SY01 Médian
 23 avril 2010
 Semestre Printemps 09-10
 Durée : 2h
 UNE FEUILLE A4 RECTO/VERSO ET MACHINE À
 CALCULER AUTORISÉES

Exercice 1. (2 pts). On lance successivement et indépendamment deux pièces mal équilibrées, pour lesquelles la probabilité d’obtenir pile est égale à p , $p \in]0; 1[$ (pour chacune des deux pièces). On considère les événements :

A : “le résultat de la première pièce lancée est pile” et B : “les deux résultats des pièces lancées sont différents”

Après avoir décrit l’ensemble fondamental, vérifier que A et B sont indépendants si et seulement si $p = 1/2$.

Correction. $\Omega = \{F, P\} \times \{F, P\}$, où F, P désignent Face respectivement Pile. Puisque les lancers sont indépendants, la probabilité d’obtenir un événement élémentaire $w \in \Omega$ est égale au produit des probabilités d’obtenir le résultat de chaque lancer (p si Pile ($1 - p$) si Face).

$A = \{(P, F), (P, P)\}$, $B = \{(P, F), (F, P)\}$ et $A \cap B = \{(P, F)\}$ avec $\mathbb{P}(A) = p$, $\mathbb{P}(B) = 2p(1 - p)$ $\mathbb{P}(A \cap B) = p(1 - p)$. A et B sont indépendants ssi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap B) &= \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \\ \Leftrightarrow p(1 - p) &= 2p^2(1 - p) \\ \Leftrightarrow 1 &= 2p \text{ puisque } p \neq 0 \text{ et } p \neq 1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} &= p \end{aligned}$$

Exercice 2. (6 pts). Une urne contient des boules mauves et des boules jaunes; la proportion de boules mauves dans l’urne est p , $p \in]0, 1[$ et les boules d’une même couleur sont indistinguables. L’expérience consiste à effectuer dans des conditions identiques et indépendamment les uns des autres, des tirages avec remise. A l’issue de chaque tirage, on note la couleur de la boule tirée avant de la replacer dans l’urne.

On s’intéresse à la variable aléatoire Z_n égale au nombre de tirages nécessaires à l’obtention de n boules mauves, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

On peut montrer que $Z_n = \sum_{l=1}^n X_l$, où les variables aléatoires $(X_l)_{1 \leq l \leq n}$ sont indépendantes et suivent toutes la même loi Géométrique $\mathcal{G}(p)$.

- **I.** $n = 2$. Obtention de deux boules mauves.
 1. En utilisant la convolution, déterminer la loi de probabilité de Z_2 à partir des lois de X_1 et de X_2 (préciser l’ensemble de ses valeurs ainsi que les probabilités correspondantes).
 2. Déterminer l’espérance et la variance de Z_2 .
- **II.** $n \in \mathbb{N}^*$ fixé avant l’expérience. Obtention de n boules mauves.
 1. Pour tout entier $n \geq 2$, établir la relation $\mathbb{P}(Z_n = m + k | Z_{n-1} = m) = \mathbb{P}(X_n = k)$, dans laquelle k et m sont à préciser.
 2. Déterminer la fonction génératrice de Z_n à partir de celle de la loi $\mathcal{G}(p)$.
 3. Déterminer la loi de probabilité de Z_n (préciser l’ensemble de ses valeurs ainsi que les probabilités correspondantes).

Correction.

- **I.** $n = 2$. Obtention de deux boules mauves.

1. Z_2 est à valeurs dans $E_2 = \{j \in \mathbb{N}^*; j \geq 2\}$. Comme X_1 et X_2 sont indépendantes, la loi de probabilité de $Z_2 = X_1 + X_2$ est égale au produit de convolution des lois images p_{X_1} et p_{X_2} de X_1 et X_2 , c'est à dire, $\forall k \in E$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z = k) = p_{X_1} * p_{X_2}(k) &= \sum_{l=1}^{k-1} \mathbb{P}(X_1 = l) \times \mathbb{P}(X_2 = k - l) \\ &= \sum_{l=1}^{k-1} p(1-p)^{l-1} \times p(1-p)^{k-l-1} \\ &= \sum_{l=1}^{k-1} p^2(1-p)^{k-2} \\ &= (k-1)p^2(1-p)^{k-2} = C_{k-1}^1 p^2(1-p)^{k-2}. \end{aligned}$$

2. Par linéarité de l'espérance $\mathbb{E}(Z_2) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) = \frac{2}{p}$ (l'espérance d'une loi $\mathcal{G}(p)$ est $\frac{1}{p}$).

X_1 et X_2 étant indépendantes, $V(Z_2) = V(X_1) + V(X_2) = \frac{2(1-p)}{p^2}$ (la variance d'une loi $\mathcal{G}(p)$ est $\frac{(1-p)}{p^2}$).

