\mathbb{R}$ (indépendants de x) dont les longueurs tendent vers 0 quand $n \to \infty$. [Utiliser la question 1.]

corrigé

On pose toujours $C = \max(\|f\|_p, \|g\|_p)$. Pour $x \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$, on a, avec $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} > 0$:

$$|F(x) - F(\frac{k}{n})| \le C(\frac{1}{n})^{\frac{1}{q}},\ |G(x) - G(\frac{k}{n})| \le C(\frac{1}{n})^{\frac{1}{q}}.$$

On en déduit que $(F(x), G(x)) \in A_{n,k} \times B_{n,k}$ avec :

$$A_{n,k} = [F(\frac{k}{n}) - C(\frac{1}{n})^{\frac{1}{q}}, F(\frac{k}{n}) + C(\frac{1}{n})^{\frac{1}{q}}],\ B_{n,k} = [G(\frac{k}{n}) - C(\frac{1}{n})^{\frac{1}{q}}, G(\frac{k}{n}) + C(\frac{1}{n})^{\frac{1}{q}}].$$

On a bien $\lambda(A_{n,k}) = \lambda(B_{n,k}) = 2C(\frac{1}{n})^{\frac{1}{q}} \to 0$ quand $n \to \infty$.

---

3. On suppose $p > 2$. Montrer que $E = \{(F(x), G(x));\ x \in [0,1]\}$ est une partie négligeable de $\mathbb{R}^2$ (muni de la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}^2$). [En utilisant une majoration convenable des longueurs de $A_{n,k}$ et $B_{n,k}$, inclure E (pour tout $n \in \mathbb{N}$) dans une partie de $\mathbb{R}^2$ dont la mesure de Lebesgue tend vers 0 quand $n \to \infty$.]

corrigé

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $H_n = \cup_{k=0}^{n-1} A_{n,k} \times B_{n,k} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$. La question précédente donne $E \subset H_n$. On en déduit que $E \subset H$ avec $H = \cap_{n \in \mathbb{N}} H_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

On utilise maintenant l'hypothèse $p > 2$ pour montrer que $\lambda_2(H) = 0$ (et donc que E est négligeable). En effet, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$\begin{aligned}\lambda_2(H) \le \lambda_2(H_n) \le \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_2(A_{n,k} \times B_{n,k}) &= \sum_{k=0}^{n-1} \lambda(A_{n,k})\lambda(B_{n,k}) \\ &\le n4C^2(\frac{1}{n})^{\frac{2}{q}} = 4C^2 n^{1-\frac{2}{q}},\end{aligned}$$

avec $C = \max(\|f\|_p, \|g\|_p)$ et $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$. Comme $p > 2$, on a $q < 2$ et donc $n^{1-\frac{2}{q}} \to 0$ quand $n \to \infty$. Ceci donne que $\lambda_2(H_n) \to 0$ quand $n \to \infty$ et donc que $\lambda_2(H) = 0$.

12.7.4 Convolution

Corrigé 145 (Propriétés élémentaires de la convolution)
Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N) = L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$.

1. Montrer que $f \star g = g \star f$ p.p.. [Utiliser l'invariance par translation de la mesure de Lebesgue et sa conséquence pour les changements de variables simples (propositions 7.7 et 7.8).]

———————————————————**corrigé**———————————————————

On confond, comme d'habitude f (et g) avec l'un de ses représentants, et on choisit comme représentant de $f \star g$ (qui est définie comme un élément de $L^1(\mathbb{R}^N)$) la fonction définie par $f \star g(x) = \int f(y)g(x-y)d\lambda_N(y)$ si $f(\cdot)g(x-\cdot) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$. On sait que cette fonction est définie p.p. car $f(\cdot)g(x-\cdot) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$. On choisit de manière analogue comme représentant de $g \star f$ la fonction définie par $g \star f(x) = \int g(y)f(x-y)d\lambda_N(y)$ si $g(\cdot)f(x-\cdot) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$.

Soit $x \in \mathbb{R}^N$ un point pour lequel $f \star g$ est définie. On a donc $f(\cdot)g(x-\cdot) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$. On pose $h(\cdot) = f(\cdot)g(x-\cdot)$. On utilise alors la proposition 7.8 (changement de variables simples) avec φ définie par $\varphi(y) = -y + x$ pour tout $y \in \mathbb{R}^N$. Elle donne $h \circ \varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ et :

$$\int h(\varphi(y))d\lambda_N(y) = \int h(y)d\lambda_N(y).$$

Comme $h(\varphi(y)) = f(\varphi(y))g(x-\varphi(y)) = f(x-y)g(y)$, on en déduit que $g \star f$ est définie au point x et que $g \star f(x) = f \star g(x)$.

Ceci montre bien que $f \star g = g \star f$ p.p..

———————————————————————————————————————

2. On suppose que f et g sont à support compact (f à support compact signifie qu'il existe K, compact de $\mathbb{R}^N$, t.q. $f = 0$ p.p. sur K^c). Montrer que la fonction $f \star g$ est alors aussi à support compact. [On désigne par $B(0,\alpha)$ la boule ouverte de centre 0 et de rayon α. Comme f et g sont à support compact, il existe a et $b \in \mathbb{R}_+$ tels que $f = 0$ p.p. sur $B(0,a)^c$ et $g = 0$ p.p. sur $B(0,b)^c$. Montrer que $f \star g = 0$ p.p. sur $B(0,a+b)^c$.]

———————————————————**corrigé**———————————————————

Comme pour la question précédente, on confond f (et g) avec l'un de ses représentants, et on choisit comme représentant de $f \star g$ la fonction définie par $f \star g(x) = \int f(y)g(x-y)d\lambda_N(y)$ si $f(\cdot)g(x-\cdot) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$.

Soit $a, b \in \mathbb{R}_+$ t.q. $f = 0$ p.p. sur $B(0,a)^c$ et $g = 0$ p.p. sur $B(0,b)^c$. ($\mathbb{R}^N$ est muni d'une norme, notée $\|\cdot\|$.)

Soit $x \in B(0,a+b)^c$. On va montrer que $f(\cdot)g(x-\cdot) = 0$ p.p. (et donc que $f \star g(x) = 0$, noter aussi que $f(\cdot)g(x-\cdot)$ est mesurable car f et g le sont).

Comme $f = 0$ p.p. sur $B(0,a)^c$, on a aussi $f(\cdot)g(x-\cdot) = 0$ p.p. sur $B(0,a)^c$. Comme $g = 0$ p.p. sur $B(0,b)^c$, on a $f(\cdot)g(x-\cdot) = 0$ p.p. sur $B(x,b)^c$ (car $y \in B(x,b)^c \iff (x-y) \in B(0,b)^c$). On a donc :

$$f(\cdot)g(x-\cdot) = 0 \text{ p.p. sur } B(0,a)^c \cup B(x,b)^c. \tag{12.138}$$

Or $B(0,a) \cap B(x,b) = \emptyset$ car $y \in B(0,a) \cap B(x,b)$ implique $\|y\| < a$ et $\|x-y\| < b$ et donc $\|x\| = \|x-y+y\| < a+b$, en contradiction avec $x \in B(0,a+b)^c$. On a donc $B(0,a)^c \cup B(x,b)^c = (B(0,a) \cap B(x,b))^c = \mathbb{R}^N$ et (12.138) donne alors $f(\cdot)g(x-\cdot) = 0$ p.p. et donc $f \star g$ est définie au point x et $f \star g(x) = 0$.

On a bien montré que $f \star g = 0$ p.p. sur $B(0,a+b)^c$ et donc que $f \star g$ est à support compact.

———————————————————————————————————————

Corrigé 146 (Convolution $L^p - C_c^\infty$)
Soit $1 \le p \le \infty$. Soit $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N) = \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, B(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ (ou $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$) et $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. On pourra se limiter au cas $N = 1$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, la fonction $f(\cdot)\rho(x - \cdot)$ appartient à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$. On pose alors

$$f \star \rho(x) = \int f(\cdot)\rho(x - \cdot) d\lambda_N.$$

corrigé

On rappelle que $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ si $f \in \mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$ et $f1_K \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ pour tout compact K de $\mathbb{R}^N$. On a donc $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ (pour tout $1 \le p \le \infty$) car si $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)$, on a bien $f \in \mathcal{M}$ et, grâce à l'inégalité de Hölder, $f1_K \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ (et $\|f1_K\|_1 \le \|f\|_p \|1_K\|_q < \infty$,avec $q = p/(p-1)$).

On suppose donc dans la suite de ce corrigé que $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ car cette hypothèse est plus générale que $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)$. Pour simplifier la rédaction, on se limite au cas $N = 1$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $f(\cdot)\rho(x - \cdot)$ est mesurable (c'est-à-dire ici borélienne car $\mathbb{R}$ est muni de sa tribu de Borel) car f est mesurable et $\rho(x - \cdot)$ est mesurable (car continue). Comme ρ est à support compact, il existe $a \in \mathbb{R}_+$ t.q. $\rho = 0$ sur $[-a, a]^c$. On a donc $\rho(x - \cdot) = 0$ sur K_x^c avec $K_x = [x-a, x+a]$, ce qui permet de montrer que $f(\cdot)\rho(x-\cdot) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ car $|f(\cdot)\rho(x-\cdot)| \le |f1_{K_x}| \|\rho\|_u$, avec $\|\rho\|_u = \max\{|\rho(z)|,\ z \in \mathbb{R}\} < \infty$, et $f1_{K_x} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

La fonction $f \star \rho$ est donc définie sur tout $\mathbb{R}$.

2. Montrer que $f \star \rho \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$.

corrigé

Comme dans la question précédente, on va utiliser $a \in \mathbb{R}_+$ t.q. $\rho = 0$ sur $[-a, a]^c$ et $\|\rho\|_u = \max\{|\rho(z)|,\ z \in \mathbb{R}\}$ (on va aussi utiliser les normes des dérivées de ρ, $\|\rho^{(k)}\|_u$). On raisonne maintenant en 3 étapes.

Etape 1. On commence par montrer que $f \star \rho$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. La continuité de $f \star \rho$ en x_0 découle du théorème de continuité sous le signe $\int$, théorème 4.9. En effet, on pose, pour $x, y \in \mathbb{R}$:

$$F(x, y) = f(y)\rho(x - y).$$

On a $F(x, \cdot) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $f \star \rho(x) = \int F(x, \cdot) d\lambda$. La fonction F vérifie alors les 2 hypothèses suivantes :

(a) $x \mapsto F(x, y)$ est continue en x_0, pour tout $y \in \mathbb{R}$,

(b) $|F(x, y)| \le G(y)$ pour tout $x \in]x_0 - 1, x_0 + 1[$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$, en prenant $G = |f1_K| \|\rho\|_u$ avec $K = [x_0 - 1 - a, x_0 + 1 + a]$.

Comme K est compact, on a $G \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et le théorème 4.9 donne bien la continuité de $f \star \rho$ en x_0.

Etape 2. On montre maintenant que $f \star \rho$ est dérivable en tout point et que $(f \star \rho)' = f \star \rho'$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Pour montrer la dérivabilité de $f \star \rho$ en x_0, on utilise le théorème de dérivabilité sous le signe $\int$, théorème 4.10. On reprend la même fonction F que dans l'étape 1, elle vérifie les 2 hypothèses suivantes :

(a) $x \mapsto F(x, y)$ est dérivable pour tout $x \in]x_0 - 1, x_0 + 1[$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$,

(b) $|\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)| = |f(y)\rho'(x-y)| \leq H(y)$ pour tout $x \in]x_0-1, x_0+1[$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$, en prenant $H = |f1_K|\|\rho'\|_u$ avec $K = [x_0 - 1 - a, x_0 + 1 + a]$.

Comme K est compact, on a $H \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et le théorème 4.10 donne bien la dérivabilité de $f \star \rho$ en x_0 et le fait que $(f \star \rho)'(x_0) = f \star \rho'(x_0)$.

Etape 3. On montre enfin que $f \star \rho \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour cela, on va montrer, par récurrence sur k, que $f \star \rho \in C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $(f \star \rho)^{(k)} = f \star \rho^{(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (ce qui donne bien $f \star \rho \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$).

L'étape 1 montre que $f \star \rho \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (et on a bien $(f \star \rho)^{(0)} = f \star \rho = f \star \rho^{(0)}$). On suppose maintenant que $f \star \rho \in C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $(f \star \rho)^{(k)} = f \star \rho^{(k)}$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$. L'étape 2 appliquée à $\rho^{(k)}$ (qui appartient aussi à $C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$) au lieu de ρ donne alors que $f \star \rho^{(k)}$ est dérivable et que sa dérivée est $f \star \rho^{(k+1)}$. L'étape 1 appliquée à $\rho^{(k+1)}$ donne que $f \star \rho^{(k+1)} \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On a donc bien finalement montré que $f \star \rho \in C^{k+1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $(f \star \rho)^{(k+1)} = f \star \rho^{(k+1)}$. Ce qui termine la récurrence.

---

3. On suppose maintenant que f est à support compact, c'est à dire qu'il existe un compact de $\mathbb{R}$, noté K, t.q. $f = 0$ p.p. sur K^c, montrer que $f \star \rho$ est aussi à support compact.

corrigé

Comme f et ρ sont à support compact, on démontre que $f \star \rho$ est aussi à support compact, comme cela a été fait dans l'exercice 7.19 (corrigé 145). Plus précisément, si $f = 0$ p.p. sur $B(0, a)^c$ et $\rho = 0$ sur $B(o, b)^c$, on a $f \star \rho = 0$ sur $B(0, a + b)^c$ (voir le corrigé 145).

Corrigé 147 (Inégalité de Young)

Soient $1 < p < +\infty$, $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ et $g \in L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$. Montrer que $f \star g$ est définie p.p., $f \star g \in L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ et $\|f \star g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$. [Ecrire $\int(\int |f(x - y)g(y)|dy)^p dx = \int(\int |f(x - y)|^{\frac{1}{q}} |f(x - y)|^{\frac{1}{p}} |g(y)|dy)^p dx$, avec $q = \frac{p}{p-1}$. Appliquer l'inégalité de Hölder puis le théorème de Fubini-Tonelli].

corrigé

Pour simplifier les notations, on ne traite ici que le cas $N = 1$. On suppose aussi que f et g ne sont pas nulles p.p. (sinon, il est immédiat que $f \star g$ est définie partout et $f \star g(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$).

On confond f et g avec l'un de leurs représentants.

Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on pose $H(x, y) = g(y)f(x - y)$. La première partie de la démonstration de la proposition sur la convolution (proposition 7.9) montre que H, et donc $|H|$, est $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$-mesurable. On peut alors utiliser les deux premières conclusions du théorème de Fubini-Tonelli (théorème 7.2) pour affirmer que $|g(\cdot)f(x - \cdot)| \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et que $\varphi \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ avec φ définie par $\varphi(x) = \int |g(\cdot)f(x - \cdot)|d\lambda$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par composition de fonctions mesurables, on a donc aussi $\varphi^p \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Les fonctions $|f(x-\cdot)|^{\frac{1}{q}}$ et $|f(x-\cdot)|^{\frac{1}{p}}|g(\cdot)|$ sont aussi mesurables. On peut alors utiliser l'inégalité de Hölder avec $q = p/(p-1)$. elle donne :

$$\begin{aligned}(\varphi(x))^p = (\int |f(x-\cdot)|^{\frac{1}{q}}|f(x-\cdot)|^{\frac{1}{p}}|g(\cdot)||d\lambda)^p \le (\int |f(x-\cdot)|d\lambda)^{\frac{p}{q}}(\int |f(x-\cdot)||g(\cdot)|^p d\lambda) \\ \le \|f\|_1^{\frac{p}{q}}(\int |f(x-\cdot)||g(\cdot)|^p d\lambda).\end{aligned} \tag{12.139}$$

Noter que (12.139) est vraie si $|f(x-\cdot)||g(\cdot)|^p \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et si $|f(x-\cdot)||g(\cdot)|^p \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Dans ce dernier cas on obtient seulement $\varphi(x)^p \le \infty$. On a aussi utiliser la proposition 7.8 pour dire que $\int |f(x-\cdot)|d\lambda = \int |f|d\lambda = \|f\|_1$.

