Final SY01 - Printemps 2007

Seul document autorisé: une feuille de note manuscrite recto-verso. Calculatrices interdites.

Exercice 1 : Vrai ou Faux? (justifiez)

1. Si X et Y suivent une loi de Bernoulli de paramètre p, leur somme suit une loi binômiale $\mathcal{B}(2, p)$.
2. Les majorants des probabilités dans l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ont des valeurs toujours inférieures à 1.
3. Si (X_n) est une suite de v.a. d'espérance constante, dont la variance tend vers 0, alors elle converge en probabilité vers cette constante.
4. Si (X_n) est une suite de v.a. telle que $\mathbb{E}(X_n) \to a$ $(a \in \mathbb{R})$, et $Var(X_n) \to 0$ quand $n \to \infty$, alors elle converge en probabilité vers a.

Exercice 2 :

On suppose que A et B sont deux joueurs de tennis de même niveau. Est-il plus probable que A remporte la victoire par 3 sets sur 4 ou par 6 sets sur 8?

Exercice 3 :

Un enfant cherche un jouet qui se trouve caché dans l'une de N boîtes fermées. Celui-ci ouvre une boîte au hasard et recommence jusqu'à ce qu'il trouve le jouet. On suppose qu'après chaque tentative il a refermé la boîte et oublié le résultat de toutes les précédentes. Déterminer la loi de probabilité de la v.a. X égale au nombre de tentatives effectuées jusqu'à la découverte du jouet, puis calculer son espérance. Préciser le nombre N_1 de boîtes si l'enfant a trois chances sur quatre de trouver le jouet à l'issue d'une de ses deux premières tentatives.

Exercice 4 :

Soit X une variable aléatoire de densité $\frac{1}{x}\mathbb{I}_{[1,e]}(x)$. Calculer sa f.d.r., $\mathbb{E}(X)$ et $Var(X)$.

Exercice 5 : (utiliser le tableau au dos)

(a) Si X suit une loi $\mathcal{N}(35, 5)$, calculer $P(X < 25)$, $P(37,5 < X < 40)$ et $P(32,5 < X < 37,5)$.

(b) Calculer l'espérance et la variance d'une v.a. Y de loi Normale, telle que $P(Y > -3) = 0,6915$ et $P(Y < 2) = 0,9772$.

Exercice 6 :

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des v.a. indépendantes et de même loi que X, de densité :

$$f_X(x) = \frac{\theta}{2} \exp\{-\theta|x|\},$$

où θ est un nombre réel.

(a) Quelle condition θ doit-il vérifier pour que f_X soit une densité?

(b) Quelle est la loi de $|X|$?

(c) En déduire $\mathbb{E}(|X|)$ et $Var(|X|)$.

(d) En supposant que $|X| \sim \mathcal{E}(\theta)$, retrouver les résultats de la question précédente avec la fonction génératrice de $|X|$.

(e) Étudier la convergence en probabilité de la suite de v.a. définie par :

$$T_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |X_i|.$$

(f) Que nous nous apprend le Théorème Limite Central sur T_n?

$\Phi(x) = P(X \leq x)$ où $X \sim N(0,1)$ et $x = x_1 + x_2$										
	x_2									
x_1	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Remarque. Si $x \leq 0$ alors utiliser $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$.