SY01 Test 2
Semestre Printemps 09-10
Durée : 30mn
DOCUMENTS ET TÉLÉPHONE PORTABLE INTERDITS
CALCULATRICE AUTORISÉE

NOM :
PRENOM :
Groupe ou Horaire de TD :

Le barême tiendra compte de la rédaction. Justitiez clairement vos réponses.

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Supposons que X soit p.s. positive, c'est à dire $\mathbb{P}(X \geq 0) = 1$. Supposons que X ait pour espérance $m < +\infty$ et pour variance $\sigma^2 \in]0, +\infty[$.
Nous allons appliquer à X un résultat qui porte le nom d'inégalité de Markov et un de ses corollaires.
INÉGALITÉ DE MARKOV. $\forall a > 0, \;\; \mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{m}{a}$.
COROLLAIRE. Pour toute fonction $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, telle que h soit croissante et $\mathbb{E}(h(X)) < +\infty$, et pour tout $a > 0$ tel que $h(a) > 0$, on a

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(h(X))}{h(a)}. \tag{1}$$

1. Démontrer l'inégalité de Markov.
   Indication : interpréter le membre de gauche de (1) comme l'espérance d'une v.a. bien choisie.

2. Après avoir énoncé l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer qu'elle est un cas particulier du corollaire de l'inégalité de Markov.

3. Considérons le cas particulier d'une variable aléatoire Y de densité exponentielle $\mathcal{E}(2)$, c'est à dire de densité $f_Y(y) = 2\exp(-2y)1\!\!1_{\mathbb{R}_+}(y)$ et de la fonction $h(x) = \exp(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, où $1\!\!1_B$ désigne la fonction indicatrice sur le borélien B.
   En appliquant le corollaire à la variable aléatoire $X = |Y - \mathbb{E}(Y)|$, déterminer le plus petit réel positif a tel que $\mathbb{P}(X > a) \leq 0.1$.

Correction.

1. Remarquons que $\mathbb{P}(X \geq a) = \mathbb{E}(1\!\!1_{X \geq a})$. Comme $a > 0$,

$$\begin{aligned} 1\!\!1_{X\geq a} = 1\!\!1_{\frac{X}{a}\geq 1} &\leq \frac{X}{a}\text{p.s.} \\ \Longrightarrow & \\ \mathbb{E}(1\!\!1_{X\geq a}) &\leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a} \text{ l'ordre est conservé en passant à l'espérance} \end{aligned}$$

2. Voir cours pour l'inégalité de B-T. Inégalité de B-T est un cas particulier du corollaire avec $Y = |X - \mathbb{E}(X)|$ et $h(x) = x^2$.

3. En appliquant le corollaire, nous obtenons

$$\mathbb{P}(|Y - \mathbb{E}(Y)| > a) = \mathbb{P}(|Y - \mathbb{E}(Y)| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(\exp(|Y - \mathbb{E}(Y)|))}{\exp(a)}$$

Nous cherchons à déterminer le plus petit $a > 0$ tel que

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbb{E}(\exp(|Y - \mathbb{E}(Y)|))}{\exp(a))} &\leq 0.1 \\
&\Longleftrightarrow \\
10 \times \mathbb{E}(\exp(|Y - \mathbb{E}(Y)|)) &\leq \exp(a)
\end{aligned}$$

Il reste à calculer $\mathbb{E}(\exp(|Y - \mathbb{E}(Y)|))$. Comme $Y \sim \mathcal{E}(2)$, donc $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\exp(|Y - \frac{1}{2}|)) &= \int_0^{\frac{1}{2}} 2\exp(-2y - y + \frac{1}{2})dy + \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} 2\exp(-2y + y - \frac{1}{2})dy \\
&= [-\frac{2}{3}\exp(-3y)]_0^{\frac{1}{2}} \exp(\frac{1}{2}) + [-2\exp(-y)]_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \exp(-\frac{1}{2}) \\
&= \frac{2}{3}(\exp(\frac{1}{2}) - \exp(-1)) + 2\exp(-1) \\
&= \frac{1}{3}\exp(-1) + \frac{2}{3}\exp(\frac{1}{2}).
\end{aligned}$$

$$a \geq \ln(10(\frac{1}{3}\exp(-1) + \frac{2}{3}\exp(\frac{1}{2}))) \Longleftrightarrow a \geq 2.502$$

Remarque Etant donné que nous connaissons la fonction de répartition de Y, à savoir $F_Y(a) = 1 - \exp(-2a) \Longleftrightarrow \mathbb{P}(Y > a) = \exp(-2a)$, la plus petite constante a telle que $\exp(-2a) \leq 0.1 \Longleftrightarrow a \geq 1.15$ est bien meilleure que celle obtenue en ayant utilisé une inégalité supplémentaire. Mais le but de cette question était de savoir manipuler une inégalité de type Markov.

