

SY01/P04 - Corrigé du MÉDIAN

Exercice 1. La quantité de pain (en centaines de kilos) qu'un boulanger vend en une journée est une v.a. de densité donnée par

$$f(x) = \begin{cases} ax & \text{si } 0 \leq x < 3, \\ a(6-x) & \text{si } 3 \leq x < 6, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer a .

Corrigé : On sait que la densité vérifie $f \geq 0$ et que $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$, ces conditions entraînent que $a > 0$ autrement on aurait une densité nulle et la deuxième condition ne pourrait pas être satisfaite. Le calcul de l'intégrale sous la condition égalité à 1, donne $a = 1/9$.

2. Déterminer la fonction de répartition F associée à f .

Corrigé :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \frac{1}{9} \int_0^x t dt = \frac{x^2}{18} & \text{si } 0 \leq x < 3, \\ \frac{1}{9} \int_0^3 t dt + \frac{1}{9} \int_3^x (6-t) dt = \frac{2x}{3} - \frac{x^2}{18} - 1 & \text{si } 3 \leq x < 6, \\ 1 & \text{si } x \geq 6. \end{cases}$$

3. Quelle est la probabilité, qu'en une journée, soit vendu

- (a) plus de 300 kilos de pain.

Corrigé : $P(X > 3) = \frac{1}{9} \int_3^6 (6-t) dt = \frac{1}{2}$.

- (b) entre 150 et 450 kilos de pain.

Corrigé : $P(1,5 < X < 4,5) = F_X(4,5) - F_X(1,5) = \frac{3}{4}$.

4. Soit A l'événement défini par 3(a) et B celui défini par 3(b), les événements A et B sont-ils indépendants ?

Corrigé : $P(X > 3, 1,5 < X < 4,5) = P(3 < X < 4,5) = \frac{3}{8} = P(X > 3)P(1,5 < X < 4,5)$, d'où l'indépendance.

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi:

$$P(X_n = 1) = p, \quad P(X_n = 0) = 1 - p \quad (0 < p < 1).$$

1. Calculer $E[X_n]$ et $Var(X_n)$.

Corrigé : $E[X_n] = 1 \times p + 0 \times (1-p) = p$ et $Var(X) = p - p^2$. Résultats connus car il s'agit de la loi de Bernoulli.

2. On définit $Y_1 = X_1 - m$ et pour $n \geq 2$, $Y_n = \theta Y_{n-1} + X_n - m$, où $\theta \neq 0$ et m sont des réels donnés.

- (a) Pour $n \geq 1$, montrer que l'on a $Y_n = \sum_{k=0}^{n-1} \theta^k (X_{n-k} - m)$.

Corrigé : En remplaçant Y_{n-1} par $\theta Y_{n-2} + X_{n-1} - m$ dans Y_n puis en remplaçant Y_{n-2} par $\dots$ on arrive à l'expression souhaitée, il suffit donc de faire une récurrence.

- (b) Pour $n \geq 1$, calculer $E[Y_n]$ et $Var(Y_n)$, en tenant compte des valeurs de θ .

Corrigé : Par linéarité de l'espérance et en considérant $\theta = 1$, on a $E[Y_n] = n(E[X_{n-k}] - m) = n(p - m)$. Pour $\theta \neq 1$ on a $(p - m) \frac{1 - \theta^n}{1 - \theta}$.

Lorsque $|\theta| \neq 1$, $Var(Y_n) = p(1-p) \sum_{k=0}^{n-1} (\theta^2)^k = p(1-p) \frac{1 - \theta^{2n}}{1 - \theta^2}$ et lorsque $|\theta| = 1$, $Var(Y_n) = np(1-p)$.

Exercice 3. Soit X une variable aléatoire de fonction génératrice g définie par

$$g(u) = \frac{1}{5}(3 + 2u^2), \quad u \in \mathbb{R}.$$

1. Quelle est la loi de X ?

Corrigé : $g(u)$ s'exprime à l'aide des puissances de u , 0 et 2, donc $X(\Omega) = \{0, 2\}$, $g(0) = 3/5 = P(X = 0)$, on peut donc en déduire que $P(X = 2) = 2/5$ ou bien la déterminer par $g^{(2)}(0)/2 = P(X = 2)$.

