(1) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace de probabilité.

(a) **Question de cours.** Donner la formule de Poincaré pour $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{F}$.

Correction (0,5 pt). La formule de Poincaré donne la probabilité d'une union finie d'événements non nécessairement disjoints. On a

$$\mathbf{P} \left[\bigcup_{i=1}^n E_i \right] = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \mathbf{P} [E_{i_1} \cap \dots \cap E_{i_k}],$$

ce qui signifie que l'on ajoute pour tout k impair (et on retranche pour tout k pair) les probabilités de toutes les intersections de k événements pris parmi les n . Il y a donc, dans chaque somme, autant de termes qu'il y a de sous-famille non ordonnées de k événements parmi les n , c'est à dire de combinaisons de k éléments parmi n . Il y en a bien sûr C_n^k . $\square$

(b) Appliquer cette formule pour $n = 4$.

Correction (1 pt). Pour $n = 4$, cela donne donc

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left[\bigcup_{i=1}^4 E_i \right] &= \sum_{1 \leq i_1 \leq 4} \mathbf{P} [E_{i_1}] - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq 4} \mathbf{P} [E_{i_1} \cap E_{i_2}] \\ &\quad + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq 4} \mathbf{P} [E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap E_{i_3}] - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq 4} \mathbf{P} [E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap E_{i_3} \cap E_{i_4}] \\ &= \sum_{i=1}^4 \mathbf{P} [E_i] - \sum_{\text{familles non ordonnées } \{i_1, i_2\} \text{ de 2 ev. parmi 4}} \mathbf{P} [E_{i_1} \cap E_{i_2}] \\ &\quad + \sum_{\text{familles non ordonnées } \{i_1, i_2, i_3\} \text{ de 3 ev. parmi 4}} \mathbf{P} [E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap E_{i_3}] \\ &\quad - \sum_{\text{familles non ordonnées } \{i_1, i_2, i_3, i_4\} \text{ de 4 ev. parmi 4}} \mathbf{P} [E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap E_{i_3} \cap E_{i_4}] \\ &= \mathbf{P} [E_1] + \mathbf{P} [E_2] + \mathbf{P} [E_3] + \mathbf{P} [E_4] \\ &\quad - (\mathbf{P} [E_1 \cap E_2] + \mathbf{P} [E_1 \cap E_3] + \mathbf{P} [E_1 \cap E_4] + \mathbf{P} [E_2 \cap E_3] + \mathbf{P} [E_2 \cap E_4] + \mathbf{P} [E_3 \cap E_4]) \\ &\quad + (\mathbf{P} [E_1 \cap E_2 \cap E_3] + \mathbf{P} [E_1 \cap E_2 \cap E_4] + \mathbf{P} [E_1 \cap E_3 \cap E_4] + \mathbf{P} [E_2 \cap E_3 \cap E_4]) \\ &\quad + \mathbf{P} [E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4]. \end{aligned}$$

J'ai beaucoup détaillé pour aider à bien visualiser la formule. Evidemment ce développement n'était pas attendu sur la copie. Remarquez qu'en imposant que $i_1 < i_2 < i_3 < \dots$, on obtient bien les sous familles *non ordonnées* de k évènements. Par exemple, pour $k = 3$ ici, l'ensemble $\{1, 2, 4\}$ égale l'ensemble $\{2, 1, 4\}$ (l'intersection des évènements correspondants est la même par commutativité de " $\cap$ ".) Donc, en imposant que $i_1 = 1, i_2 = 2$ et $i_3 = 4$ et que l'on ne peut pas avoir $i_1 = 2, i_2 = 1$ et $i_3 = 4$ (les indices sont classés par ordre croissant), on évite de compter deux fois cette même famille. $\square$

(2) On a observé statistiquement que dans la population, en octobre, 80% des malades de la grippe A toussent, 20% des malades de la grippe saisonnière classique toussent, et 10% des gens atteints d'aucune grippe (ni la A, ni la saisonnière) toussent. Par ailleurs, 90% de la population ne contractera aucune grippe en octobre, et les quatre cinquièmes des malades de grippe sont atteints de la grippe saisonnière. Dans le métro, mon voisin tousse. Quel est la probabilité qu'il soit atteint de la grippe A?

