

Exercice 1 :

- (1) **Convergence de suites. En utilisant la définition, démontrer que la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ converge, vers une limite que l'on précisera.**

Correction (1pt). On devine clairement que la suite tend vers 1. Montrons-le: on fixe $\varepsilon > 0$ et on cherche un rang N à partir duquel les termes de la suite sont tous à une distance plus petite qu' ε de 1. Soit $N = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor$ ou tout entier supérieur ou égal à ce N . Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} n > N &\iff n \geq \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1 \\ &\implies n > \frac{1}{\varepsilon} \\ &\iff \frac{1}{n} < \varepsilon \\ &\iff \left| 1 + \frac{1}{n} - 1 \right| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Le résultat est démontré. □

- (2) **Limite à gauche de fonction.**

- (a) *(Question de cours).* Soit $a \in \mathbb{R}$, Ω un intervalle tel que $a \in \Omega$ et f une fonction définie sur Ω , sauf éventuellement en a . Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Donner la définition formelle de "f admet ℓ pour limite à gauche en a ."

Correction (0.5 pt). Pour tout degré de proximité ε aussi petit soit-il, on trouve un η tel que si x s'approche de a par la gauche à distance η , son image est à une distance au plus ε de la limite. En termes formels:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \Omega, a - \eta < x < a \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

□

- (b) **On considère la fonction suivante**

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \rightarrow \mathbb{N} \\ x & \mapsto \lfloor x \rfloor, \end{cases}$$

où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x . Montrer avec la définition que f admet une limite à gauche en 1, que l'on précisera.

Correction (1 pt). On va appliquer la définition précédente. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $0 \leq x < 1$, $f(x) = \lfloor x \rfloor = 0$, donc il suffit de prendre $\eta = 1$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} 1 - \eta < x < 1 &\implies \lfloor x \rfloor = 0 \\ &\iff |f(x) - 0| = 0 < \varepsilon. \end{aligned}$$

On reconnaît donc que la fonction f admet 0 pour limite à gauche en 1. □

Exercice 2

- (1) Soient E et F deux ensembles, et f une application de E dans F . Donner la définition formelle (avec des quantificateurs) de " f est injective" et en déduire la définition formelle de " f n'est pas injective".

Correction (0.5 + 0.5 pt). f est injective lorsque deux éléments distincts de E ont des images distinctes par f . Formellement:

$$\forall (x, x') \in E^2, (f(x) = f(x')) \implies (x = x').$$

La définition formelle de " f non injective" est la négation de cette proposition:

$$\begin{aligned} \neg (\forall (x, x') \in E^2, (f(x) = f(x')) \implies (x = x')) \\ \iff \exists (x, x') \in E^2, \neg ((f(x) = f(x')) \implies (x = x')) \\ \iff \exists (x, x') \in E^2, (f(x) = f(x')) \wedge (x \neq x'). \end{aligned}$$

□

- (2) Soit E un ensemble et g une application de E dans E . On note $g^2 = g \circ g$.

- (a) Quel est l'espace d'arrivée de g^2 ?

Correction (0.5 pt). La fonction g va de E dans E , donc par définition de la composition de deux fonctions, $g \circ g$ va aussi de E dans E . □

- (b) Montrer que $\text{Im } g^2 \subset \text{Im } g$.

Correction (0.5 pt). Soit $y \in \text{Im } g^2$. Autrement dit, $y \in E$ et il existe $x \in E$ tel que $y = g^2(x) = g(g(x))$. Donc, on posant $z = g(x)$, qui est un élément de E , on a $y = g(z)$. Ceci montre bien que $y \in \text{Im } g$. □

- (c) A quelle condition a-t-on $\text{Im } g = \text{Im } g^2$?

Correction (1 pt). Nous venons de voir que $\text{Im } g^2 \subset \text{Im } g$, donc l'égalité de ces deux ensembles est vraie si $\text{Im } g \subset \text{Im } g^2$. Nous allons montrer qu'une condition suffisante pour que cela soit vrai est que g soit surjective.

On suppose donc que g est surjective. Soit $y \in \text{Im } g$. Il existe donc $x \in E$ tel que $y = g(x)$. Comme g est surjective sur E , il existe $z \in E$ tel que $x = g(z)$. En combinant les deux égalités précédentes, on a donc $y = g(g(z))$. Donc $y \in \text{Im } g^2$. Ceci montre bien que $\text{Im } g \subset \text{Im } g^2$. □

- (c) Montrer que g est injective $\implies g^2$ est injective.

Correction (1 pt). Soient x et x' tels que $g^2(x) = g^2(x')$. Autrement dit, $g(g(x)) = g(g(x'))$. Alors, comme g est injective, on a $g(x) = g(x')$. A nouveau, comme g est injective, on a $x = x'$. Ceci montre l'injectivité de g^2 . □

Exercice 3

Soit (u_n) , une suite réelle que l'on suppose bornée. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble

$$A_n = \{u_k; k \geq n\},$$

qui comprend tous les termes de la suite à partir du rang n .

- (a) **Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble A_n est majoré. En déduire qu'il admet une borne supérieure, que l'on note $v_n = \sup A_n$.**

Correction (0.5 + 0.5 pt). La suite (u_n) est bornée, donc majorée par un certain $M \in \mathbb{R}$. Donc, $u_k \leq M$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, ce qui implique que $u_k \leq M$ pour tout $k \geq n$. Cela montre bien que tous les éléments de A_n sont majorés par M , ce qui signifie exactement que A_n est majoré par M . Donc, d'après l'axiome de la borne supérieure, A_n admet une borne supérieure, notée $v_n = \sup A_n$. $\square$

- (b) **Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $A_{n+1} \subset A_n$ et en déduire le sens de variation de (v_n) (on pourra utiliser sans les démontrer les résultats démontrés en travaux dirigés).**

Correction (0.5 + 0.5 pt). Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in A_{n+1}$. Cela revient à dire qu'il existe un $k \geq n+1$ tel que $x = u_k$. Donc $k \geq n$, et donc $x = u_k \in A_n$. Ceci montre bien que $A_{n+1} \subset A_n$. On a vu en TD que $A \subset B \Rightarrow \sup A \leq \sup B$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \sup A_{n+1} \leq \sup A_n = v_n$. Ceci montre que la suite (v_n) est décroissante. $\square$

- (c) **Montrer que la suite (v_n) est bornée.**

Correction (1 pt). La suite (u_n) est bornée, appelons M un majorant et m un minorant. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m \leq u_n \leq M$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $k \geq n$,

$$(1) \quad m \leq u_k \leq M \text{ pour tout } k \geq n.$$

En particulier, comme $v_n \geq u_k$ pour tout $k \geq n$, on a $v_n \geq m$. Par ailleurs, (1) implique que M est un majorant de A_n . Comme v_n est le plus petit majorant de A_n , on a donc $v_n \leq M$. Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$m \leq v_n \leq M.$$

La suite (v_n) est bien bornée. $\square$

- (d) **Déduire des questions précédentes que la suite (v_n) est convergente (on ne demande pas de calculer sa limite).**

Correction (0.5 pt). La suite (v_n) est donc décroissante (question (b)) et minorée (question (c)). Elle est donc convergente. $\square$