2. A l'aide de g déterminer l'espérance de X .

Corrigé : $E[X] = g^{(1)}(1) = 4/5$.

3. A l'aide de g déterminer la variance de X .

Corrigé : $Var(X) = g^{(2)}(1) + g^{(1)}(1) - (g^{(1)}(1))^2 = 24/25$.

4. Déterminer directement (à l'aide de la première question) l'espérance et la variance de X .

Corrigé : $E[X] = 2 \times 2/5 = 4/5$ et $Var(X) = 4 \times 2/5 - (4/5)^2 = 24/25$.

Exercice 4. La probabilité d'observer une maladie dans une population est p . Cette maladie peut être détectée sans erreur par un dosage sanguin. On souhaite déterminer par ce dosage le nombre de personnes malades sur un échantillon de 100 personnes. Mais au lieu de tester le sérum de chaque individu, on partitionne au hasard l'échantillon en 10 groupes de 10 personnes dont on mélange les sérums. Si le test est négatif, sur l'un de ces mélanges, on considère que les 10 personnes correspondantes sont toutes négatives et l'on est ainsi dispensé des 10 tests individuels. Si au contraire, le test est positif, c'est qu'alors au moins une personne est atteinte de la maladie et il faut tester séparément chacun des 10 sérums ayant participé au mélange, on doit donc, dans ce cas, effectuer 10 tests supplémentaires.

1. Trouver les probabilités que, dans un groupe, on observe :

- (a) aucune personne malade,

Corrigé : On définit les variables indépendantes et de même loi

$X_i = 1$, si i -ème personne malade

$X_i = 0$, sinon .

D'où $X = \sum_{i=1}^{10} X_i$ suit la loi $B(10, p)$ et $P(X = 0) = (1 - p)^{10}$.

- (b) une et une seule personne malade,

Corrigé : $P(X = 1) = 10p(1 - p)^9$.

- (c) au moins une personne malade.

Corrigé : $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1 - p)^{10}$.

2. Soit N le nombre total de tests à effectuer avec cette méthode de partition d'un échantillon de 100 personnes.

- (a) Quelle est la loi de la v.a. X définissant le nombre de groupes pour lesquels il faut faire 10 tests supplémentaires ?

Corrigé : En définissant les variables de même loi et indépendantes

$X_i = 1$ si i -ème groupe test positif, 0 sinon .

On définit la v.a. X = Nombre de groupes pour lesquels il faut faire 10 tests par $X = \sum_{i=1}^{10} X_i$ suit la loi $B(10, 1 - (1 - p)^{10})$, où $1 - (1 - p)^{10}$ est la probabilité d'au moins un malade dans le i -ème groupe (ou bien de test positif).

- (b) Exprimer la v.a. N en fonction de X .

Corrigé : Pour $k = 0, \dots, 10$ $\{X = k\} = \{N = 10(k + 1)\}$, donc $N = 10(X + 1)$.

- (c) Déterminer $P(N = 110)$.

Corrigé : $P(N = 110) = P(X = 10) = (1 - (1 - p)^{10})^{10}$.

- (d) Déterminer $P(N = 100)$.

Corrigé : $P(N = 100) = P(X = 9) = 10(1 - (1 - p)^{10})^9(1 - p)^{10}$.

3. Calculer le nombre moyen de tests $E[N]$ et la variance du nombre des tests $Var(N)$.

Corrigé : $E[N] = E[10(X + 1)] = 10(E[X] + 1) = 10(10(1 - (1 - p)^{10}) + 1)$ et $Var(N) = Var(10(X + 1)) = 100Var(X) = 1000(1 - (1 - p)^{10})(1 - p)^{10}$.

4. Déterminer les valeurs de p pour lesquelles, en moyenne, la méthode de partitionnement offre plus d'intérêt que la méthode qui consiste à tester les 100 individus.

Corrigé : Il suffit de comparer $E[N]$ et 100, ainsi $E[N] < 100$, lorsque $p < 1 - (0.1)^{1/10}$.