SY01/P06 Corrigé du Médian - 2 heures

Exercice 1. Un système est composé de trois composants indépendants. Le temps de bon fonctionnement de chaque composant suit la loi exponentielle de paramètre λ . Le système fonctionne normalement tant que deux composants au moins sont en état de marche. On note T la variable aléatoire égale au temps pendant lequel le système fonctionne et on note $X_i, i = 1, 2, 3$ le temps de bon fonctionnement de chaque composant.

1. Ecrire l'événement $\{T \leq t\}$ comme la réunion de quatre événements deux à deux incompatibles, faisant intervenir X_1, X_2 et X_3 .

Corrigé

Pour $t \geq 0$:

$$\begin{aligned}\{T \leq t\} &= \{X_1 \leq t, X_2 \leq t, X_3 > t\} \cup \{X_1 \leq t, X_2 > t, X_3 \leq t\} \\ &\cup \{X_1 > t, X_2 \leq t, X_3 \leq t\} \cup \{X_1 \leq t, X_2 \leq t, X_3 \leq t\}.\end{aligned}$$

2. Déterminer la fonction de répartition de T .

Corrigé Notons F la fonction de répartition de la v.a. T .

La fonction de répartition est nulle pour $t < 0$.

Pour $t \geq 0$:

$$\begin{aligned}F(t) = P(T \leq t) &= P(X_1 \leq t, X_2 \leq t, X_3 > t) + P(X_1 \leq t, X_2 > t, X_3 \leq t) \\ &\quad + P(X_1 > t, X_2 \leq t, X_3 \leq t) + P(X_1 \leq t, X_2 \leq t, X_3 \leq t)\end{aligned}$$

L'indépendance des variables aléatoires X_i , qui suivent la même loi nous permet d'écrire:

$$\begin{aligned}F(t) &= 3(P(X_1 \leq t))^2(1 - P(X_1 \leq t)) + (P(X_1 \leq t))^3 \\ &= -2(P(X_1 \leq t))^3 + 3(P(X_1 \leq t))^2.\end{aligned}$$

Comme les X_i suivent la même loi exponentielle de paramètre λ , on a $F(t) = 1 - 3e^{-2\lambda t} + 2e^{-3\lambda t}$.

3. Montrer que la fonction de répartition F de la variable aléatoire T est dérivable en 0. En déduire sa densité f .

Corrigé On remarque que $F(t)/t$ tend vers 0 lorsque t tend vers 0. La fonction F est donc dérivable pour tout réel t , la v.a. T admet donc une densité définie par $f(t) = 6\lambda(e^{-2\lambda t} - e^{-3\lambda t})1_{\mathbb{R}_+}(t)$.

Exercice 2. Un vendeur de voitures dispose d'un trousseau de $n \geq 2$ clés, dont deux seulement permettent de faire démarrer l'ancienne DS. Il les essaie une par une, au hasard, en écartant au fur et à mesure celles qui ne conviennent pas.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de clés qu'il lui faut essayer avant de mettre le contact.

Rappel: $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et $\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

1. Quel est l'ensemble des modalités noté $X(\Omega)$ de la v.a. X ?

Corrigé $X(\Omega) = \{1, \dots, n-1\}$.

2. Déterminer en justifiant votre réponse $P(X = 1)$, $P(X = 2)$, puis pour $k \in X(\Omega)$ donner $P(X = k)$.

Corrigé $P(X = 1) = \frac{2}{n}$, $P(X = 2) = \frac{n-2}{n} \times \frac{2}{n-1}$ et pour $k \in X(\Omega)$

$$P(X = k) = \frac{(n-2)(n-3)\cdots(n-k)}{n(n-1)\cdots(n-k+2)} \times \frac{2}{n-k+1} = \frac{2(n-k)}{n(n-1)}.$$

3. Calculer $E[X]$.

Corrigé

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{k=1}^{n-1} k \frac{2(n-k)}{n(n-1)} = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} k(n-k) \\ &= \frac{2}{(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} k - \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = n - \frac{(2n-1)}{3} = \frac{n+1}{3} \end{aligned}$$

4. Calculer $E[X^2]$.

Corrigé

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \frac{2(n-k)}{n(n-1)} = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} k^2(n-k) \\ &= \frac{2}{(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 - \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} k^3 = \frac{n(2n-1)}{3} - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{6}. \end{aligned}$$

5. Calculer $Var(X)$.

Corrigé

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{n^2 - n - 2}{18}.$$

Exercice 3. On suppose que dans un troupeau de vaches, le nombre de naissances par an suit une loi de Poisson de paramètre λ . Sachant que la probabilité pour un veau d'être une future génisse est p , on note Y le nombre de naissances et X le nombre de futures génisses parmi ces naissances.

1. Soit n un nombre positif entier fixé. Déterminer la loi de X lorsque $Y = n$.

Corrigé La v.a. X lorsque n est fixé suit la loi binomiale $B(n, p)$.

2. Montrer que la variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre λp (Aide : on pourra commencer par décrire l'événement $\{X = k\}$ pour $k \in X(\Omega)$ comme une réunion d'événements incompatibles).

Corrigé Pour $k \in X(\Omega)$, nous avons $\{X = k\} = \cup_{n \geq k} \{X = k, Y = n\}$ ces derniers événements étant incompatibles, nous en déduisons

$$P(X = k) = \sum_{n=k}^{\infty} P(X = k, Y = n) = \sum_{n=k}^{\infty} P(X = k | Y = n) P(Y = n).$$

Comme $P(X = k | Y = n) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ pour $k \leq n$, et comme Y suit une loi de Poisson de paramètre λ , nous en déduisons

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\lambda^n p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda}}{k!(n-k)!} \\ &= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(\lambda(1-p))^{n-k}}{(n-k)!} = e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{\lambda(1-p)} = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!}. \end{aligned}$$

X suit donc une loi de Poisson de paramètre λp .

3. On note T la différence $Y - X$. Montrer que la variable aléatoire T suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda(1-p)$.

Corrigé L'événement $\{T = k\} = \cup_{n \geq k} \{X = n - k, Y = n\}$, ces derniers étant incompatibles, nous avons

$$P(T = k) = \sum_{n=k}^{\infty} P(X = n - k, Y = n) = \sum_{n=k}^{\infty} P(X = n - k | Y = n) P(Y = n)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^n C_n^k p^{n-k} (1-p)^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n! p^{n-k} (1-p)^k \lambda^n e^{-\lambda}}{(n-k)! k! n!} \\
&e^{-\lambda} \frac{(\lambda(1-p))^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(\lambda p)^{n-k}}{(n-k)!} = e^{-\lambda(1-p)} \frac{(\lambda(1-p))^k}{k!}.
\end{aligned}$$

T suit donc une loi de Poisson de paramètre $\lambda(1-p)$.