SY01 Test 2–Automne 10
Durée : 30mn
DOCUMENTS INTERDITS
CALCULATRICE AUTORISÉE

NOM :
PRENOM :
Groupe ou Horaire de TD :

Le barême tiendra compte de la rédaction. Justifiez clairement vos réponses.

Exercice 1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = c\exp(-\frac{|x|}{2}),\ x \in \mathbb{R} \text{ et } c \text{ est une constante.}$$

1. Déterminer c pour que f soit une densité de probabilité.

   Soit X une variable aléatoire continue réelle de densité f; la loi de X est connue sous le nom de loi de Laplace.

2. Déterminer l'espérance de X.
3. Déterminer g_X la fonction génératrice des moments de X (vous préciserez le domaine de définition de g_X).
4. A partir de g_X, calculer la variance de X.
5. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire Y définie par $Y = |X|$.
6. Quelle est la loi de Y? Donner sa densité.
7. Déterminer la plus petite constante $a > 0$ telle que $\mathbb{P}(Y > a) \leq 4\%$.

   Indication : une des méthodes possibles permettant de résoudre cette question, requiert le résultat numérique suivant $2\log(10) - \log(8) \approx 2.525729$.

Correction.

1. c est une constante positive telle que $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1 \iff c(\int_{\mathbb{R}_-} \exp(\frac{x}{2})dx + \int_{\mathbb{R}_+} \exp(-\frac{x}{2})dx) = 1 \iff 4c = 1 \iff c = \frac{1}{4}$.
2. La densité étant paire, nous pouvons directement en déduire que X est une v.a. centrée ($\mathbb{E}(X) = 0$).

3. La fonction génératrice des moments g_X lorsqu'elle existe, est égale à $g_X(t) = \mathbb{E}(\exp(tX))$.

$$\begin{aligned} g_X(t) &= \int_{\mathbb{R}} \exp(tx)f(x)dx \\ &= \frac{1}{4}(\int_{\mathbb{R}_-} \exp(x(t+\frac{1}{2}))dx + \int_{\mathbb{R}_+} \exp(-x(-t+\frac{1}{2}))dx) \\ &= \frac{1}{4}\{[\frac{\exp(x(t+\frac{1}{2}))}{t+\frac{1}{2}}]_{-\infty}^{0} + [-\frac{\exp(-x(-t+\frac{1}{2}))}{-t+\frac{1}{2}}]_0^{+\infty}\} \\ &= \frac{1}{4}(\frac{1}{t+\frac{1}{2}} + \frac{1}{-t+\frac{1}{2}}), \end{aligned} \tag{1}$$

où la dernière égalité est vraie si $t+\frac{1}{2} > 0$ et $-t+\frac{1}{2} > 0$, c'est à dire si $|t| < \frac{1}{2}$. D'après (1), $g_X(x) = \frac{1}{1-4t^2}$, $\forall t \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.

4. D'après le cours, $\mathbb{E}(X^2) = g_X^{(2)}(0)$, où $g_X^{(2)}$ désigne la dérivée seconde de g_X. La v.a. étant centrée, la variance de X est alors égale à $\mathrm{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) = g_X^{(2)}(0)$. Nous en déduisons que $\mathrm{V}(X) = 8$ puisque $g_X^{'}(t) = \frac{8t}{(1-4t^2)^2}$ et $g_X^{(2)}(t) = \frac{8}{(1-4t^2)^2} + \frac{2(8t)^2}{(1-4t^2)^3}$.

5. Pour tout $x \geq 0$, $F_Y(x) = \mathbb{P}(Y \leq x) = \mathbb{P}(|X| \leq x) = \mathbb{P}(-x \leq X \leq x) = \mathbb{P}(X \leq x) - \mathbb{P}(X < -x) = F_X(x) - F_X(-x^-)$, où F_X désigne la fonction de répartition de X et $F_X(-x^-) = \lim_{y \nearrow -x} F_X(y)$. Il reste à déterminer F_X.
   $\forall t \in \mathbb{R}$,
   $F_X(t) = \left\{ \begin{array}{llll} \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{4}\exp(\frac{x}{2})dx & = [\frac{1}{2}\exp(\frac{x}{2})]_{-\infty}^{t} & = \frac{1}{2}\exp(\frac{t}{2}) & \text{si } t < 0 \\ \frac{1}{2} + \int_0^t \frac{1}{4}\exp(-\frac{x}{2})dx & = \frac{1}{2} + [-\frac{1}{2}\exp(-\frac{x}{2})]_0^t & = 1 - \frac{1}{2}\exp(-\frac{t}{2}) & \text{si } t \geq 0 \end{array} \right.$. Remarquons que F_X est continue par conséquent, F_Y l'est également. Pour tout $x \geq 0$, $F_Y(x) = \mathbb{P}(|X| \leq x) = 1 - \frac{1}{2}\exp(-\frac{x}{2}) - \frac{1}{2}\exp(-\frac{x}{2}) = 1 - \exp(-\frac{x}{2})$.

