SY01 Médian–Automne 10
12 Novembre–Durée : 2h
UNE FEUILLE RECTO/VERSO ET LA CALCULATRICE SONT AUTORISÉES

Exercice 1. **CHANGER DE COPIE** (*barème approximatif : 6 pts*)

- **I. Somme de deux variables aléatoires Binomiales.**
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ telles que X et Y sont indépendantes, X suit la loi Binomiale $B(n,p)$ et Y suit la loi Binomiale $B(m,p)$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. Notons Z la variable aléatoire définie par : $Z = X + Y$.

  1. En utilisant la convolution, déterminer la loi de Z.
  Indication : $\forall k \in \mathbb{N}$ *tel que* $k \leq n+m$, $\sum_{l\in\mathcal{I}} C_n^l C_m^{k-l} = C_{n+m}^k$, *où* $\mathcal{I} = \{l \in \mathbb{N} \ : \ max(0, k-m) \leq l \leq min(n,k)\}$ *et* C_N^M *est le nombre de combinaisons à* M *éléments d'un ensemble en contenant* N.
  2. Déterminer la fonction génératrice de Z à partir des fonctions génératrices de X et Y, puis retrouver la loi de la variable aléatoire Z.

- **II. Application.**
Une compagnie aérienne estime que 5% des réservations sur les vols de la ligne Paris-Marseille sont annulées. C'est la raison pour laquelle cette compagnie accepte 100 réservations pour 97 places sur les avions de type A et 300 réservations pour 290 places sur les avions de type B. Notons X_A, respectivement X_B, la variable aléatoire égale au nombre de réservations annulées pour un vol effectué sur un avion de type A, respectivement sur un avion de type B.

  1. Déterminer la loi des variables aléatoires X_A et X_B.
  2. Exprimer l'événement "tous les passagers sur l'avion de type A ont une place".
  3. Déterminer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(X_A = k | X_A + X_B = m)$ pour laquelle vous préciserez les ensembles dans lesquels m et k varient.

Correction.

- **I.**

  1. En tant que somme d'une v.a. de loi $B(n,p)$ et d'une v.a. de loi $B(m,p)$, Z est une v.a. discrète à valeurs dans $\{0, \ldots, n+m\}$. Les v.a. X et Y étant indépendantes, le loi de Z est le produit de convolution des lois de X et Y, soit, $\forall k \in \{0, \ldots, m+n\}$,

$$\mathbb{P}(Z = k) \quad = \quad \sum_{l\in\mathcal{I}} \mathbb{P}(X = l)\mathbb{P}(Y = k-l),$$

où $0 \leq l \leq n$ et $0 \leq k-l \leq m$, c'est à dire $l \in \mathcal{I} = \{\max(0, k-m), \ldots, min(n,k)\}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \forall k \in \{0, \ldots, m+n\}, \ \mathbb{P}(Z=k) &= \sum_{l \in \mathcal{I}} C_n^l p^l (1-p)^{n-l} \, C_m^{k-l} p^{k-l} (1-p)^{m-(k-l)} \\ &= p^k (1-p)^{m+n-k} \sum_{l \in \mathcal{I}} C_n^l C_m^{k-l} \\ &= C_{n+m}^k p^k (1-p)^{m+n-k}, \end{aligned} \tag{1}$$

où la dernière égalité découle de l'indication donnée dans l'énoncé. De la relation (1), on en déduit que $Z \sim B(n+m, p)$.

2. Les v.a. X et Y étant indépendantes, la fonction génératrice g_Z de Z, est égale au produit de g_X et g_Y, les fonctions génératrices de X et Y, c'est à dire $g_Z(s) = g_X(s) g_Y(s)$ pour tout réel s tel que g_X et g_Y existent. La fonction génératrice d'une loi $B(n,p)$ est définie pour tout $s \in \mathrm{R}$ par $g(s) = (1-p+sp)^n$.

$$\begin{aligned} g_Z(s) &= (1-p+sp)^n (1-p+sp)^m \\ &= (1-p+sp)^{n+m}. \end{aligned} \tag{2}$$

La fonction génératrice d'une v.a.d. caractérise entièrement sa loi; d'après (2), on en déduit que $Z \sim B(n+m, p)$.

Une autre manière de procéder est de retrouver $\mathbb{P}(Z=k)$, $\forall k \in \{0, \ldots, n+m\}$ par la relation $\mathbb{P}(Z=k)k! = g_Z^{(k)}(0)$.