Correction (2 pts). L'expérience aléatoire est le "tirage" d'une personne au hasard dans la population. L'espace fondamental Ω est donc l'ensemble de la population, munie de

la probabilité uniforme (il y a équiprobabilité entre les individus). Nous allons noter les évènements suivants (qui sont donc des ensembles d'individus):

- $A = \{\text{Individus atteints de la grippe A}\};$
- $B = \{\text{Individus atteints de la grippe saisonnière}\};$
- $C = \{\text{Individus atteints d'aucune grippe}\};$
- $T = \{\text{Individus qui toussent}\}.$

On cherche donc $\mathbf{P}[A | T]$. Bien sûr, les évènements A, B et C forment une partition de Ω . On peut donc appliquer la formule de Bayes:

$$\mathbf{P}[A | T] = \frac{\mathbf{P}[T | A] \mathbf{P}[A]}{\mathbf{P}[T | A] \mathbf{P}[A] + \mathbf{P}[T | B] \mathbf{P}[B] + \mathbf{P}[T | C] \mathbf{P}[C]}.$$

On a par hypothèse, $\mathbf{P}[T | A] = 0,8$, $\mathbf{P}[T | B] = 0,2$, $\mathbf{P}[T | C] = 0,1$ et $\mathbf{P}[C] = 0,9$. Il nous manque donc $\mathbf{P}[A]$ et $\mathbf{P}[B]$. On a d'une part $\mathbf{P}[A] + \mathbf{P}[B] = 1 - \mathbf{P}[C] = 0,1$. Par ailleurs, $\mathbf{P}[B] = \frac{4}{5} \cdot \mathbf{P}[A \cup B] = \frac{4}{5} \cdot (\mathbf{P}[A] + \mathbf{P}[B]) = \frac{4}{5} \cdot 0,1 = 0,08$. Donc, $\mathbf{P}[A] = 0,1 - 0,08 = 0,02$. En conclusion,

$$\mathbf{P}[A | T] = \frac{0,8 \cdot 0,02}{0,8 \cdot 0,02 + 0,2 \cdot 0,08 + 0,1 \cdot 0,9} \simeq 0,13.$$

□

- (3) On dispose d'une urne contenant 9 boules, indistinguables au toucher. 3 d'entre elles sont noires, 3 d'entre elles sont jaunes et les 3 dernières sont rouges. On prélève successivement et sans remise 6 boules parmi les 9 et on les aligne dans l'ordre où elles ont été prélevées.

- (a) Quel est l'espace fondamental? Préciser son cardinal, et la mesure de probabilité dont il est muni.

Correction (0,5 pt). Comme l'ordre aura son importance, on considère des arrangements des 9 boules. L'espace fondamental est donc l'ensemble des arrangements de 6 éléments parmi 9 et son cardinal est A_9^6 . Comme les boules sont indistinguables au toucher, on le munit de la probabilité uniforme. □

- (b) Quel est la probabilité de l'événement $A = \text{"Prélever 2 boules de chaque couleur"}$?

Correction (0,5 pt). A s'écrit donc comme l'ensemble des arrangements des 2 boules de chaque couleur. Son cardinal est le nombre de sous-familles de 2 rouges parmi les 3 (c'est à dire C_3^2) fois le nombre de sous-familles de 2 jaunes parmi les 3 (C_3^2) fois le nombre de sous-familles de 2 noires parmi les 3 (C_3^2) fois le nombre de façons d'ordonner ces 6 boules, c'est à dire $A_6^6 = 6!$. Donc,

$$\mathbf{P}[A] = \frac{\text{Card}A}{\text{Card}\Omega} = \frac{(C_3^2)^3 6!}{A_9^6} = \frac{9}{28}$$

(l'application numérique n'était pas attendue).

