

## Exercices du chapitre 7 avec corrigé succinct

### Exercice VII.1 Ch7-Exercice1

Montrer qu'une fonction constante sur  $[a, b]$  est étagée.

**Solution** : Si  $f$  est une fonction constante sur  $[a, b]$ , alors il existe bien une subdivision de  $[a, b]$ , à savoir la subdivision  $a = x_0 < x_1 = b$ , telle que  $f$  soit constante sur chacun des sous-intervalles  $]x_{i-1}, x_i[$  de la subdivision.

---

### Exercice VII.2 Ch7-Exercice2

Soit  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 3, & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 1, & \text{si } x = 1, \\ 2, & \text{si } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Montrer que cette fonction est étagée en donnant au moins deux subdivisions adaptées.

**Solution** : La subdivision  $0 = x_0 < x_1 = 1 < x_2 = 2$  convient. En effet,  $f$  est constante, égale à 3 sur  $]0, 1[$  et constante, égale à 2 sur  $]1, 2[$ .

Toute subdivision plus fine convient aussi. C'est le cas par exemple de la subdivision  $0 = x_0 < 0.5 = x_1 < 1 = x_2 < 4/3 = x_3 < 2 = x_4$ .

---

### Exercice VII.3 Ch7-Exercice3

À l'aide de la définition de l'intégrale des fonctions étagées, calculer  $\int_a^b m dt$  (où  $m$  est un réel donné) et  $\int_0^2 f(t) dt$  où  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  est la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 3, & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 1, & \text{si } x = 1, \\ 2, & \text{si } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

**Solution** : La fonction constante et égale à  $m$  sur tout son intervalle de définition est une fonction étagée. Nous l'avons vu plus haut. Une subdivision adaptée est la subdivision  $a = x_0 < x_1 = b$ . Il en résulte que :

$$\int_a^b f(x) dx = m(x_1 - x_0) = m(b - a).$$

Nous avons aussi vu à l'exercice précédent que la fonction  $f$  est étagée : nous avons même exhibé deux subdivisions adaptées. Il en résulte que :

$$\int_0^2 f(x) dx = 3(1 - 0) + 2(2 - 1) = 3\left(\frac{1}{2} - 0\right) + 3\left(1 - \frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{4}{3} - 1\right) + 2\left(2 - \frac{4}{3}\right) = 5.$$

Notons que les valeurs de  $f$  aux points de subdivisions ne jouent aucun rôle dans le calcul de la valeur de l'intégrale.

---

**Exercice VII.4** Ch7-Exercice4

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  qui est nulle sauf en un nombre fini de points. Montrer que  $\int_a^b f(t) dt = 0$ .

**Solution** : Prenons comme subdivision associée à  $f$ , outre les points  $a$  et  $b$  les points, en nombre fini, où  $f$  est non nulle. Alors, sur chaque sous-intervalle  $]x_{i-1}, x_i[$  de cette subdivision,  $f$  est nulle, de sorte que son intégrale

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n 0(x_i - x_{i-1}) = 0,$$

est nulle.

---

**Exercice VII.5** Ch7-Exercice5

Soient  $f$  une fonction étagée et  $\lambda$  un réel. Montrer, en utilisant la définition, que  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ , on a  $\int_a^b \lambda f(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt$ .

**Solution** : Si  $f$  est constante (égale à  $m_i$ ) sur un sous-intervalle  $]x_{i-1}, x_i[$ ,  $\lambda f$  l'est aussi (elle est égale à  $\lambda m_i$ ). Toute subdivision adaptée à  $f$  l'est donc aussi à  $\lambda f$  et l'on a :

$$\int_a^b (\lambda f)(x) dx = \sum_{i=1}^n (\lambda m_i)(x_i - x_{i-1}) = \lambda \left( \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) \right) = \lambda \int_a^b f(x) dx.$$


---

**Exercice VII.6** Ch7-Exercice6

Montrer que si deux fonctions étagées diffèrent en un nombre fini de points sur un intervalle  $[a, b]$  elles ont la même intégrale sur cet intervalle.

