

Corrigé du Test SY01/P05

Question 1. On effectue une suite des tirages avec remise dans un ensemble de boules numérotées de 1 à 20. Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$A_i = \{ \text{Sortie de la boule 13 au } i\text{-ème tirage} \}.$$

- a- Exprimer à l'aide d'opérations ensemblistes sur les A_i l'événement "la boule 13 sort pour la première fois au cinquième tirage".
- b- Définir par une phrase ne comportant aucun vocabulaire mathématique chacun des événements suivants :

$$E_1 = \cap_{i=5}^{+\infty} A_i, \quad E_2 = \left(\cap_{i=1}^4 \bar{A}_i \right) \cap \left(\cap_{i=5}^{+\infty} A_i \right), \quad E_3 = \cup_{i \geq 4} A_i.$$

- c- Ecrire à l'aide des A_i l'événement :

$$B_n = \{ \text{La boule 13 sort au moins une fois au delà du } n\text{-ième tirage} \}.$$

Corrigé

- a- $\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4 \cap A_5$.
- b- E_1 est l'événement "à partir du 5-ième tirage la boule 13 sort à chaque tirage."
 E_2 est l'événement "la boule 13 sort pour la première fois au 5-ième tirage et sort à chacun des tirages suivants".
 E_3 est l'événement "la boule 13 sort au moins une fois au delà du 4-ième tirage".
- c- $B_n = \cup_{i \geq n+1} A_i$.

Question 2. Une famille a deux enfants.

1. Quelle est la probabilité que les deux soient des garçons sachant qu'au moins l'un d'eux est un garçon?
2. Quelle est la probabilité que les deux soient des garçons sachant que le plus jeune est un garçon?

Corrigé

1. Posons $\Omega = \{(G, G), (G, F), (F, G), (F, F)\}$, $A = \{\text{au moins un garçon}\}$ et $B = \{2 \text{ garçons}\}$,
 $P(B|A) = \frac{P(G,G)}{3/4} = 1/3$.
Plus simplement dès le départ on aurait pu restreindre l'espace de probabilités à $\Omega' = \{(G, G), (G, F), (F, G)\}$ et faire les calculs sur Ω' .
2. Idem mais en changeant A par $C = \{\text{le plus jeune est un garçon}\}$, $P(B|C) = 1/2$.
Plus simplement dès le départ on aurait pu restreindre l'espace de probabilités à $\Omega'' = \{(G, G), (G, F)\}$ et faire les calculs sur Ω'' .

Question 3. Montrer par récurrence que : $P(\cup_{i=1}^n A_i) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i)$.

Corrigé Vrai pour $n = 1$ et pour $n = 2$ (voir le cours !), supposons vrai pour $n = m$ et montrons pour $n = m + 1$.

$$\begin{aligned} P(\cup_{i=1}^{m+1} A_i) &= P(\cup_{i=1}^m A_i \cup A_{m+1}) = P(\cup_{i=1}^m A_i) + P(A_{m+1}) - P(\cup_{i=1}^m A_i \cap A_{m+1}) \\ &\leq P(\cup_{i=1}^m A_i) + P(A_{m+1}) \leq \sum_{i=1}^{m+1} P(A_i). \end{aligned}$$

Question 4. On considère le jet d'une pièce de monnaie deux fois.

1. Soit X la variable aléatoire discrète (vad) *nombre de faces*. Quelle est son espace fondamental $X(\Omega)$?
2. Donner la fonction de répartition de la vad X .
3. On considère la vad $W = 2X$ si deux *faces* sont obtenues et $W = 0$ sinon. Donner la fonction de répartition de W .

Corrigé

1. $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

2.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1/4 & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 3/4 & \text{si } 1 \leq x < 2, \\ 1 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

3. $W(\Omega) = \{0, 4\}$ et

$$F_W(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 3/4 & \text{si } 0 \leq x < 4, \\ 1 & \text{si } x \geq 4. \end{cases}$$

Question 5. On effectue des lancers répétés d'une paire de dés et on observe pour chaque lancer la *somme* des points indiqués par les deux dés. On considère $\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$ et l'équiprobabilité des couples.

- a- Quelle est la probabilité de n'obtenir ni 7 ni 9 au cours d'un lancer ?
- b- On définit les événements suivants :

$$H_i = \{\text{ni 7 ni 9 au } i\text{-ème lancer}\},$$

$$F_i = \{\text{obtention d'un 9 au } i\text{-ème lancer}\},$$

et pour $n > 1$,

$$E_n = \{\text{ni 7 ni 9 ne sont obtenus au cours des } n-1 \text{ premiers lancers et le } n\text{-ième lancer donne 9}\}$$

Dans le cas particulier $n = 1$, on pose $E_1 = F_1$.

- i- Exprimer chaque E_n à l'aide des événements F_i et des H_i .
- ii- Calculer $P(E_n)$ en utilisant l'indépendance des lancers.
- c- On définit l'événement E par :
 "Dans la suite des résultats observés, la première obtention du 9 a lieu avant la première obtention du 7".
 Exprimer E à l'aide des E_n , puis en déduire l'expression de $P(E)$ en fonction des $P(E_n)$.

Corrigé

- a- $P(\text{ni 7 ni 9 en 1 lancer}) = \frac{13}{18}$. On trouve ce résultat en prenant comme espace $\Omega_1 = \{1, \dots, 6\}^2$ muni de l'équiprobabilité (chaque couple a une chance sur 36 de se réaliser).

- b- On admet l'existence d'un espace (Ω, F, P) modélisant les lancers répétés indépendants des dés

a- $E_n = \cap_{i < n} H_i \cap F_n$.

- b- Par indépendance des lancers, les événements $H_1, \dots, H_{n-1}, F_n$ sont mutuellement indépendants, d'où

$$P(E_n) = \prod_{i < n} P(H_i) P(F_n) = \frac{1}{9} \left(\frac{13}{18} \right)^{n-1},$$

formule valable pour tout $n \geq 1$, le cas $n = 1$ se réduisant à $E_1 = F_1$ et $P(F_1) = \frac{1}{9}$.

- c- Les E_n étant deux à deux disjoints et $E = \cup_{n \geq 1} E_n$, on a par σ -additivité de P :

$$P(E) = P(\cup_{k \in \mathbb{N}^*} E_k) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} P(E_k)$$

bien qu'on ne vous le demande pas, on peut évaluer cette probabilité :

$$P(E) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{9} \left(\frac{13}{18} \right)^{k-1} = \frac{1}{9} \frac{1}{1 - \frac{13}{18}} = \frac{2}{5}.$$