On peut maintenant utiliser le théorème de Fubini-Tonelli (théorème 7.2) avec les fonctions $|f|$ et $|g|^p$. Il donne :

$$\begin{aligned}&\int \varphi(x)^p d\lambda(x) \le \|f\|_1^{\frac{p}{q}} \int (\int |f(x-\cdot)||g(\cdot)|^p d\lambda)d\lambda(x) \\ &\le \|f\|_1^{\frac{p}{q}} \int (\int |f(x-y)||g(y)|^p d\lambda(x))d\lambda(y) \le \|f\|_1^{\frac{p}{q}}\|f\|_1\|g\|_p^p = \|f\|_1^p\|g\|_p^p.\end{aligned} \tag{12.140}$$

Ceci donne que $\varphi \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ et, en particulier que $\varphi(x) < \infty$ p.p., c'est-à-dire $\lambda(A) = 0$ avec $A = \{\varphi = \infty\}$ (noter que $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ puisque $\varphi \in \mathcal{M}_+$). Pour tout $x \in A^c$, on a donc $g(\cdot)f(x-\cdot) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et on peut définir $g \star f(x)$ par $g \star f(x) = \int g(y)f(x-y)d\lambda(y)$.

La fonction $g \star f$ est donc définie p.p.. On remarque maintenant qu'elle est égale p.p. à une fonction mesurable. En effet, les fonctions H^+ et H^- sont $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$-mesurables (d'après la première partie de la démonstration de la proposition 7.9, on rappelle que $H(x,y) = g(y)f(x-y)$). Les deux premières conclusions du théorème 7.2) donnent alors $(g(\cdot)f(x-\cdot)^{\pm} \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et que $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ avec φ_1 définie par $\varphi_1(x) = \int (g(\cdot)f(x-\cdot))^+ d\lambda$ et φ_2 définie par $\varphi_2(x) = \int (g(\cdot)f(x-\cdot))^- d\lambda$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On pose alors $h = \varphi_1 - \varphi_2$ sur A^c et $h = 0$ sur A. On a bien que h est mesurable (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) et $h = g \star f$ p.p..

On remarque enfin que $h \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ car $|h| \le \varphi$ p.p. et $\varphi \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$. On en déduit bien que $g \star f \in L^p(\mathbb{R})$ (avec la confusion habituelle entre $g \star f$ et la classe de h dans $L^p(\mathbb{R})$).

Le fait que $\|g \star f\|_p \le \|f\|_1\|g\|_p$ est conséquence immédiate de (12.140) puisque $g \star f \le \varphi$ p.p..

Enfin, le raisonnement fait dans la première question de l'exercice (7.19) montre que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(\cdot)g(x-\cdot) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ si et seulement $f(x-\cdot)g(\cdot) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ et que ces deux fonctions ont alors même intégrale. Ceci permet de montrer que $f \star g$ est aussi définie p.p. et que $f \star g = g \star f$ p.p.

12.7.5 Changement de variables

Corrigé 148

1. Vérifier que si $n \ge 1$ $\displaystyle\int_0^n \frac{\sin x}{x}dx = \int_0^n (\int_0^\infty e^{-xt}dt)\sin x dx.$

corrigé

Soit $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est continue que $[0,n]$ en posant $\frac{\sin x}{x} = 1$ pour $x = 0$, elle est donc bien intégrable pour l'espace mesuré $([0,n],\mathcal{B}([0,n]),\lambda)$.

Pour tout $x > 0$, on a $e^{x\cdot} \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$. Pour calculer $\int_0^\infty e^{-xt}dt$, on remarque que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $\int_0^p e^{-xt}dt = [\frac{-e^{-xt}}{x}]_0^p = \frac{1}{x} - \frac{e^{-xp}}{x}$. Quand $p \to \infty$, on en déduit, avec le théorème de convergence monotone, que $\int_0^\infty e^{-xt}dt = \frac{1}{x}$. On obtient bien :

$$\int_0^n \frac{\sin x}{x}dx = \int_0^n (\int_0^\infty e^{-xt}dt)\sin x dx.$$

---

2. Calculer $F_n(t) = \displaystyle\int_0^n e^{-xt}\sin x dx$ $(t \geq 0)$.

corrigé

Pour $t = 0$, on a $\int_0^n e^{-xt}\sin x dx = \int_0^n \sin x dx = 1 - \cos n$. Donc, $F_n(0) = 1 - \cos n$.

Soit maintenant $t > 0$. Comme les fonctions $x \mapsto e^{-xt}$ et $x \mapsto \sin x$ sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$, on peut calculer $\int_0^n e^{-xt}\sin x dx$ en intégrant deux fois par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^n e^{-xt}\sin x dx &= -\int_0^n te^{-xt}\cos x dx - [e^{-xt}\cos x]_0^n \\ &= -\int_0^n t^2 e^{-xt}\sin x dx - [te^{-xt}\sin x]_0^n - [e^{-xt}\cos x]_0^n.\end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$(t^2+1)\int_0^n e^{-xt}\sin x dx = 1 - te^{-nt}\sin n - e^{-nt}\cos n.$$

et donc :

$$F_n(t) = \int_0^n e^{-xt}\sin x dx = \frac{1 - te^{-nt}\sin n - e^{-nt}\cos n}{t^2+1}.$$

---

3. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^\infty F_n(t)dt$. ($F_n$ est définie à la question précédente.)

corrigé

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_n est continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, elle est donc mesurable de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \geq 0$, $te^{-nt} \leq te^{-t} \leq 1/e$. On en déduit :

$$|F_n(t)| \leq (2 + \frac{1}{e})\frac{1}{t^2+1} \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}+ \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

(en fait, on a même $0 \leq F_n(t) \leq \frac{1}{t^2+1}$.) Comme $t \mapsto \frac{1}{t^2+1}$ est intégrable sur $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \lambda)$, ceci donne que $F_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \lambda)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Enfin comme $F_n(t) \to \frac{1}{t^2+1}$ quand $n \to \infty$, pour tout $t > 0$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée à la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il donne :

$$\int_0^\infty F_n(t)dt \to \int_0^\infty \frac{1}{t^2+1}dt = \frac{\pi}{2}, \text{ quand } n \to \infty.$$

---

4. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

corrigé

Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit H de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $H(x,t) = e^{-xt} \sin x 1_{[0,n]}(x) 1_{[0,\infty]}(t)$.

La fonction H est $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$-mesurable et elle appartient à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2)$ car, par le théorème de Fubini-Tonelli :

$$\int |H(x,t)| d\lambda_2(x,t) \le \int_0^n |\sin x| (\int_0^\infty e^{-xt} dt) dx = \int_0^n \frac{|\sin x|}{x} dx < \infty,$$

car la fonction $x \mapsto \frac{|\sin x|}{x}$ est continue que $[0,n]$ en posant $\frac{|\sin x|}{x} = 1$ pour $x = 0$, elle est donc bien intégrable pour l'espace mesuré $([0,n], \mathcal{B}([0,n]), \lambda)$.

On peut donc appliquer le théorème de Fubini à la fonction H, il donne, avec la première question :

$$\int_0^n \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^n (\int_0^\infty e^{-xt} dt) \sin x dx = \int_0^\infty (\int_0^n e^{-xt} \sin x dx) dt = \int_0^\infty F_n(t) dt.$$

La question 3 donne alors $\lim_{n\to\infty} \int_0^n \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty F_n(t) dt = \frac{\pi}{2}$.

Corrigé 149 (Coordonnées polaires)

1. Calculer $\int_{(\mathbb{R}^+)^2} e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy$ (on rappelle que $dx\, dy$ désigne $d\lambda_2(x,y)$). [On pourra utiliser le passage en coordonnées polaires.]

corrigé

Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on pose $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)} 1_{\mathbb{R}_+}(x) 1_{\mathbb{R}_+}(y)$. On a $f \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ (noter que f est le produit de fonctions mesurables). On peut donc lui appliquer la formule (7.17) :

$$\int f(x,y) d\lambda_2(x,y) = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\infty f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr \right) d\theta.$$

On a donc :

$$\int_{(\mathbb{R}^+)^2} e^{-(x^2+y^2)} d\lambda_2(x,y) = 2\pi \int_0^\infty e^{-r^2} r dr.$$

Puis, comme $\int_0^n e^{-r^2} r dr = \frac{1}{2}(1 - e^{-n^2})$ et que, par le théorème de convergence monotone, $\int_0^n e^{-r^2} r dr \to \int_0^\infty e^{-r^2} r dr$ quand $n \to \infty$, on en déduit $\int_0^\infty e^{-r^2} r dr = \frac{1}{2}$ et donc :

$$\int_{(\mathbb{R}^+)^2} e^{-(x^2+y^2)} d\lambda_2(x,y) = \pi.$$

---

2. Calculer $\int_{\mathbb{R}^+} e^{-x^2} dx$.

corrigé

On applique le théorème de Fubini-Tonelli (théorème 7.2) à la fonction f défnie à la question précédente. Il donne :

$$\int f(x,y) d\lambda_2(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y) dy \right) dx,$$

et donc :

$$\pi = \int_{(\mathbb{R}^+)^2} e^{-(x^2+y^2)} d\lambda_2(x,y) = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-y^2} dy \right) e^{-x^2} dx = \left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx \right)^2 .$$

On en déduit que $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Corrigé 150 (Cordonnées polaires dans $\mathbb{R}^N$)
On note S^{N-1} la sphère de centre 0 et rayon 1 dans $\mathbb{R}^N$ (i.e. $S^{N-1} = \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x| = 1\}$, où $|.|$ désigne la norme euclidienne usuelle). Pour $A \subset S^{N-1}$, on pose $\widetilde{A} = \{tx\,,\ t \in [0,1]\,,\ x \in A\}$.
Montrer que si A est un borélien de S^{N-1}, alors $\widetilde{A}$ est un borélien de $\mathbb{R}^N$.
On définit alors, quand A est un borélien de S^{N-1}, $\sigma(A) = N\lambda_N(\widetilde{A})$. Montrer que σ définit une mesure sur les borélien de S^{N-1}.
Montrer que, pour tout $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ mesurable positive ou intégrable on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\, dx = \int_0^\infty \left(\int_{S^{N-1}} f(\rho\xi)\, d\sigma(\xi) \right) \rho^{N-1}\, d\rho.$$

Trouver alors les $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $x \to |x|^\alpha$ soit intégrable sur $\mathbb{R}^N \backslash B_1$ ou sur B_1, avec $B_1 = \{x \in \mathbb{R}^N;\ |x| \le 1\}$.

corrigé

Cet exercice est trop difficile à faire complètement sans indications.
Pour $R \in \mathbb{R}_+$, on note $B_R = \{x \in \mathbb{R}^N;\ |x| \le R\}$.

1. On montre tout d'abord que $\widetilde{A}$ est un borélien de $\mathbb{R}^N$ si A est un borélien de S^{N-1}. Pour cela, on pose $T = \{A \in \mathcal{B}(S^{N-1});\ \widetilde{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)\}$.

   On montre que T est une tribu. En effet, $\widetilde{A} = \emptyset \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ si $A = \emptyset$ et donc $\emptyset \in T$. Puis, on remarque que T est stable par complémentaire car, pour $A \in T$, $\widetilde{S^{N-1} \setminus A} = B_1 \setminus \widetilde{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, ce qui montre que $S^{N-1} \setminus A \in T$. Enfin, il est facile de voir que T est stable par union dénombrable car, pour $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$, on a $\widetilde{\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \cup_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{A_n} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et donc $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T$. On a bien montré que T est une tribu.

   Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des fermés de S^{N-1}. Si $A \in \mathcal{C}$, on voit que $\widetilde{A}$ est un fermé de $\mathbb{R}^N$. En effet, si $(t_n, x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,1] \times A$ est t.q. $t_n x_n \to y$ dans $\mathbb{R}^N$, on peut supposer, par compacité de $[0,1]$ et de S^{N-1}, après extraction d'une sous suite encore notée $(t_n, x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que $t_n \to t \in [0,1]$ et $x_n \to x \in S^{N-1}$ quand $n \to \infty$. On en déduit que $y = tx \in \widetilde{A}$, ce qui prouve que $\widetilde{A}$ est fermé. Comme les fermés sont des boréliens, on a donc $\mathcal{C} \subset T$.

   Pour conclure, il suffit de remarquer que la tribu engendrée par $\mathcal{C}$ (sur S^{N-1}) est $\mathcal{B}(S^{N-1})$. On en déduit bien que $\mathcal{B}(S^{N-1}) = T$.

2. Il est facile de montrer que σ est une mesure. Il suffit en effet de remarquer que $\widetilde{\emptyset} = \emptyset$ (et donc $\sigma(\emptyset) = 0$) et que, pour $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ t.q. $A_n \cap A_m = \emptyset$ si $n \ne m$, on a, avec $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, $\widetilde{A} = \cup_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{A_n}$ et $\widetilde{A_n} \cap \widetilde{A_m} = \emptyset$ si $n \ne m$. On déduit alors la σ-additivité de σ de la σ-additivité de λ_N.

3. On va montrer maintenant :

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,dx = \int_0^\infty \left(\int_{S^{N-1}} f(\rho\xi)\,d\sigma(\xi) \right) \rho^{N-1}\,d\rho, \tag{12.141}$$

pour tout $f = 1_E$ avec $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. Cette démonstration est difficile (le reste de la démonstration sera plus facile). On raisonne en 3 étapes.

Etape 1. Pour $A \in \mathcal{B}(S^{N-1})$ et pour $0 \le r < R < \infty$, on pose $A_{r,R} = \{\rho\xi,\ \rho \in [r,R[,\ \xi \in A\}$. Dans cette étape, on prend $f = 1_E$ avec $E = A_{r,R}$ et on montre alors que les deux membres de (12.141) sont bien définis et sont égaux.

Pour montrer que $A_{r,R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, il suffit de remarquer que $A_{r,R} = A_R \setminus A_r$ avec $A_a = \cup_{t\in\mathbb{Q}_a} t\widetilde{A}$, $\mathbb{Q}_a = \{t \in \mathbb{Q}_+^\star,\ t < a\}$ si $a > 0$ (et $A_0 = \emptyset$). Comme $\widetilde{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, on a $t\widetilde{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $t > 0$ (voir la proposition 7.7) et donc $A_a \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $a \ge 0$. On en déduit que $A_{r,R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

On calcule maintenant $\lambda_N(A_{r,R})$ (c'est-à-dire le membre de gauche de (12.141)). D'après la proposition 7.8, on a $\lambda_N(t\widetilde{A}) = t^N\lambda_N(\widetilde{A})$ pour tout $t > 0$. la continuité croissante d'une mesure donne alors $\lambda_N(A_a) = a^N\lambda_N(\widetilde{A})$ pour tout $a > 0$ et donc :

$$\lambda_N(A_{r,R}) = \lambda_N(A_R \setminus A_r) = \lambda_N(A_R) - \lambda_N(A_r) = (R^N - r^N)\lambda_N(\widetilde{A}) = \frac{R^N - r^N}{N}\sigma(A).$$

Soit $\rho > 0$. Si $\rho \notin [r,R[$, ona $f(r\xi) = 0$ pour tout $\xi \in S^{N-1}$. On a donc $f(\rho\cdot) = 1_\emptyset \in \mathcal{M}_+(S^{N-1},\mathcal{B}(S^{N-1}))$ et $\int f(\rho\cdot)d\sigma = 0$. Si $\rho \in [r,R[$, ona $f(r\xi) = 1$ pour tout $\xi \in A$ et $f(r\xi) = 0$ pour tout $\xi \in S^{N-1}\setminus A$. Donc, $f(\rho\cdot) = 1_A \in \mathcal{M}_+(S^{N-1},\mathcal{B}(S^{N-1}))$ et $\int f(\rho\cdot)d\sigma = \sigma(A)$. On en déduit que la fonction $\rho \mapsto \int f(\rho\cdot)d\sigma$ est égale à $\sigma(A)1_{[r,R[}$, elle appartient donc à $\mathcal{M}_+(R_+^\star,\mathcal{B}(R_+^\star),\lambda)$ et on a :

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \left(\int_{S^{N-1}} f(\rho\xi)\,d\sigma(\xi) \right) \rho^{N-1}\,d\rho &= \int_{\mathbb{R}_+^\star} \sigma(A)1_{[r,R[}(\rho)\rho^{N-1}d\rho \\ &= \sigma(A)\int_r^R \rho^{N-1}d\rho = \sigma(A)\frac{R^N - r^N}{N}.\end{aligned}$$

On a bien montré que les deux membres de (12.141) étaient bien définis et étaient égaux.