- **II.**

1. Les v.a. X_A et X_B suivent respectivement la loi $B(100, p_A = 0.05)$, la loi $B(300, p_B = 0.05)$.
2. Il s'agit de l'événement $\{X_A \geq 3\}$ puisque tous les passagers ont une place si le nombre d'annulations est supérieur ou égale à 3.
3. D'après la question **II.** 1; et la partie **I.** de l'exercice, la v.a. $(X_A + X_B)$ suit la loi $B(400, 0.05)$ puisque chacune des deux v.a. suit une loi Binomiale avec $p_A = p_B = 0.05$ et X_A et X_B sont indépendantes puisque le nombre d'annulations sur un vol effectué par un avion de type A est indépendant de celui sur un vol effectué par un avion de type B; le réel m varie alors dans $\{0, \ldots, 400\}$. Pour tout $k \in \{\max(0, m-300), \ldots, \min(100, m)\}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_A = k | X_A + X_B = m) &= \frac{\mathbb{P}(X_A = k \cap X_A + X_B = m)}{C_{400}^m 0.05^m 0.95^{400-m}} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X_A = k \cap X_B = m-k)}{C_{400}^m 0.05^m 0.95^{400-m}} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X_A = k)\mathbb{P}(X_B = m-k)}{C_{400}^{m-k} 0.05^m 0.95^{400-m}} \ \text{par indṕendance de} \ X_A mbox et X_B \\ &= \frac{C_{100}^k 0.05^k 0.95^{100-k} C_{300}^{m-k} 0.05^{m-k} 0.95^{300-m+k}}{C_{400}^m 0.05^m 0.95^{400-m}} \\ &= \frac{C_{100}^k C_{300}^{m-k}}{C_{400}^m}. \end{aligned} \tag{3}$$

Nous pouvons en déduire de (3) (cela n'était pas demandé dans l'exercice) que la loi conditionnelle de X_A sachant $\{X_A + X_B = m\}$ est la loi Hypergéométrique $\mathcal{H}(400, 100, m)$.

Exercice 2.**CHANGER DE COPIE** (*barème approximatif : 5 - 6 pts*)

- **I.** A l'instant $t = 0$, sont placées dans une cage une souris grise et une souris blanche. Sur la cage se trouve une porte par laquelle une seule souris peut sortir. L'instant $t = 1$ est l'instant de sortie de la cage d'une des deux souris : deux souris de même couleur que celle qui vient de sortir sont immédiatement placées dans la cage; trois souris sont alors dans la cage. L'instant $t = 2$ correspond à l'instant de sortie d'une des trois souris de la cage : deux souris de même couleur que celle qui vient de sortir sont immédiatement placées dans la cage; quatre souris sont alors dans la cage.
Le procédé est ainsi réitéré jusqu'à l'instant aléatoire T de la première sortie d'une souris grise. Les souris sont supposées être sans mémoire et à chaque instant, elles ont la même probabilité de sortir de la cage.

  1. Déterminer la loi de T.
  2. La variable aléatoire T admet-elle une espérance ?

- **II.** Soient n et m deux entiers strictement positifs et soit la suite p_k définie pour $k \in \mathbb{N}^*$ par :

$$p_k = \begin{cases} \frac{1}{m} - \frac{1}{n} & \text{si} \quad 1 \leq k \leq mn \\ 0 & \text{si} \quad k > mn. \end{cases}$$

  1. Quelle condition doivent vérifier m et n pour que $(p_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ soit une loi de probabilité ?
  Supposons cette condition satisfaite et notons X une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}(X = k) = p_k$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$.
  2. Déterminer la fonction de répartition de X.
  3. Calculer l'espérance et la variance de X.
  Indication : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ *et* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}$.

Correction.

- **I.**

  1. Notons que la v.a. T est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Définisons pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, les événements B_i et G_i par "une souris blanche sort de la cage à l'instant i", respectivement "une souris grise sort de la cage à l'instant i".
  Remarquons que $\{T = 1\} = \{G_1\}$, $\{T = 2\} = \{G_2 \cap B_1\}$, $\{T = 3\} = \{G_3 \cap B_2 \cap B_1\}$ et de manière générale $\forall k \geq 2$, $\{T = k\} = \{G_k \cap (\cap_{i=1}^{k-1} B_i)\}$. A chaque instant, le nombre de souris dans la cage augmente d'une unité et la couleur de la souris supplémentaire placée dans la cage est celle de la souris sortie à l'instant précédent; nous allons donc utiliser les probabilités conditionnelles. A l'instant $k \in \mathbb{N}^*$, la cage contient $k + 1$ souris.