- **II.** $n \in \mathbb{N}^*$ fixé avant l'expérience.

1. Pour tout entier $n \geq 1$,

- (i) la variable Z_n est à valeurs dans $E_n = \{j \in \mathbb{N}^*; j \geq n\}$ puisque obtenir n boules mauves nécessite d'avoir effectué au moins n tirages;
- (ii) pour tout $j \in E_n$, $\mathbb{P}(Z_n = j) \neq 0$;
- (iii) si $n \geq 2$, $X_1, X_2, \dots$, étant indépendantes, alors par construction $Z_{n-1}, X_n, X_{n+1}, \dots$, le sont également.

Pour tout entier $n \geq 2$, de (i), (ii) et (iii) et par application de la définition d'une probabilité conditionnelle, on en déduit que pour tout $m \in E_{n-1}$ et tout $k \in E_1$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_n = m + k | Z_{n-1} = m) &= \frac{\mathbb{P}(\{Z_{n-1} + X_n = m + k\} \cap \{Z_{n-1} = m\})}{\mathbb{P}(Z_{n-1} = m)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(\{X_n = k\} \cap \{Z_{n-1} = m\})}{\mathbb{P}(Z_{n-1} = m)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X_n = k)\mathbb{P}(Z_{n-1} = m)}{\mathbb{P}(Z_{n-1} = m)} \\ &= \mathbb{P}(X_n = k). \end{aligned}$$

2. Par indépendance de $X_1, X_2, \dots$, et pour tout $n \geq 1$, la fonction génératrice de Z_n , notée g_{Z_n} est donnée, pour tout réel s tel que $\mathbb{E}(s^{Z_n})$ existe, par :

$$\begin{aligned} g_{Z_n}(s) = \mathbb{E}(s^{Z_n}) &= \mathbb{E}(s^{\sum_{i=1}^n X_i}) \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(s^{X_i}) = \prod_{i=1}^n g_{X_i}(s) = \left(\frac{sp}{1-s(1-p)}\right)^n, \end{aligned}$$

où g_{X_i} désigne la fonction génératrice de X_i qui suit la loi $\mathcal{G}(p)$, c-à-d $g_{X_i}(s) = \frac{sp}{1-s(1-p)}$.

3. La variable Z_n prend ses valeurs dans E_n . Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, notons M_j et J_j les événements "obtenir une boule mauve au j -ème tirage", respectivement "obtenir une boule jaune au j -ème tirage".

Pour tout $k \in E_n$, l'événement $\{Z_n = k\}$ signifie que :

- la n -ème boule mauve est obtenu au k -ème tirage;
- au cours des $k - 1$ premiers tirages, on a obtenu $n - 1$ boules mauves et $k - n$ boules jaunes.

Notons $\mathcal{I} = \{1, \dots, k - 1\}$. Si $\mathcal{J}$ est une partie dans $\mathcal{I}$ alors notons $\mathcal{J}^c$ son complémentaire dans $\mathcal{I}$. Remarquons que

$$\{Z_n = k\} = \bigcup_{1 \leq i_1 < \dots < i_{n-1} \leq k-1} \left\{ \left(\bigcap_{j \in \{1, \dots, n-1\}} M_{i_j} \right) \cap \left(\bigcap_{j \in \{1, \dots, n-1\}^c} J_{i_j} \right) \cap M_k \right\}$$

A un $n - 1$ -uplet $(i_1, \dots, i_{n-1})$ donné dans $\mathcal{I}$, les tirages étant indépendants, nous avons

$$\mathbb{P} \left[\left(\bigcap_{j \in \{1, \dots, n-1\}} M_{i_j} \right) \cap \left(\bigcap_{j \in \{1, \dots, n-1\}^c} J_{i_j} \right) \cap M_k \right] = p^n (1 - p)^{k-n}$$

Il reste alors à déterminer le nombre des $n - 1$ tirages parmi les $k - 1$ effectués au cours desquels une boule mauve a été obtenue; ce qui correspond à C_{k-1}^{n-1} .

$$\mathbb{P}(Z_n = k) = C_{k-1}^{n-1} p^n (1 - p)^{k-n}.$$

Exercice 3. (6pts)

Pour une certaine espèce d'oiseaux, chaque oeuf pondu dans un nid a la même probabilité $p = 0.6$ d'éclore indépendamment des autres oeufs du nid et des autres nids.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'oeufs éclos dans un nid donné.