**Solution** : Les fonctions  $f$  et  $g$  ne différant qu'en un nombre fini de points, leur différence  $f - g$  est nulle, sauf en un nombre fini de points. Nous avons vu plus haut, que cela entraîne que son intégrale est nulle, soit :

$$\int_a^b (f - g)(x) dx = 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx.$$


---

**Exercice VII.7** Ch7-Exercice7

Montrer qu'une fonction intégrable sur un intervalle  $[a, b]$  est bornée.

**Solution** : Une fonction étagée sur  $[a, b]$  ne prenant qu'un nombre fini de valeurs est bornée. Or une fonction  $f$  intégrable sur  $[a, b]$  est encadrée, par définition, par deux fonctions étagées, donc encadrée par deux fonctions bornées sur  $[a, b]$ . Elle est donc bornée sur  $[a, b]$ .

---

**Exercice VII.8** Ch7-Exercice8

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction intégrable et  $u$  et  $U$  deux fonctions étagées telles que  $u \leq f \leq U$ . Dédurre de la définition de l'intégrale de  $f$  que

$$\int_a^b u(t) dt \leq \int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b U(t) dt.$$

**Solution** : La fonction  $f$  étant intégrable, son intégrale existe et est définie par :

$$\int_a^b f(x) dx = \inf_{U: f \leq U} \int_a^b U(x) dx = \sup_{u: u \leq f} \int_a^b u(x) dx,$$

de sorte que l'on a bien

$$\int_a^b u(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b U(x) dx.$$


---

**Exercice VII.9** Ch7-Exercice9

Démontrer la relation de Chasles pour les fonctions intégrables. (on s'inspirera de la démonstration de cette propriété pour les fonctions étagées.)

**Solution :** Soit  $c \in ]a, b[$ . Soit  $u$  une fonction étagée sur  $[a, b]$ . Alors les fonctions  $u_1$  et  $u_2$  définies par :

$$u_1(x) = \begin{cases} u(x), & \text{pour } a \leq x \leq c, \\ 0, & \text{pour } c < x \leq b, \end{cases} \quad u_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{pour } a \leq x \leq c, \\ u(x), & \text{pour } c < x \leq b, \end{cases}$$

sont clairement étagées. Soient  $f_1$  et  $f_2$  définies à partir de  $f$  de la même manière. Donnons nous un  $\varepsilon > 0$  quelconque. Alors,  $f$  étant intégrable, il existe deux fonctions étagées  $s$  et  $S$  telles que

$$s \leq f \leq S \quad \text{et} \quad \int_a^b (S - s)(x) dx \leq \varepsilon.$$

Alors, nous voyons que

$$\begin{aligned} s_1 \leq f_1 \leq S_1 & \quad \text{et} \quad \int_a^b (S_1 - s_1)(x) dx \leq \varepsilon, \\ s_2 \leq f_2 \leq S_2 & \quad \text{et} \quad \int_a^b (S_2 - s_2)(x) dx \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui montre que  $f_1$  et  $f_2$  sont intégrables. Le résultat s'en déduit aussitôt, puisque  $f = f_1 + f_2$ .

**Exercice VII.10** Ch7-Exercice10

Soit la fonction  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\frac{1}{2}x \leq f(x) \leq 2x, \forall x \in [0, 1]$ . Donner un encadrement pour  $\int_0^1 f(x) dx$ .

**Solution :** On a les inégalités

$$\frac{x}{2} \leq f \leq 2x,$$

Nous avons montré dans le paragraphe (Fonction intégrable - définition) que

$$\int_0^1 x dx = \frac{1}{2},$$

donc

$$\int_0^1 \frac{x}{2} dx = \frac{1}{4}, \quad \int_0^1 2x dx = 1$$

nous déduisons que :

$$\frac{1}{4} = \int_0^1 \frac{x}{2} dx \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 2x dx = 1.$$

**Exercice VII.11** Ch7-Exercice11

Soit une fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 1, & \text{si } x = 1, \\ 2, & \text{si } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Cette fonction est-elle intégrable sur  $[0, 2]$ ? Calculer alors son intégrale.