Il vient alors que $\mathbb{P}(T=1)=\frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(T=2)=\mathbb{P}(G_2\cap B_1)=\mathbb{P}(G_2|B_1)\mathbb{P}(B_1)=\frac{1}{3}\frac{1}{2}$ et pour tout $k\geq 3$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T=k) &= \mathbb{P}(G_k\cap(\cap_{i=1}^{k-1}B_i)) \\
&= \mathbb{P}(G_k|\cap_{i=1}^{k-1}B_i)\prod_{i=2}^{k-1}\mathbb{P}(B_i|\cap_{j=1}^{i-1}B_j)\mathbb{P}(B_1) \\
&= \frac{1}{k+1}\times\prod_{i=2}^{k-1}(\frac{i}{i+1})\times\frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{k+1}\times\frac{2\times 3\times\ldots\times(k-1)}{3\times 4\times\ldots\times k}\times\frac{1}{2} \\
&= \frac{1\times 2\times 3\times\ldots\times(k-1)}{3\times 4\times\ldots\times k\times(k+1)}\times\frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{k\times(k+1)}
\end{aligned}$$

En résumé, la loi de probabilité de T est donnée par :

$$I\!P(T=1)=\frac{1}{2}\quad\text{et}\quad\forall k\geq 2,\ I\!P(T=k)\frac{1}{k(k+1)}.$$

2. Si elle existait, l'espérance de T serait égale à $\sum_{l\geq 1}\frac{l}{(l+1)l}=\sum_{l\geq 1}\frac{1}{l+1}$ qui est une série de Riemann divergente (série harmonique). Donc la v.a. T n'admet pas d'espérance.

- **II.**

1. La suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ définit une loi de probabilité si $\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\geq 0\iff n\geq m$ et si $\sum_{k=1}^{mn}\frac{1}{m}-\frac{1}{n}=1\iff mn(\frac{1}{m}-\frac{1}{n})=1\iff n=m+1$. La condition cherchée est alors $n=m+1$. Remarquons alors que la loi de X correspond à l'équiprobabilité sur l'ensemble $\{1,\ldots,m(m+1)\}$ c'est à dire, une loi discrète uniforme sur l'ensemble $\{1,\ldots,m(m+1)\}$.
2. Notons F la fonction de répartition de X. Pour tout $t\in\mathrm{R}$, $F(t)=\mathbb{P}(X\leq t)$. Nous en déduisons que

$$F(t)=\begin{cases}0 & \text{si}\quad t<1\\ \frac{k}{m(m+1)} & \text{si}\quad k\leq t<k+1,\ k\in\{1,\ldots,m(m+1)-1\}\\ 1 & \text{si}\quad t\geq m(m+1)\end{cases}$$

3. L'espérance de X est :

$$\mathbb{E}(X)\ =\ \sum_{k=1}^{m(m+1)}k\frac{1}{m(m+1)}=\frac{1}{m(m+1)}\sum_{k=1}^{m(m+1)}k=\frac{m(m+1)(m(m+1)+1)}{2m(m+1)}=\frac{m(m+1)+1}{2}.$$

Pour le calcul de la variance de X, il est nécessaire de déterminer au préalable $\mathbb{E}(X^2)$:

$$\mathbb{E}(X^2)\ =\ \sum_{k=1}^{m(m+1)}k^2\frac{1}{m(m+1)}=\frac{1}{m(m+1)}\sum_{k=1}^{m(m+1)}k^2=\frac{(2m(m+1)+1)(m(m+1)+1)}{6}.$$

La variance est donc :

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 &= \frac{(4m(m+1)+2-3(m(m+1)+1))(m(m+1)+1)}{12} \\ &= \frac{(m(m+1))^2-1}{12}.\end{aligned}$$

<u>Exercice 3</u> **CHANGER DE COPIE** (*barème approximatif : 8 - 9 pts*)
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Considérons une suite d'événements indépendants A_n, $n = 1, 2, \ldots$, telle que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, A_i est réalisé avec probabilité p avec $p \in]0,1[$, c'est à dire $\mathbb{P}(A_i) = p$ et $\mathbb{P}(\overline{A_i}) = 1-p$, où $\overline{A_i}$ est le complémentaire de A_i dans Ω.

