SY01/P03 - Corrigé du Test

Question 1. Un voyageur traversant une frontière passe en général successivement les contrôles suivants :
police du pays qu'il quitte - douane du pays où il entre - police du pays où il entre. Considèrons les événements suivants :
A : "le voyageur est contrôlé au premier poste de police"
B : "le voyageur est contrôlé à la douane "
C : "le voyageur est contrôlé au deuxième poste de police"
On suppose connues les probabilités de A, B, C, $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$ et $A \cap B \cap C$. Quelle est la probabilité que le voyageur soit contrôlé au moins une fois ?
Corrigé
Il s'agit de $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.

Question 2. Il y a un concours de pronostics sur la finale d'un tournoi d'escrime qui oppose un français et un américain. Parmi les participants la moitié sont des anglais, un tiers de français et un sixième des suisses.
Parmi les anglais, 60% prévoient l'américain comme gagnant de la finale et 40% prévoient le français. Chez les français, 30% prévoient l'américain et 70% prévoient le français, enfin chez les suisses 90% prévoient l'américain et 10% prévoient le français. On tire une personne au hasard parmi les participants. Elle prévoit le français gagnant. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un citoyen anglais ?
Corrigé
$A = \{$anglais $\}$, $F = \{$français $\}$ et $S = \{$suisse $\}$ avec $P(A) = 1/2$, $P(F) = 1/3$ et $P(S) = 1/6$,
$GF = \{$ gagnant français $\}$, $GA = \{$ gagnant américain $\}$
$P(GF|A) = 0.4$, $P(GF|F) = 0.7$ et $P(GF|S) = 0.1$
$P(GA|A) = 0.6$, $P(GA|F) = 0.3$ et $P(GA|S) = 0.9$
$P(A|GF) = \frac{P(GF|A)P(A)}{P(GF|A)P(A)+P(GF|F)P(F)+P(GF|S)P(S)} = \frac{4}{9}$ (d'après la formule de Bayes).

Question 3. Soient A, B, C trois événements de $\mathcal{P}(\Omega)$. On suppose que chacun d'eux est non négligeable[1] et non certain[2].

i- Montrer que si A est indépendant de $B \cap C$ et de $B \cap \bar{C}$ alors A est indépendant de B.
Corrigé
$P(A \cap B) = P((A \cap B) \cap C) + P((A \cap B) \cap \bar{C}) = P(A \cap (B \cap C)) + P(A \cap (B \cap \bar{C}))$ et par indépendace on a $P(A \cap B) = P(A)(P(B \cap C) + P(B \cap \bar{C}))$ d 'où $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

ii- Montrer que A et B ne peuvent pas être simultanément incompatibles et indépendants.
Corrigé
Supposons qu'ils sont simultanément incompatibles et indépendants, on a d'une part $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ par indépendance et d'autre part $P(A \cap B) = 0$. Ce qui conduit à $P(A)P(B) = 0$ donc ou bien $P(A) = 0$ impossible par hypothèse, ou bien $P(B) = 0$ impossible ou bien les deux probabilités nulles, ce qui est impossible.

iii- Si $\Omega = A \cup B$, A et B peuvent -ils être indépendants ?
Corrigé
D'une part on a $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$ la dernière égalité si indépendance. D'autre part $P(A \cup B) = P(\Omega) = 1$. Ce qui nous conduit à $P(\bar{A}) = P(B)P(\bar{A})$. Or $P(\bar{A})$ n'est ni nulle, ni égale à 1 par hypothèse et $P(B)$ ne vaut pas 1, donc l'égalité est impossible donc A et B ne peuvent pas être indépendants.

[1] un événement est négligeable si sa probabilité est nulle.
[2] un événement est certain si sa probabilité est égale à un.

Question 4. Dans une urne il y a dix boules numérotées de 0 à 9.
On tire deux boules au hasard en même temps.

a- Décrire Ω l'espace fondamental associé à cette expérience aléatoire.
Corrigé
$\Omega = \{(x, y) \in \{0, \cdots, 9\}^2; x < y\}$ ou $\tilde{\Omega} = \{(x, y) \in \{0, \cdots, 9\}^2; x \neq y\}$.

b- Soit X la variable aléatoire donnant le plus petit des nombres portés par les deux boules. Donner $E = X(\Omega)$. Soit $x \in E$, donner $X^{-1}(x)$.
Corrigé
$E = X(\Omega) = \{0, \cdots, 8\}$
Pour $x \in X(\Omega)$, $X^{-1}(x) = \{(x, y) \in \Omega\ ; y \in \{x + 1, \cdots, 9\}\}$.

Question 5. Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition donnée par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1, \\ 1/8 & \text{si} \quad 1 \leq x < 2, \\ 1/2 & \text{si} \quad 2 \leq x < 3, \\ 5/8 & \text{si} \quad 3 \leq x < 4, \\ 7/8 & \text{si} \quad 4 \leq x < 6, \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 6. \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de X. Calculer l' espérance $E[X]$.
   Corrigé
   $E = X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 6\}$
   $P_X(1) = 1/8$, $P_X(2) = 3/8$, $P_X(3) = 1/8$, $P_X(4) = 2/8$ et $P_X(6) = 1/8$.
   $E[X] = 1 \times 1/8 + 2 \times 3/8 + 3 \times 1/8 + 4 \times 2/8 + 6 \times 1/8 = 3$.

2. Soient Y et Z deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé que X.
   La loi de Y est donnée par $Y(\Omega) = \{1, 2, 3\}$ et $P_Y(1) = P_Y(3) = 1/4$.
   Z est de loi uniforme (i.e. équirépartie) sur $Z(\Omega) = \{1, 2\}$
   Retrouver $E[X]$ en utilisant le fait que $X = YZ$.
   Corrigé
   $E[X] = E[YZ]$ et par indépendance $E[X] = E[Y]E[Z]$, or $E[Y] = 1 \times 1/4 + 2 \times 1/2 + 3 \times 1/4 = 2$ et $E[Z] = 1 \times 1/2 + 2 \times 1/2 = 3/2$. On retrouve bien $E[X] = 3$ calculée en 1.