- **I.** Le nid contient cinq oeufs.
 1. Déterminer la loi de X .
 2. Calculer la probabilité exacte qu'au moins un oeuf ait éclos dans le nid.
 3. Chaque oeuf éclos est vendu k euros, avec $k \in \mathbb{N}^*$. Notons Y la variable aléatoire correspondant au gain de la vente d'oeufs éclos dans le nid. Calculer en fonction de k , l'espérance et la variance du gain Y .
- **II.** Dans cette partie, nous supposons que le nombre N d'oeufs pondus par une femelle de l'espèce considérée est une variable aléatoire discrète de loi uniforme sur l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Nous supposons que chaque nid est la propriété d'une seule femelle. Un nid est choisi au hasard.
 1. Sachant qu'au moins une tête de poussin dépasse du nid, calculer la probabilité que ce nid contienne cinq oeufs.
 2. Déterminer la loi de X (préciser l'ensemble de ses valeurs ainsi que les probabilités correspondantes).

Indication : il est rappelé que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $q \neq 1$, $\sum_{l=0}^n q^l = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Correction.

- **I.** Le nid contient cinq oeufs.
 1. Comme le nid contient 5 oeufs et que les oeufs ont même probabilité d'éclore et cela indépendamment les uns des autres (schéma de Bernoulli), la variable X suit une loi Binomiale $B(5, 0.6)$.

2. On cherche $\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = 1 - (0.4)^5 = 0.9868$.

3. $Y = kX$; par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(Y) = k \times 5 \times 0.6 = 3k$; par les propriétés de la variance $V(Y) = k^2 \times 5 \times 0.6 \times 0.4 = 1.2k^2$.

- **II.** Dans cette partie, nous supposons que le nombre N d'oeufs pondus par une femelle de l'espèce considérée est une variable aléatoire discrète de loi uniforme sur l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Nous supposons que chaque nid est la propriété d'une seule femelle. Un nid est choisi au hasard.

1. On cherche $\mathbb{P}(N = 5|X \geq 1)$, où N désigne le nombre d'oeufs dans le nid. Remarquons que quelque soit un nombre K d'oeufs dans le nid, la loi de X sachant que K oeufs sont dans le nid est une loi Binomiale $B(K, p)$ (même raisonnement que I.1). On est dans les conditions d'utilisation de la formule de Bayes :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N = 5|X \geq 1) &= \frac{\mathbb{P}(X \geq 1|N = 5)\mathbb{P}(N = 5)}{\mathbb{P}(X \geq 1)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X \geq 1|N = 5)\frac{1}{8}}{\sum_{i=0}^7 \mathbb{P}(X \geq 1|N = i)\frac{1}{8}} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X \geq 1|N = 5)\frac{1}{8}}{(7 - \sum_{i=1}^7 (1-p)^i)\frac{1}{8}} \quad (\mathbb{P}(X \geq 1|N = 0) = 0) \\ &= \frac{\mathbb{P}(X \geq 1|N = 5)}{7 - (1-p)\frac{1-(1-p)^7}{1-(1-p)}} \\ &= \frac{0.9868}{7 - 0.4\frac{1-0.4^7}{0.6}} = 0.1563. \end{aligned}$$

2. X est à valeurs dans $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Pour tout $k \in E$, l'événement

$$\{X = k\} = \bigcup_{i=0}^7 (\{X = k\} \cap \{N = i\}),$$

puisque les événements $\{N = i\}_{0 \leq i \leq 7}$ forment une partition de l'ensemble du nombre d'oeufs pondus par nid. Les événements $(\{X = k\} \cap \{N = i\})_{0 \leq i \leq 7}$ sont incompatibles deux à deux et cela entraîne que $\forall k \in E$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = k) &= \sum_{i=0}^7 \mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{N = i\}) \\ &= \sum_{i=0}^7 \mathbb{P}(X = k|N = i)\mathbb{P}(N = i) \\ &= \sum_{i=k}^7 \mathbb{P}(X = k|N = i)\frac{1}{8} \quad (\mathbb{P}(X = k|N = i) = 0 \text{ pour } i < k) \\ &= \frac{1}{8} \sum_{i=k}^7 C_i^k p^k (1-p)^{i-k}. \end{aligned}$$

Exercice 4. (6pts)

Les rats ont-ils de la mémoire?

Au cours d'une étude sur le comportement des animaux, des rats doivent choisir entre quatre portes d'apparence identiques dont l'une est dite *bonne* et les trois autres *mauvaises*. Chaque fois qu'il choisit une mauvaise porte, le rat reçoit une décharge électrique et est ramené à son point de départ; l'expérience est répétée sous des conditions identiques jusqu'à ce que le rat choisisse la bonne porte. On envisage successivement deux types de comportement C_1 et C_2 :

C_1 : le rat a une bonne mémoire : à chaque répétition de l'expérience, le rat évite tous ses choix précédents de (mauvaise) porte et il choisit de manière équiprobable entre les portes restantes.

