SY01/P02 - Correction du test 1

Question 1. Dans une banque, un guichet automatique permet de retirer des billets de 50 Euros. Le nombre de clients utilisant l'appareil dans un intervalle de temps de 5 minutes est une variable aléatoire N telle que :

$$P(N=0)=0.3;\ P(N=1)=0.1;\ P(N=2)=0.4;\ P(N=3)=0.2.$$

a- Déterminer l'espérance de la v.a. N.
Solution
E[N]=1.5

b- On suppose que les nombre des clients utilisant l'appareil sur deux périodes de 5 minutes ne se chevauchant pas sont indépendants. Soit C la variable aléatoire "nombre de clients utilisant l'appareil en une heure". C peut s'écrire :

$$C=\sum_{i=1}^{12} N_i$$

où N_i désigne le nombre de clients utilisant l'appareil au cours du i-ème intervalle de 5 minutes, lorsque l'on découpe l'heure en 12 intervalles de 5 minutes ; chaque N_i suit la même loi que N.

i- Quelles sont les valeurs possibles de C. Calculer E(C).
Solution
Valeurs possibles de C :$\{0,1,\ldots,35,36\}$. $E[C]=18$.

ii- Calculer P(C=0).
Solution
$P(C=0)=P(N_1=0,N_2=0,\ldots,N_{12}=0)=(0.3)^{12}$.

Question 2. Un voyageur arrive à un carrefour. Il sait qu'à cet endroit il va trouver deux routes : un cul de sac et la bonne route.
Il y a trois frères à ce carrefour : F_1, F_2 et F_3.
F_1 dit une fois sur dix la vérité, F_2 dit cinq fois sur dix la vérité et F_3 dit neuf fois sur dix la vérité.
Le voyageur s'adresse "au hasard" à un et à un seul des trois frères. Il demande son chemin, et s'aperçoit par la suite que ce chemin est le bon. Quelle est la probabilité qu'il se soit adressé à F_1 ?
Solution
Soit V l' événement "dire la vérité" et F_i l' événement "le voyageur s'est adressé à F_i.
Si le voyageur a pris le bon chemin, c'est que le frère auquel il s'est adressé lui a dit la vérité, or

$$P(V|F_1)=\frac{1}{10},\ P(V|F_2)=\frac{5}{10},\ P(V|F_3)=\frac{9}{10}.$$

D'autre part le voyageur a choisi au hasard son informateur, donc :

$$P(F_1)=P(F_2)=P(F_3)=\frac{1}{3}$$

on peut donc utiliser le Théorème de Bayes:

$$P(F_1/V)=\frac{P(V|F_1)P(F_1)}{P(V|F_1)P(F_1)+P(V|F_2)P(F_2)+P(V|F_3)P(F_3)}=\frac{1}{15}$$

Question 3. Dans un champ contenant n fleurs, un papillon vole au hasard de l'une à l'autre. On suppose que lorsqu'il quitte une fleur, il choisit de façon équiprobable la suivante parmi les autres.

a- Quelle est la probabilité pour qu'il revienne pour la première fois au point de départ après $r \leq n-1$ changements de fleur exactement ?

b- Quelle est la probabilité pour qu'après r changements de fleur, il ne se soit jamais posé deux fois sur la même ?

Solution

a- A chaque changement de fleur, le papillon a $n-1$ choix possibles. Les choix successifs sont des événements indépendants. : soit A_i l'événement "au i-ème changement de fleur, le papillon passe d'une fleur différente de la première à celle ci".

$$P(\bar{A}_i) = \frac{n-2}{n-1} \ (i > 1)$$

La probabilité cherchée est :

$$P(\bar{A}_2 \cdots \bar{A}_{r-1} A_r) = P(\bar{A}_2) \cdots P(\bar{A}_{r-1}) P(A_r) = \frac{n-2}{n-1}\frac{n-2}{n-1} \cdots \frac{n-2}{n-1}\frac{1}{n-1} = \frac{(n-2)^{r-2}}{(n-1)^{r-1}}$$

b- nombre de cas possibles : $(n-1)^r$
Nombre de cas favorables : après s' étre posé sur la i-ème fleur, le papillon doit choisir la suivante parmi les $(n-i)$ fleurs qu'il n'a pas encore visitées. Il y a donc :

$$(n-1)(n-2)\ldots(n-r) = \frac{(n-1)!}{(n-r-1)!}$$

cas favorables. C'est évidemment le nombre d'arrangements de r objets pris parmi $n-1$. D'où la probabilité cherchée :

$$\frac{(n-1)!}{(n-1)^r (n-r-1)!}.$$

Question 4. Soit un dé à six faces dont deux sont peintes en rouge, deux en jaune et deux en bleu.

a- L'expérience consiste à "lancer deux fois le dé" (ou de façon équivalente "on lance deux dés qui sont identiques"). Décrire l'ensemble fondamental associé à cette expérience et donner la probabilité associée aux issues de cette expérience ?
Solution
Pour un dé $\Omega = \{R, J, B\}$ avec $P(R) = P(J) = P(B) = 1/3$.
Pour deux dés $\Omega = \{(R,R), (R,J), (R,B), (J,R), (J,J), (J,B), (B,R), (B,J), (B,B)\}$. La probabilité de chaque couple étant $1/9$.

b- On lance ce dé jusqu'à l'obtention d'une face rouge. Décrire un ensemble fondamental associé à cette expérience.
Quelle distribution (loi) de probabilités lui attribuez-vous ?
On posera $\bar{R} = \{$ face non rouge$\}$.
Solution
Désignons par $\bar{R}$ l'événement "non rouge" : $\bar{R} = J \cup B$. $\Omega = \{R, \bar{R}R, \bar{R}\bar{R}R, \bar{R}\bar{R}\bar{R}R, \ldots\}$.
Solution
$P(\bar{R}\bar{R}\bar{R}\ldots\bar{R}R) = (\frac{2}{3})^{n-1}\frac{1}{3}$, où n est le nombre de lancers pour obtenir la première face rouge.

c- Deux personnes A et B jouent dans cet ordre avec la règle précédente (cf b). Le premier qui obtient une face rouge a gagné.
Quelles sont les probabilités de gain pour chacun des joueurs (le jeu peut durer indéfiniment) ?
Solution

$$\begin{aligned} P(Agagne) &= P(R) + P(\bar{R}\bar{R}R) + P(\bar{R}\bar{R}\bar{R}\bar{R}R) + \dots \\ &= \frac{1}{3} + (\frac{2}{3})^2\frac{1}{3} + (\frac{2}{3})^4\frac{1}{3} + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(\frac{2}{3})^{2k}\frac{1}{3} = \frac{1}{3}\frac{1}{1-(2/3)^2}. \end{aligned}$$

$P(Bgagne) = \sum_{k=0}^{\infty}(\frac{2}{3})^{2k+1}\frac{1}{3} = \frac{2}{9}\frac{1}{1-(2/3)^2}$.