Remarque: Si l'on ne veut répondre qu'à cette question, où l'ordre ne compte pas, où pouvait raisonner avec des combinaisons (mais cela n'aurait plus marché pour la suite de l'exercice, où l'ordre a une importance!). Prenons $\tilde{\Omega}$, l'ensemble des combinaisons de 6 boules parmi les 9 (son cardinal est C_9^6), et $\mathbf{P}$ la proba uniforme sur $\tilde{\Omega}$ (toutes les combinaisons sont équiprobables, bien sûr). Alors A s'écrit comme l'ensemble des sous ensembles des 9 boules contenant 2 boules de chaque couleur. Il a C_3^2 possibilités pour les 2 rouges, et idem pour les deux autres couleurs. Donc

$$\mathbf{P}[A] = \frac{\text{Card}A}{\text{Card}\tilde{\Omega}} = \frac{(C_3^2)^3}{C_9^6} = \frac{9}{28},$$

et l'on retrouve (heureusement!) le même résultat. □

- (c) Soit $B = \text{"Faire apparaître 2 fois successivement le drapeau de la Belgique"}$ (on rappelle que c'est Noir-Jaune-Rouge, dans cet ordre). Calculer $\mathbf{P}[B | A]$, et en déduire $\mathbf{P}[B]$.

Correction (1 + 0,5 pt). La question n'était pas très bien posée, car il était en fait plus simple de calculer directement $\mathbf{P}[B]$ puis d'en déduire $\mathbf{P}[B | A]$. Nous en tiendrons compte dans la correction. L'événement B est l'ensemble des arrangements de 6 boules parmi les 9 qui s'écrivent NJRNJR (avec des abréviations évidentes). Il y a A_3^2 possibilités pour les N (le nombre de 2-listes ordonnées des boules noires), et idem pour les J et les R. Donc

$$\mathbf{P}[B] = \frac{\text{Card}B}{\text{Card}\Omega} = \frac{(A_3^2)^3}{A_9^6} = \frac{1}{280}.$$

Ensuite, $\mathbf{P}[B | A]$ s'écrit bien sûr

$$\mathbf{P}[B | A] = \frac{\mathbf{P}[B \cap A]}{\mathbf{P}[A]} = \frac{\mathbf{P}[B]}{\mathbf{P}[A]} = \frac{1}{90},$$

où l'on utilise au passage le fait que B est inclus dans A . □

- (d) Calculer la probabilité de l'événement $C =$ "Faire apparaître au moins une fois le drapeau de la Belgique".

Correction (1 pt). L'événement C est l'ensemble des arrangements de 6 boules parmi les 9 qui font apparaître au moins 1 fois NJR. Son cardinal s'écrit comme le nombre de places possibles pour ce triplé (il y en a 4: il peut commencer à n'importe quelle place entre la première et la quatrième), fois le nombre d'"identités" possibles pour ces 3 boules (3^3 : 3 N possibles, fois 3 J possibles, fois 3 R possibles), fois le nombre de triplets possibles que l'on peut obtenir pour les 3 autres boules tirées (c'est à dire le nombre d'arrangements de 3 boules parmi les 6 autres boules, qui ne sont pas apparues dans le drapeau: il y en a donc A_6^3). Finalement, on a donc

$$\mathbf{P}[C] = \frac{\text{Card}C}{\text{Card}\Omega} = \frac{4 \cdot 3^3 \cdot A_6^3}{A_9^6} = \frac{3}{14}.$$

□

- (4) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace de probabilité, et A et B , deux événements indépendants tels que $\mathbf{P}[A] = \frac{1}{3}$ et $\mathbf{P}[A \cup B] = \frac{1}{2}$.

- (a) Montrer que $\mathbf{P}[B] = \frac{1}{4}$.

Correction (0,5 pt). On a

$$\mathbf{P}[A \cup B] = \mathbf{P}[A] + \mathbf{P}[B] - \mathbf{P}[A \cap B] = \mathbf{P}[A] + \mathbf{P}[B] - \mathbf{P}[A]\mathbf{P}[B],$$

puisque A et B sont indépendants. Donc,

$$\mathbf{P}[B] = \mathbf{P}[A \cup B] - \mathbf{P}[A] + \mathbf{P}[A]\mathbf{P}[B],$$

ce qui revient à dire que

$$\mathbf{P}[B] = \frac{\mathbf{P}[A \cup B] - \mathbf{P}[A]}{1 - \mathbf{P}[A]} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$$

□

- (b) Donner la loi des variables aléatoires $\mathbf{1}_A$ et $\mathbf{1}_B$.