**Solution :** Sur  $[0, 1[$   $x/2$  est intégrable, d'intégrale  $1/4$ . Sur  $]1, 2]$ , la fonction  $2$  est intégrable, d'intégrale  $3$ . La relation de Chasle nous permet alors d'affirmer que la fonction  $f$  est intégrable sur  $[0, 2]$ , d'intégrale  $9/4$ .

**Exercice VII.12** Ch7-Exercice12

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \sin x$  sur l'intervalle  $[0, \pi]$ . Par quelle intégrale peut-on calculer l'aire comprise entre l'axe des  $x$  et le graphe de  $f$  ?

**Solution :** Cette aire est calculée par l'intégrale

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi} = 2.$$


---

**Exercice VII.13** Ch7-Exercice13

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = 0$  sur  $[0, 1[ \cup ]1, 2]$  et  $f(1) = 1$ . Cette fonction est-elle nulle sur  $[0, 2]$  ? Que vaut  $\int_0^2 f(x) \, dx$  ? Nous avons pourtant démontré que "si l'intégrale d'une fonction positive est nulle, cette fonction est nulle". Où est la contradiction ?

**Solution :**

1. Non, cette fonction n'est pas nulle sur l'intervalle  $[0, 2]$ , puisqu'elle est égale à 1 au point  $x = 1$ .
2. Son intégrale se calcule par

$$\int_0^2 f(x) \, dx = \int_0^1 f(x) \, dx + \int_1^2 f(x) \, dx = 0 + 0 = 0$$

3. Non, il n'y a pas de contradiction avec le théorème cité, car la fonction  $f$  de l'exercice n'est pas continue. Si nous reprenons la démonstration du théorème, nous voyons que le point clé est que  $f(1) \neq 0$  et pourtant, il n'existe pas de sous-intervalle  $[1 - \eta, 1 + \eta]$  où  $f$  soit non nulle en tout point.
- 

**Exercice VII.14** Ch7-Exercice14

Montrer en reprenant la démonstration de la proposition (7.1.7) que, pour  $h < 0$ , on a

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0, \\ h \neq 0}} \frac{1}{h} \int_a^{a+h} f(x) \, dx = f(a).$$

**Solution :** Pour  $h$  négatif, nous pouvons écrire

$$\frac{1}{h} \int_a^{a+h} f(x) \, dx = \frac{1}{-h} \int_{a+h}^a f(x) \, dx.$$

Posons alors  $\delta = -h$ . Alors  $\delta$  est positif et nous devons calculer la limite, lorsque  $\delta > 0$  tend vers 0 de

$$\frac{1}{\delta} \int_{a-\delta}^a f(x) \, dx.$$

La démonstration se poursuit ensuite comme celle de la proposition 7.1.6, avec cette fois-ci les quantités

$$m(\delta) = \min_{a-\delta \leq x \leq a} f(x) \text{ et } M(\delta) = \max_{a-\delta \leq x \leq a} f(x).$$


---

**Exercice VII.15** Ch7-Exercice15

Calculer  $\int_0^x t^2 \, dt$ ,  $\int_1^x t^2 \, dt$ .

**Solution :** Le théorème fondamental de l'analyse nous permet d'exprimer ces intégrales à l'aide d'une primitive de  $t^2$ . Il vient ainsi

$$\int_0^x t^2 \, dt = \left[ \frac{t^3}{3} \right]_0^x = \frac{x^3}{3}.$$

De même

$$\int_1^x t^2 \, dt = \left[ \frac{t^3}{3} \right]_1^x = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}.$$


---

### Exercice VII.16 Ch7-Exercice16

Appliquer le premier théorème de la moyenne à  $\int_0^\pi \sin x dx$ . Appliquer le deuxième théorème de la moyenne à  $\int_0^\pi f(x) \sin x dx$ , où  $f$  est une fonction continue sur  $[0, \pi]$  donnée.