Exercice 2. Soit Y une variable aléatoire de loi exponentielle $\mathcal{E}(\alpha)$, avec $\alpha > 2$ dont la densité est $\alpha \exp(-\alpha x)\mathbb{1}_{x>0}$. Définissons la variable aléatoire réelle $X = \exp(Y)$.

1. Déterminer la fonction génératrice des moments de Y (on précisera son domaine de définition).
2. Déterminer la fonction de répartition de Y.
3. Déterminer la densité de probabilité de X.
4. Déterminer l'espérance et la variance de X.

Correction.

1. Si elle existe, la fonction génératrice de Y, notée $M_Y(t)$ est définie par

$$\begin{aligned} M_y(t) &= \mathbb{E}(\exp(tY)) \\ &= \alpha \int_{y>0} \exp(ty - \alpha y)dy \text{ existe pour } t < \alpha \\ &= \frac{\alpha}{\alpha - t} \end{aligned} \tag{3}$$

2. Notons F_Y la fonction de répartition de Y; elle est définie pour tout $y \in \mathbb{R}$ par :

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad y \leq 0 \\ 1 - \exp(-\alpha y) & \text{si} \quad y > 0 \end{cases}$$

3. Deux démarches possibles :

A) Fonction de répartition F_X de X; remarquons tout d'abord que $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(Y \leq \ln(x)) = 0$ si $x \leq 1$.

$$\begin{aligned} \forall x > 1,\ F_X(x) &= \mathbb{P}(Y \leq \ln(x)) \\ &= 1 - \exp(-\alpha \ln(x)) = 1 - x^{-\alpha} \end{aligned}$$

F_X est dérivable pour tout $x > 1$ de dérivée la densité de X, soit $f_X(x) = \alpha x^{-\alpha-1}\mathbb{1}_{x>1}$.

B) Quelque soit ϕ une fonction borélienne t.q. $\mathbb{E}(\phi(X))$ existe, alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\phi(X)) &= \mathbb{E}(\phi(\exp(Y)) \\ &= \int_0^{+\infty} \phi(\exp(y))\alpha \exp(-\alpha y)dy \\ &= \int \phi(x)\alpha x^{-\alpha-1}\mathbb{1}_{x>1}dx, \end{aligned}$$

avec le changement de variable $x = \exp(y)$ et donc $\frac{dx}{x} = dy$.

4.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}(\exp(Y)) = M_Y(1) = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \\ \mathbb{E}(X^2) &= \mathbb{E}(\exp(2Y)) = M_Y(2) = \frac{\alpha}{\alpha - 2} \\ \mathrm{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{\alpha}{\alpha - 2} - (\frac{\alpha}{\alpha - 1})^2 = \frac{\alpha}{(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)} \end{aligned}$$

Exercice 3. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes. Définissons les fonctions réelles f_X et f_Y par

$$f_X(x) = c \exp(-x) 1\!\!\mathrm{I}_{[0,3]}(x), \quad f_Y(y) = \frac{1}{3} 1\!\!\mathrm{I}_{[0,3]}(y), \text{ avec } c \in \mathbb{R} \ ,$$

où $1\!\!\mathrm{I}_B$ désigne la fonction indicatrice sur le borélien B.

1. Déterminer la constante c telle que f_X soit une densité de probabilité.
2. Supposons que X admette f_X pour densité et que Y admette f_Y pour densité. Déterminer, en le justifiant, la densité de la variable aléatoire $Z = X + Y$.

Correction.

1. c est une constante positive t.q. $c \int_0^3 \exp(-x)dx = 1 \Longleftrightarrow c = (1 - \exp(-3))^{-1}$.
2. X et Y étant indépendantes, la densité de $X + Y$, notée f est égale au produit de convolution de f_X et f_Y , c'est à dire

$$\begin{aligned} f(z) &= \int f_X(z-y) f_Y(y) dy \\ &= \frac{c}{3} \int \exp(-z+y) 1\!\!\mathrm{I}_{[z-3,z]}(y) \ \frac{1}{3} 1\!\!\mathrm{I}_{[0,3]}(y) dy \end{aligned}$$

Remarquons que
$[z-3,z] \cap [0,3] = \emptyset$ si $z \in]-\infty, 0[\cup]6, +\infty[$,
$[z-3,z] \cap [0,3] = [0,z]$ si $z \in [0,3[$,
$[z-3,z] \cap [0,3] = [z-3,3]$ si $z \in [3,6[$

$$f(z) = \frac{c}{3}(1 - \exp(-z)) 1\!\!\mathrm{I}_{z \in [0,3]} + \frac{c}{3}(\exp(-(z-3)) - \exp(-3)) 1\!\!\mathrm{I}_{z \in]3,6]}$$