SY01/P06 - Corrigé du Test

Question 1. (Les questions $a)$ et $b)$ sont indépendantes)

-a Une urne contient 13 boules numerotées de 1 à 13. On tire une au hasard et on considère les événements suivants : $A = \{\text{tirage d'un nombre pair}\}$ $\quad B = \{\text{tirage d'un multiple de 3}\}$
Indiquer l'espace probabilisé. Les événements A et B sont-ils indépendants ? justifiez votre réponse.
Réponse On prends pour $\Omega = \{1, 2, \cdots, 13\}$, comme tribu l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ et comme P la probabilité qui donne l'équirépartition.
Les événements ne sont pas indépendants car $P(A) = P(2, 4, 6, 8, 10, 12) = 6/13$ et $P(B) = P(3, 6, 9, 12) = 4/13$ et $P(A \cap B) = P(6, 12) = 2/13$, on vérifie aisement que $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$.

-b Soient $A_1, \cdots, A_n$ des sous-ensembles du même Ω, deux à deux disjoints et soit $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.
Montrer que pour tout $w \in \Omega$ $1_A(w) = \sum_{i=1}^{n} 1_{A_i}(w)$. Traiter separement le cas $w \in A$ du cas $w \in \bar(A)$.
Réponse Il s'agit de vérifier que $\forall w \in \Omega$, $1_A(w) = \sum_{i=1}^{n} 1_{A_i}(w)$.
Premier cas : pour $w \in A$, $1_A(w) = 1$ et comme $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, w appartient au moins à l'un des A_i et en fait à un seul car ils sont deux à deux disjoints. Ainsi parmi les n termes $1_{A_i}(w)$, un seul vaut 1, les autres étant tous nuls. Donc $\sum_{i=1}^{n} 1_{A_i}(w) = 1 = 1_A(w)$.
Deuxième cas : $w \notin A$, dans ce cas w n'appartient à aucun des A_i. Donc $1_A(w) = 1_{A_i}(w) = 0$ pour $i = 1, \cdots, n$. On a donc $1_A(w) = 0 = \sum_{i=1}^{n} 1_{A_i}$.

Question 2.

1. Soit X une variable aléatoire discrète de loi binomiale de paramètres $n \geq 1$ et $p \in [0, 1]$. Quelle est la loi de la variable aléatoire $Y = n - X$?
Réponse $P(Y = k) = P(n - X = k) = P(X = n - k)$ pour $k \in \{0, \cdots, n\}$, or X suit une loi $B(n, p)$ donc $P(X = n - k) = C_n^{n-k} p^{n-k}(1 - p)^k$ et comme $C_n^{n-k} = C_n^k$, nous avons bien $P(Y = k) = C_n^k (1 - p)^k p^{n-k}$. Donc Y suit la loi $B(n, 1 - p)$.

2. On considère les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 indépendantes et de même loi donnée par $P(X_i = -1) = P(X_i = 1) = 1/2$ pour $i = 1, 2, 3$.
Donner les modalités (ou résultats possibles) associés à la variable aléatoire $X_1 + X_2 + X_3$ et donner sa loi.
Réponse Si on appelle $S = X_1 + X_2 + X_3$ alors $S(\Omega) = \{-3, -1, 1, 3\}$ et $P_S(-3) = P(-1, -1, -1) = 1/8$, $P_S(-1) = P(-1, -1, 1) + P(-1, 1, -1) + P(1, -1, -1) = 3/8$, $P_S(1) = P(-1, 1, 1) + P(1, -1, 1) + P(1, -1, 1) = 3/8$ et $P_S(3) = P(1, 1, 1) = 1/8$ où $P(x, y, z) = P(X_1 = x; X_2 = y; X_3 = z)$.

Question 3.
Un test comprend 10 questions et on attribue pour chaque question :
$+2$ points par réponse juste
-2 points par réponse fausse ou non donnée.

- a Montrez que si n est le nombre de réponses justes, la note globale du test est $4n - 20$.
Réponse Si n est le nombre de réponses justes alors $10 - n$ est le nombre de réponses fausses ou non données d'où $2n - 2(10 - n) = 4n - 20$.

- b Un étudiant donne une réponse juste aux cinq premières questions et pour les cinq autres, il répond au hasard. On admet qu'alors sa réponse est juste avec une probabilité de 1/2. Soit X la note obtenue par cet étudiant.

  -i Quel est l'ensemble des valeurs prises par X ?
  Réponse Pour $5 \leq n \leq 10$, $0 \leq 4n - 20 \leq 20$ i.e. $X(\Omega) = \{0, 4, 8, 12, 20\}$.

  -ii Déterminer la probabilité $P(X = 12)$.
  Réponse $\{X = 12\}$ pour $n = 8$; l' étudiant a alors donné 3 réponses justes sur les 5 données au hasard. D'où $P(X = 12) = C_5^3 \left(\frac{1}{2}\right)^5$.

-iii Déterminer la probabilité $P(X \geq 12)$.

Réponse $P(X \geq 12) = \left(C_5^3 + C_5^4 + C_5^5\right)\left(\frac{1}{2}\right)^5 = 0.5.$

Question 4. Considérons 5 urnes, regroupées suivant leur composition de la façon suivante:

- Groupe A_1: 2 urnes avec 2 boules blanches et 3 noires.
- Groupe A_2: 2 urnes avec 1 boule blanche et 4 noires.
- Groupe A_3: 1 urne avec 4 boules blanches et 1 noire.

De l'une des urnes choisie au hasard on extrait au hasard una boule blanche. Soit B l'événement "la boule blanche a été tirée du groupe A_2". Calculer $P(B)$.

Réponse Posons b l'événement "une boule blanche a été tirée" et A_i l'événement " tirer la boule dans une urne du groupe A_i". Le but est de déterminer $P(A_2|b)$, en utilisant la formule de Bayes nous avons :

$$\begin{aligned} P(A_2|b) &= \frac{P(A_2)P(b|A_2)}{P(A_1)P(b|A_1) + P(A_2)P(b|A_2) + P(A_3)P(b|A_3)} \\ &= \frac{\frac{1}{5}\frac{2}{5}}{\frac{2}{5}\frac{2}{5} + \frac{2}{5}\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\frac{4}{5}} = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$