MT90 A10. Examen Final

Durée : 2h. Aucun document autorisé. Calculatrices interdites

Rédigez les exercices 1, 2 et 3 sur des copies séparées

Justifiez toutes vos réponses. La qualité de l'énoncé du raisonnement est particulièrement importante. Par ailleurs, ne passez pas trop de temps sur une question que vous n'arrivez pas à traiter: vous pouvez supposer le résultat connu, et passer aux questions suivantes!

Exercice 1 : CHANGER DE COPIE *(barème approximatif : 6.5 points)*
(Les parties (1) et (2) sont indépendantes).

(1) Dans toute cette partie, p désigne un entier supérieur ou égal à 1.
   (a) Soient $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^*$ et la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = x^n y^{p-1-n}$. Montrer que (u_n) est géométrique, de premier terme y^{p-1} et d'une raison que l'on précisera. En déduire la somme des p premiers termes de (u_n).
   (b) Soient x et y deux réels. Montrer que

$$x^p - y^p = (x-y)\sum_{n=0}^{p-1} x^n y^{p-1-n}$$

   (on pourra distinguer les cas $y \neq 0$ et $y = 0$).
   (c) En déduire que pour tout $\delta > 0$ et tout couple de réels (x, y) tels que $\mid x \mid \leq \delta$ et $\mid y \mid \leq \delta$,

$$\mid x^p - y^p \mid \leq p\delta^{p-1} \mid x - y \mid .$$

   (d) En déduire que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\eta > 0$ tel que pour tout x,

$$\mid x - x_0 \mid < \eta \Rightarrow \mid x^p - (x_0)^p \mid < \varepsilon$$

   (on pourra remarquer que $\mid x \mid < \mid x_0 \mid +1$ pour tout x tel que $\mid x - x_0 \mid < \eta$ avec $\eta < 1$).
   (e) Conclure.

(2) (a) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Donner la définition formelle de "f n'est pas continue en x_0".
   (b) Soit la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

   Avec la question précédente, montrer que φ n'est continue en aucun point $x_0 \in \mathbb{R}$ (on pourra distinguer les cas $x_0 \in \mathbb{Q}$ et $x_0 \notin \mathbb{Q}$).

Exercice 2: CHANGER DE COPIE *(barème approximatif : 5.5 points).*

Soient $a < b$ deux réels, et f, une fonction définie et continue sur $[a, b]$. Nous voulons démontrer que

$$\sup\{f(x);\, a < x < b\} = \sup\{f(x);\, a \leq x \leq b\}.$$

On notera M, la première borne supérieure et M', la deuxième.

(a) L'une de ces deux bornes supérieures est clairement inférieure ou égale à l'autre. Laquelle? (on pourra utiliser un résultat vu en TD).
(b) Montrer qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = M'$ (on pourra utiliser un résultat du cours). x_0 est-il forcément unique? Si non, donner un contre-exemple.
(c) Supposons que $x_0 \in]a, b[$. Montrer qu'alors $f(x_0) = M$.
(d) Supposons que $x_0 = b$. Montrer qu'alors $M = f(b)$ (on pourra considérer une suite réelle convergente vers b).
(e) Appliquer un raisonnement analogue si $x_0 = a$. Conclure.

(f) Soit la fonction g définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par

$$g(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right], \\ 2 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Calculer M et M' (les sup de g respectivement sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et $[0, \frac{\pi}{2}]$). Que remarquez-vous et pourquoi?

Exercice 3: CHANGER DE COPIE *(barème approximatif : 8 points).*
(Les parties (1) et (2) sont indépendantes).

(1) Soient (S_n) et (U_n), les deux suites respectivement définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \text{ et } U_n = \ln(n+1).$$

(a) Soit $n \geq 1$. Donner un minorant (dépendant de n) de l'ensemble $\left\{\frac{1}{c};\ c \in]n, n+1[\ \right\}$.

(b) Soit $n \geq 2$. En appliquant le théorème des accroissements finis à une fonction bien choisie sur un intervalle bien choisi, montrer que

$$S_n - S_{n-1} > U_n - U_{n-1}$$

(on pourra utiliser la question précédente).

(c) En déduire une comparaison entre les deux suites (S_n) et (U_n) (on pourra raisonner par récurrence en utilisant (b), et le fait que $\ln 2 \simeq 0,69 \leq 1$).

(d) En déduire que

$$S_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

(2) On fixe n un entier strictement positif, et on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction h de la façon suivante:

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0; \\ \sin x & \text{si } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]; \\ \left(\frac{2x}{\pi}\right)^n & \text{si } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

(a) Etudier la continuité de h.

(b) Etudier la dérivabilité de h en tout point de $\mathbb{R}$, et calculer sa dérivée partout où elle est définie.

(c) Soient a, b, c trois réels tels que $a < b < c$ et f, une fonction continue sur $[a, c]$ et dérivable sur $]a, b[$ et $]b, c[$ telle que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]a, b[\cup]b, c[$. Montrer que f est bijective de $[a, c]$ dans $[f(a), f(c)]$.

(d) En déduire que h définit une bijection (préciser de quel espace dans quel espace), et déterminer sa réciproque h^{-1}.