- **I.** Désignons par ν l'application, qui à tout $\omega \in \Omega$ associe le plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que A_n soit réalisé; par convention, posons $\nu(\omega) = +\infty$ si aucun des A_n n'est réalisé.

  1. Exprimer en fonction des $(A_n)_{n\geq 1}$ les ensembles $\{\omega \in \Omega : \nu(\omega) = k\}$, avec $k \in \mathbb{N}^*$ et $\{\omega \in \Omega : \nu(\omega) = +\infty\}$.
  2. En déduire que ν est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
  3. Nous admettrons que $\mathbb{P}(\nu = +\infty) = 0$. Déterminer alors la loi de probabilité de ν et calculer $\mathbb{E}(\nu)$.

- **II.** Désignons par κ la variable aléatoire, définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, égale au plus petit entier $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que A_n et A_{n-1} soient simultanément réalisés.

  1. Montrer que les événements $B_n = A_{n-1} \cap A_n$, $n = 2, 3, \ldots$, ne sont pas indépendants (nous ne pouvons donc pas déterminer la loi de κ par la méthode utilisée en **I.**).
  2. Calculer $\mathbb{P}(\kappa = 2)$, $\mathbb{P}(\kappa = 3)$, $\mathbb{P}(\kappa = 4)$ et $\mathbb{P}(\kappa = 5)$.
  3. Nous admettrons que pour tout $n \geq 2$, la suite $\{\kappa \leq n\}$, A_{n+1}, $A_{n+2}, \ldots$, est une suite d'événements indépendants.
     A partir de la relation (à ne pas démontrer)
     $$\{\kappa = n+3\} = \{\kappa > n\} \cap \overline{A_{n+1}} \cap A_{n+2} \cap A_{n+3}, \quad n \geq 2,$$
     en déduire la relation de récurrence suivante :
     $$\forall n \geq 3, \quad \mathbb{P}(\kappa = n+3) = \mathbb{P}(\kappa = n+2) - p^2(1-p)\mathbb{P}(\kappa = n).$$

Correction.

- **I.**

  1. Remarquons que $w \in \{w \in \Omega : \nu(\omega) = 1\} \Longleftrightarrow w \in A_1$. Pour $k \geq 2$, l'ensemble $\{w \in \Omega : \nu(\omega) = k\}$ est le sous-ensemble (notons le Ω') de Ω défini par $\Omega' = (\cap_{i=1}^{k-1} \overline{A}_i) \cap A_k$. D'après l'énoncé, $\nu(\omega) = +\infty$ si aucun des A_i n'est réalisé; par conséquent $\{\omega \in \Omega : \nu(\omega) = +\infty\} = \cap_{i\geq 1} \overline{A}_i$.

2. L'application ν est définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{N}$. Les $(A_i)_{(1\leq i)}$ étant des événements (ils sont des éléments de la tribu $\mathcal{F}$), il vient que
$\{w \in \Omega : \nu(\omega) = 1\} = A_1 \in \mathcal{F}$, $\forall k \geq 2$, $\{w \in \Omega : \nu(\omega) = k\} = (\cap_{i=1}^{k-1}\overline{A}_i) \cap A_k \in \mathcal{F}$ en tant qu'intersection finie d'éléments de la tribu $\mathcal{F}$ et $\{\omega \in \Omega : \nu(\omega) = +\infty\} = \cap_{i\geq 1}\overline{A}_i \in \mathcal{F}$ en tant qu'intersection dénombrable d'éléments de $\mathcal{F}$.

   Nous pouvons donc en déduire que ν est une v.a.d.

3. Par indépendance des événements $(A_i)_{(i\geq 1)}$,

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(\nu = 1) & = & \mathbb{P}(A_1) = p \\ \forall k \geq 2,\ \mathbb{P}(\nu = k) & = & \mathbb{P}((\cap_{i=1}^{k-1}\overline{A}_i) \cap A_k) = (\prod_{i=1}^{k-1}(1-p)) \times \mathbb{P}(A_k) = (1-p)^{k-1}p. \end{array}$$

   La v.a. ν suit la loi Géométrique $\mathcal{G}(p)$; son espérance est $\mathbb{E}(\nu) = \frac{1}{p}$.

