Médian SY01 - Printemps 2007

Seul document autorisé: une feuille de notes manuscrite. Calculatrices interdites.

Exercice 1

Un laboratoire a mis au point un alcootest dont les propriétés sont les suivants:
- le test est positif pour un conducteur sobre dans 2% des cas,
- le test est positif pour un conducteur ivre dans 96% des cas.

1) Dans un département, 3% des conducteurs étant en état d'ébriété, si le contrôle est positif, quelle est la probabilité que le conducteur soit malgré tout sobre?

2) Estimer ce résultat et commenter.

Exercice 2

Une urne contient une boule noire et une boule blanche. On tire une boule de l'urne.

1) Déterminer l'univers Ω relatif à cette expérience. Décrire un espace probabilisable possible lié à Ω.

On effectue à présent des tirages avec remise jusqu'à obtention d'une boule blanche.

2) Déterminer la loi de probabilité du nombre de tirages N puis calculer $\mathbb{E}$(N) et Var(N).

3) Mêmes questions si l'on ajoute une boule noire dans l'urne à chaque tirage. Calculer $\mathbb{P}(N \geq n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. *Indication: Démontrer que* $\forall\ k > 0,\ \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

Exercice 3

On suppose que la probabilité qu'une personne naisse un mois donné est 1/12.
1) Quelle est la probabilité que dans un groupe donné de 12 personnes, aucune d'entre elles n'aient leur anniversaire le même mois?

2) Quelle est la probabilité que les anniversaires de 6 personnes d'un groupe donné se trouvent réunis sur deux mois (elles ne doivent donc pas être nées toutes le même mois)?

Exercice 4

Une entreprise fabrique des parfums. La probabilité de trouver un parfum détérioré est p. Cette détérioration peut-être détectée sans erreur par un dosage du parfum. On souhaite déterminer par ce dosage le nombre de parfums détériorés sur un échantillon de 81 parfums. Afin d'effectuer le moins possible de tests (onéreux), on partitionne au hasard l'échantillon en 9 groupes de 9 parfums que l'on mélange. Si le test est négatif sur l'un de ces mélanges, cela signifie qu'aucun des 9 parfums mélangés n'est détérioré, et qu'il est donc inutile d'effectuer les tests individuels. Si au contraire le test est positif, alors on effectue les 9 tests individuels car au moins l'un des parfums du mélange est détérioré.

1) Trouver les probabilités que, dans un groupe, on observe:
a) aucun parfum détérioré,
b) un et un seul parfum détérioré,
c) au moins un parfum détérioré.

2) Soit N le nombre total de tests à effectuer avec cette méthode de partition.
a) Quelle est la loi de la v.a. X définissant le nombre de groupes pour lesquels il faut faire 9 tests supplémentaires?
b) Exprimer la v.a. N en fonction de X.
c) Déterminer $P(N = 99)$ et $P(N = 90)$.

3) Calculer le nombre moyen de tests $\mathbb{E}(N)$ et la variance du noimbre de tests $Var(N)$ en fonction de p.

4) Déterminer les valeurs de p pour lesquelles la méthode de partitionnement offre plus d'intérêt que la méthode qui consiste à tester les 81 parfums.