SY01 Final
23 juin 2010
Semestre Printemps 09-10
Durée : 2h
UNE FEUILLE A4 RECTO/VERSO ET MACHINE À CALCULER AUTORISÉES

Le barème (sur 21 points) tiendra compte de la rédaction. Justifiez clairement vos réponses.

Exercice 1. (4pts)
Soit U une variable aléatoire réelle uniforme sur $]0,1[$.

1. Montrer que $X = -\frac{ln(U)}{\lambda}$, avec λ un réel strictement positif, suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
2. Montrer que la variable aléatoire $Y = [X] + 1$, où $[\cdot]$ désigne la partie entière, suit une loi Géométrique dont on précisera le paramètre.
3. Montrer que la variable aléatoire $Z = \mathbb{1}_{U \leq p}$ avec $p \in]0,1[$, suit la loi de Bernoulli $B(p)$.
4. Soient $Z_1, \ldots, Z_n$, n variables aléatoires indépendantes et de même loi, la loi $B(p)$. Notons $S_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i$. En utilisant le Théorème de la Limite Centrale, déterminer, en faisant une approximation, le réel $a > 0$ en fonction de p et de n tel que $\mathbb{P}(S_n \geq a) = 0.025$. *Indication : $F_{\mathcal{N}(0,1)}(1.96) = 0.975$ où $F_{\mathcal{N}(0,1)}$ désigne la fonction de réparition d'une loi $\mathcal{N}(0,1)$.*

Exercice 2. (3pts) Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes définies sur le même espace de probabilité telles que X suit la loi exponentielle de paramètre $\beta > 0$ et Y suit la loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$ avec $\alpha \neq \beta$.
Déterminer la densité de probabilité de la variable aléatoire réelle $Z = X + Y$.

Exercice 3. (7pts)
Considérons deux variables aléatoires réelles X et Y définies sur le même espace de probabilité. Supposons que X et Y soient indépendantes et suivent, toutes deux, la loi uniforme sur $]0,1[$. Définissons les variables aléatoires $U = min(X,Y)$ et $V = max(X,Y)$.

- **A.** V.a. U et V et (U,V).
  1. Déterminer les fonctions de répartition de U et V et en déduire les densités de probabilité de U et de V.
  2. A partir de la fonction de répartition du couple de variables aléatoires (U,V), montrer que la densité de probabilité $f_{U,V}$ du couple (U,V) est
  $$f_{U,V}(u,v) = 2\mathbb{1}_{0<u<v<1}.$$
  Indication : pour déterminer la fonction de répartition de (U,V), on pourra d'abord déterminer $\mathbb{P}(\{U > u\} \cap \{V \leq v\}) = \mathbb{P}(U > u; V \leq v), \forall u,\ v \in \mathbb{R}$.
  3. Calculer la covariance de U et V.
- **B.** Définissons les variables aléatoires $Z = V - U$ et $T = \frac{V}{U}$.
  1. Montrer que le couple de variables aléatoires (Z,T) a pour densité jointe la fonction $f_{Z,T}$ définie par
  $$f_{Z,T}(z,t) = \frac{2z}{(1-t)^2}\mathbb{1}_{0<z<\frac{t-1}{t}}\ \mathbb{1}_{1<t}.$$

2. Déduire de la question précédente, les densités marginales des variables aléatoires réelles T et Z.

3. Les variables aléatoires T et Z sont-elles indépendantes?

Exercice 4. (7pts).

Soit $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ un vecteur aléatoire Gaussien $\mathcal{N}_2\left(\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}, \Gamma\right)$ où $\Gamma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$ désigne la matrice de variance-covariance du vecteur X, avec $m_1 \in \mathbb{R}$, $m_2 \in \mathbb{R}$, $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$ et $\rho \in]-1, 1[$ désigne le coefficient de corrélation entre X_1 et X_2.

- **I.** Considérons $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0$, $m_1 \in \mathbb{R}$, $m_2 \in \mathbb{R}$ quelconques.

  1. Définissons la variable aléatoire $Y_1 = X_1 - \rho X_2 \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$. Montrer que la variable aléatoire réelle Y_1 ainsi définie suit la loi $\mathcal{N}(m_1 - \rho m_2 \frac{\sigma_1}{\sigma_2}, \sigma_1^2(1-\rho^2))$.

  2. Posons $Y = AX$, avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer la loi du vecteur aléatoire Y. En déduire que les variables aléatoires Y_1 et X_2 sont indépendantes.

- **II.** Considérons le cas particulier de $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ et $m_1 = m_2 = 0$.

  1. Montrer que la densité conditionnelle de X_1 sachant l'événement $\{X_2 = x_2\}$ est la densité d'une loi normale $\mathcal{N}(\rho x_2, (1-\rho^2))$.

     Indication : l'inverse de Γ *notée* Γ^{-1} *est* $\Gamma^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2}\begin{pmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{pmatrix}$. *La densité d'une vecteur Gaussien* $\mathcal{N}_2\left(\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}, \Gamma\right)$ *est donnée par*

     $$f_X(x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi)(det(\Gamma))^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x_1 - m_1, x_2 - m_2)\Gamma^{-1}\begin{pmatrix} x_1 - m_1 \\ x_2 - m_2 \end{pmatrix}\right).$$

  2. En déduire l'espérance conditionnelle de X_1 sachant l'événement $X_2 = x_2$.