

Question 1. Questions de Cours diverses et indépendantes

- a- Bien définir et démontrer la formule des probabilités totales.

Solution : Voir le Poly.

- b- Enoncer les lois de De Morgan et en démontrer l'une d'elles.

Solution : Voir le premier cours.

- c- Montrer que $P(A \cap B \cap C) = P(C|A \cap B)P(B|A)P(A)$, lorsque $A \cap B$ est non-négligeable.

Solution : Voir la preuve dans le cas général dans le Poly.

Question 2. Grand-père a trois bérets et une casquette. Quand il descend acheter sa baguette il saisit un couvre-chef au hasard. Sachant qu'il prend une fois sur trois une baguette moulée et que deux fois sur cinq il oublie de chausser ses souliers, calculer la probabilité de le voir remonter en charentaises, un béret sur la tête et une baguette non moulée sous le bras.

Solution : En définissant les événements :

$A = \{\text{Il prend un béret}\}$, $B = \{\text{Il descend en charentaises}\}$, $C = \{\text{Il achète une baguette non moulée}\}$ nous devons calculer $P(A \cap B \cap C)$, mais par indépendance des événements due à l'énoncé nous avons $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{3}$.

Question 3. On tire au hasard deux jetons dans une boîte contenant 5 jetons. Trois sont verts et numérotés 1, 2 et 3, deux sont rouges et numérotés 1 et 2. Soit X la v.a. somme des deux nombres obtenus et Y la v.a. maximum des deux valeurs.

- a- Donner l'ensemble des résultats possibles et la probabilité de chacun des événements élémentaires.

Solution : On peut choisir:

$\Omega_1 = \{(V_1, V_2), (V_2, V_1), (V_1, V_3), (V_3, V_1), (V_2, V_3), (V_3, V_2), (V_1, R_1), (R_1, V_1), (V_1, R_2), (R_2, V_1), (V_2, R_1), (R_1, V_2), (V_2, R_2), (R_2, V_2), (V_3, R_1), (R_1, V_3), (V_3, R_2), (R_2, V_3), (R_1, R_2), (R_2, R_1)\}$,
dans ce cas $P_1(\omega) = 1/20$,

ou bien

$\Omega_2 = \{(V_1, V_2), (V_1, V_3), (V_2, V_3), (V_1, R_1), (V_1, R_2), (V_2, R_1), (V_2, R_2), (V_3, R_1), (V_3, R_2), (R_1, R_2)\}$
dans ce cas $P_2(\omega) = 1/C_5^2 = 1/10$.

- b- Donner l'ensemble des résultats possibles et la probabilité de chacun des événements élémentaires lorsque tous les jetons sont de la même couleur.

Solution : On peut choisir:

$\Omega'_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2)\}$,

dans ce cas on aura $P'_1(1, 1) = P_1(V_1, R_1) = 1/10$, $P'_1(1, 2) = P_2(V_1, V_2) + P_2(R_1, R_2) = 2/10$, $P'_1(2, 1) = P_2(V_2, V_1) + P_2(R_2, R_1) = 2/10$, $P'_1(1, 3) = P_2(V_1, V_3) = 1/10$, $P'_1(3, 1) = 1/10$, $P'_1(2, 2) = 1/10$, $P'_1(2, 3) = 1/10$, $P'_1(3, 2) = 2/10$,

ou bien

$\Omega'_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (1, 3), (2, 3)\}$

dans ce cas on aura $P'_2(1, 1) = P_2(V_1, R_1) = 1/10$, $P'_2(1, 2) = P_2(V_1, V_2) + P_2(R_1, R_2) + P_2(V_2, V_1) + P_2(R_2, R_1) = 4/10$, $P'_2(1, 3) = 2/10$, $P'_2(2, 2) = 1/10$, $P'_2(2, 3) = 2/10$.

- c- Donner la loi de X .

Solution : $E = X(\Omega'_2) = \{2, 3, 4, 5\}$ et $P(X = 2) = 1/10$, $P(X = 3) = 4/10$, $P(X = 4) = 3/10$ et $P(X = 5) = 2/10$.

- d- Donner la loi de Y .

Solution : $E = Y(\Omega'_2) = \{1, 2, 3\}$ et $P(Y = 1) = 1/10$, $P(Y = 2) = 5/10$ et $P(Y = 3) = 4/10$.

Question 4. L'urne A contient 5 billes noires et 6 billes blanches et l'urne B contient 8 billes noires et 4 billes blanches. Deux billes, choisies au hasard dans B, sont transférées vers A et on extrait une bille de A.

On définit les événements :

$T_1 = \{\text{deux billes blanches sont choisies au hasard dans B}\},$

$T_2 = \{\text{une bille blanche et une noire sont choisies au hasard dans B}\},$

$T_3 = \{\text{deux billes noires sont choisies au hasard dans B}\}.$

a- Quelle est la probabilité que la bille extraite de A soit blanche ?

Solution : Soit $A = \{\text{la bille extraite de A soit blanche}\}$, en utilisant la formule des probabilités totales on peut décomposer $P(A) = P(A \cap T_1) + P(A \cap T_2) + P(A \cap T_3)$, puis en utilisant les hypothèses on peut évaluer $P(A) = P(A|T_1)P(T_1) + P(A|T_2)P(T_2) + P(A|T_3)P(T_3) = \frac{8}{13} \times \frac{C_4^2}{C_{12}^2} + \frac{7}{13} \times \frac{C_8^1 C_4^1}{C_{12}^2} + \frac{6}{13} \times \frac{C_8^2}{C_{12}^2} = \frac{220}{429}$.

b- Sachant que la bille extraite de A est blanche, quelle est la probabilité qu'au moins une bille blanche ait été transférée vers A ?

Solution : Soit p la probabilité cherchée, nous avons

$$p = P(T_1 \cup T_2 | A) = P(T_1 | A) + P(T_2 | A)$$

$$\text{or } P(T_1 | A) = \frac{P(T_1)P(A|T_1)}{P(A)} = \frac{6}{55} \text{ et } P(T_2 | A) = \frac{P(T_2)P(A|T_2)}{P(A)} = \frac{28}{55} \text{ d'où } p = 34/55.$$