Université de Technologie de Compiègne

MT22 - 16 Mai 2013 -Corrigé du Médian P13

Exercice 1. On considère le domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \le x \le 1,\ y - x \ge 1, y - 2x \le 2\}$$

1. Faire une figure.
2. Exprimer de 2 façons différentes à l'aide d'intégrales simples en x et en y, l'intégrale double $I = \int\int_D f(x, y)dxdy$.

   Corrigé :

$$I = \int_0^1 \left(\int_{x+1}^{2x+2} f(x, y)dy \right) dx$$

ou bien

$$I = \int_1^2 \left(\int_0^{y-1} f(x, y)dx \right) dy + \int_2^4 \left(\int_{(y-2)/2}^{1} f(x, y)dx \right) dy$$

3. On suppose que la masse surfacique de D est $\mu(x, y) = 1$.
   (a) Calculer à l'aide de la question précédente la masse totale de D.
   (b) Calculer l'abscisse du centre de gravité, notée x_G.

   Corrigé :

$$M = Aire(D) = \int_0^1 \left(\int_{x+1}^{2x+2} dy \right) dx = \frac{3}{2}.$$

$$x_G = \frac{1}{M} \int_0^1 x \left(\int_{x+1}^{2x+2} dy \right) dx = \frac{1}{M} \int_0^1 x(x+1)dx = \frac{5}{9}.$$

Bien que non demandé, on aurait pu calculer l'ordonnée du centre de gravité

$$y_G = \frac{1}{M} \left(\int_1^2 y \left(\int_0^{y-1} dx \right) dy + \int_2^4 y \left(\int_{(y-2)/2}^{1} dx \right) dy \right)$$

$$y_G = \frac{1}{M} \left(\int_1^2 y(y-1)dy + \int_2^4 y(2 - \frac{y}{2})dy \right)$$

Calculer la masse de D en utilisant le changement de variables $x = u, y = v(1 + u)$ et déterminer l'abscisse x_G du centre de gravité.

Corrigé : On commence par le calcul du Jacobien.

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ v & 1+u \end{vmatrix} = 1 + u$$

Le domaine $\Delta = \{(u, v) \in \mathrm{R}^2; 0 \le \mathrm{u} \le 1,\ 1 \le \mathrm{v} \le 2\}$, est donc un carré.

$$M = \int_0^1 (1 + u) \int_1^2 dvdu = \int_0^1 (1 + u)du = 3/2.$$

$$x_g = \frac{1}{M} \int_0^1 u(1 + u) \int_1^2 dvdu = \frac{1}{M} \int_0^1 u(1 + u)du = 5/9.$$

Exercice 2 : Soient (S_1) et (S_2) d' équations respectives

$$(S_1) : \quad x^2 + 3y^2 + 3z^2 = \frac{1}{4}$$

et

1. Nommer chacune des surfaces.
2. Préciser si elles sont de révolution. Quel est, dans ce cas l'axe de révolution ?
3. Tracer les figures de chacune des surfaces.
Corrigé

(a) *La surface (S_1) est l'ellipsoide. Pour bien la décrire, il suffit de regarder son intersection avec chacun des plans $z = cste, x = cste$ et $y = cste$. Chacune de ces intersections donne lieu à des ellipses ou l'ensemble vide (on doit tenir compte du fait que l'on a $\mid x \mid \leq \frac{1}{2}$ et $\mid y \mid \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\mid z \mid \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$. Pour $\mid c \mid < \frac{1}{2}$, l' intersection de la surface avec le plan $x = c$ est un cercle de centre l'origine et de rayon $\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{1}{4} - c^2}$; donc la surface est de révolution d'axe Ox. Pour $\mid c \mid = \frac{1}{2}$, l'intersection est réduite à un point.*

(b) *L'intersection avec les autres plans $y = cste$ ou $z = cste$ n'étant pas un cercle, on déduit que seul l'axe Ox est axe de révolution.*

(c) *La surface (S_2) : on a absence d'une seule variable : la variable z. On a donc un cylindre ayant pour directrice tout vecteur de la forme $(0; 0; a)$. Pour préciser la nature du cylindre ; on remarque que l'intersection avec $z = z_c$, est une parabole d' équation*

$$y = x^2, \ z = z_c$$

Ainsi (S_2) est un cylindre parabolique. Il n'est pas de révolution.

