

SY01/P05 - Corrigé du Médian - 2 heures

Exercice 1. Les exercices suivants sont indépendants.

1. (a) Soit I une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, 6\}$. Donner la loi de la variable aléatoire $U = 7 - I$.
Corrigé: $u(\Omega) = \{1, \dots, 6\}$ et $P(U = k) = P(I = 7 - k)$, pour $k \in \{1, \dots, 6\}$, en particulier on voit la correspondance par exemple de $U = 6$ avec $I = 1$ etc.
- (b) On lance trois dés parfaits. Montrer que la probabilité pour que la somme des points marqués dépasse 10 est égale à la probabilité pour que cette somme ne dépasse pas 10.
Corrigé: Soient $i, j, k \in \{1, \dots, 6\}$, les résultats marqués sur les dés. Soit A l'événement $A = \{i + j + k > 10\}$, nous voulons montrer que $P(A) = P(\bar{A})$.
Nous avons une bijection $(i, j, k) \rightarrow (7 - i, 7 - j, 7 - k)$ c.a.d. qui fait correspondre A et $\bar{A}$.
2. A l'entrée d'un restaurant, n personnes donnent leurs chapeaux à la consigne. Après le repas, elles trouvent leurs chapeaux complètement mélangés et chacun prend un chapeau au hasard.
On désigne par X_k , $k = 1, \dots, n$ la variable aléatoire qui prend la valeur 1, si la k -ième personne récupère son chapeau et à 0 sinon.
On pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$, qui représente le nombre de personnes qui ont récupéré leur chapeau.
 - (a) Construire un espace probabilisé décrivant cette expérience.
Corrigé: Soit Ω l'espace des permutations des n chapeaux et P l'équirépartition sur Ω .
 - (b) Soit l'événement $A_k = \{\text{la } k\text{-ième personne récupère son chapeau, } k \in \{1, \dots, n\}\}$. Déterminer $P(A_k)$ et $P(A_k \cap A_l)$, $1 \leq k < l \leq n$.
Corrigé: On a $P(A_k) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$, $k \in 1, \dots, n$
 $P(A_k \cap A_l) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$, $1 \leq k < l \leq n$.
 - (c) Quel est le lien entre X_k et A_k ?
Corrigé: $A_k = \{X_k = 1\}$.
 - (d) Calculer $E[S_n]$ et $Var(S_n)$.
Corrigé: $E[X_k] = P(A_k) = \frac{1}{n}$ et $E[X_k X_l] = P(A_k \cap A_l) = \frac{1}{n(n-1)}$. D'où $E[S_n] = 1$, $E[S_n^2] = \sum_{k=1}^n E[X_k^2] + 2 \sum_{1 \leq k < l \leq n} E[X_k X_l] = n \frac{1}{n} + n(n-1) \frac{1}{n(n-1)} = 2$ et $Var(S_n) = 1$.
 - (e) Montrer que la probabilité pour que S_n soit au moins égale à 11 est au plus égale à 0.01 et ceci quelque soit $n \geq 1$.
Corrigé: $P(S_n \geq 11) = P(S_n - 1 \geq 10) = P(S_n - E[S_n] \geq 10)$
 $\leq P(|S_n - E[S_n]| \geq 10) \leq \frac{Var(S_n)}{10^2} = \frac{1}{10^2}$.

Exercice 2. On considère la variable aléatoire X de loi uniforme sur $] -1, 1[$.

- (a) Donner la densité de X .
Corrigé: $f_X(x) = \frac{1}{2} 1_{]-1, 1[}(x)$.
- (b) Déterminer la probabilité $P(|X| > \frac{1}{2})$.
Corrigé: $P(|X| > \frac{1}{2}) = P(X < -\frac{1}{2}) + P(X > \frac{1}{2})$
 $= 2P(X > \frac{1}{2})$
 $= 2(1 - P(X \leq \frac{1}{2}))$
 $= 2(1 - \int_{-1}^{1/2} f_X(x) dx) = \frac{1}{2}$.
- (c) Posons $Y = |X|$, donner la fonction de répartition de Y .
Corrigé: La v.a. Y est définie sur $[0, 1]$ et pour $y \in [0, 1]$ on a :

$$F_Y(y) = P(Y \leq y)$$

$$= P(|X| \leq y) = P(-y \leq X \leq y) = 2(P(0 \leq X \leq y)) = y.$$

D'où $F_Y(y) = 0$ si $y < 0$, $F_Y(y) = y$ si $y \in [0, 1[$ et $F_Y(y) = 1$ si $y \geq 1$.

(d) Donner la densité de Y .

Corrigé: $f_Y(y) = 1_{[0,1)}(y)$

(e) Soit $Z = 1_{[0,1[}(X) - 1_{]-1,0[}(X)$. Déterminer la loi de Z .

Corrigé: $P(Z = 1) = P(X \in [0, 1[) = \frac{1}{2}$ et $P(Z = -1) = P(X \in]-1, 0]) = \frac{1}{2}$.

Exercice 3. Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes de loi commune $\varepsilon(\lambda)$.

(a) Donner la loi de $X + Y$ en utilisant le produit de convolution.

Corrigé: $(f_X * f_Y)(x) = \lambda^2 \int_0^x e^{\{-\lambda(x-y)\}} e^{\{-\lambda y\}} dy = \lambda^2 e^{-\lambda x} x 1_{\mathbb{R}_+^+}$.

(b) Si Z est une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λt et soit $m \in \mathbb{N}$.

i. Montrer que $P(Z < 2) = P(X + Y > t)$.

Corrigé: $P(X + Y > t) = \int_t^\infty \lambda^2 e^{-\lambda x} x dx$ ce qui donne par intégration par parties $-\lambda x e^{\{-\lambda x\}}|_t^\infty + P(X > t) = e^{-\lambda t} \lambda t + e^{-\lambda t}$. Par ailleurs $P(Z < 2) = P(Z = 0) + P(Z = 1) = e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t} \lambda t$.

ii. Déterminer la fonction génératrice des moments de Z .

Corrigé: $E[e^{uX}] = \sum_{k=0}^\infty e^{uk} P(Z = k) = e^{\lambda t(e^u - 1)}$.

(c) Soit la variable aléatoire $U = e^Y$

i. Déterminer la densité de la variable aléatoire U .

Corrigé: Pour $x \geq 1$ on a $P(U > x) = P(e^Y > x) = P(Y > \log x) = e^{\{-\lambda \log x\}} = x^{-\lambda}$. Donc la densité est $f_U(x) = \frac{\lambda}{x^{\lambda+1}} 1_{\{x \geq 1\}} (= \frac{1}{x^2})$ si $\lambda = 1$.

ii. Déterminer $E[U]$.

Corrigé: $E[U] = \int_1^\infty x f_U(x) dx = \lambda \int_1^\infty x^{-\lambda} dx = \frac{\lambda}{\lambda-1}$ si $\lambda > 1$. On voit donc qu'elle est infinie (ou qu'elle n'existe pas! au sens du poly) pour $\lambda = 1$.