NOM :

PRENOM :

Groupe ou horaire de TD :

Barème (1.5, 3, 3, 2.5)

La rédaction est très importante ! Justifier clairement toutes vos réponses.

- (1) **Question de cours.** Soit X , une v.a. absolument continue admettant un moment d'ordre 2. Énoncer et démontrer l'inégalité de Bienaymé-Tchebitcheff.

Corrigé (0.5 + 1 pts). La formule de B.T. est la suivante pour une v.a. de carré intégrable: pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbf{P} [| X - \mathbf{E}[X] | \geq \varepsilon] \leq \frac{\text{Var}[X]}{\varepsilon^2}.$$

En effet, on a

$$\mathbf{P} [| X - \mathbf{E}[X] | \geq \varepsilon] = \mathbf{E} [\mathbf{1}_{|X - \mathbf{E}[X]| \geq \varepsilon}] = \int_{\mathbf{R}} \mathbf{1}_A(x) f_X(x) dx,$$

où A s'écrit

$$A = \{x \in \mathbf{R}; | x - \mathbf{E}[X] | \geq \varepsilon\}.$$

Or, pour tout $x \in A$,

$$\mathbf{1}_A(x) = 1 \leq \frac{|x - \mathbf{E}[X]|}{\varepsilon} \leq \frac{(x - \mathbf{E}[X])^2}{\varepsilon^2},$$

où l'on a d'abord utilisé que $|x - \mathbf{E}[X]| \geq \varepsilon$, puis que tout réel supérieur ou égal à 1 est inférieur ou égal à son carré. On a donc

$$\mathbf{P} [| X - \mathbf{E}[X] | \geq \varepsilon] \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathbf{R}} (x - \mathbf{E}[X])^2 f_X(x) dx = \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{E} [(X - \mathbf{E}[X])^2] = \frac{\text{Var}[X]}{\varepsilon^2},$$

par définition de la variance de X . □

(2) Soit X , une v.a. admettant une densité f_X telle que:

- f_X est paire;
- f_X est nulle sur $]2, +\infty[$;
- f_X est constante, égale à $1/3$, sur $[0, 1]$;
- f_X est constante, égale à β , sur $[1, 2]$.

(a) Sans calcul, déterminer l'espérance et la médiane de la loi de X ;

Corrigé (0.5 + 0.5 pts). On a vu en cours que $\mathbf{E}[X] = 0$ dès que f_X est paire, ce qui est le cas ici. Par ailleurs, on a en faisant le changement de variable $y = -x$, et par parité de f_X ,

$$\mathbf{P}[X \leq 0] = \int_{-\infty}^0 f_X(x) dx = - \int_0^{-\infty} f_X(-y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(y) dy = \mathbf{P}[X \geq 0],$$

donc 0 est également une médiane de la loi de X . Comme la f.d.r. de X est continue en ce point, cette médiane est unique. $\square$

(b) Déterminer β ;

Corrigé (0.5 pt). Il suffit de poser que $\int_{\mathbf{R}} f_X(x) dx = 1$, ou encore, par parité de f_X , que $\int_0^{+\infty} f_X(x) dx = \frac{1}{2}$. L'intégrale précédente consiste en la somme de l'aire du premier rectangle (entre les abscisses 0 et 1), qui vaut $\frac{1}{3}$, plus celle du deuxième (entre les abscisses 1 et 2), qui vaut β . Donc, $\beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. En d'autres termes, on a pour tout $x \in \mathbf{R}$, par symétrie,

$$f_X(x) = \frac{1}{6} \mathbf{1}_{[-2, -1]}(x) + \frac{1}{3} \mathbf{1}_{[-1, 0]}(x) + \frac{1}{3} \mathbf{1}_{[0, 1]}(x) + \frac{1}{6} \mathbf{1}_{[1, 2]}(x).$$

$\square$

(c) Déterminer F_X , la fonction de répartition de X ;

Corrigé (1 pt). Comme d'habitude, on "découpe" la droite réelle suivant la valeur de l'argument x de F_X .

- Tout d'abord, pour tout $x < -2$,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0.$$

- Ensuite, pour tout $x \in [-2, -1[$,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \int_{-\infty}^{-2} 0 dt + \int_{-2}^x \frac{1}{6} dt = \frac{x}{6} + \frac{1}{3};$$

- De même, pour tout $x \in [-1, 0[$,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{-2} 0 dt + \int_{-2}^{-1} \frac{1}{6} dt + \int_{-1}^x \frac{1}{3} dt = \frac{1}{6} + \frac{x+1}{3} = \frac{x}{3} + \frac{1}{2};$$

- Pour tout $x \in [0, 1[$,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{6} dt + \int_{-1}^0 \frac{1}{3} dt + \int_0^x \frac{1}{3} dt = \frac{x}{3} + \frac{1}{2};$$

- Pour tout $x \in [1, 2[$,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{6} dt + \int_{-1}^0 \frac{1}{3} dt + \int_0^1 \frac{1}{3} dt + \int_1^x \frac{1}{6} dt = \frac{5}{6} + \frac{x-1}{6} = \frac{x}{6} + \frac{2}{3};$$

- Pour tout $x \geq 2$,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{6} dt + \int_{-1}^0 \frac{1}{3} dt + \int_0^1 \frac{1}{3} dt + \int_1^2 \frac{1}{6} dt = 1.$$

On remarque en particulier que F_X est bien continue sur $\mathbf{R}$. $\square$

(d) Calculer $Var[X]$.

