SY01/P03 - Corrigé du MÉDIAN - Partie 1

Exercice 1. Dans cet exercice les questions sont indépendantes.

1 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois uniforme sur $\{0, 1, 2\}$ et $B(2, p)$ respectivement.
En utilisant le produit de convolution calculer $P(X + Y = 2)$.
Réponse :

$$P(X+Y=2) = \sum_{k=0}^{2} P(X = 2-k, Y = k) = \sum_{k=0}^{2} P(X = 2-k)P(Y = k)$$

$$= \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{2} C_2^k p^k (1-p)^{2-k} = \frac{1}{3}.$$

2 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, Y de loi $U(0, 1)$ et la densité de X est donnée par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \exp\left(-\frac{(x-1)^2}{8}\right), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Déterminer

a $E[X + Y]$.
Réponse : Clairement X suit la loi $N(1, 4)$ donc $E[X + Y] = E[X] + E[Y] = 1.5$

b $E[XY]$.
Réponse : Par indépendance $E[XY] = E[X]E[Y] = 0.5$

c $E[X^2]$.
Réponse : $E[X^2] = Var(X) + (E[X])^2 = 5$.

d $E[X - Y^2]$.
Réponse : $E[X - Y^2] = E[X] - E[Y^2] = 2/3$.

3 Soit Y une v.a. de loi $B(p)$ indépendante des v.a. X_i pour $i = 1, 2$ de densité f_i et d'espérance μ_i .
On note $X = Y X_1 + (1 - Y)X_2$.

(a) Exprimer la fonction de répartition de X en fonction de p, f_1 et f_2.
Réponse : $P(X \le x) = P(YX_1 + (1-Y)X_2 \le x|Y = 0)P(Y = 0) + P(YX_1 + (1-Y)X_2 \le x|Y = 1)P(Y = 1) = (1-p)P(X_2 \le x) + pP(X_1 \le x)$, où dans la dernière égalité nous avons utilisé l'indépendance.

(b) Exprimer $E[X]$ en fonction de p, μ_1 et μ_2.
Réponse : De la question précédente on a que la densité de X est donnée par $f(x) = pf_1(x) + (1-p)f_2(x)$. D'où $E[X] = p\mu_1 + (1-p)\mu_2$.

4 Enoncer et démontrer la formule de Bienaymé-Tchebichev pour une variable aléatoire admettant une densité.
Réponse : Voir cours Chapitre 3.

5 Enoncer le théorème de la limite centrale.
Réponse : Voir Cours ou Poly Chapitre 4.

SY01/P03 -Corrigé du MÉDIAN - Partie 2

Exercice 2. Soient X et Y deux v.a.r. entières indépendantes, X suivant une loi $B(p)$ et Y suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
Soit Z la variable aléatoire telle que :

$$Z = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad X = 0, \\ Y & \text{si} \quad X = 1. \end{cases}$$

1. Exprimer Z en fonction de X et Y.
   Réponse : $Z = Y 1_{\{X=1\}}$, par exemple ou bien $Z = YX$.

2. Déterminer la loi de Z.
   Réponse : $Z(\Omega) = \mathbb{N}$ et donc pour $k \in \mathbb{N}$,

   $$P(Z = k) = P(Z = k, X = 0) + P(Z = k, X = 1) = \begin{cases} (1-p) + p\exp(-\lambda) & \text{si} \quad k = 0, \\ p\exp(-\lambda)\frac{\lambda^k}{k!} & \text{si} \quad k \geq 1. \end{cases}$$

3. Calculer $E[Z]$ et $Var(Z)$.
   Réponse : $E[Z] = E[Y]P(X = 1) = \lambda p$ et $E(Z^2) = E[Y^2]P(X = 1) = p(\lambda^2 + \lambda)$, d'où $Var(Z) = \lambda^2 p(1-p) + \lambda p$.

4. Déterminer la fonction génératrice de Z.
   Réponse : $g_Z(u) = \sum_{k=0}^{\infty} u^k P(Z = k) = (1-p) + p\exp(-\lambda) + p\exp(-\lambda)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(u\lambda)^k}{k!} - 1\right)$ d'où

   $$g_Z(u) = (1-p) + p\exp(-\lambda) + p\exp(-\lambda)\left(\exp(u\lambda) - 1\right) = (1-p) + p\exp(-\lambda(1-u)).$$

5. Retrouver $E[Z]$ et $Var(Z)$ à l'aide de la question précédente.
   Réponse : $g'_Z(1) = E[Z] = p\lambda$
   et $Var(Z) = g_Z"(1) + g'_Z(1) - (g'_Z(1))^2 = \lambda^2 p(1-p) + \lambda p$.

6. Calculer $P(X = 1|Z = 0)$.
   Réponse : $P(X = 1|Z = 0) = \frac{P(X=1,Z=0)}{P(Z=0)} = \frac{P(X=1)P(Y=0)}{P(Z=0)} = \frac{p\exp(-\lambda)}{(1-p)+p\exp(-\lambda)}$.

CHANGER DE FEUILLE

Exercice 3. A un carrefour un signal lumineux est vert pendant une minute puis rouge pendant 0.5 mn et ainsi de suite.
A un instant aléatoire non lié au fonctionnement du signal, une voiture s'approche du carrefour.
Remarque : on peut considérer une succession "feu vert - feu rouge" sur l'intervalle [0, 1.5], en minutes.

1. Avec quelle probabilité la voiture passe le carrefour sans s'arrêter ?
   Réponse : Arrivant au hasard et de manière uniforme dans l'intervalle de temps [0;1.5], la probabilité de passer sans s'arrêter est égale à $1/1,5$, soit $2/3$.

2. Soit X le temps d'attente lorsque la voiture arrive au feu rouge. Quelle est la densité de X, son espérance ?
   Réponse : Si l'on arrive au feu rouge, le temps d'attente X est une variable aléatoire à valeurs dans [0;0,5] de loi uniforme, sa densité est définie par f_X où :

   $$f_X(x) = \frac{1}{1,5-1} 1_{[0;0,5]}(x) = 2 1_{[0;0,5]}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

   On a alors $\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = 1/4$.

3. Soit T le temps d'attente au carrefour, donner sa fonction de répartition et la représentation graphique de celle-ci.
   Réponse : Soient V l'événement "arriver au vert" et $R = \bar{V}$. On a par le théorème des probabilités totales :

$$P(T \leq t) = P(T \leq t|V)P(V) + P(T \leq t|R)P(R) = \frac{2}{3}P(0 \leq t) + \frac{1}{3}P(X \leq t)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0, \\ 2/3 + 2t/3 & \text{si} \quad t \in [0,\ 0.5], \\ 1 & \text{si} \quad t > 0.5. \end{cases}$$

4. Soient Y une v.a. de loi $B(1/3)$ et X une v.a. de loi $U(0,\ 0.5)$ indépendantes. Quelle est la loi de XY ? En déduire le temps moyen d'attente au carrefour.
   Réponse : On constate que par le théorème des probabilités totales :

$$P(XY \leq x) = P(0 \leq x|Y = 0)P(Y = 0) + P(X \leq x|Y = 1)P(Y = 1) = P(T \leq x).$$

   On a donc que XY et T ont même loi, puisqu'elles ont la même fonction de répartition ; elles ont donc la même espérance donnée par :

$$E[T] = E[XY] = E[X]E[Y] = 1/4 \times 1/3 = 1/12.$$