(d) *Pour le tracé, il n'y'a aucune difficulté particulière (voir le polycopié de cours pour les modèles).*

.

Pour chaque surface, écrire une équation paramétrique.
Corrigé *Pour (S_1) on a plusieurs choix. On a (voir TD et cours)*

$$(\theta, \phi) \in (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \mapsto \left\{ \begin{array}{lcl} x(\theta, \phi) & = & \frac{1}{2}\sin\phi \\ y(\theta, \phi) & = & \frac{1}{2\sqrt{3}} \cos\theta\cos\phi \\ z(\theta, \phi) & = & \frac{1}{2\sqrt{3}}\sin\theta\cos\phi \end{array} \right.$$

Sinon, l'intersection de (S_1) avec $x = x_c$ et $\mid x_c \mid \leq \frac{1}{2}$ donnant un cercle de centre $(0, 0, 0)$ et de rayon $\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{1}{4} - x_c^2}$, on a aussi l'équation paramétrique suivante

$$(t, \phi) \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (0, 2\pi)\times \mapsto \left\{ \begin{array}{lcl} x(t, \phi) & = & t \\ y(t, \phi) & = & \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{1}{4} - t^2}\cos\theta \\ z(t, \phi) & = & \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{1}{4} - t^2}\sin\theta \end{array} \right.$$

Pour (S_2) aucune difficulté

$$(t, s) \mapsto \left\{ \begin{array}{lcl} x(t, s) & = & t \\ y(t, s) & = & t^2 \\ z(t, s) & = & s \end{array} \right.$$

Soit M_0 un point appartenant aux deux surfaces (on pourra montrer qu'un tel M_0 existe).

1. Ecrire l'équation du plan tangent à (S_1) en M_0.
   On a l'équation implicite $F(x, y, z) = 0$. Le plan tangent ayant pour normale $grad(F(x_0, y_0, z_0))$ on a dans notre cas

soit,

$$x_0x + 3y_0y + 3z_0z - (x_0^2 + 3y_0^2 + 3z_0^2) = 0$$

et donc

$$x_0x + 3y_0y + 3z_0z - \frac{1}{4} = 0.$$

2. Ecrire l'équation du plan tangent à (S_2) en M_0.
   De même, on a l'équation implicite $G(x, y, z) = x^2 - y = 0$, donc

$$(x - x_0)(2x_0) + (y - y_0)(-y_0) = 0$$

   donc

$$2x_0x - y_0y - (2x_0^2 - y_0^2) = 0;$$

   finalement

$$2x_0x - y_0y - x_0^2 = 0;$$

Soit (C) la courbe d'intersection des deux surfaces (S_1) et (S_2)

1. Ecrire l'équation paramétrique de (C).
   On montre sans problèmes que la projection de la courbe sur le plan xOy a pour équation $y = x^2$. On a donc comme paramétrisation

$$t \mapsto \begin{cases} x(t) &= t \\ y(t) &= t^2 \\ z(t) &= \pm\sqrt{\dfrac{\frac{1}{4} - t^2 - 3t^4}{3}} \end{cases}$$

   Maintenant, on prend t de telle sorte que la racine carrée soit bien définie, soit $\frac{1}{4} - t^2 - 3t^4 \geq 0$ soit $\mid t \mid \leq \sqrt{\frac{1}{6}}$. Ainsi, la courbe se paramétrise via

$$t \in (-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}},) \mapsto \begin{cases} x(t) &= t \\ y(t) &= t^2 \\ z(t) &= \pm\sqrt{\dfrac{\frac{1}{4} - t^2 - 3t^4}{3}} \end{cases}$$

2. On prend $M_0 = (0; 0; \frac{1}{2\sqrt{3}})$. Montrer qu'il existe deux manières de calculer le vecteur tangent à (C) en M_0.