**Solution :**

1.

$$\int_0^\pi \sin x dx = \pi \sin(\theta\pi), \text{ avec } \theta \in ]0, 1[.$$

2. Comme la fonction sinus garde un signe constant sur l'intervalle  $[0, \pi]$ , nous pouvons utiliser le deuxième théorème de la moyenne, ce qui donne

$$\int_0^\pi f(x) \sin x dx = f(\theta_f\pi) \int_0^\pi \sin x dx, \text{ avec } \theta_f \in ]0, 1[.$$

Enfin, nous avons déjà calculé cette dernière intégrale (exercice VII.12), ce qui donne

$$\int_0^\pi f(x) \sin x dx = 2f(\theta_f\pi).$$

### Exercice VII.17 Ch7-Exercice17

Donner l'inégalité de Cauchy-Schwartz lorsque la fonction  $f$  est constante ( $f(x) = \alpha, \forall x \in [a, b]$ ).

**Solution :** L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit dans ce cas

$$\left| \int_a^b \alpha g(x) dx \right|^2 \leq \left( \int_a^b \alpha^2 dx \right) \left( \int_a^b g^2(x) dx \right)$$

d'où

$$\alpha^2 \left| \int_a^b g(x) dx \right|^2 \leq (b-a) \alpha^2 \left( \int_a^b g^2(x) dx \right)$$

soit, après simplification par  $\alpha^2$

$$\left| \int_a^b g(x) dx \right|^2 \leq (b-a) \left( \int_a^b g^2(x) dx \right)$$

### Exercice VII.18 Ch7-Exercice18

1. On suppose  $f$  croissante sur un intervalle  $[a, b]$ , on définit  $h = \frac{b-a}{n}$ ,  $x_i = a + ih$ , en s'inspirant du document B.1.5 sur l'intégrabilité des fonctions monotones, donner deux fonctions étagées  $s_n$  et  $S_n$  telles  $s_n \leq f \leq S_n$ .

2. Calculer

$$\int_a^b s_n(x) dx, \int_a^b S_n(x) dx, \int_a^b (S_n(x) - s_n(x)) dx$$

3. En déduire une majoration de l'erreur correspondante.

**Solution :** Donnons nous une subdivision de l'intervalle  $[a, b]$ , en  $n$  sous-intervalles, à l'aide de points  $x_i = a + i(b-a)/n, i = 0, \dots, n$ . Nous construisons deux familles de fonctions étagées  $s_n$  et  $S_n$ , par

$$\begin{cases} \forall x \in [x_i, x_{i+1}[, & s_n(x) = f(x_i), \\ s_n(b) = f(b), \end{cases} \quad \begin{cases} \forall x \in ]x_i, x_{i+1}], & S_n(x) = f(x_{i+1}), \\ S_n(a) = f(a), \end{cases}$$

où  $i$  varie de 0 à  $n-1$ .

Les fonctions étagées  $s_n$  et  $S_n$  encadrent alors  $f$  et l'on a

$$\int_a^b s_n(x) dx = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i), \quad \int_a^b S_n(x) dx = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}),$$

l'intégrale de  $f$  est encadrée par celles de  $s_n$  et  $S_n$ .

$$\int_a^b s_n(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b S_n(x) dx$$

$$\int_a^b (S_n - s_n)(x) dx = \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)),$$

On obtient une majoration de l'erreur par

$$\int_a^b (f - s_n)(x) dx \leq \int_a^b (S_n - s_n)(x) dx, \quad \int_a^b (S_n(x) - f(x)) dx \leq \int_a^b (S_n - s_n)(x) dx$$

### Exercice VII.19 Ch7-Exercice19

En se servant du théorème fondamental de l'analyse calculer les intégrales

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx, \quad \int_0^1 x^n dx, \quad \int_0^1 x\sqrt{x} dx, \quad \int_1^e \frac{1}{x} dx.$$

**Solution :**

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = (-\cos \frac{\pi}{2}) - (-\cos 0) = 1, \quad \int_0^1 x^n dx = \frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{0^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1},$$

$$\int_0^1 \sqrt{x} x dx = \left[ \frac{x^{5/2}}{5/2} \right]_0^1 = \frac{2}{5}, \quad \int_1^e \frac{1}{x} dx = \ln e - \ln 1 = \ln e = 1.$$