C_2 : le rat a une mémoire immédiate : à chaque répétition de l'expérience, le rat évite son choix précédent de (mauvaise) porte et il choisit de manière équiprobable entre les trois portes restantes.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de répétitions de l'expérience nécessaires jusqu'au choix de la bonne porte.

• **I.** Comportement C_1 .

1. Déterminer la loi de probabilité de X (préciser l'ensemble de ses valeurs ainsi que les probabilités correspondantes). (préciser l'ensemble de ses valeurs ainsi que les probabilités correspondantes).
2. Calculer l'espérance et la variance de X
3. Déterminer la fonction de répartition de X .

• **II.** Comportement C_2 .

1. Déterminer la loi de probabilité de X (préciser l'ensemble de ses valeurs ainsi que les probabilités correspondantes).
2. Déterminer la fonction génératrice de X .
Indication : il est rappelé que $\sum_{l \geq 0} q^l = \frac{1}{1-q}$ lorsque $|q| < 1$.
3. En déduire l'espérance et la variance de X .

Correction. Notons B_i et M_i les événements "le rat choisit la bonne porte à la i -ème répétition de l'expérience" respectivement "le rat choisit une des mauvaises portes à la i -ème répétition de l'expérience".

• **I.** Comportement C_1 .

1. X est à valeurs dans $E = \{1, 2, 3, 4\}$.

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(B_1) = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(B_2 \cap M_1) = \mathbb{P}(B_2|M_1)\mathbb{P}(M_1) = \frac{1}{3} \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}(B_3 \cap M_2 \cap M_1) = \mathbb{P}(B_3|M_2 \cap M_1)\mathbb{P}(M_2|M_1)\mathbb{P}(M_1) = \frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(X = 4) = \mathbb{P}(B_4 \cap M_3 \cap M_2 \cap M_1) = \mathbb{P}(B_4|M_3 \cap M_2 \cap M_1)\mathbb{P}(M_3|M_2 \cap M_1)\mathbb{P}(M_2|M_1)\mathbb{P}(M_1) = \frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

La loi de X est uniforme sur $\{1, 2, 3, 4\}$.

2. $\mathbb{E}(X) = \frac{5}{2}$ et $V(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\frac{5}{2})^2 = \frac{30-25}{4} = \frac{5}{4}$.

3. Notons F la fonction de répartition de X définie pour tout réel x par $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{i}{4} & \text{si } \frac{i}{4} \leq x < \frac{i+1}{4} \text{ pour } i \in \{1, 2, 3\} \\ 1 & \text{si } x \geq 4. \end{cases}$$

• **II.** Comportement C_2 .

1. La variable X est à valeurs dans $E = \mathbb{N}^*$.

$$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(B_2|M_1)\mathbb{P}(M_1) = \frac{1}{3} \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(B_k|M_{k-1}) \times \left(\prod_{i=2}^{k-1} \mathbb{P}(M_i|M_{i-1}) \right) \times \mathbb{P}(M_1) = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} \right)^{k-2} \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \left(\frac{2}{3} \right)^{k-2} \forall k \geq 3$$

En unifiant les résultats, $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{4}$ et $\forall k \geq 2$, $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{4} \left(\frac{2}{3} \right)^{k-2}$.

2. Notons g_X la fonction génératrice de X définie pour tout réel s tel que $\mathbb{E}(s^X)$ existe par :

$$\begin{aligned} g_X(s) &= \mathbb{E}(s^X) \\ &= \frac{s}{4} + \frac{1}{4} \sum_{k \geq 2} s^k \left(\frac{2}{3} \right)^{k-2} \\ &= \frac{s}{4} + \frac{1}{4} s^2 \sum_{k \geq 2} s^{k-2} \left(\frac{2}{3} \right)^{k-2} \\ &= \frac{s}{4} + \frac{1}{4} \frac{s^2}{1 - s \frac{2}{3}} \end{aligned}$$

3. A partir des relations exprimant l'espérance et la variance en fonction des dérivées première et seconde de g_X calculées en 1, on en déduit que $\mathbb{E}(X) = \frac{13}{4}$ et $V(X) = \frac{27 \cdot 8 - 13 \cdot 9}{16} = \frac{99}{16}$.

$$g'_X(s) = \frac{1}{4} + \frac{s}{2(1 - \frac{2}{3}s)} + \frac{s^2}{6(1 - \frac{2}{3}s)^2},$$

$$g_X^{(2)}(s) = \frac{1}{2(1 - \frac{2}{3}s)} + \frac{2s}{3(1 - \frac{2}{3}s)^2} + \frac{2s^2}{9(1 - \frac{2}{3}s)^3}.$$