Corrigé - MÉDIAN - SY01/P 2002

Rappel : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\exp(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$.

Exercice 1. On suppose que le nombre de blessés arrivant à un service des urgences un jour donné suit la loi de Poisson de moyenne 6. Sachant que les victimes potentielles sont réparties équitablement entre les deux sexes, on note X le nombre de femmes qui figurent parmis les blessés et Y le nombre d' hommes.

a- On note $n \geq 0$ le nombre de personnes arrivées aux services des urgences et k le nombre de femmes. Calculer $P(X = k|X + Y = n)$. De quelle loi s'agit-il ?
Corrigé : n étant le nombre de personnes arrivées, nous avons $P(X = k|X + Y = n) = C_n^k \frac{1}{2^n}$ i.e. la loi est une $B(n, k), 0 \leq k \leq n$.

b- Etablir les lois de probabilités de X et Y.
Corrigé : $P(X = k) = \sum_{n \geq k} P(X = k|X+Y = n)P(X+Y = n) = \sum_{n \geq k} P(X = k|Y = n-k)P(X+Y = n)$ d'où $P(X = k) = \sum_{n \geq k} \frac{6^n e^{-6}}{2^n (n-k)! k!} = e^{-6} \frac{3^k}{k!} \sum_{n \geq k} \frac{3^{n-k}}{(n-k)!} = e^{-6} \frac{3^k}{k!} e^3 = e^{-3} \frac{3^k}{k!}$. Il s'agit donc de la loi de Poisson de parametre 3.

c- Donner l'espérance mathématique de X et Y, ainsi que leurs écarts-types.
Corrigé : $E[X] = E[Y] = 3$ et $Var(X) = Var(Y) = 3$.

d- Evaluer $P(X = k,\ X + Y = k + h)$, et en deduire que X et Y sont indépendantes.
Corrigé : $P(X = k,\ X+Y = k+h) = P(X = k|X+Y = k+h)P(X+Y = k+h) = C_{k=h}^k (\frac{1}{2})^{h+k} e^{-6} \frac{6^{(k+h)}}{(h+k)!}$ d'où $P(X = k,\ X + Y = k + h) = e^{-6} \frac{3^k 3^h}{k! h!} = P(X = k)P(Y = h)$.

e- Quel type d' événement(s) nous permettrait de calculer la probabilité qu'il y ait autant d'hommes que de femmes admis aux urgences ?
Corrigé : les événements du type $\{X = Y\}$ et il faudrait calculer
$P(X = Y) = \sum_{k \in \mathbb{N}} P(X = k)P(Y = k)$.

Exercice 2.

a- On prend le tramway de la Résidence Einstein à la Part-Dieu. Le temps Y du trajet en période normale suit une loi :

$$P(Y = k) = ak^2 \frac{\lambda^k}{k!}$$

avec $\lambda > 0,\ k \in \mathbb{N}$, et pour une constante a convenable.

i- Calculer a. On pourra utiliser $k^2 = k(k - 1 + 1)$.
Corrigé : $a \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\lambda^k}{(k-1)!} = a\lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\lambda^{(k-1)}}{(k-1)!} = a\lambda(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{(k-1)}}{(k-2)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{(k-1)}}{(k-1)!}) = a\lambda(\lambda e^\lambda + e^\lambda)$ d'où $a = \frac{1}{e^\lambda(\lambda^2+\lambda)}$.

ii- Donner la fonction génératrice de Y.
Corrigé : $g_Y(u) = \sum_{k=0}^{\infty} u^k P(Y = k) = a \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda u^k}{k!} = e^{\lambda(u-1)} u \frac{\lambda u+1}{\lambda+1}$. La dernière égalite est obtenue par la même demarche que dans i. et en remplacant a par sa valeur.

iii- Calculer l'espérance de Y.
Corrigé : $g'_Y(u) = \frac{e^{\lambda(u-1)}}{\lambda+1}(\lambda^2 u^2 + 3\lambda u + 1)$ d'où $g'_Y(1) = \frac{(\lambda^2+3\lambda+1)}{\lambda+1}$.

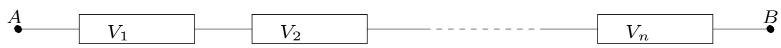
b- Le temps d'attente suit une loi géométrique de moyenne 10 minutes en période normale (avec $\lambda = 20$) et une loi géométrique de moyenne 5 minutes en période de pointe.
En période de pointe, le temps X du trajet suit la loi

$$P(X = k) = bk^2 \frac{\mu^k}{k!}$$

avec $\mu = 25,\ k \in N$, et pour une constante b convenable.
Est-il plus rapide, en moyenne, de voyager en période de pointe ?
Corrigé : $E(Y+10) = 471/21$ et $E(X+5) = 701/26$ en moyenne le trajet est un peu plus rapide en période normale qu'en période de pointe.