   Corrigé

   Première manière On a donc $t_0 = 0$ est le paramètre correspondant à M_0. De plus

$$x'(t_0) = 1,\ y'(t_0) = z'(t_0) = 0$$

   le vecteur tangent est donc dans la direction de $\vec{V} = (1; 0; 0)$. Ceci est une première manière.

   La deuxième manière est de prendre le produit vectoriel des normales aux plans tangents à (S_1) et à (S_2). (Rappelons que le plan tangent à une surface en un point contient les tangentes de toutes les courbes tracées sur la surface et passant par le point). On a donc les normales respectives $N_{S_1} = (x_0, 3y_0, 3z_0) = (0; 0; 3\frac{1}{2\sqrt{3}})$ et $N_{S_2} = (2x_0, -1, 0) = (0; -1; 0)$ et leur produit vectoriel $N_{S_1} \wedge \mathrm{N}_{S_2} = -3z_0(1; 0; 0)$ qui est bien colinéaire à $\vec{V}$.

3. Ecrire l'équation paramétrique de la droite tangente (D) à (C) en M_0.
   C'est

$$t \mapsto \begin{cases} x(t,s) &= t \\ y(t,s) &= 0 \\ z(t,s) &= \dfrac{1}{2\sqrt{3}} \end{cases}$$

4. **Bonus 2 pt** Tracer la figure de (C).

Exercice 3 :

1. On considère la surface suivante

$$(S): \quad z = x^2 + 3y^2$$

   (a) Quelle est le nom de la surface ? Justifier la réponse.
   Corrigé : L'intersection de la surface avec un plan $z = z_c$ donne l'équation d'une ellipse (dans le plan $z = z_c$). L'intersection avec les autres plans $y = y_c$ et $x = x_c$ est une parabole : la surface est donc un paraboloide elliptique.

   (b) Ecrire une équation paramétrique de (S).
   Corrigé : On a bien évidemment

$$(t,s) \mapsto \begin{cases} x(t,s) &= t \\ y(t,s) &= s \\ z(t,s) &= t^2 + 3s^2 \end{cases}$$

2. Le but de cette partie est de trouver le point ou les points appartenant à la surface (S) qui soit (ou soient) le (les) plus proche(s) du point $(0; 0; \frac{3}{2})$.

   (a) Montrer que trouver un point $M = (x; y; z)$ répondant à la question revient à minimiser la fonction

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + \left(x^2 + 3y^2 - \frac{3}{2}\right)^2$$

   Corrigé : On a

$$\begin{aligned} d(M, (0; 0; \tfrac{3}{2}) - &= \sqrt{x^2 + y^2 + (z - \tfrac{3}{2})^2} \\ &= \sqrt{x^2 + y^2 + (x^2 + 3y^2 - \tfrac{3}{2})^2} \end{aligned}$$

   minimiser d revient à minimiser d^2 et donc f.

   (b) Trouver les points critiques de f.
   Corrigé : On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2x + 4x(x^2 + 3y^2 - \tfrac{3}{2}) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2y + 12y(x^2 + 3y^2 - \tfrac{3}{2}) \end{aligned}$$

   On a $M(x_0, y_0, z_0)$ est un point critique si et seulement si

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

i. Le point $(0,0)$ vérifie la condition. Donc $(0,0,0)$ est un point critique.

ii. Cherchons un point de la forme $(0, y_0)$ avec $y_0 \neq 0$. On remarque que la condition $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ est trivialement vérifiée ; la condition $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ nous impose d'avoir

$$18y_0^2 - 8 = 0$$

dont les solutions sont faciles à trouver : $y_0 = \pm\frac{2}{3}$

Ainsi comme points critiques annoncés, on a $(0, \pm\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$.

iii. Cherchons un point de la forme $(x_0, 0)$ avec $x_0 \neq 0$. On remarque que la condition $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ est vérifiée ; la condition $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ nous impose d'avoir

$$2x_0^2 - 2 = 0$$

dont les solutions sont $x_0 = \pm 1$.

