SY01 Test 1-26/03/10
Semestre Printemps 09-10
Durée : 30mn
DOCUMENTS INTERDITS
SUR 10.5 PTS

Exercice 1. (2pts)

1. Donner la définition d'une tribu $\mathcal{F}$ sur l'univers Ω, relativement à une expérience aléatoire $\mathcal{E}$.
2. En utilisant la définition d'une tribu, montrer que si A et B sont deux éléments de $\mathcal{F}$, alors $A\Delta B$ est aussi un élément de $\mathcal{F}$.
   Rappel : $A\Delta B = (A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})$, *où* $\overline{B}$ *et* $\overline{A}$ *désignent les complémentaires de* B*, respectivement de* A*, dans* Ω.

Correction.

1. Voir cours
2. La propriété 2) de la définition d'une tribu, implique que $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont des éléments de $\mathcal{F}$ dès lors que A, B le sont. La propriété 3) de la définition d'une tribu, implique que $A\cup\overline{B}$ et $B\cup\overline{A}$ sont des éléments de $\mathcal{F}$ puisque $A, B, \overline{A}, \overline{B}$ le sont.
   En écrivant $(B\cap\overline{A}) = \overline{(A\cup\overline{B})}$ et $(A\cap\overline{B}) = \overline{(B\cup\overline{A})}$, et d'après les propriétés 2) et 3), nous pouvons en déduire que $A\Delta B$ est un élément de de $\mathcal{F}$.

Exercice 2. (2.5pts) On place huit boules dans une urne, dont : $\begin{cases} \text{5 blanches numérotées 1-1-2-2-2 ,} \\ \text{3 grises numérotées 1-1-2 .} \end{cases}$
Les boules de même couleur et portant le même numéro sont indistinguables. On tire au hasard une boule.

1. Décrire l'espace fondamental.
2. Déterminer la probabilité de
   - (a) l'événement A : "la boule tirée porte le numéro 1",
   - (b) l'événement B : "la boule tirée est grise".
3. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Correction.
Notons $BB1$, respectivement $BB2$, $BG1$ et $BG2$ une boule blanche portant le numéro 1, respectivement une boule blanche portant le numéro 2, une boule grise portant le numéro 1 et une boule grise portant le numéro 2.

1. On peut considérer (mais ce n'est pas exhaustif) $\Omega_1 = \{BB1,\ BB2,\ BG1,\ BG2\}$ avec $\mathbb{P}(BG1) = 1/4$, $\mathbb{P}(BG2) = 1/8$, $\mathbb{P}(BB1) = 1/4$ et $\mathbb{P}(BB2) = 3/8$

   ou bien le cas équiprobable avec
   $\Omega_2 = \{$8 boules dont 2 sont grises et portent le numéro 1, 1 est grise et
   porte le numéro 2, 2 sont blanches et portent le numéro 1 et 3 sont blanches et portent le numéro 2 $\}$

2. (a) (b) Si on considère Ω_2 alors : $\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Nombre de boules numérotées 1}}{\text{Nombre de boules dans l'urne}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.
   $\mathbb{P}(B) = \frac{\text{Nombre de boules grises}}{\text{Nombre de boules dans l'urne}} = \frac{3}{8}$.

3. A et B sont indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$. Déterminons $\mathbb{P}(A \cap B)$:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{\text{Nombre de boules grises numérotées 1}}{\text{Nombre de boules dans l'urne}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \neq \frac{3}{8} \times \frac{1}{2}.$$

   A et B ne sont pas des événements indépendants.

Exercice 3. (3pts) On dispose d'un test permettant de diagnostiquer une maladie au sein d'une population. La probabilité que le test détecte la maladie (c'est à dire le test est positif) sur un individu malade est $p = \frac{99}{100}$. De même, la probabilité que le test révèle l'absence de maladie (c'est à dire le test est négatif) sur un individu sain est p.

1. En supposant pour cette question, que la proportion d'individus malades dans la population est $p_M = \frac{1}{200}$, déterminer la probabilité qu'un individu ayant un test positif soit réellement malade.
2. On considère que le test est efficace si, étant positif pour un individu, cet individu est effectivement malade avec une probabilité supérieure ou égale à 0.95. A partir de quelle proportion d'individus atteints par la maladie, le test est-il efficace ?

Correction.
Soient les événements, TP : test positif, TN : test négatif, M : individu malade, S : individu sain. L'énoncé fournit les probabilités suivantes : $\mathbb{P}(TP|M) = p = \mathbb{P}(TN|S)$ et $\mathbb{P}(M) = p_M$.

1. On cherche $\mathbb{P}(M|TP)$. Notons que les événements M et S forment une partition de l'espace. En utilisant la formule de Bayes,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(M|TP) &= \frac{\mathbb{P}(TP|M) \times \mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(TP|M) \times \mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(TP|S) \times \mathbb{P}(S)} \\
&= \frac{p \times p_M}{p \times p_M + (1-p) \times (1-p_M)} \qquad (1) \\
&= \frac{\frac{99}{100} \times \frac{1}{200}}{\frac{99}{100} \times \frac{1}{200} + \frac{1}{100} \times \frac{199}{200}} \\
&= \frac{99}{298} \cong 0.332 \qquad (2)
\end{aligned}$$

2. On cherche p_M telle que $\mathbb{P}(M|TP) \geq 0.95$. En utilisant l'équation (1), l'inéquation en p_M devient,

$$\begin{aligned}
& \frac{p \times p_M}{p \times p_M + (1-p) \times (1-p_M)} &\geq&\ 0.95 \\
\Leftrightarrow\ & p \times p_M &\geq&\ 0.95 \times (p \times p_M + (1-p) \times (1-p_M)) \\
\Leftrightarrow\ & p_M(p - 2 \times p \times 0.95 + 0.95) &\geq&\ 0.95(1-p) \\
\Leftrightarrow\ & p_M(95 - 2 \times 99 \times 0.95 + 99) &\geq&\ 0.95 \\
\Leftrightarrow\ & p_M &\geq&\ 0.161
\end{aligned}$$

Exercice 4. (3pts) Trois marins ivrognes regagnent leur bateau de nuit. Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, soit A_i l'événement "le ième marin retrouve sa propre cabine".

1. Enoncer la formule de Poincaré pour $n = 3$ événements.

2. Exprimer l'événement B: "aucun des marins ne retrouve sa propre cabine" en fonction des événements $(A_i)_{i\in\{1,2,3\}}$.

3. En utilisant la formule de Poincaré, déterminer la probabilité de B.

Correction.

1. Voir cours

2. $B = \overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}$

3.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B) &= 1 - \mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \\
&= 1 - 3\mathbb{P}(A_1) + 3\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\
&= 1 - \frac{3 \times 2!}{3!} + 3\frac{1}{3!} - \frac{1}{3!} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$