

Problème 1 : Fonctions radiales et problème de Dirichlet dans le disque de rayon 1 (8 points)

1. Propriétés des fonctions radiales

- (a) Si f est radiale, $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \tilde{f}(r)$ pour tout r, θ . Par suite $\frac{\partial g}{\partial \theta} = 0$.
Réciproquement, $\frac{\partial g}{\partial \theta} = 0$ signifie que g ne dépend que de $r = |x|$, donc de même pour f .
- (b) Les coordonnées de $\text{grad } f(x)$ sont les dérivées partielles de f , qu'on peut obtenir en différentiant. Comme $f(x) = \tilde{f}(|x|)$, on a $df(x) = \tilde{f}'(|x|)d|x|$ (par composition). D'autre part (calcul direct et fait en TD!) :

$$d|x| = \frac{x_1}{|x|}dx_1 + \frac{x_2}{|x|}dx_2$$

D'où l'expression demandée :

$$\text{grad } f(x) = \tilde{f}'(|x|)\frac{x}{|x|}$$

2. Caractère radial de la solution de (*)

- (a) V est de classe C^1 sur D_R (car a l'est aussi et ne s'annule pas). Comme D_R est simplement connexe, une condition nécessaire et suffisante pour que V y dérive d'un potentiel est que $\frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2} = 0$ sur D_R .
Calculons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_2}{\partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{x_2}{2a(x)} \right) = \frac{x_2}{2} a(x)^{-2} \left(-\frac{\partial a}{\partial x_1} \right) = \frac{-x_2}{2} a(x)^{-2} \tilde{a}'(|x|) \frac{x_1}{|x|} \\ \frac{\partial V_1}{\partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{x_1}{2a(x)} \right) = \frac{x_1}{2} a(x)^{-2} \left(-\frac{\partial a}{\partial x_2} \right) = \frac{-x_1}{2} a(x)^{-2} \tilde{a}'(|x|) \frac{x_2}{|x|} \end{aligned}$$

Le calcul précédent est valable pour tout $x \in D_R \setminus \{0\}$, et se prolonge par continuité par 0 en $x = 0$. Finalement, on a bien $\frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2} = 0$ sur D_R . Il existe donc v de classe C^2 sur D_R tel que $V = \text{grad } v$.

- (b) On a $V = \text{grad } v = \frac{\partial v}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \vec{e}_\theta$, donc si on se souvient que $x = |x| \vec{e}_r$, on voit que V est colinéaire à \vec{e}_r et donc la composante selon \vec{e}_θ est nulle. D'où $\frac{\partial v}{\partial \theta} = 0$, ce qui prouve que v est radial d'après la question 1.
- (c) Calculons $\text{div}(a(x)\text{grad}(v(x))) = \text{div}(\frac{1}{2}x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Ce calcul est valable sur D_R donc en particulier sur D .
- (d) Un potentiel v comme précédemment vérifie $\text{div}(a(x)\text{grad}(v(x))) = 1$ sur D , mais pas nécessairement $v = 0$ sur ∂D . Mais comme v est radial, il est constant sur le cercle ∂D , notons v_0 cette valeur et posons

$$u(x) = v(x) - v_0$$

On a encore $\text{div}(a(x)\text{grad}(u(x))) = 1$ sur D (puisque $\text{grad } u = \text{grad } v$), et aussi $u = 0$ sur ∂D . Ainsi u est radiale et solution de (*). [Remarquer que u est bien définie sur D_R .]

3. Formule intégrale pour la solution de (*)

- (a) On a $\text{grad } u = \tilde{u}'(|x|)\frac{x}{|x|} = \frac{1}{2a(x)}x = \frac{1}{2\tilde{a}(|x|)}x$. Par suite, en posant $r = |x|$, on a $\tilde{u}'(r) = \frac{r}{2\tilde{a}(r)}$. Par ailleurs $u(x) = \tilde{u}'(|x|) = 0$ si $|x| = 1$. Par conséquent, $\tilde{u} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \tilde{u}'(r) &= \frac{r}{2\tilde{a}(r)} \quad \forall r \in [0, 1[\\ \tilde{u}(1) &= 0 \end{cases}$$

(b) Le théorème fondamental de l'analyse donne alors directement :

$$\tilde{u}(r) = \int_1^r \frac{s}{2\tilde{a}(s)} ds = \frac{-1}{2} \int_r^1 \frac{s}{\tilde{a}(s)} ds$$

(c) Et donc finalement on obtient une solution de (*) sous la forme :

$$u(x) = \frac{-1}{2} \int_{|x|}^1 \frac{s}{\tilde{a}(s)} ds$$

Problème 2 : Intégrales multiples, théorèmes intégraux (12 points)

1. Dessin.
2. On a vu dans le cours que A est Jordan-mesurable si et seulement si sa frontière $\partial A = \Gamma$ est de mesure nulle. Cette condition est réalisée en particulier lorsque Γ est paramétrée par morceaux \mathcal{C}^1 , ou constituée de graphes continus. Ici Γ_1 et Γ_2 sont deux graphes continus, respectivement $z = 2$ et $z = x^2 + y^2$ définis tous deux sur le disque centré en 0 de rayon $\sqrt{2}$ de \mathbb{R}^2 . $m(A)$ est donc bien défini et s'obtiendra par l'intégrale triple $m(A) = \int \int \int_A dx dy dz$.
3. (a) On coupe A par des plans $z = c$. Si $c < 0$ ou $c > 2$, l'intersection est vide. Si $0 \leq c \leq 2$, la coupe est le disque de centre $(0, 0, c)$, de rayon \sqrt{c} contenu dans le plan $z = c$. Ceci montre que A est à symétrie de révolution d'axe Oz . On obtient alors son profil (qui l'engendre par rotation autour de Oz) en coupant A par un plan contenant Oz , par exemple le plan $x = 0$. On obtient un profil parabolique d'équation $x = 0, y^2 \leq z \leq 2$. Dessin.
- (b) La symétrie de A encourage à utiliser un changement de variable cylindrique d'axe Oz .

$$\begin{aligned} \Phi : \Delta &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ z \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où $\Delta = \{(r, \theta, z) : 0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq r \leq \sqrt{2}, r^2 \leq z \leq 2\}$.