Correction (0,5 + 0,5 pt). C'est une question de cours car ce sont deux v.a. indicatrices simples. La v.a. $\mathbf{1}_A$ est à valeurs dans $\{0, 1\}$ et

$$\mathbf{P}[\mathbf{1}_A = 1] = \mathbf{P}[A] = \frac{1}{3}; \quad \mathbf{P}[\mathbf{1}_A = 0] = \mathbf{P}[\bar{A}] = \frac{2}{3},$$

(c'est donc une loi $Ber(\frac{1}{3})$). De même,

$$\mathbf{P}[\mathbf{1}_B = 1] = \mathbf{P}[B] = \frac{1}{4}; \quad \mathbf{P}[\mathbf{1}_B = 0] = \mathbf{P}[\bar{B}] = \frac{3}{4}.$$

□

- (c) Soit la variable aléatoire $X = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B$. Quel est l'espace d'état de X ? Donner sa loi et sa fonction de répartition.

Correction (1 + 1 pts). La v.a. X peut prendre les valeurs 0 (les deux indicatrices sont nulles), 1 (l'une des deux seulement vaut 1) ou 2 (les deux valent 1). Son espace d'état est donc $\{0, 1, 2\}$. Calculons sa loi:

- $\mathbf{P}[X = 0] = \mathbf{P}[\{\mathbf{1}_A = 0\} \cap \{\mathbf{1}_B = 0\}] = \mathbf{P}[\bar{A} \cap \bar{B}] = \mathbf{P}[A \bar{\cup} B]$
 $= 1 - \mathbf{P}[A \cup B] = \frac{1}{2}$;
- $\mathbf{P}[X = 1] = \mathbf{P}[(\{\mathbf{1}_A = 1\} \cap \{\mathbf{1}_B = 0\}) \cup (\{\mathbf{1}_A = 0\} \cap \{\mathbf{1}_B = 1\})]$
 $= \mathbf{P}[\{\mathbf{1}_A = 1\} \Delta \{\mathbf{1}_B = 1\}] = \mathbf{P}[A \Delta B] = \mathbf{P}[A \cup B] - \mathbf{P}[A \cap B]$,
 puisque $A \cap B$ et $A \Delta B$ forment clairement une partition de $A \cup B$. Finalement,

$$\mathbf{P}[X = 1] = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{12}.$$

- $\mathbf{P}[X = 2] = \mathbf{P}[\{\mathbf{1}_A = 1\} \cap \{\mathbf{1}_B = 1\}] = \mathbf{P}[A \cap B] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$.

On veut maintenant écrire la fonction de répartition F_X de X . Il suffit pour cela, de se placer sur chaque intervalle séparant les valeurs possibles de X :

- Pour tout $t \in]-\infty, 0[$, $F_X(t) = \mathbf{P}[X \leq t] = 0$;
- Pour tout $t \in [0, 1[$, $F_X(t) = \mathbf{P}[X \leq t] = \mathbf{P}[X = 0] = \frac{1}{2}$,
- Pour tout $t \in [1, 2[$, $F_X(t) = \mathbf{P}[X \leq t] = \mathbf{P}[X = 0] + \mathbf{P}[X = 1] = \frac{11}{12}$,
- Pour tout $t \in [2, +\infty[$, $F_X(t) = \mathbf{P}[X \leq t] = \mathbf{P}[X = 0] + \mathbf{P}[X = 1] + \mathbf{P}[X = 2] = 1$.

Autrement dit, on a pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$F_X(t) = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{[0, 1[}(t) + \frac{7}{12} \mathbf{1}_{[1, 2[}(t) + \mathbf{1}_{[2, +\infty[}(t) = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{[0, +\infty[}(t) + \frac{5}{12} \mathbf{1}_{[1, +\infty[}(t) + \frac{1}{12} \mathbf{1}_{[2, +\infty[}(t).$$

(si vous n'êtes pas sûrs, vérifiez que ces deux écritures sont égales pour tout t !). $\square$