Etape 2. On pose $\mathcal{D} = \{A_{r,R},\ 0 \le r < R < \infty,\ A \in \mathcal{B}(S^{N-1})\}$. On montre ici que $\mathcal{D}$ engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

On a déjà vu que $\mathcal{D} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. Donc, $T(\mathcal{D}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. Pour montrer l'inclusion inverse, on va montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}^N$ peut s'écrire comme une union au plus dénombrable d'éléments de $\mathcal{D}$.

On commence par remarquer qu'il existe une partie dénombrable de S^{N-1}, dense dans S^{N-1} (ceci découle de la séparabilité de $\mathbb{R}^N$). Soit S une telle partie. On peut alors démontrer (on ne détaille pas ici cette démonstration, assez simple) que si $x \in O$, O ouvert de $\mathbb{R}^N$, il existe une boule ouverte de S^{N-1} dont le centre est dans S et donc le rayon est rationnel, on note A cette boule, et il existe $r,R \in \mathbb{Q}$ t.q. $x \in A_{r,R} \subset O$. On en déduit facilement que O est une union au plus dénombrable d'éléments de $\mathcal{D}$ (voir l'exercice 2.6 pour des résultats semblables). Ce résultat montre que les ouverts de $\mathbb{R}^N$ sont dans $T(\mathcal{D})$ et donc que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \subset T(\mathcal{D})$.

On a bien finalement $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N) = T(\mathcal{D})$.

Etape 3. On montre dans cette étape que (12.141) est vraie pour tout $f = 1_E$ avec $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

En admettant que le deuxième membre de (12.141) est bien défini pour tout $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, on peut définir m sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ par $m(E) = \int_0^\infty \left(\int_{S^{N-1}} 1_E(\rho\xi)\, d\sigma(\xi)\right) \rho^{N-1}\, d\rho$. m est alors une mesure. On a montré que $m = \lambda_N$ sur $\mathcal{D}$ (Etape 1) et que $\mathcal{D}$ engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ (Etape 2). Le fait que deux mesures sur une tribu T soient égales sur une famille engendrant T est insuffisant pour dire qu'elles sont égales sur T (voir exercice 2.18), mais cela est suffisant si cette famille est une "semi-algèbre" (une famille $\mathcal{C}$ est une semi-algèbre si $\emptyset, \emptyset^c \in \mathcal{C}$, $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie, et le complémentaire de tout élèment de $\mathcal{C}$ est une réunion finie disjointe d'éléments de $\mathcal{C}$), et si les mesures sont finies. C'est ainsi que nous allons montrer que (12.141) est vraie pour tout $f = 1_E$ avec $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

Soit $R > 0$. On note $\mathcal{D}_R = \{E \in \mathcal{D};\ E \subset B_R\}$ et $\mathcal{B}_R = \mathcal{B}(B_R) = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N);\ A \subset B_R\}$. L'étape 2 donne que la tribu engendrée (sur B_R) par $\mathcal{D}_R$, notée $T(\mathcal{D}_R)$, est égale à $\mathcal{B}_R$.

On remarque tout d'abord que si $C \in \mathcal{D}_R$, $(B_R \setminus C)$ est la réunion disjointe d'au plus 3 éléments de $\mathcal{D}_R$. On en déduit, comme dans l'exercice 7.2, que l'algèbre engendrée par $\mathcal{D}_R$ sur B_R (voir la définition 2.4 pour la définition d'une algèbre), notée $\mathcal{A}_R$, est l'ensemble des réunions finies disjointes d'éléments de $\mathcal{D}_R$. Soit $E \in \mathcal{A}_R$. Il est alors facile de montrer (par linéarité de l'intégrale et avec l'étape 1) que les deux membres de (12.141) sont bien définis et égaux si $f = 1_E$.

On note M_R l'ensemble des éléments $E \in \mathcal{B}(B_R)$ t.q. les deux membres de (12.141) soient bien définis et égaux si $f = 1_E$. Une application facile du théorème de convergence monotone donne que M_R est une classe monotone. (en fait, si $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M_R$ est une suite décroissante, on applique le théorème de convergence monotone à la suite $1_{B_R} - 1_{E_n}$ alors que si $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M_R$ est une suite croissante, on applique le théorème de convergence monotone à la suite 1_{E_n}). M_R est donc une classe monotone qui contient $\mathcal{A}_R$, M_R contient donc la classe monotone engendrée par $\mathcal{A}_R$, or, le lemme sur les classes monotones (exercice 2.12) montre que cette classe monotone est égale à la tribu engendrée par $\mathcal{A}_R$, elle même égale à la tribu engendrée par $\mathcal{D}_R$. Ceci montre que $M_R = \mathcal{B}(B_R)$ et donc que les deux membres de (12.141) sont bien définis et égaux si $f = 1_E$ avec $E \in \mathcal{B}(\mathcal{B}_R)$.

En appliquant une nouvelle fois le théorème de convergence monotone, on montre alors facilement que les deux membres de (12.141) sont bien définis et égaux si $f = 1_E$ avec $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

4. La fin de la démonstration est maintenant facile (elle utilise un raisonnement souvent utilisé dans des exercices précédents). Par linéarité de l'intégrale, on montre que les deux membres de (12.141) sont bien définis et égaux si $f \in \mathcal{E}_+(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$, puis, par convergence monotone, si $f \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$. Enfin, on traite le cas $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ en décomposant $f = f^+ - f^-$.

5. Comme application simple de (12.141) pour $f \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$, on trouve que $x \to |x|^\alpha$ est intégrable sur $\mathbb{R}^N \setminus B_1$ si et seulement si $\alpha + N - 1 < -1$ et est intégrable sur B_1 si et seulement si $\alpha + N - 1 > -1$.

Corrigé 151 (Changement de variables $W^{1,1}$ croissant)
Soit $f \in \mathcal{L}^1_R(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ t.q. $f > 0$ p.p.. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$. (On rappelle que, pour $a < b$, $\int_a^b f(t)dt$ désigne $\int 1_{]a,b[} f d\lambda$.)

1. Montrer que $\varphi \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et que φ est strictement croissante.

   On note I_m l'image de φ (I_m est donc un intervalle dont les bornes sont 0 et $\int f d\lambda$) et on note $\psi : I_m \to \mathbb{R}$ la fonction inverse de φ (ψ est donc continue de I_m dans $\mathbb{R}$).

   On rappelle que si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{B}(I)$ est sa tribu borélienne, on a $\mathcal{B}(I) = \mathcal{P}(I) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

   Pour $A \subset \mathbb{R}$, on note $\varphi(A) = \{\varphi(x),\, x \in A\}$. Pour $A \subset I_m$, on note $\psi(A) = \{\psi(x),\, x \in A\}$.

2. Montrer que $\{\varphi(A),\, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} = \mathcal{B}(I_m)$ et que $\{\psi(A),\, A \in \mathcal{B}(I_m)\} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

3. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer que $\lambda(\varphi(I)) = \int_I f d\lambda$.

4. Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$. Montrer que $\lambda(\varphi(O)) = \int_O f d\lambda$. En déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ t.q. :
$$O \text{ ouvert, } \lambda(O) \le \delta \Rightarrow \lambda(\varphi(O)) \le \varepsilon.$$

5. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Montrer que $\lambda(\varphi(A)) = \int_A f d\lambda$. [On pourra, par exemple, utiliser la régularité de λ et la question précédente.]

6. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ t.q. $a < b$.

   (a) Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On pose $g = 1_B$. Montrer que :
$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t)dt = \int_a^b g(\varphi(s))f(s)ds. \tag{12.142}$$
   [Prendre $A = \psi(B \cap I_m) \cap]a, b[$ et utiliser la question précédente.]

   (b) Montrer que (12.142) est encore vraie pour $g \in \mathcal{E}_+(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, puis pour $g \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

   (c) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable. On suppose que $g1_{]\varphi(a),\varphi(b)[} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Montrer $g \circ \varphi f 1_{]a,b[} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et que (12.142) est vraie.

NB: On peut montrer que φ est dérivable p.p. et que $\varphi' = f$ p.p.. La formule (12.142) est alors la formule habituelle de changement de variable. Noter aussi que la fonction φ, restreinte à l'intervalle $]a, b[$, appartient à un espace appelé $W^{1,1}(]a, b[)$ (ce qui explique le titre de l'exercice).

corrigé

En Attente

12.8 Exercices du chapitre 8

Corrigé 152 (Non densité de C_c dans L^∞)
On considère $f = 1_{\mathbb{R}_+}$ (qui appartient à $L^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, en confondant f avec sa classe).

1. Montrer que $\|f - \varphi\|_\infty \geq \frac{1}{2}$ pour tout $\varphi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

corrigé

Soit $\varphi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On va montrer que $\|f - \varphi\|_\infty \geq \frac{1}{2} - \varepsilon$ pour tout $0 < \varepsilon < 1/2$ (ce qui donne bien finalement $\|f - \varphi\|_\infty \geq \frac{1}{2}$).

Soit donc $0 < \varepsilon < 1/2$.

On suppose tout d'abord que $\varphi(0) \geq \frac{1}{2}$. Il existe alors, par continuité de φ, $\delta > 0$ t.q. $\varphi(x) \geq \frac{1}{2} - \varepsilon$ pour tout $x \in [-\delta, 0]$. On a donc $\varphi(x) - f(x) \geq \frac{1}{2} - \varepsilon$ pour presque tout $x \in [-\delta, 0]$, ce qui prouve que $\lambda(\{|\varphi - f| \geq \frac{1}{2} - \varepsilon\}) \geq \lambda([-\delta, 0]) = \delta > 0$. On a donc $\|f - \varphi\|_\infty \geq \frac{1}{2} - \varepsilon$.

On suppose maintenant que $\varphi(0) \leq \frac{1}{2}$. De manière analogue, il existe $\delta > 0$ t.q. $\varphi(x) \leq \frac{1}{2} + \varepsilon$ pour tout $x \in [0, \delta]$. On a alors $f(x) - \varphi(x) \geq \frac{1}{2} - \varepsilon$ pour presque tout $x \in [0, \delta]$, ce qui prouve que $\lambda(\{|f - \varphi| \geq \frac{1}{2} - \varepsilon\}) \geq \lambda([0, \delta]) = \delta > 0$. On a donc aussi $\|f - \varphi\|_\infty \geq \frac{1}{2} - \varepsilon$.

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitrairement petit, on a bien montré que $\|f - \varphi\|_\infty \geq \frac{1}{2}$.

---

2. Montrer que $\|f(\cdot + h) - f\|_\infty = 1$ pour tout $h \in \mathbb{R}^\star$.

corrigé

Pour $h > 0$, on a $|f(\cdot + h) - f(\cdot)| = 1$ p.p. sur $[-h, 0]$ et donc $\lambda(\{|f(\cdot + h) - f(\cdot)| \geq 1\}) \geq \lambda([-h, 0]) = h > 0$, ce qui prouve que $\|f(\cdot + h) - f\|_\infty \geq 1$. Comme il est clair que $|f(\cdot + h) - f(\cdot)| \leq 1$ p.p., on a finalement $\|f(\cdot + h) - f\|_\infty = 1$.

Pour $h < 0$, on a $|f(\cdot + h) - f(\cdot)|_\infty = 1$ p.p. sur $[0, -h]$ et donc $\lambda(\{|f(\cdot + h) - f(\cdot)| \geq 1\}) \geq \lambda([0, -h]) = -h > 0$, ce qui prouve que $\|f(\cdot + h) - f\|_\infty \geq 1$. Comme il est clair aussi que $|f(\cdot + h) - f(\cdot)| \leq 1$ p.p., on a finalement $\|f(\cdot + h) - f\|_\infty = 1$.

Corrigé 153 (Séparabilité de $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$)
Soient $N \geq 1$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et p tel que $1 \leq p < +\infty$. Montrer que l'espace $L^p(\Omega)$ est séparable.

On pourra se limiter au cas $\Omega = \mathbb{R}$ et raisonner ainsi : Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, pour $q = 0, 1, \ldots, 2n^2 - 1$, on note: $I_q^n = [-n + \frac{q}{n}, -n + \frac{q+1}{n}[$. On pose : $A_n = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f|_{I_q^n} = r$, où $r \in \mathbb{Q}$, et $f = 0$ sur $[-n, n[^c\}$. On pose $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^\star} A_n$.

1. Montrer que A est dénombrable.

corrigé

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. A $f \in A_n$, on associe l'ensemble des valeurs prises par f sur les intervalles I_q^n, $q = 0, 1, \ldots, 2n^2 - 1$. On construit ainsi une bijection de A_n dans $\mathbb{Q}^{2n^2}$, ce qui prouve que A_n est dénombrable car $\mathbb{Q}^{2n^2}$ est dénombrable.

On en déduit que A est dénombrable comme union dénombrable d'ensembles dénombrables.

---

2. Montrer que, pour tout $f \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in A$ t.q. $\|f - g\|_p \leq \varepsilon$.

corrigé

Soit $f \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et soit $\varepsilon > 0$.

Comme f est à support compact, il existe $a \in \mathbb{R}_+$ t.q. $f = 0$ sur $[-a, a]^c$.

Comme f est uniformément continue, il existe $\delta > 0$ t.q. $|x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

On choisit maintenant $n \in \mathbb{N}^\star$ t.q. $n \geq a$ et $1/n \leq \delta$. On construit alors $g \in A_n$ de la manière suivante :

$$g(x) = 0, \text{ si } x \in [-n, n[^c,$$
$$g(x) = r_q, \text{ si } x \in [-n + \tfrac{q}{n}, -n + \tfrac{q+1}{n}[, \ q \in \{0, 1, \ldots, 2n^2 - 1\},$$

avec $r_q \in \mathbb{Q}$ t.q. $|f(-n + \frac{q}{n}) - r_q| \leq \varepsilon$ et $r_q = 0$ si $f(-n + \frac{q}{n}) = 0$.

On a $g \in A$ (car $g \in A_n$), $|g(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon$ pour tout x et $|g(x) - f(x)| = 0$ si $x \in [-a-1, a+1]^c$. On en déduit :

$$\int |g(x) - f(x)|^p dx \leq 2(a+1)2^p\varepsilon^p.$$

On peut donc trouver $g \in A$ arbitraiement proche de f en norme L^p.

3. Conclure par la densité de $C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans $L^p(\mathbb{R},)$ (théorème 8.1).

corrigé

Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$ et soit $\varepsilon > 0$. Par le théorème 8.1, il existe $g \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ t.q. $\|g - f\|_p \leq \varepsilon$. Par la question précédente, il existe $h \in A$ t.q. $\|g - h\|_p \leq \varepsilon$. On a donc $\|f - h\|_p \leq 2\varepsilon$. Ce qui prouve que A est dense dans $L^p(\mathbb{R})$. Comme A est dénombrable, on en déduit que $L^p(\mathbb{R})$ est séparable.

Corrigé 154 (Non séparabilité de $L^\infty_\mathbb{R}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$)

On note B l'ensemble des f appartenant à $L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ t.q., pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f = 0$ p.p. sur $]n, n+1[$ ou $f = 1$ p.p. sur $]n, n+1[$.

1. Montrer que B est non dénombrable. [Construire une injection de l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ dans B.]

corrigé

Soit P une partie $\mathbb{N}$. On construit $\varphi(P) \in B$ en prenant $\varphi(P) = 1$ p.p. sur $]n, n+1[$ si $n \in P$, $\varphi(P) = 0$ p.p. sur $]n, n+1[$ si $n \notin P$ et $\varphi(P) = 0$ p.p. sur $\mathbb{R}_-$.