6. La fonction de répartition caractérise entièrement une loi de probabilité; or F_Y est la fonction de répartition d'une loi exponentielle $\mathcal{E}(\frac{1}{2})$. Sa densité $f_Y(y) = F_Y(y)' = \frac{1}{2}\exp(-\frac{1}{2}y)\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y)$.

7. Nous proposons deux approches différentes pour déterminer une valeur de a.

   En utilisant la question précédente, il vient que $\mathbb{P}(Y \geq a) = \mathbb{P}(Y > a) = 1 - \mathbb{P}(Y \leq a) = \exp(-\frac{a}{2}) \leq 0.04 \iff \log(100/4) \leq \frac{a}{2} \iff a \geq 2(2\log(10) - \log(4)) \approx 6.4378$. (*L'indication de l'énoncé ne permettait pas de conclure l'application numérique puisque la valeur de* $2\log(10) - \log(8)$ *était donnée alors qu'il aurait fallu donner celle de* $2\log(10) - \log(4)$).

   - Il est possible d'utiliser l'inégalité de Bienaymé Chebyshev (X admet un moment d'ordre 2), $\forall a > 0, \mathbb{P}(Y > a) = \mathbb{P}(|X| > a) \leq \frac{\mathrm{V}(X)}{a^2}$. Une manière d'obtenir une valeur de a satifaisant cette dernière inéquation est de déterminer a tel que $\frac{\mathrm{V}(X)}{a^2} = 0.04 \iff a^2 = \frac{8}{0.04} = 200 \iff a \approx 14.14214$.

Exercice 2. Soient X et Y deux variables aléatoires, définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Supposons X et Y indépendantes. La variable aléatoire X, de fonction de répartition F_X, admet une densité de probabilité f_X, définie sur $\mathbb{R}$. La variable aléatoire Y est discrète, à valeurs dans $E = \{1, \ldots, m\}$ avec $m \in \mathbb{N}^\star$, $m > 1$ et sa loi de probabilité est $\mathbb{P}(Y = i) = p_i \; \forall i \in E$, avec $p_i \geq 0, \forall i \in E$ et $\sum_{i \in E} p_i = 1$.
Considérons Z la variable aléatoire définie par $Z = X + Y$.

1. Montrer que $\{Z \leq z\} = \cup_{i \in E}(\{X \leq z - i\} \cap \{Y = i\})$.
2. Exprimer F_Z, la fonction de répartition de Z en fonction de F_X et de $(p_i)_{i \in E}$.
3. Montrer que Z admet une densité de probabilité notée f_Z. Déterminer f_Z.

Correction.

1. Considérons la partition $\cup_{i \in E}\{w : Y(w) = i\}$ de Ω c'est à dire $\Omega = \cup_{i \in E}\{w : Y(w) = i\}$ est une union d'événements disjoints (incompatibles). Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\{w : Z(w) \leq z\} &= \{w : Z(w) \leq z\} \cap \Omega \\
&= \{w : Z(w) \leq z\} \cap (\cup_{i \in E}\{w : Y(w) = i\}) \\
&= \cup_{i \in E}\{w : X(w) + Y(w) \leq z; Y(w) = i\} \qquad (2) \\
&= \cup_{i \in E}\{w : X(w) \leq z - i; Y(w) = i\} \\
&= \cup_{i \in E}(\{w : X(w) \leq z - i\} \cap \{w : Y(w) = i\}),
\end{aligned}$$

   où (2) s'obtient en distribuant l'opération $\cap$ sur l'opération $\cup$. Remarquons que l'événement $\{w : Z(w) \leq z\}$ est une réunion fini d'événements incompatibles.

2. D'après la question 1 et d'après la propriété de σ-additivité d'une probabilité, nous obtenons,

$$\begin{aligned}
\forall z \in \mathbb{R}, \; F_Z(z) = \mathbb{P}(Z \leq z) &= \sum_{i \in E} \mathbb{P}(\{X \leq z - i\} \cap \{Y = i\}) \\
&= \sum_{i \in E} F_X(z - i) p_i \quad \text{(par indépendance de } X \text{ et } Y\text{)}.
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\forall z \in \mathbb{R}, \; F_Z(z) &= \sum_{i \in E} \int_{-\infty}^{z-i} f_X(t) dt \; p_i \\
&= \int_{-\infty}^{z} \sum_{i \in E} f_X(y - i) p_i dy \quad \text{(par changement de variable } y = t + i\text{)}. (3)
\end{aligned}$$

   La fonction $y \to \sum_{i \in E} f_X(y - i) p_i$ est positive sur $\mathbb{R}$ et s'intègre à 1 ($\int_{\mathbb{R}} \sum_{i \in E} f_X(y - i) p_i = 1$); nous pouvons déduire de (3) que Z admet une densité de probabilité $f_Z(z) = \sum_{i \in E} f_X(z - i) p_i$, pour tout $z \in \mathbb{R}$.