### Exercice VII.20 Ch7-Exercice20

Calculer les intégrales

$$\int_a^b \ln x dx, \quad \int_a^b x^2 e^x dx$$

**Solution :**

1. Posons  $u' = 1$ ,  $v = \ln x$ , d'où  $u = x$ ,  $v' = 1/x$ . Il vient alors

$$\int_a^b \ln x dx = [x \ln x]_a^b - \int_a^b \frac{x}{x} dx = b \ln b - a \ln a - (b - a).$$

2. On fait deux intégrations par parties successives, ce qui donne

$$\int_a^b x^2 e^x dx = [x^2 e^x]_a^b - \int_a^b 2x e^x dx \tag{1.1}$$

$$= [x^2 e^x]_a^b - [2x e^x]_a^b + \int_a^b 2e^x dx \tag{1.2}$$

$$= [x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x]_a^b \tag{1.3}$$

$$= e^b (b^2 - 2b + 2) - e^a (a^2 - 2a + 2). \tag{1.4}$$

**Exercice VII.21** Ch7-Exercice21

Calculer les intégrales

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx, \quad \int_0^1 \operatorname{Arctan} x dx, \quad \int_0^1 \frac{\operatorname{Arctan} x}{1+x^2} dx.$$

**Solution :**

1. La première intégrale se calcule par changement de variable. Posons

$$t = \varphi(x) = x^2,$$

$$dt = 2x dx,$$

pour  $x = 0$ , on a  $t = 0$ , pour  $x = 1$ , on a  $t = 1$ .

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \frac{1}{2} [\ln|1+t|]_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2$$

2. La deuxième intégrale s'obtient en intégrant par parties. Posons  $u' = 1$  et  $v = \operatorname{Arctan} x$ . Il vient  $u = x$  et  $v' = 1/(1+x^2)$ , d'où

$$\int_0^1 \operatorname{Arctan} x dx = [x \operatorname{Arctan} x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$$

3. La troisième intégrale s'obtient par changement de variable. Posons

$$t = \varphi(x) = \operatorname{Arctan}(x),$$

$$dt = \frac{dx}{1+x^2},$$

pour  $x = 0$ , on a  $t = 0$ , pour  $x = 1$ , on a  $t = \frac{\pi}{4}$ .

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{Arctan} x}{1+x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} t dt = \frac{\pi^2}{32}.$$

**Exercice VII.22** Ch7-Exercice22Calculer la dérivée de la fonction  $x \mapsto \ln|x|$ .**Solution :**

- Lorsque  $x$  est positif,  $\ln|x| = \ln x$ . Sa dérivée est donc  $1/x$ .
- Lorsque  $x$  est négatif,  $\ln|x| = \ln(-x)$ . Sa dérivée est donc  $(-1)/(-x) = 1/x$ .

**Exercice VII.23** Ch7-Exercice23

Démontrer le corollaire (7.3.1).

**Solution :**

1. (i) On écrit que

$$b \times \frac{a}{b} = a, \text{ de sorte que } \ln b + \ln \frac{a}{b} = \ln a.$$

2. (ii) Par récurrence.

$$\ln\left(\prod_{i=1}^1 a_i\right) = \ln a_1 = \sum_{i=1}^1 \ln a_i.$$

Supposons la proposition vraie pour  $q \geq 1$ , alors

$$\ln\left(\prod_{i=1}^{q+1} a_i\right) = \ln\left(\left(\prod_{i=1}^q a_i\right) a_{q+1}\right) = \sum_{i=1}^q \ln a_i + \ln a_{q+1} = \sum_{i=1}^{q+1} \ln a_i.$$

3. (iii) On utilise ce qui précède avec  $a_i = a, i = 1, \dots, p$ .