φ est bien injective car, si $P, Q \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $P \neq Q$, il existe $n \in P$ t.q. $n \notin \mathbb{Q}$ (ou il existe $n \in Q$ t.q. $n \notin \mathcal{P}$). On a alors $\varphi(P) = 1$ p.p. sur $]n, n+1[$ et $\varphi(Q) = 0$ p.p. sur $]n, n+1[$ (ou $\varphi(P) = 0$ p.p. sur $]n, n+1[$ et $\varphi(Q) = 1$ p.p. sur $]n, n+1[$). On en déduit que $\|\varphi(P) - \varphi(Q)\|_\infty \geq 1$ car $\lambda(]n, n+1[) > 0$, et donc $\varphi(P) \neq \varphi(Q)$.

Comme $\mathcal{P}(N)$ est non dénombrable (et non fini), l'ensemble B est aussi non dénombrable (et non fini).

2. Soit A une partie dense de $L^\infty_\mathbb{R}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$. Montrer que pour tout $f \in B$, il existe $g \in A$ t.q. $\|f-g\|_\infty \le \frac{1}{4}$. En déduire qu'on peut construire une application injective de B dans A.

———————————————**corrigé**———————————————

Soit $f \in B$. Par densité de A dans $L^\infty_\mathbb{R}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$, il existe $g \in A$ t.q. $\|f-g\|_\infty \le \frac{1}{4}$. On peut donc construire (grâce à l'axiome du choix) une application ψ de B dans A t.q. $\|f-\psi(f)\|_\infty \le \frac{1}{4}$ pour tout $f \in B$.

On monte maintenant que ψ est injective. En effet, soit $f_1, f_2 \in B$ t.q. $\psi(f_1)=\psi(f_2)$. On a alors, avec $g=\psi(f_1)=\psi(f_2)$, $\|f_1-f_2\|_\infty \le \|f_1-g\|_\infty + \|f_2-g\|_\infty \le \frac{1}{2}$. Ceci prouve que $f_1=f_2$ car $\|f_1-f_2\|_\infty \ge 1$ si $f_1 \ne f_2$ (il suffit de remarquer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ t.q. $|f_1-f_2|=1$ p.p. sur $]n,n+1[$).

---

3. Montrer que $L^\infty_\mathbb{R}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ n'est pas séparable.

———————————————**corrigé**———————————————

Si $L^\infty_\mathbb{R}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ est séparable, il existe A (au plus) dénombrable, dense dans $L^\infty_\mathbb{R}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$. La question précédente permet de construire une injection de B de A. Ce qui est en contradiction avec le fait que B est non dénombrable (et non fini).

Corrigé 155 (Convolution $L^p - L^q$)

Pour $1 \le p \le \infty$, on note $\mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p_\mathbb{R}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ et $L^p = L^p_\mathbb{R}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$.

1. Soit $1 < p < +\infty$, $q = \frac{p}{p-1}$, $f \in \mathcal{L}^p$ et $g \in \mathcal{L}^q$.

   (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $f(\cdot)g(x-\cdot)$ est intégrable.

   ———————————————**corrigé**———————————————

   Soit $x \in \mathbb{R}$. L'application $f(\cdot)g(x-\cdot)$ est mesurable car les applications f et $g(x-\cdot)$ sont mesurables. Puis, on déduit de l'inégalité de Hölder (inégalité (6.3)) que $f(\cdot)g(x-\cdot) \in \mathcal{L}^1$ et :

   $$\|f(\cdot)g(x-\cdot)\|_1 \le \|f\|_p \|g(x-\cdot)\|_q = \|f\|_p\|g\|_q.$$

   On peut donc définir $(f \star g)(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   (b) Montrer que $|(f \star g)(x)| \le \|f\|_p\|g\|_q$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   ———————————————**corrigé**———————————————

   Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $|(f\star g)(x)| = |\int f(\cdot)g(x-\cdot)d\lambda| \le \int |f(\cdot)g(x-\cdot)|d\lambda = \|f(\cdot)g(x-\cdot)\|_1$. En utilisant l'inégalité montrée dans la question précédente, on a donc :

   $$|(f\star g)(x)| \le \|f\|_p\|g\|_q.$$

(c) Montrer que $f \star g$ est continue sur $\mathbb{R}$.

corrigé

Soit $x, h \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}|f \star g(x+h) - f \star g(x)| &\leq \int |f(\cdot)g(x+h-\cdot) - f(\cdot)g(x-\cdot)|d\lambda \\ &\leq \|f\|_p \|g(x+h-\cdot) - g(x-\cdot)\|_q = \|f\|_p \|g(\cdot - h) - g\|_q.\end{aligned}$$

Le théorème de continuité en moyenne dans L^q (exercice 6.4, corrigé 98, le cas général de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^N$ est donné dans le théorème 8.2) donne que $\|g(\cdot - h) - g\|_q \to 0$, quand $h \to 0$. Ceci prouve la continuité (et même la continuité uniforme) de $f \star g$ sur $\mathbb{R}$.

---

2. Soit $1 < p < +\infty$, $q = \frac{p}{p-1}$.

(a) Soit $F \in L^p$ et $G \in L^q$. Montrer qu'on peut définir $F \star G$ sur $\mathbb{R}$ en posant $F \star G = f \star g$, avec $f \in F$ et $g \in G$. [Il suffit donc de démontrer que $f \star g$ ne dépend pas du choix de f dans F et g dans G.]

corrigé

Soit $f_1, f_2 \in F$ et $g_1, g_2 \in G$. Comme $f_1 = f_2$ p.p. et $g_1 = g_2$ p.p., on a aussi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_1(\cdot)g_1(x-\cdot) = f_2(\cdot)g_2(x-\cdot)$ p.p. et donc $f_1 \star g_1(x) = f_2 \star g_2(x)$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut donc définir $F \star G(x)$ en posant $F \star G(x) = f \star g(x)$, avec $f \in F$ et $g \in G$ (car $f \star g(x)$ ne dépend pas du choix de f et g dans F et G).

(b) Montrer que l'application $(F, G) \mapsto F \star G$ est bilinéaire continue de $L^p \times L^q$ dans $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (on rappelle que $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme de la convergence uniforme).

corrigé

On note $\|\cdot\|_u$ la norme de la convergence uniforme (on rappelle que, sur $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, elle coïncide avec la norme $\|\cdot\|_\infty$).

Soit $F \in L^p$ et $G \in L^q$. Si $f \in F$, $g \in G$, on a déjà vu que, pour tout $x \in R$:

$$|F \star G(x)| = |f \star g(x)| \leq \|f\|_p \|g\|_q = \|F\|_p \|G\|_q.$$

On en déduit $\|F \star G\|_u = \sup\{|F \star G(x)|, x \in \mathbb{R}\} \leq \|F\|_p \|G\|_q$. Ce qui prouve bien la continuité de la forme bilinéaire $(F, G) \mapsto F \star G$ de $L^p \times L^q$ dans $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(c) Soit $F \in L^p$ et $G \in L^q$. Montrer que $F \star G \in C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (c'est-à-dire que la fonction $F \star G$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et que $(F \star G)(x) \to 0$ quand $x \to \pm\infty$).

corrigé

On considère tout d'abord le cas $f \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $g \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On sait déjà que $f \star g$ est continue (par exemple, parce que $f \in \mathcal{L}^p$ et $g \in \mathcal{L}^q$). D'autre part, comme f et g sont à support compact, il existe $a > 0$ et $b > 0$ t.q. $f = 0$ sur $B^c(0, a)$ et $g = 0$ sur $B^c(0, b)$. On en déduit que $f \star g = 0$ sur $B^c(0, a+b)$ (ceci est démontré, par exemple, dans l'exercice 7.19, corrigé 145). On a donc $f \star g \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Soit maintenant $F \in L^p$ et $G \in L^q$. Le théorème de densité dans les espaces L^p (exercice 6.4, corrigé 98, ou encore théorème 8.1 pour un cas plus général) donne l'existence de deux suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ t.q. $f_n \to F$ dans L^p et $g_n \to G$ dans L^q, quand $n \to \infty$. La continuité de la forme bilinéaire $(F, G) \mapsto F \star G$ de $L^p \times L^q$ dans $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ montre alors que $f_n \star g_n \to F \star G$ dans $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (c'est-à-dire uniformément), quand $n \to \infty$. Or $f_n \star g_n \in C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est fermé dans $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on a donc $F \star G \in C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

---

3. On prend maintenant $p = 1$ et $q = +\infty$.

   (a) Soit $f \in \mathcal{L}^1$ et $g \in \mathcal{L}^\infty$. Montrer que $(f \star g)(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $f \star g \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

corrigé

On procède ici comme dans le cas $1 < p, q < \infty$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. L'application $f(\cdot)g(x - \cdot)$ est mesurable car produit d'applications mesurables. Puis, l'inégalité de Hölder pour le cas $p = 1$, $q = \infty$ (proposition (6.9)) donne $f(\cdot)g(x-\cdot) \in \mathcal{L}^1$ et :

$$\|f(\cdot)g(x - \cdot)\|_1 \leq \|f\|_1 \|g(x - \cdot)\|_\infty = \|f\|_1 \|g\|_\infty.$$

On peut donc définir $(f \star g)(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et on a $|(f \star g)(x)| \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$. Ceci donne $\sup\{|(f \star g)(x)|,\, x \in \mathbb{R}\} \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$ et donc que f est bornée.

Pour montrer que $f \star g$ est continue sur $\mathbb{R}$, on utilise l'invariance par translation de la mesure de Lebesgue pour écrire, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f \star g(x) = \int f(x - \cdot)g(\cdot) d\lambda.$$

Soit $x, h \in \mathbb{R}$. On a donc :

$$\begin{aligned} |f \star g(x+h) - f \star g(x)| &\leq \int |f(x+h-\cdot)g(\cdot) - f(x-\cdot)g(\cdot)| d\lambda \\ &\leq \|f(x+h-\cdot) - f(x-\cdot)\|_1 \|g\|_\infty = \|f(\cdot - h) - f\|_1 \|g\|_\infty. \end{aligned}$$

Le théorème de continuité en moyenne dans L^1 (théorème 5.6) donne que $\|f(\cdot - h) - f\|_1 \to 0$, quand $h \to 0$. Ceci prouve la continuité (et même la continuité uniforme) de $f \star g$ sur $\mathbb{R}$.

On a donc bien $f \star g$ continue et bornée, c'est-à-dire $f \star g \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

   (b) Soit $F \in L^1$ et $G \in L^\infty$. Montrer que $(F \star G)(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ en posant $F \star G = f \star g$, avec $f \in F$ et $g \in G$.

corrigé

La démonstration est identique à celle du cas $1 < p, q < \infty$. Elle n'est pas redonnée ici.

(c) L'application $(F, G) \mapsto F \star G$ est-elle continue de $L^1 \times L^\infty$ dans C_b ?

corrigé

La réponse est "oui" car nous avons vu que $\|f \star g\|_u = \sup\{|(f \star g)(x)|,\ x \in \mathbb{R}\} \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$.

(d) A-t-on $F \star G \in C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, pour tout $F \in L^1$ et $G \in L^\infty$?

corrigé

La réponse est "non". On prend, par exemple, $G = 1$ p.p. et $F \in L^1$, $F \neq 0$. On a alors $F \star G(x) = \int F d\lambda$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc, $F \star G(x) \not\to 0$, quand $x \to \pm\infty$, et $F \star G \notin C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Corrigé 156 (Caractérisation d'une fonction par son action sur C_c^∞)

Soit $d \in \mathbb{N}^\star$. On rappelle que λ_d est la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$ et que l'élément d'intégration par rapport à λ_d est noté dx (au lieu de $d\lambda_d(x)$). On rappelle aussi que $|\cdot|$ dénote la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^d$. On se donne une fonction $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ t.q. :

- $\rho(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R}^d$, $|x| \geq 1$,
- $\rho(x) \geq 0$ si $x \in \mathbb{R}^d$,
- $\int \rho(x) dx = 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on note ρ_n la fonction définie par $\rho_n(x) = n^d \rho(nx)$, de sorte que $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ est une famille de noyaux régularisants (voir le chapitre 8 du cours).

1. Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$.

(a) Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Montrer que $f\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$.

corrigé

La fonction $f\varphi$ est mesurable car produit de fonctions mesurable. Elle est intégrable car on a $|f(x)\varphi(x)| \leq |f(x)| \|\varphi\|_u$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ (avec $\|\varphi\|_u = \max\{|\varphi(x)|,\ x \in \mathbb{R}\} < \infty$ car $C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \subset C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$) et donc :

$$\int |f(x)\varphi(x)| dx \leq \|f\|_1 \|\varphi\|_\infty < \infty.$$

Ce qui donne bien $f\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$.

On suppose maintenant que $\int f(x)\varphi(x) dx = 0$ pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer $f \star \rho_n(x)$ est bien défini pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et que $f \star \rho_n(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.

corrigé

Soit $x \in \mathbb{R}^d$. On pose $\varphi(y) = \rho_n(x - y)$ pour $y \in \mathbb{R}^d$ (n est fixé). On a donc $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ (car $\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$) et $f\varphi = f(\cdot)\rho_n(x - \cdot)$.

La première question donne $f(\cdot)\rho_n(x - \cdot) = f\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$ et $f \star \rho_n(x)$ est donc bien défini. De plus, l'hypothèse satisfaite par f donne :

$$f \star \rho_n(x) = \int f(y)\rho_n(x - y) dy = \int f(y)\varphi(y) dy = 0$$

(c) Montrer que $f = 0$ p.p..

corrigé

La proposition 8.1 donne $f \star \rho_n \to f$ dans $L^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$ quand $n \to \infty$. Comme $f_n = 0$ p.p., on en déduit que $f = 0$ p.p.

2. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $g \in \mathcal{L}^1_{loc}(\Omega)$ (c'est-à-dire que g est une fonction de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ t.q. $g1_K \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$ pour tout compact K de Ω).

(a) Soit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$. Montrer que $g\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$. (La fonction φ est prolongée par 0 hors de Ω.)

corrigé

Soit K un compact de Ω t.q. $\varphi = 0$ sur K^c. On a alors $g\varphi = g1_K\varphi$.
Comme $g1_K \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$, la question 1(a) donne $g\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$.

On suppose maintenant que $\int g(x)\varphi(x)dx = 0$ pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On note Ω_n l'ensemble des $x \in \Omega$ t.q. $|x - y| > \frac{1}{n}$ pour tout $y \in \Omega^c$. Montrer $g \star \rho_n(x)$ est bien définie pour tout $x \in \Omega_n$ et que $g \star \rho_n(x) = 0$ pour tout $x \in \Omega_n$.

corrigé

Soit $x \in \Omega_n$. On pose $\varphi(y) = \rho_n(x - y)$ pour $y \in \mathbb{R}^d$ (n et x sont fixés). On a donc $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. comme $\rho_n(z) = 0$ si $|z| \geq 1/n$, on a $\varphi = 0$ sur K^c où K est la boule fermée de centre x et de rayon $1/n$, c'est-à-dire $K = \overline{B}(x, 1/n)$. Comme $x \in \Omega_n$, on a $K \subset \Omega$. La fonction φ (ou, plus précisément, la restriction de φ à Ω) appartient donc à $C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$).

On a $g\varphi = g(\cdot)\rho_n(x - \cdot)$. On conclut comme dans la question 1(b) :
La question 2(a) donne $g(\cdot)\rho_n(x - \cdot) = g\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$ et $g \star \rho_n(x)$ est donc bien défini.
De plus, l'hypothèse satisfaite par g donne :

$$g \star \rho_n(x) = \int g(y)\rho_n(x - y)dy = \int g(y)\varphi(y)dy = 0$$

(c) Soit K un compact de Ω, montrer que $g1_K = 0$ p.p.. En déduire que $g = 0$ p.p. sur Ω.

corrigé

On note α la distance de K à Ω^c, c'est-à-dire $\alpha = \inf\{|y - z|, y \in K, z \in \Omega^c\}$. Cette distance est strictement positive car K est compact, Ω^c est fermé et $K \cap O^c = \emptyset$ (le fait que cette distance est strictement positive est démontré, par exemple, dans la démonstration du théorème 5.5).
Soit $n_0 \in \mathbb{N}^\star$ t.q. $1/n_0 < \alpha$, de sorte que $K \subset \Omega_n$ pour tout $n \geq n_0$ (avec Ω_n défini dans la question 2(b)).