Dessin de Δ ou de $\Delta' = \{(r, z) : 0 \leq r \leq \sqrt{2}, r^2 \leq z \leq 2\}$.

La formule du changement de variable donne :

$$m(A) = \int \int \int_A dx dy dz = \int \int \int_{\Delta} |\det(J_{\Phi}(r, \theta, z))| dr d\theta dz = \int \int \int_{\Delta} r dr d\theta dz$$

puisque ici :

$$\det(J_{\Phi}(r, \theta, z)) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

Une méthode de Fubini (tranche selon θ) donne alors :

$$\begin{aligned} m(A) &= \int_0^{2\pi} \left(\int \int_{\Delta'} r dr dz \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_{r^2}^2 r dz \right) dr \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{2}} (2 - r^2) r dr \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_0^{\sqrt{2}} d\theta \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

4. (a) Soit P la projection de A sur $z = 0$. On a

$$\begin{aligned}(x, y) \in P &\iff \exists z \in \mathbb{R}, (x, y, z) \in A \\ &\iff \exists z \in \mathbb{R}, \begin{cases} z \leq 2 \\ x^2 + y^2 \leq z \end{cases} \\ &\iff x^2 + y^2 \leq 2\end{aligned}$$

P est donc le disque de centre O , de rayon $\sqrt{2}$ du plan $z = 0$.

(b) Connaissant la projection sur $z = 0$, on peut utiliser la méthode des batonnets selon z :

$$m(A) = \int \int_P \left(\int_{x^2+y^2}^2 dz \right) dx dy = \int \int_P (2 - x^2 - y^2) dx dy$$

Pour calculer cette intégrale double, le plus simple est sans doute d'utiliser le changement de variable polaire, bien adapté à la géométrie de P et à la fonction à intégrer.

$$\begin{aligned}\Phi : [0, \sqrt{2}] \times [0, 2\pi[&\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Le jacobien est r (connu, ou recalcul) et on obtient donc :

$$m(A) = \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{2\pi} (2 - r^2) r d\theta \right) dr$$

et on reconnaît le calcul déjà fait plus haut, d'où encore (ouf!) $m(A) = 2\pi$.

5. (a) Paramétrons Γ_1 par

$$\begin{aligned}\Phi : P &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

ϕ est de classe \mathcal{C}^1 , le champ de vecteurs V est continu, on peut calculer le flux par

$$\int \int_{\Gamma_1} V \cdot ndS = \int \int_P \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) dx dy$$

On calcule $\frac{\partial \Phi}{\partial x} \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (ou le donne directement car ici, c'est

évident). Au passage, on voit que l'orientation choisie pour la normale est celle des z croissants. Dessin.

$$\int \int_{\Gamma_1} V \cdot ndS = \int \int_P 2 dx dy = 2m(P) = 4\pi$$

(b) Paramétrons Γ_2 par

$$\begin{aligned}\Phi : P &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

ϕ est de classe \mathcal{C}^1 , le champ de vecteurs V est continu, on peut calculer le flux par

$$\int \int_{\Gamma_2} V \cdot ndS = \int \int_P \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) dx dy$$

On calcule $\frac{\partial \Phi}{\partial x} \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi on voit que l'orientation choisie pour la normale est celle des z croissants, elle pointe donc vers l'intérieur de A . Dessin.

$$\int \int_{\Gamma_2} V \cdot ndS = \int \int_P -x^2 - y^2 dx dy$$

On procède au changement de variable polaire (comme déjà fait plus haut) :

$$\int \int_{\Gamma_2} V \cdot ndS = \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{2\pi} -r^3 d\theta \right) dr = 2\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^{\sqrt{2}} = -2\pi$$

(c) V est évidemment de classe \mathcal{C}^1 (et même plus!) et $\operatorname{div} V = 3$. Par conséquent $m(A) = \int \int \int_A dx dy dz = \frac{1}{3} \int \int \int_A \operatorname{div} V dx dy dz$. Comme la frontière $\partial A = \Gamma$ est régulière par morceaux, le théorème d'Ostrogradski donne $\int \int \int_A \operatorname{div} V dx dy dz = \int \int_{\Gamma} V \cdot ndS$, où n désigne la normale unitaire pointant vers l'extérieur de A . Compte-tenu des orientations choisies précédemment pour les normales à Γ_1 et Γ_2 , on a

$$\int \int_{\Gamma} V \cdot ndS = \int \int_{\Gamma_1} V \cdot ndS - \int \int_{\Gamma_2} V \cdot ndS = 4\pi - (-2\pi) = 6\pi$$

On retrouve ainsi $m(A) = \frac{6\pi}{3} = 2\pi$.