- **II.**

1. Considérons les événements B_n et B_{n+1} pour $n \geq 2$. $\mathbb{P}(B_n \cap B_{n+1}) = \mathbb{P}(A_{n-1} \cap A_n \cap A_n \cap A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_{n-1} \cap A_n \cap A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_{n-1})\mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(A_{n+1})$ par indépendance de A_{n-1}, A_n et A_{n+1}. D'un autre côté, $\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(A_{n-1})\mathbb{P}(A_n)$ et $\mathbb{P}(B_{n+1}) = \mathbb{P}(A_{n+1})\mathbb{P}(A_n)$. Supposons qu'il y ait indépendance entre B_n et B_{n+1} alors

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(B_n \cap B_{n+1}) & = & \mathbb{P}(B_n)\mathbb{P}(B_{n+1}) \\ & \Longleftrightarrow & \\ \mathbb{P}(A_{n-1})\mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(A_{n+1}) & = & \mathbb{P}(A_{n-1})(\mathbb{P}(A_n))^2\mathbb{P}(A_{n+1})\mathbb{P}(A_n) \\ & \Longleftrightarrow & p \text{ appartient à }]0,1[\text{ donc } \ \mathbb{P}(A_n) \neq 0 \text{ et } \ \ \mathbb{P}(A_n) \neq 1\ \ \forall n \in \mathbb{N}^* \\ \mathbb{P}(A_n)) & = & 1 \text{ ou } 0, \text{ ce qui est en contradiction avec } p \in]0,1[\end{array}$$

   Donc B_n et B_{n+1} ne sont pas indépendants.

2. Notons que $B_2 = A_1 \cap A_2$ est indépendant de A_i pour tout $i \geq 3$ de part l'indépendance des $(A_i)_{(I\geq 1)}$.

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(\kappa = 2) & = & \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = p^2 \\ \mathbb{P}(\kappa = 3) & = & \mathbb{P}(\overline{A}_1 \cap A_2 \cap A_3) = (1-p)p^2 \\ \mathbb{P}(\kappa = 4) & = & \mathbb{P}\left((\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3 \cap A_4) \cup (A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3 \cap A_4)\right) = (1-p)p^2(1-p+p) = (1-p)p^2 \\ \mathbb{P}(\kappa = 5) & = & \mathbb{P}\left(\overline{B}_2 \cap \overline{A}_3 \cap A_4 \cap A_5\right) \\ & = & \mathbb{P}(\overline{B}_2)\mathbb{P}(\overline{A}_3)\mathbb{P}(A_4)\mathbb{P}(A_5) \\ & = & \mathbb{P}(\overline{A}_1 \cup \overline{A}_2)(1-p)p^2 \\ & = & (1-p)p^2\left(\mathbb{P}(\overline{A}_1) + \mathbb{P}(\overline{A}_2) - \mathbb{P}(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2\right) \\ & = & (1-p)p^2(2(1-p) - (1-p)^2) = (1-p)^2p^2(1+p). \end{array}$$

   La formule de Poincaré a été utilisée pour déterminer $\mathbb{P}(\overline{A}_1 \cup \overline{A}_2)$.

3. Remarquons que pour $n \geq 3$,

$$\mathbb{P}(\kappa > n-1) - \mathbb{P}(\kappa > n) \quad = \quad \mathbb{P}(\kappa = n). \tag{4}$$

Comme la suite $\{\kappa \leq n\},\ A_{n+1},\ A_{n+2}, \ldots,$ est une suite d'événements indépendants alors la suite $\{\kappa > n\},\ A_{n+1},\ A_{n+2}, \ldots,$ l'est également (Voir le cours).
Nous pouvons en déduire, en utilisant la relation (4) et la relation donnée par l'énoncé, que pour tout $n \geq 3$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\kappa = n+2) - \mathbb{P}(\kappa = n+3) &= \mathbb{P}(\kappa > n-1)\mathbb{P}(\overline{A}_n \cap A_{n+1} \cap A_{n+2}) - \mathbb{P}(\kappa > n)\mathbb{P}(\overline{A}_{n+1} \cap A_{n+2} \cap A_{n+3}) \\
&= (\mathbb{P}(\kappa > n-1) - \mathbb{P}(\kappa > n))(1-p)p^2 \\
&= \mathbb{P}(\kappa = n)(1-p)p^2 \\
&\Longleftrightarrow \\
\mathbb{P}(\kappa = n+3) &= \mathbb{P}(\kappa = n+2) - \mathbb{P}(\kappa = n)(1-p)p^2 \qquad (5)
\end{aligned}$$

Ayant déterminé à la question **II.** 2, les quantités $\mathbb{P}(\kappa = k)$ pour $k \in \{2,3,4,5\}$, nous pouvons déduire de la relation (5) la loi de κ.