La question 2(b) donne alors que, pour tout $n \geq n_0$, $g \star \rho_n$ est bien défini sur K et $g \star \rho_n = 0$ sur K.

Pour passer à limite sur n (et montrer que $g = 0$ p.p. sur K), on pose $\tilde{K} = \{z \in \mathbb{R}^d;\ d(z,K) \leq 1/n_0\}$ (où $d(z,K)$ est la distance de z à K, c'est-à-dire $d(z,K) = \inf\{|z-y|,\ y \in K\}$). $\tilde{K}$ est un compact de $\mathbb{R}^d$ et comme $1/n_0 < \alpha$, on a $\tilde{K} \subset \Omega$. On en déduit :

$$g1_{\tilde{K}} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d).$$

La proposition 8.1 donne alors $g1_{\tilde{K}} \star \rho_n \to g1_{\tilde{K}}$ dans $L^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$, quand $n \to \infty$. On a donc aussi, en prenant la restriction à K de ces fonctions :

$$(g1_{\tilde{K}} \star \rho_n)_{|K} \to g_{|K} \text{ dans } L^1(K, \mathcal{B}(K), \lambda_d), \text{ quand } n \to \infty. \tag{12.143}$$

Soit $n \geq n_0$. On remarque que $g1_{\tilde{K}} \star \rho_n = g \star \rho_n$ sur K. En effet, pour $x \in K$ et $y \notin \tilde{K}$, on a $|x-y| > 1/n_0 \geq 1/n$ et donc $\rho_n(x-y) = 0$. On en déduit :

$$g1_{\tilde{K}} \star \rho_n(x) = \int g1_{\tilde{K}}(x)\rho_n(x-y)dy = \int g(x)\rho_n(x-y)dy = g \star \rho_n(x), \text{ pour tout } x \in K.$$

On a bien montré que $g1_{\tilde{K}} \star \rho_n = g \star \rho_n$ sur K. Comme $g \star \rho_n = 0$ sur K (question 2(b)), on déduit de (12.143) que $g = 0$ p.p. sur K.

Pour montrer que $g = 0$ p.p. sur Ω, on remarque que $\Omega = \cup_{n \in \mathbb{N}^\star} K_n$, avec $K_n = \overline{\Omega}_n \cap B_n$ (où $\overline{\Omega}_n$ est l'adhérence de Ω_n et B_n est la boule fermée de centre 0 et de rayon n). Comme K_n est un compact de Ω , la démonstration précédente donne $g = 0$ p.p. sur K_n, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. On en déduit que $g = 0$ p.p. sur Ω.

Corrigé 157 (Théorème de compacité dans L^1)
On pose $L^1(]0,1[) = L^1_{\mathbb{R}}(]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda)$ et $L^1(\mathbb{R}) = L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ (où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ou sa trace sur $\mathcal{B}(]0,1[)$). Pour $f \in L^1(]0,1[)$, on identifie f avec l'un de ses représentants et on note $\tilde{f}$ la fonction définie par $\tilde{f} = f$ sur $]0,1[$ et $\tilde{f} = 0$ sur $\mathbb{R}\setminus]0,1[$.
Soit $\mathcal{A}$ une partie de $L^1(]0,1[)$.
On rappelle que $\mathcal{A}$ est relativement compacte dans $L^1(]0,1[)$ si et seulement si $\mathcal{A}$ est précompacte (c'est-à-dire que pour $\varepsilon > 0$ il existe $p \in \mathbb{N}^\star$ et $f_1, \ldots, f_p \in \mathcal{A}$ t.q. $\mathcal{A} \subset \cup_{i=1}^p B(f_i, \varepsilon)$, où $B(f,\varepsilon)$ désigne la boule ouverte dans $L^1(]0,1[)$ de centre f et de rayon ε).

Partie I (condition suffisante). On suppose, dans cette partie, que $\mathcal{A}$ est relativement compacte dans $L^1(]0,1[)$.

1. Montrer que $\mathcal{A}$ est une partie bornée de $L^1(]0,1[)$.
2. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ t.q. :

$$h \in \mathbb{R}, |h| \leq \alpha, f \in \mathcal{A} \Rightarrow \|\tilde{f}(\cdot + h) - \tilde{f}\|_1 \leq \varepsilon. \tag{12.144}$$

Partie II (condition nécessaire). On suppose, dans cette partie, que $\mathcal{A}$ une partie bornée de $L^1(]0,1[)$ et que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ vérifiant (12.144).

Soit $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ t.q. $\rho \geq 0$, $\rho(x) = 0$ si $|x| \geq 1$ et $\int \rho(x)dx = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit ρ_n par $\rho_n(x) = n\rho(nx)$ si $x \in \mathbb{R}$.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^\star$ t.q. :
$$n \in \mathbb{N}^\star, n \geq n_0, f \in \mathcal{A} \Rightarrow \|\tilde{f} \star \rho_n - \tilde{f}\|_1 \leq \varepsilon. \tag{12.145}$$
[On pourra remarquer que $\tilde{f} \star \rho_n(x) - \tilde{f}(x) = \int (\tilde{f}(x - \frac{y}{n}) - \tilde{f}(x))\rho(y)dy$.]

2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Pour $f \in \mathcal{A}$, on note f_n la restriction à $[0,1]$ de la fonction $\tilde{f} \star \rho_n$.

   (a) Montrer qu'il existe $C_1, C_2 > 0$ ne dépendant que de n, ρ et de la borne de $\mathcal{A}$ dans $L^1(]0,1[)$ t.q. :
   $$x \in [0,1],\ f \in \mathcal{A} \Rightarrow |f_n(x)| \leq C_1,$$
   $$x, y \in [0,1],\ f \in \mathcal{A} \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| \leq C_2|x - y|.$$
   En déduire que l'ensemble $\{f_n,\ f \in \mathcal{A}\}$ est relativement compact dans $C([0,1],\mathbb{R})$ [Utiliser le théorème d'Ascoli.]

   (b) Montrer que l'ensemble $\{f_n,\ f \in \mathcal{A}\}$ est relativement compact dans $L^1(]0,1[)$.

3. Montrer que la partie $\mathcal{A}$ est relativement compacte dans $L^1(]0,1[)$.

corrigé

En attente...

12.9 Exercices du chapitre 9

12.9.1 Définition, propriétés élémentaires

Corrigé 158 (Matrice des moments d'ordre deux et matrice de covariance)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace de probabilité. Soit X un vecteur aléatoire de dimension d ($d \geq 1$), dont toutes les coordonnées (notées X_i, $i = 1, \ldots, d$) sont supposées être de carré intégrable. La matrice des moments d'ordre 2 du v.a. X est la matrice $E(XX^t)$, dont le terme (i, j) est le réel $E(X_iX_j)$, et on rappelle que la matrice de covariance de X, notée $\text{Cov}(X)$, est la matrice $E((X - E(X))(X - E(X))^t) = E(XX^t) - E(X)E(X)^t$, dont le terme (i, j) est la covariance des v.a.r. X_i et X_j. (La notation X^t désigne le transposé du vecteur X.)

1. Soit $u \in \mathbb{R}^d$, montrer que $u^tE(XX^t)u = E((u \cdot X)^2)$ et que $u^t\text{Cov}(X)u = \text{Var}(u \cdot X)$ (On rappelle que $u \cdot X = \sum_{i=1}^{d} u_iX_i = u^tX$).

   corrigé

   L'application $Z \mapsto E(Z)$ est linéaire, on en déduit que $u^tE(XX^t)u = E(u^tXX^tu) = E((u \cdot X)^2)$. Cette égalité appliquée au vu v.a. $X - E(X)$ donne $u^t\text{Cov}(X)u = \text{Var}(u \cdot X)$ car $u \cdot X - E(u \cdot X) = u \cdot (X - E(X))$.

2. Montrer que les matrices $E(XX^t)$ et $\text{Cov}(X)$ sont symétriques et semi–définies positives.

   corrigé

   Il est facile de voir que $E(XX^t)$ et $\text{Cov}(X)$ sont des matrices symétriques (car pour toutes v.a.r. Y, Z on a $E(YZ) = E(ZY)$). La question précédente donne $u^tE(XX^t)u \geq 0$ et $u^t\text{Cov}(X)u \geq 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}^d$, ce qui signifie que les matrices $E(XX^t)$ et $\text{Cov}(X)$ sont semi–définies positives.

3. Montrer que si A est une matrice $k \times d$ et b un vecteur de $\mathbb{R}^k$, $Y = AX + b$, alors $E(Y) = AE(X) + b$ et $\text{Cov}(Y) = A\text{Cov}(X)A^t$.

   corrigé

   Comme X est un v.a. de carré intégrable, la fonction Y est aussi un v.a. de carré intégrable. En utilisant la linéarité de l'application $Z \mapsto E(Z)$, on calcule son espérance et sa variance :

   $$E(Y) = E(AX + b) = AE(X) + E(b) = AE(X) + b,$$

   $$\begin{aligned}\text{Cov}(Y) = E([A(X - E(X))][A(X - E(X))]^t) &= E(A[X - E(X)][X - E(X)]^tA^t) \\ &= AE([X - E(X)][X - E(X)]^t)A^t = A\text{Cov}(X)A^t.\end{aligned}$$

4. Montrer que si $\text{Cov}(X)$ n'est pas inversible, alors le v.a. X prend p.s. ses valeurs dans un sous–espace affine de $\mathbb{R}^d$ de dimension (inférieure ou) égale à $d-1$, et que la loi de X n'est pas absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^d$, notée $\_d$ (i.e. cette loi n'est pas à densité dans $\mathbb{R}^d$).

   corrigé

   Si $\text{Cov}(X)$ n'est pas inversible, il existe $u \in \mathbb{R}^d$, $u \neq 0$, t.q. $\text{Cov}(X)u = 0$. On a donc $\text{Var}(u \cdot X) = u^t\text{Cov}(X)u = 0$, ce qui donne $u \cdot X = E(u \cdot X)$ p.s.. On pose $\beta = E(u \cdot X)$ et on a donc :

   $$X \in H \text{ p.s. avec } H = \{v \in \mathbb{R}^d \text{ t.q. } u \cdot v = \beta\}.$$

Comme $u \neq 0$, l'ensemble H est un sous–espace affine de $\mathbb{R}^d$ de dimension égale à $d-1$.

L'ensemble H étant de dimension $d-1$, on a $\lambda_d(H) = 0$. Or on a $P_X(H) = P(X \in H) = 1 \neq 0$. On en déduit que P_X n'est par absolument continue par rapport à λ_d et donc que P_X n'est pas une loi de densité par rapport à λ_d (voir le théorème 6.10).

---

5. Montrer que si trois points x, y et z de $\mathbb{R}^2$ ne sont pas alignés, tout v. a. X de dimension 2 tel que $P(X = x) > 0$, $P(X = y) > 0$ et $P(X = z) > 0$ a une matrice de covariance non dégénérée.

corrigé

On raisonne par l'absurde. Soit x, y et z trois points de $\mathbb{R}^2$ non alignés et X un v.a. de dimension 2 tel que $P(X = x) > 0$, $P(X = y) > 0$ et $P(X = z) > 0$. On suppose que la matrice de covariance de X est dégénérée. La question précédente donne alors qu'il existe une droite de $\mathbb{R}^2$ (c'est-à-dire un sous–espace affine de $\mathbb{R}^2$ de dimension égale à 1), notée D, t.q. $X \in D$ p.s.. Comme $P(X = x) > 0$, on a donc $\{X = x\} \cap D \neq \emptyset$. En prenant $\omega \in \{X = x\} \cap D$, on déduit $x = X(\omega) \in D$. On montre de même que $y, z \in D$. Ce qui est impossible car les trois points x, y et z ne sont pas alignés.

12.9.2 Indépendance

Corrigé 159 (Covariance d'une somme de v.a.i.)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace de probabilité et X, Y deux vecteurs aléatoires indépendants de dimension d ($d \geq 1$). Montrer que $\text{Cov}(X+Y) = \text{Cov}(X)+\text{Cov}(Y)$.

corrigé

Comme X et Y sont des v.a. indépendants, toute composante de X est indépendante de toute composante de Y (voir, par exemple, la remarque 9.5). On en déduit :

$$E([X - E(X)][Y - E(Y)]^t) = E([Y - E(Y)][X - E(X)]^t) = 0$$

et donc :

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X+Y) &= E([X - E(X) + Y - E(Y)][X - E(X) + Y - E(Y)]^t)\\ &= E([X - E(X)][X - E(X)]^t) + E([X - E(X)][Y - E(Y)]^t)\\ &\quad + E([Y - E(Y)][X - E(X)]^t) + E([Y - E(Y)][Y - E(Y)]^t)\\ &= E([X - E(X)][X - E(X)]^t) + E([Y - E(Y)][Y - E(Y)]^t) = \text{Cov}(X) + \text{Cov}(Y).\end{aligned}$$

Corrigé 160 (Loi d'un couple de v.a. indépendantes)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilités et X, Y deux v.a.r..

1. Montrer que X et Y sont indépendantes si et seulement si la loi du couple (X, Y) est $P_{(X,Y)} = P_X \otimes P_Y$.

corrigé

On suppose tout d'abord que X et Y sont indépendantes. Soit $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On a, par définition de $P_{(X,Y)}$, $P_{(X,Y)}(A \times B) = P(X \in A, Y \in B)$. Comme X et Y sont indépendantes, on a $P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(X \in B)$, ce qui donne :

$$P_{(X,Y)}(A \times B) = P_X(A)P_Y(B).$$

Or, $P_X \otimes P_Y$ vérifie aussi $P_X \otimes P_Y(A \times B) = P_X(A)P_Y(B)$. La partie "unicité" du théorème 7.1 donne alors $P_{(X,Y)} = P_X \otimes P_Y$.

Réciproquement, on suppose maintenant que $P_{(X,Y)} = P_X \otimes P_Y$, on a donc, pour tout $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $P(X \in A, Y \in B) = P_{(X,Y)}(A \times B) = P_X \otimes P_Y(A \times B) = P_X(A)P_Y(B)$. ce qui prouve que les tribus engendrées par X et Y sont indépendantes, c'est-à-dire que X et Y sont indépendantes.

---

2. On suppose que X et Y ont des densités par rapport à λ : $P_X = f\lambda$ et $P_Y = g\lambda$, avec $f, g \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ (et positives p.p.). Montrer que X et Y sont indépendantes si et seulement si la loi du couple (X, Y) a pour densité la fonction $(x, y) \mapsto f(x)g(y)$ par rapport à λ_2.

corrigé

Comme $P_X = f\lambda$ et $P_Y = g\lambda$, on a, pour tout $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$P_X \otimes P_Y(A \times B) = P_X(A)P_Y(B) = \int_A f d\lambda \int_B g d\lambda.$$

Le théorème 7.2 donne alors :

$$P_X \otimes P_Y(A \times B) = \int_{A \times B} f(x)g(y)d\lambda_2(x, y).$$

Ce qui donne $P_X \otimes P_Y = F\lambda_2$, avec $F(x, y) = f(x)g(y)$ pour $x, y \in \mathbb{R}$. la mesure $P_X \otimes P_Y$ est donc la mesure de densité F par rapport à λ_2. La question 2 est alors une conséquence immédiate de la première question.

Corrigé 161 (Somme de v.a. indépendantes et convolution)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilités et X, Y deux v.a.r. indépendantes.

1. On suppose que la loi de X a une densité, notée f, par rapport à la mesure de Lebesgue. Montrer que la loi de $X + Y$ a aussi une densité (par rapport à la mesure de Lebesgue) et l'exprimer en fonction de f et de la loi de Y.