Corrigé (0.5 pt). Comme X est centrée (i.e. d'espérance nulle), sa variance égale son moment d'ordre 2. Donc $\text{Var}[X] = \mathbf{E}[X^2] = \int_{\mathbf{R}} t^2 f_X(t) dt$. Pour aller plus vite, remarquons que la fonction $t \mapsto t^2 f_X(t)$ est paire, donc l'intégrale précédente vaut

$$2 \int_0^{+\infty} t^2 f_X(t) dt = 2 \left(\int_0^1 \frac{t^2}{3} dt + \int_1^2 \frac{t^2}{6} dt \right) = 2 \left(\left[\frac{t^3}{9} \right]_0^1 + \left[\frac{t^3}{18} \right]_1^2 \right) = 2 \frac{9}{18} = 1.$$

□

(3) Soit U , une v.a. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, de densité donnée pour tout x réel par

$$f_U(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

(a) Calculez la densité de la v.a. $V = \frac{U}{2}$ par changement de variable, et retrouver la loi de V .

Corrigé (1.5 pt). Soit Φ , une fonction mesurable $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ telle que l'intégrale suivante existe. On a

$$\mathbf{E}[\Phi(V)] = \mathbf{E}[\Phi(U/2)] = \mathbf{E}[\Psi(U)],$$

où la fonction Ψ définie par $\Psi(u) = \Phi(u/2)$ pour tout réel u est bien mesurable en tant que composée de fonctions mesurables. Donc, par définition,

$$\mathbf{E}[\Phi(V)] = \mathbf{E}[\Psi(U)] = \int_{\mathbf{R}} \Psi(u) f_U(u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi\left(\frac{u}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

On fait dans l'intégrale précédente le changement de variable $v = u/2$, ce qui implique que la différentielle $du = 2dv$. On a donc:

$$\mathbf{E}[\Phi(V)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(v) \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(2v)^2}{2}} dv.$$

Or, cette espérance égale $\int_{\mathbf{R}} \Phi(v) f_V(v) dv$ par définition, où f_V désigne la densité de V . Par identification, on a donc pour tout v

$$f_V(v) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(2v)^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{1}{4}}} e^{-\frac{v^2}{2(\frac{1}{4})}}.$$

f_V écrite sous cette dernière forme, on voit bien que $V \sim \mathcal{N}\left(0; \frac{1}{4}\right)$. On retrouve bien le résultat du cours sur les transformations linéaires de lois Gaussiennes. □

(b) Retrouvez ce résultat en passant par les fonctions de répartition de U et V .

Corrigé (1.5 pt). Retrouvons le résultat précédent en passant par les fonctions de répartition (que l'on ne connaît pas, d'ailleurs!) On a pour tout $v \in \mathbf{R}$,

$$F_V(v) = \mathbf{P}[V \leq v] = \mathbf{P}\left[\frac{U}{2} \leq v\right] = \mathbf{P}[U \leq 2v] = F_U(2v).$$

On sait que la f.d.r. d'une loi normale est dérivable en tout point, et que sa dérivée vaut précisément la densité de la loi. Donc, pour tout v , $f_V(v) = (F_V)'(v) = \frac{dG}{dv}(v)$, où $G(v) = F_U(2v)$ pour tout v . Donc, en dérivant cette fonction composée en v on obtient

$$f_V(v) = 2 (F_U)'(2v) = 2 f_U(2v) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(2v)^2}{2}}.$$

On retrouve bien le résultat précédent. □

- (4) Soient X et Y , deux v.a. indépendantes, de lois respectives $\mathcal{U}([0, 1])$ et $\varepsilon(1)$. On rappelle que Y a pour densité $f_Y(y) = e^{-y}\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}(y)$ pour tout $y \in \mathbf{R}$. Donner la densité de la v.a. $X + Y$ (on pourra utiliser la convolution).

Corrigé (2.5 pts). Comme les deux v.a. sont indépendantes, on peut appliquer la convolution. Pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$f_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x-y)f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{1}_{[0,1]}(x-y)e^{-y}\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}(y) dy.$$

Or,

- Pour tout $x < 0$, $\mathbf{1}_{[0,1]}(x-y)\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}(y) = 0$ puisque y doit être positif et inférieur à x ;
- Pour tout $x \in [0, 1[$, $\mathbf{1}_{[0,1]}(x-y)\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}(y) = \mathbf{1}_{[0,x]}(y)$ car y doit être inférieur à x , et est forcément supérieur à $x-1$ qui est négatif;
- Pour tout $x \geq 1$, $\mathbf{1}_{[0,1]}(x-y)\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}(y) = \mathbf{1}_{[x-1,x]}(y)$, car $0 \leq x-y \leq 1$ implique alors $x-1 \leq y \leq x$.

Finalement, on a donc

$$\begin{aligned} f_{X+Y}(x) &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{1}_{[0,x]}(y)e^{-y} dy \right) \mathbf{1}_{[0,1[}(x) + \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{1}_{[x-1,x]}(y)e^{-y} dy \right) \mathbf{1}_{[1,+\infty[}(x) \\ &= \left(\int_0^x e^{-y} dy \right) \mathbf{1}_{[0,1[}(x) + \left(\int_{x-1}^x e^{-y} dy \right) \mathbf{1}_{[1,+\infty[}(x) \\ &= \left([-e^{-y}]_0^x \right) \mathbf{1}_{[0,1[}(x) + \left([-e^{-y}]_{x-1}^x \right) \mathbf{1}_{[1,+\infty[}(x) \\ &= (1 - e^{-x}) \mathbf{1}_{[0,1[}(x) + \left(e^{-(x-1)} - e^{-x} \right) \mathbf{1}_{[1,+\infty[}(x). \end{aligned}$$

□