Ainsi comme points critiques annoncés, on a $(\pm 1, 0, 1)$..

(c) Montrer que

$$M = \left(0, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

répond à la question. En déduire le deuxième point (si possible en justifiant sans faire de calculs supplémentaires)

Corrigé : On fait le test vu en cours (ou polycopié) : $B^2 - AC$ où $B = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$, où $A = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$ et où $C = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$. On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 4x^3 + 12xy^2 - 4x \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 36y^3 + 12x^2y - 16y \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= 12x^2 + 12y^2 - 4 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= 108y^2 + 12x^2 - 16 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) &= 24xy \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) &= 12y_0^2 - 4 = \tfrac{4}{3} \\ C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) &= 216y_0 - 16 = 32 \\ B = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) &= 0 \end{aligned}$$

On a $B^2 - AC < 0$ et $A > 0$ entrainent que le point en question est un minimum local.

L'autre point est bien sur $M_0' = \left(0, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ vu que l'on a

$$f(x,y) = f(-x,-y) = f(-x,-y).$$

Exercice 4

1. Pour tout entier $p \geq 0$, on considère la fonction suivante :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^p y}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

En discutant selon les valeurs de p, répondez aux questions suivantes.

(a) La fonction f est-elle continue en $(0,0)$?

Corrigé : Soit $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$, avec $r > 0$, $\theta \in [0, 2\pi[$. On peut voir que

$$f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = r^{p-1}\cos^p(\theta)\sin(\theta)$$

Donc f est continue en $(0,0)$ ssi $p > 1$.

(b) Les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent-elles en $(0,0)$?

Corrigé :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0$$

pour tout $p \geq 0$. De plus

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0$$

pour tout $p > 0$. Donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe si $p \geq 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe si $p > 0$.

(c) La fonction f est-elle différentiable en $(0,0)$?

Corrigé : Soit $\varepsilon(h,k) = \frac{h^p k}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}$. On peut voir que

$$\varepsilon(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = r^{p-2}\cos^p(\theta)\sin(\theta).$$

Donc f est différentiable en $(0,0)$ ssi $p > 2$.

(d) Les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont-elles continues en $(0,0)$?

Corrigé : Pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(p-2)x^{p+1}y + px^{p-1}y^3}{(x^2+y^2)^2}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^{p+2} - x^p y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Remplaçant x par $r\cos(\theta)$ et y par $r\sin(\theta)$, avec $r > 0$, $\theta \in [0, 2\pi[$, on peut vérifier que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = r^{p-2}[(p-2)\cos^{p+1}(\theta)\sin(\theta) + p\cos^{p-1}(\theta)\sin^3(\theta)]$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = r^{p-2}[\cos^{p+2}(\theta) - \cos^p(\theta)\sin^2(\theta)].$$

2. Dans cette partie on suppose que $p \geq 3$.
   (a) Pour toutes valeurs de p, calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

   Corrigé : Soit $g = \frac{\partial f}{\partial x}$ et $k = \frac{\partial f}{\partial y}$. Alors, on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{k(h,0) - k(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} h^{p-3}$$

   Donc $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$ si $p = 3$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0$ si $p > 3$. De plus

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(0,h) - g(0,0)}{h} = 0.$$

   pour tout $p \geq 3$.
   (b) Pour quelles valeurs de p peut-on être sûr que les dérivées secondes croisées ne sont pas continues. Jusitifier votre réponse, en utilisant le théorème de Schwarz.
   Corrigé : On remarque que pour $p = 3$ on a $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ donc les dérivées secondes croisées ne sont pas continues en $(0,0)$.