2. On suppose que $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ et $Y \sim \mathcal{N}(m, s^2)$ $(m, \mu, s, \sigma \in \mathbb{R})$. Montrer que $X + Y \sim \mathcal{N}(\mu + m, \sigma^2 + s^2)$ (le signe "$\sim$" signifie "a pour loi").

Corrigé 162 (Calcul de π)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité, $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ deux suites de variables aléatoires de loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. On suppose que toutes ces v.a. sont indépendantes (dans leur ensemble). On pose pour tout $n \geq 1$:

$$X_n = 1 \text{ si } U_n^2 + V_n^2 \leq 1 \text{ et } X_n = 0 \text{ sinon},$$

et

$$Z_n = 4\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

1. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, la loi de X_n.

corrigé

On note $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \text{ t.q. } x^2 + y^2 \leq 1\}$ et $\psi = 1_D$, de sorte que ψ est une fonction borélienne de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ (car $D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$) et que $X_n = 1_D(U_n, V_n) = \psi(U_n, V_n)$ pour $n \in \mathbb{N}^\star$.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Comme U_n et V_n sont des v.a.r. et que ψ est borélienne de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, la fonction X_n est donc une v.a.r.. Comme X_n ne prend que les valeurs 1 et 0, la loi de X_n est $P_{X_n} = p\delta_1 + (1-p)\delta_0$ où $p = P(U_n^2 + V_n^2 \le 1)$. Pour calculer p, on utilise le fait que U_n et V_n sont indépendantes, on obtient (avec le théorème 9.2 sur la loi d'un couple de v.a.) :

$$p = P(U_n^2 + V_n^2 \le 1) = \int_\Omega 1_D(U_n, V_n)dP = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} 1_D(x,y)dP_{U_n}(x)dP_{V_n}(y).$$

Comme $U_n \sim \mathcal{U}(0,1)$ et $V_n \sim \mathcal{U}(0,1)$, on en déduit (en utilisant les coordonnées polaires) :

$$p = \int_0^1 \int_0^1 1_D(x,y)dxdy = \frac{\pi}{2} \int_0^1 rdr = \frac{\pi}{4}.$$

Donc $p_{X_n} = \frac{\pi}{4}\delta_1 + (1 - \frac{\pi}{4})\delta_0$.

---

2. Montrer que la suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ converge en probabilité vers π.

corrigé

On utilise les notations introduites dans la première question. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $Y_n = 4X_n$, c'est-à-dire $Y_n = 4\psi(U_n, V_n)$. Comme les v.a.r. $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$, $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ sont indépendantes (dans leur ensemble), la proposition 9.5 donne la suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ est une suite de v.a.r. indépendantes. De plus, comme $Y_n = 4X_n$, on a $P_{Y_n} = \frac{\pi}{4}\delta_4 + (1 - \frac{\pi}{4})\delta_0$. La suite Y_n est donc une suite de v.a.r.i.i.d. de carrés intégrables (on a $E(Y_n) = \pi$ et $E(Y_n^2) = 4\pi$). On peut appliquer le théorème 6.27 (loi faible des grands nombres), il donne que Z_n tend en probabilité vers $E(Y_1)$, c'est-à-dire vers π.

---

3. Soit $\alpha \in]0,1[$ et $\varepsilon > 0$. A l'aide de l'inégalité de Tchebychev, donner, en fonction de α et ε, une valeur de $n_0 \in \mathbb{N}^\star$ t.q.

$$n \ge n_0 \Rightarrow P[|Z_n - \pi| \ge \varepsilon] \le \alpha.$$

corrigé

On reprend ici la démonstration du théorème 6.27. En utilisant l'inégalité de Bienaymé Tchebychev (lemme 4.10), on a :

$$p(|Z_n - \pi| \ge \varepsilon) = p((Z_n - \pi)^2 \ge \varepsilon^2) \le \frac{1}{\varepsilon^2} E((Z_n - \pi)^2).$$

Puis, en posant $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$, on a $Z_n = \frac{S_n}{n}$ et donc $E((Z_n - \pi)^2) = \frac{1}{n^2} E((S_n - n\pi)^2) = \frac{\mathrm{Var}(S_n)}{n^2}$. La proposition 6.26 donne $\mathrm{Var}(S_n) = n\mathrm{Var}(Y_1) = n\pi(4 - \pi)$. On en déduit finalement

$$p(|Z_n - \pi| \ge \varepsilon) \le \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{n\pi(4-\pi)}{n^2} = \frac{\pi(4-\pi)}{n\varepsilon^2}.$$

Il suffit donc de prendre n_0 t.q. $\frac{\pi(4-\pi)}{n_0\varepsilon^2} \le \alpha$ pour avoir $P(|Z_n - \pi| \ge \varepsilon) \le \alpha$.

12.9.3 Vecteurs gaussiens, théorème central limite

Corrigé 163 (Loi du couple (X, X) si X suit une loi normale)

1. Soit A un borélien de $\mathbb{R}^2$. On pose $T(A) = \{x \in \mathbb{R}$ t.q. $(x,x)^t \in A\}$. Montrer que $T(A)$ est un borélien de $\mathbb{R}$. On pose $m(A) = \lambda(T(A))$ (où λ est mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$).

corrigé

L'application $x \mapsto (x,x)^t$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$, elle donc borélienne. Comme $T(A)$ est l'image réciproque de A par cette application, on a bien $T(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

On a ainsi défini une application m de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

2. Montrer que l'application m (définie ci dessus) est une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ et que pour toute application φ borélienne positive de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ on a :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x,y)dm(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x,x)dx.$$

corrigé

Pour montrer que m est une mesure, on remarque que $m(\emptyset) = 0$ (car $T(\emptyset) = \emptyset$) et m est σ-additive (ce qui découle simplement du fait que $A \cap B = \emptyset \Rightarrow T(A) \cap T(B) = \emptyset$).

On montre ensuite que $\int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x,y)dm(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x,x)dx$ pour $\varphi = 1_A$, avec $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ (c'est une conséquence immédiate de la définition de m), puis pour φ étagée positive (par linéarité), puis pour φ borélienne positive (car une telle fonction est limite croissante de fonctions étagées positives).

---

3. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace de probabilité. et X une v.a.r. t.q. $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.

   (a) On pose $Z = (X,X)^t$. Montrer que le v.a. Z est un vecteur gaussien et donner, pour $a \in \mathbb{R}^2$, la loi de $a \cdot Z$ (en fonction de a).

   corrigé

   Soit $a = (a_1, a_2)^t \in \mathbb{R}^2$. On pose $\alpha = a_1 + a_2$, de sorte que $a \cdot Z = \alpha X$.

   Si $\alpha = 0$, on a $P_{a \cdot Z} = P_0 = \mathcal{N}(0,0)$ (qui est bien une loi gaussienne).

   Si $\alpha \neq 0$. Soit φ une application borélienne bornée de $\mathbb{R}$ ans $\mathbb{R}$ on a :

   $$\int_\Omega \varphi(a \cdot Z)dP = \int_{\mathbb{R}} \varphi(\alpha x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\frac{1}{\sqrt{2\pi}|\alpha|}e^{-\frac{y^2}{2\alpha^2}}dy.$$

   Ce qui prouve que $a \cdot Z \sim \mathcal{N}(0, |\alpha|)$. Le v.a. Z est donc bien un vecteur gaussien.

   (b) Montrer la loi du v.a. $(X,X)^t$ a une densité par rapport à la mesure m définie dans les questions précédentes et donner cette densité. En déduire que la loi du v.a. $(X,X)^t$ n'a pas de densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

   corrigé

   Soit φ borélienne bornée de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On a :

   $$\int_\Omega \varphi(X,X)dP = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x,x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx.$$

   On en déduit que la loi du v.a. $(X,X)^t$ est fm avec f borélienne de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et t.q. $f(x,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ pour $x \in \mathbb{R}$. Comme m est étrangère à λ_2, loi du v.a. $(X,X)^t$ n'a pas de densité par rapport à λ_2 (qui est la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$).

N.B. la loi de $(X, X)^t$ est une loi normale bidimensionnelle car le vecteur $(X, X)^t$ est gaussien (voir la proposition 9.9) mais ce n'est pas une loi de densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 12.1 (petit calcul)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r.i.i.d. t.q. $X_1 \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Soit $\theta \in]-1, 1[$. On pose, pour $n \geq 1$, $S_n = X_n + \theta X_{n-1} + \ldots + \theta^{n-1}X_1$. Soit $t \in \mathbb{R}$, calculer $\varphi_{S_n}(t)$. Vers quoi converge $\varphi_{S_n}(t)$?

12.10 Exercices du chapitre 10

12.10.1 Transformée de Fourier dans L^1

Corrigé 164 (Résultat partiel d'inversion de Fourier dans L^1)
Soit $H(t) = e^{-|t|}, t \in \mathbb{R}$. On pose, pour $\lambda > 0$:

$$h_\lambda(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} H(\lambda t) e^{itx} dt, x \in \mathbb{R}. \tag{12.146}$$

1. Montrer que $h_\lambda(x) = (\frac{2}{\pi})^{\frac{1}{2}} \frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2}$, et $\int_{\mathbb{R}} h_\lambda(x) dx = (2\pi)^{\frac{1}{2}}$.

corrigé

Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme H est paire, on a $(2\pi)^{\frac{1}{2}} h_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-|\lambda t|} \cos(tx) dt$ et donc

$$(2\pi)^{\frac{1}{2}} h_\lambda(x) = 2 \lim_{n\to\infty} \int_0^n e^{-\lambda t} \cos(tx) dt.$$

En intégrant deux fois par parties, on remarque que

$$\int_0^n e^{-|\lambda t|} \cos(tx) dt = \frac{1}{\lambda} - (\frac{x}{\lambda})^2 \int_0^n e^{-|\lambda t|} \cos(tx) dt + a_n,$$

avec $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Ceci donne

$$\int_0^n e^{-|\lambda t|} \cos(tx) dt = \frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2}(1 + \lambda a_n),$$

et donc $h_\lambda(x) = (\frac{2}{\pi})^{\frac{1}{2}} \frac{\lambda}{\lambda^2+x^2}$.

Pour calculer $\int_{\mathbb{R}} h_\lambda(x) dx$, on utilise le changement de variable $x = \lambda y$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} h_\lambda(x) dx = (\frac{2}{\pi})^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} dy = (2\pi)^{\frac{1}{2}}.$$

---

2. Soit $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f \star h_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} H(\lambda t) \hat{f}(t) e^{ixt} dt. \tag{12.147}$$

corrigé

Noter que λ désigne ici à la fois le paramètre λ introduit au début de l'énoncé et la mesure de Lebesgue. Cette maladresse de notation semble toutefois sans gravité.

Comme $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $h_\lambda \in L^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, $f \star h_\lambda(x)$ est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ et on a :

$$f \star h_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) h_\lambda(x-t) dt = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \left(\int_{\mathbb{R}} H(\lambda y) e^{i(x-t)y} dy \right) dt.$$

Comme $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $H(\lambda \cdot) \in L^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, on peut utiliser le thérorème de Fubini (théorème 7.3) pour inverser l'ordre d'intégration et obtenir :

$$f \star h_\lambda(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} H(\lambda y) e^{ixy} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-ity} dt \right) dy = \int_{\mathbb{R}} H(\lambda y) e^{ixy} \hat{f}(y) dy.$$

---

3. Soit g une fonction mesurable bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, continue en 0. Montrer que $g \star h_\lambda(0) \to \sqrt{2\pi} g(0)$ quand $\lambda \to 0$. [Utiliser 1. et le théorème de convergence dominée.]

corrigé

On utilise maintenant le fait que $h_\lambda \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $g \in L^\infty_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ pour remarquer que $g \star h_\lambda(x)$ est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$. Pour $x = 0$, on a :

$$g \star h_\lambda(0) = \int_{\mathbb{R}} g(x) h_\lambda(x) dx = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2} g(x) dx.$$

Avec le changement de variable $y = \frac{x}{\lambda}$, on obtient :

$$g \star h_\lambda(0) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} g(\lambda y) \frac{1}{1 + y^2} dy.$$

Comme $|g(\lambda y) \frac{1}{1+y^2}| \le \|g\|_u \frac{1}{1+y^2}$ (avec $\|g\|_u = \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)|$) et que la fonction $y \mapsto \frac{1}{1+y^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, on peut utiliser le théorème de convergence dominée pour en déduire (grâce à la continuité de g en 0) :

$$\lim_{\lambda \to 0} g \star h_\lambda(0) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} g(0) \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + y^2} dy = (2\pi)^{\frac{1}{2}} g(0).$$

---

4. Soit $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, montrer que :

$$\|f \star h_\lambda - \sqrt{2\pi} f\|_1 \to 0 \text{ lorsque } \lambda \to 0. \tag{12.148}$$

[Utiliser la continuité en moyenne et la question précédente avec $g(y) = \int |f(x-y) - f(x)| dx$.]

corrigé

Comme $\int_{\mathbb{R}} h_\lambda(y) dy = \sqrt{2\pi}$, on a :

$$\|f \star h_\lambda - \sqrt{2\pi} f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |\int_{\mathbb{R}} (f(x-y) - f(x)) h_\lambda(y) dy| dx \le \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)| h_\lambda(y) dy \right) dx.$$

En utilisant le théorème de Fubini-Tonelli (théorème 7.2), on en déduit :

$$\|f \star h_\lambda - \sqrt{2\pi} f\|_1 \le \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)| dx \right) h_\lambda(y) dy = g \star h_\lambda(0),$$

avec $g(y) = \int |f(x-y) - f(x)| dx$.

Le théorème de continuité en moyenne dans L^1 (théorème 5.6, écrit pour de fonctions à valeurs réelles mais la généralisation est immédiate pour des fonctions à valeurs complexes) donne que g est continue en 0 et donc aussi continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (en remarquant que $|g(y) - g(z)| \le g(y-z)|$) et donc aussi mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Ellle est également bornée (car $|g(y)| \le 2\|f\|_1$, pour tout $y \in \mathbb{R}$). On peut donc utiliser la question précédente, elle donne que $\lim_{\lambda \to 0} g \star h_\lambda(0) = 0$ et donc que $\lim_{\lambda \to 0} \|f \star h_\lambda - \sqrt{2\pi} f\|_1 = 0$.

---

5. Déduire de ce qui précède le théorème d'inversion de Fourier, théorème 10.1.

corrigé

On note $L^1 = L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Soit $f \in L^1$ (on a donc $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$). On suppose que $\hat{f} \in L^1$. Soit $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+^\star$ une suite t.q. $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$. Comme $f \in L^1$, la question précédente nous donne que $f \star h_{\lambda_n} \to \sqrt{2\pi} f$ dans L^1 et la question 2 nous donne pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f \star h_{\lambda_n}(x) = \int_{\mathbb{R}} H(\lambda_n t) \hat{f}(t) e^{ixt} dt.$$

On utilise maintenant le théorème de convergence dominée qui s'applique parce que $\hat{f} \in L^1$ et $|H(\lambda_n t)\hat{f}(t)e^{ixt}| \le |\hat{f}(x)|$ (pour tout x et tout n). Comme $\lim_{n\to\infty} H(\lambda_n x) = 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to\infty} f \star h_{\lambda_n}(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) e^{ixt} dt = \sqrt{2\pi}\hat{\hat{f}}(-x).$$

Enfin, comme $f \star h_{\lambda_n} \to \sqrt{2\pi} f$ dans L^1, on peut supposer, après extraction d'une sous suite, que $f \star h_{\lambda_n} \to \sqrt{2\pi} f$ p.p.. On a donc, finalement (par unicité de la limite dans $\mathbb{R}$), $\sqrt{2\pi} f = \sqrt{2\pi}\hat{\hat{f}}(-\cdot)$ p.p., c'est-à-dire $f = \hat{\hat{f}}(-\cdot)$ p.p..

12.10.2 Transformée de Fourier d'une mesure signée

Corrigé 165 (Une mesure est caractérisée par sa transformée de Fourier)
Soit $d \ge 1$.

1. Soit m et μ deux mesures signées sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$. On suppose que $\hat{m} = \hat{\mu}$.

