Test SY01 - Printemps 2007

Seul document autorisé: une feuille de note recto verso. Calculatrices interdites.

Exercice 1 : Vrai ou Faux? (justifiez si c'est faux)

1. Si deux événements sont incompatibles, alors ils sont indépendants.
2. Si deux événements sont indépendants, alors leurs complémentaires le sont aussi.
3. Une variable aléatoire est une valeur numérique.
4. La variance d'une somme de deux variables aléatoires discrètes est toujours la somme de leur variances.
5. Si une loi admet une variance, alors elle admet une espérance.
6. La fonction de répartition d'une loi absolument continue est strictement croissante sur l'ensemble des nombres réels x tels que $F(x) > 0$.

Exercice 2 :

Un examen comporte n questions qu'un candidat tire au hasard dans le programme, avec remise. On note X la variable aléatoire qui représente le nombre de questions tirées dont il connaît la réponse et Y celle qui représente le nombre de celles dont il ignore la réponse. Si p est la proportion de questions du programme que ce candidat connaît, calculer $V(X)$, $V(Y)$ puis $V(X + Y)$. Que remarque-t-on?

Exercice 3 :

La variable aléatoire X représente le chiffre obtenu après le lancer d'un dé à six faces numérotées de 1 à 6. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $Y = X(7 - X)$ puis calculer $\mathbb{E}(Y)$ et $V(Y)$. On désigne par $Y_1, \dots, Y_n$ les valeurs observées à l'issue de n lancers indépendants. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire M_n égale à la plus grande de ces valeurs.

Exercice 4 :

Une variable aléatoire X suit un loi de Pareto de densité f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k}{x^3} & \text{si } x \geq x_0 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où x_0 est une constante positive. Déterminer la constante k pour que f soit bien une densité et préciser la fonction de répartition de X . Calculer, si elles existent, $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$.