4. (iv) Si  $p$  est négatif,  $p = -q, a^p = \frac{1}{a^q}$ , donc

$$\ln a^p = -\ln a^q = -q \ln a = p \ln a$$

5. (v) Il suffit de poser  $a = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^q$  donc

$$\ln a = q \ln \left(a^{\frac{1}{q}}\right).$$

6. (vi) Si  $x \in \mathbb{Q}, x = \frac{p}{q}$ , alors  $a^x = a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p$ , donc

$$\ln a^x = p \ln \left(a^{\frac{1}{q}}\right) = \frac{p}{q} \ln a = x \ln a$$

### Exercice VII.24 Ch7-Exercice24

1. Pour  $x$  réel positif,  $p$  et  $q$  entiers, on définit la fonction  $x \mapsto x^{1/q}$  comme étant la fonction réciproque de la fonction  $x \mapsto x^q$ . Montrer que

$$\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p = \left(x^p\right)^{\frac{1}{q}} \stackrel{\text{Déf}}{=} x^{\frac{p}{q}}$$

2. Montrer que

$$\exp\left(\frac{p}{q}\right) = e^{\frac{p}{q}}.$$

### Solution :

1.

$$\left\{\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p\right\}^q = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^{pq} = \left\{\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^q\right\}^p = x^p = \left\{\left(x^p\right)^{\frac{1}{q}}\right\}^q,$$

d'où l'on déduit par passage à la fonction réciproque

$$\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p = \left(x^p\right)^{\frac{1}{q}},$$

ce qui permet de donner un sens à l'expression  $x^{p/q}$ .

2.

$$\ln \exp\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q} = \frac{p}{q} \ln e = \ln e^{\frac{p}{q}}$$

### Exercice VII.25 Ch7-Exercice25

Soient  $a$  et  $x$  deux réels.

1. Montrer que

$$\operatorname{ch}(a+x) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} x.$$

2. En déduire par dérivation que

$$\operatorname{sh}(a+x) = \operatorname{ch} a \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} a \operatorname{ch} x.$$

### Solution :

1. On développe le second membre en remplaçant les cosinus et sinus hyperboliques par leurs expressions en fonction de  $e^a, e^{-a}, e^x$  et  $e^{-x}$ .

2. Il suffit de dériver par rapport à  $x$  la relation précédente.

**Exercice VII.26** Ch7-Exercice26

Soit  $a$  un réel strictement positif,  $x$  et  $y$  deux réels quelconques, montrer que

$$a^{x+y} = a^x a^y, \quad a^{xy} = (a^x)^y = (a^y)^x.$$

**Solution :**

1.

$$a^{x+y} = e^{(x+y)\ln a} = e^{x\ln a + y\ln a} = e^{x\ln a} e^{y\ln a} = a^x a^y$$

2.

$$(a^x)^y = (e^{x\ln a})^y = e^{y\ln(e^{x\ln a})} = e^{yx\ln a} = a^{xy}.$$

**Exercice VII.27** Ch7-Exercice27

Récapituler, les extensions successives de la fonction  $x^\alpha$ ,  $x$  étant un réel positif et  $\alpha$  étant un entier positif, un entier négatif, un rationnel, un réel.

**Solution :**

1. Pour  $m$  entier positif ou nul, on pose  $x^0 = 1$ , puis  $x^{m+1} = x^m x$ .
2. Pour  $m$  entier négatif, on pose  $x^m = 1/x^{-m}$ .
3. Pour  $m$  entier, on définit  $x^{1/m}$  comme fonction réciproque de  $x^m$ .
4. Pour  $r = p/q$ , rationnel, on définit  $x^r$ , comme expliqué dans l'exercice VII.24.
5. Pour  $y$  réel, on définit  $x^y$  par  $e^{x\ln y}$ .

À chaque étape, on vérifie que

1. La nouvelle définition est une extension des précédentes, c'est-à-dire, par exemple, que pour  $\alpha = r$ , la définition de  $x^\alpha$ , pour  $\alpha$  réel, redonne bien  $x^r$  pour  $r$  rationnel.
2. Les règles de calcul sont bien conservées, c'est-à-dire que

$$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta, \quad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}, \quad x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha}.$$