   (a) Soit $\varphi \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$. Montrer que $\int \hat{\varphi} dm = \int \hat{\varphi} d\mu$.

   corrigé

   On remarque que $\int \hat{\varphi} dm = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int \left(\int e^{-ix\cdot t} \varphi(x) dx \right) dm(t)$. (Les intégrales sont toutes sur $\mathbb{R}^d$). La mesure signée m peut se décomposer en différence de deux mesures positives étrangères $m = m^+ - m^-$ (décomposition de Hahn, proposition 2.6). Comme $\int\int |e^{-ix\cdot t}\varphi(x)| dx dm^{\pm}(t) = \|\varphi\|_1 m^{\pm}(\mathbb{R}^d) < +\infty$, on peut utiliser le théorème de Funini-Tonelli (théorème 7.2) avec les mesures λ_d et m^+ et les mesures λ_d et m^-. On obtient ainsi :

   $$\int \hat{\varphi} dm = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int \left(\int e^{-ix\cdot t} dm(t) \right) \varphi(x) dx = \int \hat{m}(x) \varphi(x) dx.$$

   Le même raisonnement donne $\int \hat{\varphi} d\mu = \int \hat{\mu}(x) \varphi(x) dx$. Comme $\hat{m}(x) = \hat{\mu}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on en déduit bien $\int \hat{\varphi} dm = \int \hat{\varphi} d\mu$.

   (b) Montrer que $\int \varphi dm = \int \varphi d\mu$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ (et donc pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$).

   corrigé

   Comme $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}) \subset L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$, la question précédente donne $\int \hat{\varphi} dm = \int \hat{\varphi} d\mu$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$. Or, l'application $\varphi \mapsto \hat{\varphi}$ est une bijection dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ (proposition 10.6). On a donc $\int \varphi dm = \int \varphi d\mu$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$.

(c) Montrer que $m = \mu$ (On rappelle qu'une fonction de $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ est limite uniforme de fonctions de $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$).

corrigé

Soit $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ et $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ t.q. $\varphi_n \to \varphi$, uniformément sur $\mathbb{R}^d$, quand $n \to \infty$. La question précédente donne $\int \varphi_n dm = \int \varphi_n d\mu$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On utilise alors le théorème de convergence dominée (ce qui est possible car les mesures $m^\pm$ et $\mu^\pm$ sont des mesures finies), il donne $\int \varphi dm = \int \varphi d\mu$.

La proposition 5.4 donne alors $m = \mu$.

---

2. Soit m une mesure signée sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$. On suppose que $\hat{m} \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$. Montrer que m est la mesure de densité f par rapport à la mesure de Lebesgue avec $f = \hat{\hat{m}}(-\cdot)$.

12.10.3 Fonction caractéristique d'un v.a.

Corrigé 166 (Vecteurs gaussiens, indépendance, covariance)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilités, $d \geq 1$ et $X = (X_1, \ldots, X_d)$ un v.a. de dimension d.

1. On suppose ici que $d = 2$.

(a) On suppose que X_1 et X_2 suivent des lois gaussiennes et sont indépendantes, montrer que X est un vecteur gaussien et que $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = 0$.

corrigé

Comme X_1 et X_2 suivent des lois gaussiennes, il existe $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ et $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}_+$ t.q. $X_k \sim \mathcal{N}(m_k, \sigma_k^2)$ pour $i = 1, 2$. On a donc $\varphi_{X_k}(u) = e^{ium_k} e^{-\frac{\sigma_k^2 u^2}{2}}$ pour $k = 1, 2$ et pour tout $u \in \mathbb{R}$.

Soit $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. On calcule alors la fonction caractéristique de la v.a.r. $a_1X_1 + a_2X_2$. Soit $u \in \mathbb{R}$, on a :

$$\varphi_{a_1X_1+a_2X_2}(u) = \int_\Omega e^{i(a_1X_1+a_2X_2)u} dP = \int_\Omega e^{ia_1X_1u} e^{ia_2X_2u} dP$$

En utilisant l'indépendance de X_1 et X_2, on en déduit :

$$\varphi_{a_1X_1+a_2X_2}(u) = \int_\Omega e^{ia_1X_1u} dP \int_\Omega e^{ia_2X_2u} dP = \varphi_{X_1}(a_1u)\varphi_{X_2}(a_2u).$$

Ce qui donne $\varphi_{a_1X_1+a_2X_2}(u) = e^{iu(a_1m_1+a_2m_2)} e^{-\frac{u^2(\sigma_1^2a_1^2+\sigma_2^2a_2^2)}{2}}$. Comme la loi d'une v.a.r. est entièrement déterminée par sa fonction caractéristique (proposition 10.10), on en déduit que $a_1X_1 + a_2X_2 \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ avec $m = a_1m_1 + a_2m_2$ et $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2a_1^2 + \sigma_2^2a_2^2}$. Ceci prouve bien que X est un vecteur gaussien.

L'indépendance de X_1 et X_2 permet aussi de calculer la fonction caractéristique de X. Soit $u = (u_1, u_2)^t \in \mathbb{R}^2$:

$$\varphi_X(u) = \int_\Omega e^{i(X_1u_1+X_2u_2)} dP = e^{i(u_1m_1+u_2m_2)} e^{-\frac{u_1^2\sigma_1^2+u_2^2\sigma_2^2}{2}}.$$

Ceci prouve que la matrice de covariance de X est diagonale (proposition 10.13) et donc que $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = 0$.

(b) On suppose que X est un vecteur gaussien et que $\text{Cov}(X_1, X_2) = 0$. Montrer que X_1 et X_2 sont indépendantes.

corrigé

D'après la proposition 10.11, pour montrer que X_1 et X_2 sont indépendantes, il suffit de montrer que $\varphi_X(u) = \prod_{j=1}^2 \varphi_{X_j}(u_j)$ pour tout $u = (u_1, u_2)^t \in \mathbb{R}^2$. Ceci est une conséquence facile du fait que $\text{Cov}(X_1, X_2) = 0$. En effet, la matrice de covariance de X est alors diagonale et on a bien (grâ ce à la proposition 10.13), en reprenant les notations de la question précédente (c'est-à-dire $X_k \sim \mathcal{N}(m_k, \sigma_k^2)$ pour $i = 1, 2$),

$$\varphi_X(u) = e^{i(u_1 m_1 + u_2 m_2)} e^{-\frac{u_1^2\sigma_1^2 + u_2^2\sigma_2^2}{2}} = \varphi_{X_1}(u_1)\varphi_{X_2}(u_2),$$

c'est-à-dire $\varphi_X(u) = \prod_{j=1}^2 \varphi_{X_j}(u_j)$ pour tout $u = (u_1, u_2)^t \in \mathbb{R}^2$.

2. On suppose toujours $d = 2$. Donner un exemple pour lequel X_1 et X_2 sont gaussiennes mais X n'est pas un vecteur gaussien. [On pourra, par exemple, choisir $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et X_1, X_2 de manière à avoir $\text{Cov}(X_1, X_2) = 0$ sans que X_1, X_2 soient indépendantes, voir l'exercice 4.44.]

corrigé

On considère les deux v.a.r. S et X de l'exercice 4.44 et on prend $X_1 = SX$ et $X_2 = X$. Les v.a.r. X_1 et X_2 sont gaussiennes (on a $X_1 \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et $X_2 \sim \mathcal{N}(0, 1)$), elles sont dépendantes et on a $\text{Cov}(X_1, X_2) = 0$ (voir l'exercice 4.44). On en déduit que le v.a. $X = (X_1, X_2)$ n'est pas gaussien (sinon les v.a.r. seraient indépendantes, d'après la question précédente).

3. On suppose que X est un vecteur gaussien et que les composantes de X sont indépendantes deux à deux. Montrer que $X_1, \ldots, X_d$ sont indépendantes.

corrigé

La démonstration est ici similaire à celle de la question 1(b). D'après la proposition 10.11, pour montrer que les v.a.r. $X_1, \ldots, X_d$ sont indépendantes, il suffit de montrer que $\varphi_X(u) = \prod_{j=1}^d \varphi_{X_j}(u_j)$ pour tout $u = (u_1, \ldots, u_d)^t \in \mathbb{R}^d$. Ceci est une conséquence facile du fait que les v.a.r. $X_1, \ldots, X_d$ sont indépendantes deux à deux. En effet, cette hypothèse d'indépendance deux à deux donne que la matrice de covariance de X est diagonale et on a alors (grâce à la proposition 10.13), avec $X_k \sim \mathcal{N}(m_k, \sigma_k^2)$ pour $i = 1, \ldots, d$,

$$\varphi_X(u) = e^{i\sum_{k=1}^d u_k m_k} e^{-\frac{\sum_{k=1}^d u_k^2\sigma_k^2}{2}} = \varphi_{X_1}(u_1) \ldots \varphi_{X_d}(u_d),$$

c'est-à-dire $\varphi_X(u) = \prod_{j=1}^d \varphi_{X_j}(u_j)$ pour tout $u = (u_1, \ldots, u_d)^t \in \mathbb{R}^d$.

Corrigé 167 (Suite de v.a.r.i.i.d. de Poisson)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et X une v.a. de Poisson de paramètre λ ($\lambda > 0$). On rappelle que, $P[X = k] = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et que $E[X] = \lambda$, $Var[X] = \lambda$.

1. Calculer la fonction caractéristique φ_X de X.

corrigé

Soit $u \in \mathbb{R}$, on a $\varphi_X(u) = \int_\Omega e^{iXu} dP = \sum_{k\in\mathbb{N}} e^{iku} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(\lambda e^{iu})^k}{k!} = e^{\lambda(e^{iu}-1)}$

2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite de v.a. indépendantes et de Poisson de paramètre λ.

(a) Soit $n > 1$. Déduire de la première question la loi de la v.a. $Y_n = \sum_{p=1}^n X_p$.

corrigé

Soit $u \in \mathbb{R}$. On a $\varphi_{Y_n}(u) = \int_\Omega e^{iY_n u} dP = \int_\Omega \prod_{p=1}^n e^{iX_p u} dP$. Comme les v.a.r. $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes, on en déduit que $\varphi_{Y_n}(u) = \prod_{p=1}^n \int_\Omega e^{iX_p u} dP = e^{n\lambda(e^{iu}-1)}$.

Comme la loi d'une v.a.r. est entièrement déterminée par sa fonction caractéristique (proposition 10.10), on en déduit que Y_n est une v.a. de Poisson de paramètre $n\lambda$.

(b) Utiliser le théorème central limite pour démontrer que

$$e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} \to \frac{1}{2} \text{ quand } n \to \infty.$$

corrigé

On suppose maintenant que $\lambda = 1$. la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est une suite de v.a.r.i.i.d. de carrés intégrables et on a $E(X_1) = 1$ et $\mathrm{Var}(X_1) = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose

$$Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n (X_i - 1) = \frac{1}{\sqrt{n}}(Y_n - n).$$

Le théorème central limite (théorème 6.12) donne que la suite $(P_{Z_n})_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge étroitement vers la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Comme une loi normale est diffuse (c'est-à-dire qu'elle ne charge pas les points), on en déduit que $P(Z_n \le 0)$ tend vers $1/2$ quand $n \to \infty$ (voir l'exercice 6.51 et noter que $P(Z_n \le 0) = P_{Z_n}(]-\infty, 0[)$). Or, $P(Z_n \le 0) = P(Y_n \le n)$ et, comme Y_n est une v.a. de Poisson de paramètre n, on a :

$$P(Y_n \le n) = \sum_{k=0}^n P(Y_n = k) = \sum_{k=0}^n e^{-n} \frac{n^k}{k!}.$$

On a donc $e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} \to 1/2$, quand $n \to \infty$.

12.11 Exercices du chapitre 11

12.11.1 Espérance conditionnelle

Corrigé 168 (Espérance conditionnelle selon une tribu)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et Y une variable aléatoire réelle intégrable. Dans les trois cas suivants, montrer que $E[Y|\mathcal{B}]$ est réduit à un élément et déterminer $E[Y|\mathcal{B}]$ (en fonction de Y et $\mathcal{B}$).

1. La tribu $\mathcal{B}$ la tribu grossière, c'est-à-dire $\mathcal{B} = \{\emptyset, \Omega\}$.

   corrigé

   Soit Z une application de Ω dans $\mathbb{R}$, $\mathcal{B}$-mesurable. Soit $a \in \mathrm{Im}(Z)$ (on suppose, bien sûr, $\Omega \neq \emptyset$). On a alors $\{Z = a\} = \{\omega \in \Omega; Z(\omega) = a\} \neq \emptyset$. Comme Z est $\mathcal{B}$-mesurable, on a donc $\{Z = a\} = \Omega$. Une application $\mathcal{B}$-mesurable est donc une fonction constante (réciproquement, une fonction constante est bien $\mathcal{B}$-mesurable). Si $Z \in E(Y|\mathcal{B})$, il existe donc $a \in \mathbb{R}$ t.q. $Z(\omega) = a$ pour tout $\omega \in \Omega$. Le réel a doit alors vérifier $E(aU) = E(UY)$ pour tout application U, $\mathcal{B}$-mesurable de Ω dans $\mathbb{R}$. On a donc $ab = E(ab) = E(bY) = bE(Y)$ pour tout $b \in \mathbb{R}$. La seule solution est donc $a = E(Y)$. L'ensemble $E[Y|\mathcal{B}]$ est donc réduit à un seul élément, la fonction constante et égale à $E(Y)$.

2. Soit $B \in \mathcal{A}$ t.q. $0 < P[B] < 1$. On prend pour $\mathcal{B}$ la tribu engendrée par B.

   corrigé

   Soit Z une application de Ω dans $\mathbb{R}$, $\mathcal{B}$-mesurable. Les paties B et B^c sont non vides (car de probabilité strictement positive). Soit $\omega_1 \in B$ et $a = Z(\omega_1)$. On a alors $\{Z = a\} = \{\omega \in \Omega; Z(\omega) = a\} \neq \emptyset$. Comme Z est $\mathcal{B}$-mesurable, on a donc $\{Z = a\} = B$ ou Ω et donc $\{Z = a\} \supset B$. De même, soit $\omega_2 \in B^c$ et $b = Z(\omega_2)$, on a $\{Z = b\} \supset B^c$. Une application $\mathcal{B}$-mesurable est donc une fonction constante sur B et B^c. Réciproquement, une fonction constante sur B et B^c est bien $\mathcal{B}$-mesurable.

   Si $Z \in E(Y|\mathcal{B})$, il existe donc $a, b \in \mathbb{R}$ t.q. $Z = a1_B + b1_{B^c}$. Les réels a, b doivent alors vérifier $E(ZU) = E(UY)$ pour tout application U $\mathcal{B}$-mesurable de Ω dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire :

   $$a\alpha P(B) + b\beta P(B^c) = \alpha \int_B Y dP + \beta \int_{B^c} Y dP \text{ pour tout } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

   Comme $P(B) > 0$ et $P(B^c) = 1 - P(B) > 0$, la seule solution est donc :

   $$a = \frac{\int_B Y dP}{P(B)} \text{ et } b = \frac{\int_{B^c} Y dP}{P(B^c)}.$$

   L'ensemble $E[Y|\mathcal{B}]$ est donc réduit à un seul élément, la fonction Z définie par $Z = \frac{\int_B Y dP}{P(B)} 1_B + \frac{\int_{B^c} Y dP}{P(B^c)} 1_{B^c}$.

3. Soit $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^\star} \subset \mathcal{A}$ t.q. $B_n \cap B_m = \emptyset$ si $n \neq m$, $\Omega = \cup_{n \in \mathbb{N}^\star} B_n$ et $0 < P(B_n) < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. On prend pour $\mathcal{B}$ la tribu engendrée par $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ (c'est-à-dire $\mathcal{B} = \{\cup_{n \in J} B_n, J \subset \mathbb{N}^\star\}$).

   corrigé

   On reprend le même raisonnement que dans les deux questions précédentes. On remarque d'abord qu'une application Z de Ω dans $\mathbb{R}$ est $\mathcal{B}$-mesurable si et seulement si il existe une suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^\star} \subset \mathbb{R}$

t.q. $Z = \sum_{n\in\mathbb{N}^\star} \alpha_n 1_{B_n}$. (Cette Série est bien convergente en tout point de Ω car les B_n sont disjoints deux à deux.