Exercice 3. Dans un réseau de distribution d'eau potable, l'eau s'écoule d'un point A vers un point B. Le réseau est parsemé de vannes $V_1, V_2, \ldots$, qui sont toutes ouvertes en même temps et qui restent ouvertes un temps aléatoire $T_1, T_2, \ldots$ Les vannes sont indépendantes entre elles et $P(T_i \le t) = (1 - \exp(-t))1_{[0,+\infty[}(t)$ pour tout i.

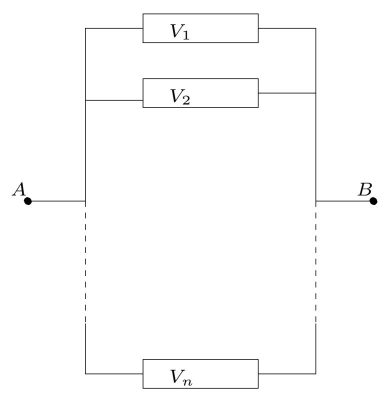
a- On considère le réseau suivant :



i- Exprimer la durée T d'écoulement de l'eau entre A et B en fonction de $T_1, \ldots, T_n$.
Corrigé : Dès qu'une vanne se ferme l'eau cesse de circuler entre A et B. Donc l'eau circule pendant le temps d'ouverture de la vanne qui se ferme en premier, ce qui correspond au plus petit des temps d'ouverture des vannes, soit $T = \min(T_1, \cdots, T_n)$.

ii- En déduire la fonction de répartition de T.
Corrigé : $F_T(t) = 0, si\ t < 0$ et $F_T(t) = P(T \le t) = 1 - P(\min\{T_1, \ldots, T_n\} > t) = 1 - P(T_1 > t; \ldots; T_n > t) = 1 - (1 - (1 - F_{T_1}(t)))^n = 1 - e^{-nt}$, si $t \ge 0$.

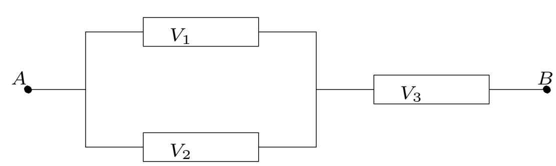
b- On considère le réseau suivant :



i- Exprimer la durée T d'écoulement de l'eau entre A et B en fonction de $T_1, \ldots, T_n$.
Corrigé : L'eau cesse de circuler entre A et B dès que toutes les vannes sont fermées. Donc l'eau circule pendant le temps d'ouverture de la vanne qui reste ouverte le plus longtemps, ce qui correspond au plus grand des temps d'ouverture des vannes, soit $T = \max(T_1, \cdots, T_n)$.

ii- En déduire la fonction de répartition de T.
Corrigé : $F_T(t) = 0$, si $t < 0$ et $F_T(t) = P(\max(T_1, \cdots, T_n) \le t) = P(T_1 \le t, \ldots, T_n \le t) = (F_{T_1}(t))^n = (1 - e^{-t})^n$, si $t \ge 0$.

c- On considère le réseau suivant :



i- Soit T la durée d'écoulement de l'eau entre A et B. Exprimer l'événement $\{T > t\}$ en fonction de T_1, T_2, T_3 et t.
Corrigé : L'eau circule dans la partie "parallèle" pendant un temps $\max(T_1, T_2)$, cette partie étant en série avec la vanne V_3, l'eau circule entre A et B pendant un temps $\min(\max(T_1, T_2), T_3)$. Alors $\{T > t\} = \{\min(\max(T_1, T_2), T_3) > t\}$.

ii- En déduire la fonction de répartition de T.
Corrigé : Pour $t < 0$ on a $F_T(t) = 0$, pour $t \geq 0$ on a : $P(T > t) = P(\min(\max(T_1, T_2), T_3) > t) = P(\max(T_1, T_2) > t; T_3 > t) = P(\max(T_1, T_2) > t)P(T_3 > t) = (1 - P(\max(T_1, T_2) \leq t)P(T_3 > t) = (1 - P(T_1 \leq t)P(T_2 \leq t))P(T_3 > t)$ d'où

$$F_T(t) = 1-(1-(1-\exp(-t))^2)\exp(-t) = 1-(2-\exp(-t))\exp(-2t) = 1-2\exp(-2t)+\exp(-3t).$$

iii- En déduire la densité de T.
Corrigé : $f_T(t) = (4\exp(-2t) - 3\exp(-3t))1_{[0,+\infty[}(t)$.

iv- Calculer l'espérance mathématique de T.
Corrigé : $E[T] = 2E[X] - E[Y] = 2/3$ où X suit une loi $\varepsilon(2)$ et Y suit une loi $\varepsilon(3)$ ou alors on intègre par parties :

$$E(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_T(t)dt = \int_0^{+\infty} t(4\exp(-2t) - 3\exp(-3t))dt$$

$$= [t(-2\exp(-2t) + \exp(-3t))]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}(-2\exp(-2t) + \exp(-3t))dt$$

$$= -\left[\exp(-2t) - \frac{1}{3}\exp(-3t)\right]_0^{+\infty} = -[-1 + 1/3] = 2/3.$$