Si $Z \in E(Y|\mathcal{B})$, il existe donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \subset \mathbb{R}$ t.q. $Z = \sum_{n\in\mathbb{N}^\star} a_n 1_{B_n}$. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ doit alors être telle que Z soit intégrable et que $E(ZU) = E(UY)$ pour tout application U $\mathcal{B}$-mesurable bornée de Ω dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire t.q. $\sum_{n\in\mathbb{N}^\star} |a_n|P(B_n) < +\infty$ et :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^\star} \alpha_n a_n P(B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}^\star} \alpha_n \int_{B_n} Y dP \text{ pour toute suite bornée } (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \subset \mathbb{R}.$$

Comme $P(B_n) > 0$, la seule solution est donc :

$$a_n = \frac{\int_{B_n} Y dP}{P(B_n)} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^\star.$$

Comme on sait que l'ensemble $E[Y|\mathcal{B}]$ est non vide, il est inutile de vérifier que la fonction Z trouvée est intégrable (puisque cette fonction est la seule fonction pouvant appartenir à $E[Y|\mathcal{B}]$). L'ensemble $E[Y|\mathcal{B}]$ est donc réduit à un seul élément. Cet élément est la fonction Z définie par $Z = \sum_{n\in\mathbb{N}^\star} \frac{\int_{B_n} Y dP}{P(B_n)} 1_{B_n}$.

Corrigé 169 (Espérance conditionnelle selon une v.a.r.)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, X une variable aléatoire réelle et Y une variable aléatoire réelle intégrable.

1. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ t.q. $X = a$ p.s.. Donner un élément de $E[Y|X]$.

corrigé

On utilise la proposition 11.5. Soit $Z \in E[Y|X]$, il existe alors ψ, fonction borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, t.q. $Z = \psi(X)$, $\psi(X)$ est intégrable et

$$E(\psi(X)\varphi(X)) = E(Y\varphi(X)) \text{ pour toute application } \varphi \text{ de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}, \text{ borélienne bornée.}$$

On a donc $Z = \psi(a)$ p.s. et en prenant pour φ une fonction t.q. $\varphi(a) = 1$ dans l'égalité précédente, on obtient $\psi(a) = E(Y)$. On a donc finalement $Z = E(Y)$ p.s.. La fonction constante et égale à $E(Y)$ est un élément de $E[Y|X]$. Plus précisément, la fonction $\psi(X)$ est un élément de $E[Y|X]$, dès que ψ est une fonction borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et t.q. $\psi(a) = E(Y)$.

---

2. On suppose que X prend p.s. deux valeurs x_1 ou x_2 avec $x_1 \neq x_2$. Donner un élément de $E[Y|X]$.

corrigé

On pose $A_1 = \{X = x_1\}$ et $A_2 = \{X = x_2\}$. On suppose que $P(A_1) > 0$ et $P(A_2) > 0$ (sinon, on est ramené à la question précédente). Noter que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ et $P(A_1) + P(A_2) = 1$. On utilise encore la proposition 11.5. Soit $Z \in E[Y|X]$, il existe alors ψ, fonction borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, t.q. $Z = \psi(X)$, $\psi(X)$ est intégrable et

$$E(\psi(X)\varphi(X)) = E(Y\varphi(X)) \text{ pour toute application } \varphi \text{ de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}, \text{ borélienne bornée.} \quad (12.149)$$

On a donc $Z = \psi(x_1)1_{A_1} + \psi(x_2)1_{A_2}$ p.s.. Soit $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, en prenant pour φ une fonction borélienne bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ t.q. $\varphi(x_1) = a_1$ et $\varphi(x_2) = a_2$ dans l'égalité (12.149), on obtient :

$$\psi(x_1)\alpha_1 P(A_1) + \psi(x_2)\alpha_2 P(A_2) = \alpha_1 \int_{A_1} Y dP + \alpha_2 \int_{A_2} Y dP \text{ pour tout } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

Comme $P(A_i) > 0$ pour $i = 1, 2$, on en déduit que $\psi(x_i) = \frac{\int_{A_i} Y dP}{P(A_i)}$, pour $i = 1, 2$, et donc que

$$Z = \frac{\int_{A_1} Y dP}{P(A_1)} 1_{A_1} + \frac{\int_{A_i} Y dP}{P(A_i)} 1_{A_2} \text{ p.s..}$$

Ici encore, la fonction $\psi(X)$ est un élément de $E[Y|X]$ dès que ψ est une fonction borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et t.q. $\psi(x_i) = \frac{\int_{A_i} Y dP}{P(A_i)}$ pour $i = 1, 2$ (un exemple possible est donc $\psi(x_i) = \frac{\int_{A_i} Y dP}{P(A_i)}$ pour $i = 1, 2$ et $\psi(x) = 0$ pour $x \notin \{x_1, x_2\}$).

---

3. On suppose que X est une v.a. prenant p.s. ses valeurs dans un ensemble dénombrable $\{x_n, n \in \mathbb{N}^\star\}$ avec $P(X = x_n) \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. Donner un élément de $E[Y|X]$.

corrigé

On peut supposer que les x_n sont différents deux à deux. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $A_n = \{X = x_n\}$. Les ensembles A_n sont disjoints deux à deux, $P(A_n) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = 1$.

On utilise encore la proposition 11.5. Soit $Z \in E[Y|X]$, il existe alors ψ, fonction borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, t.q. $Z = \psi(X)$, $\psi(X)$ est intégrable et

$$E(\psi(X)\varphi(X)) = E(Y\varphi(X)) \text{ pour toute application } \varphi \text{ de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}, \text{ borélienne bornée.} \quad (12.150)$$

On a donc $Z = \sum_{n\in\mathbb{N}^\star} \psi(x_n) 1_{A_n}$ p.s.. Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \subset \mathbb{R}$ une suite bornée de $\mathbb{R}$. Dans l'égalité (12.150), on prend pour φ une fonction borélienne bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ t.q. $\varphi(x_n) = \alpha_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ (un tel φ existe, on peut prendre, par exemple, $\varphi(x) = 0$ si x est différent de tous les x_n), on obtient :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^\star} \psi(x_n)\alpha_n P(A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}^\star} \alpha_n \int_{A_n} Y dP \text{ pour toute suite bornée } (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \subset \mathbb{R}.$$

Comme $P(A_n) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on en déduit que $\psi(x_n) = \frac{\int_{A_n} Y dP}{P(A_n)}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, et donc que

$$Z = \sum_{n\in\mathbb{N}^\star} \frac{\int_{A_n} Y dP}{P(A_n)} 1_{A_n} \text{ p.s..}$$

Noter que, comme on sait que $E(Y|X)$ est non vide (donc qu'il existe $Z \in E(Y|X)$), la fonction $\sum_{n\in\mathbb{N}^\star} \frac{\int_{A_n} Y dP}{P(A_n)} 1_{A_n}$ est nécessairement intégrable (en fait, on a $\|Z\|_1 \leq \|Y\|_1$).

Enfin, ici encore, la fonction $\psi(X)$ est un élément de $E[Y|X]$ dès que ψ est une fonction borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et t.q. $\psi(x_n) = \frac{\int_{A_n} Y dP}{P(A_n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. Un exemple possible est donc $\psi(x_n) = \frac{\int_{A_n} Y dP}{P(A_n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et $\psi(x) = 0$ pour $x \notin \{x_n, n \in \mathbb{N}^\star\}$. Cet exemple donne la fonction $\sum_{n\in\mathbb{N}^\star} \frac{\int_{A_n} Y dP}{P(A_n)} 1_{A_n}$.

Corrigé 170 (Calcul de $E(\exp(XY)|X)$ si Y est gaussienne)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilités et X, Y deux v.a. réelles indépendantes. On suppose que Y suit une loi gaussienne centrée réduite et que $E[\exp(X^2/2)] < \infty$. Montrer que $\exp(XY)$ est intégrable et déterminer $E[\exp(XY)|X]$.

corrigé

La v.a.r. $\exp(XY)$ est positive. On calcule $\int_\Omega e^{XY} dP$ en utilisant l'indépendance de X et Y (et le théorème 9.2, qui donne que $P_{(X,Y)} = P_X \otimes P_Y$) et le fait que $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$:

$$\int_\Omega e^{XY} dP = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{xy} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy dP_X(x).$$

En remarquant que $xy - \frac{y^2}{2} = -\frac{1}{2}(x-y)^2 + \frac{1}{2}x^2$ on obtient :

$$\int_\Omega e^{XY} dP = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-(x-y)^2}{2}})dy \right) e^{\frac{x^2}{2}} dP_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-z^2}{2}} dz \right) e^{\frac{x^2}{2}} dP_X(x),$$

et donc $\int_\Omega e^{XY} dP = \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{x^2}{2}} dP_X(x) = E(e^{\frac{X^2}{2}}) < +\infty$. Ce qui donne que e^{XY} est une v.a.r. intégrable.

Selon la proposition 11.5 on cherche un élément de $E[\exp(XY)|X]$ sous la forme $\psi(X)$ où ψ est une fonction borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, t.q. $Z = \psi(X)$, $\psi(X)$ est intégrable et

$$E(\psi(X)\varphi(X)) = E(e^{XY}\varphi(X)) \text{ pour toute application } \varphi \text{ de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}, \text{ borélienne bornée.}$$

Soit φ une application borélienne bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on calcule $E(e^{XY}\varphi(X))$ en utilisant, comme précédemment, l'indépendance de X et Y et le fait que $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$:

$$E(e^{XY}\varphi(X)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{xy} \varphi(x) e^{-\frac{y^2}{2}} dy dP_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-(x-y)^2}{2}} dy \right) e^{\frac{x^2}{2}} \varphi(x) dP_X(x).$$

On a donc $E(e^{XY}\varphi(X)) = \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{x^2}{2}} \varphi(x) dP_X(x) = E(e^{-\frac{X^2}{2}}\varphi(X))$. Ceci nous montre que $e^{-\frac{X^2}{2}}$ est un élément de $E[\exp(XY)|X]$ et donc (comme on confond $E[\exp(XY)|X]$ avec l'un de des éléments) $E[\exp(XY)|X] = e^{-\frac{X^2}{2}}$ p.s..

Corrigé 171 (Espérance du produit et produit des espérances)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilités et X, Y deux v.a. intégrables t.q. XY est intégrable et $E[X|Y] = E(X)$ p.s.. Montrer que $E(XY) = E(X)E(Y)$.

corrigé

Grâce à la proposition 11.5 on a

$$E(E[X|Y]\varphi(Y)) = E(X\varphi(Y)) \text{ pour toute application } \varphi \text{ de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}, \text{ borélienne bornée.}$$

Comme $E[X|Y] = E(X)$ p.s., on en déduit

$$E(X)E(\varphi(Y)) = E(X\varphi(Y)) \text{ pour toute application } \varphi \text{ de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}, \text{ borélienne bornée.} \quad (12.151)$$

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Pour $s \in \mathbb{R}$, on pose $T_n(s) = \max\{-n, \min\{s, n\}\}$. La fonction T_n est borélienne (car continue) bornée (par n) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On peut donc utiliser (12.151) avec $\varphi = T_n$. On obtient $E(X)E(T_n(Y)) = E(XT_n(Y))$.

Comme Y est intégrable, on a, par convergence dominée, $\lim_{n\to\infty} E(T_n(Y)) = E(Y)$ (noter que $|T_n(Y)| \leq |Y|$).

Comme XY est intégrable (et c'est uniquement ici que cette hypothèse est utilisée), on a, par convergence dominée, $\lim_{n\to\infty} E(XT_n(Y)) = E(XY)$ (noter que $|XT_n(Y)| \leq |XY|$).

En passant à limite quand $n \to \infty$ sur l'égalité $E(X)E(T_n(Y)) = E(XT_n(Y))$, on a donc $E(X)E(Y) = E(XY)$.

12.11.2 Martingales

Corrigé 172 (Quelques propriétés des martingales)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité muni d'une filtration $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (c'est-à-dire d'une suite croissante de sous tribus de $\mathcal{A}$) et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de de v.a.r. (c'est-à-dire un processus réel). On suppose que X_n est intégrable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. On suppose que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-martingale (par rapport à la filtration $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$). Montrer que la suite $(E(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

   corrigé

   Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-martingale, on a $E(X_{n+1}|\mathcal{B}_n) \geq X_n$ p.s. et donc $E(E(X_{n+1}|\mathcal{B}_n)) \geq E(X_n)$. Or (comme les fonctions constantes sont $\mathcal{B}_n$-mesurables bornées), $E(E(X_{n+1}|\mathcal{B}_n)) = E(X_{n+1})$. On a donc $E(X_{n+1}) \geq E(X_n)$.

   ---

2. On suppose que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale (par rapport à la filtration $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$). Montrer que $E(X_{n+m}|\mathcal{B}_n) = X_n$ p.s. pour tout $m \geq 0$.

   corrigé

   Pour $m = 0$, le fait que $E(X_n|\mathcal{B}_n) = X_n$ p.s., pour tout $n \in \mathbb{N}$, découle du fait que X_n est $\mathcal{B}_n$-mesurable. Pour $m \geq 1$, On montre la propritée demandée par récurrence sur $m \in \mathbb{N}^\star$. Pour $m = 1$ le fait que $E(X_{n+1}|\mathcal{B}_n) = X_n$ p.s., pour tout $n \in \mathbb{N}$, est donné dans la définition de martingale. Soit $m \in \mathbb{N}^\star$. On suppose que $E(X_{n+m}|\mathcal{B}_n) = X_n$ p.s., pour tout $n \in \mathbb{N}$. On veut montrer que $E(X_{n+m+1}|\mathcal{B}_n) = X_n$ p.s., pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale, on a $E(X_{n+m+1}|\mathcal{B}_{n+m}) = X_{n+m}$ et donc :

   $$E(X_{n+m+1}U) = E(X_{n+m}U) \text{ pour tout } U \ \mathcal{B}_{n+m}\text{-mesurable bornée.}$$

   Comme $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{B}_{n+m}$, on a donc aussi

   $$E(X_{n+m+1}U) = E(X_{n+m}U) \text{ pour tout } U \ \mathcal{B}_n\text{-mesurable bornée.}$$

   L'hypothèse de récurrence donne $E(X_{n+m}|\mathcal{B}_n) = X_n$ p.s.. On a donc :

   $$E(X_{n+m}U) = E(X_nU) \text{ pour tout } U \ \mathcal{B}_n\text{-mesurable bornée.}$$

   On a en déduit :

   $$E(X_{n+m+1}U) = E(X_nU) \text{ pour tout } U \ \mathcal{B}_n\text{-mesurable bornée.}$$

   Ce qui montre que $E(X_{n+m+1}|\mathcal{B}_n) = X_n$ p.s. et termine la récurrence.

   ---

3. Soit φ une fonction convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale (par rapport à la filtration $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$) et que $\varphi(X_n)$ est intégrable pour tout $n \in \mathbb{N}$ (on rappelle que $\varphi(X_n)$ est une notation pour désigner $\varphi \circ X_n$). Montrer que $(\varphi(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-martingale (par rapport à la filtration $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$).

corrigé

On remarque tout d'abord que $\varphi(X_n)$ est bien $\mathcal{B}_n$-mesurable (car X_n est $\mathcal{B}_n$-mesurable et φ est borélienne), pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour montrer que $(\varphi(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-martingale, il suffit alors d'utiliser le proposition 11.4 sur l'inégalité de jensen. Soit $n \in \mathbb{N}$. La proposition 11.4 donne $E(\varphi(X_{n+1})|\mathcal{B}_n) \geq \varphi(E(X_{n+1}|\mathcal{B}_n))$ p.s.. Comme $E(X_{n+1}|\mathcal{B}_n) = X_n$ p.s., on en déduit $E(\varphi(X_{n+1})|\mathcal{B}_n) \geq \varphi(X_n)$ p.s., ce qui montre bien que $(\varphi(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-martingale.

That's all folks