SY01 Test 1–Automne 10
Correction

Exercice 1. Quatre salariés d'une même entreprise regagnent leur hôtel après un dîner professionnel. A la réception de l'hôtel, au moment de récupérer leur clef de chambre, une panne de courant survient. Chacun d'eux récupère au hasard, dans le noir, une clef parmi les quatre possibles.
Pour tout $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, soit A_i l'événement "le ième salarié récupère la clef de sa chambre".

1. Enoncer la formule de Poincaré pour $n = 4$ événements.
2. Exprimer l'événement B: "au moins un des salariés récupère la clef de sa chambre" en fonction des événements $(A_i)_{i\in\{1,2,3,4\}}$.
3. En utilisant la formule de Poincaré, déterminer la probabilité de B.

Correction.

1. $\mathbb{P}(\bigcup_{i\in\{1,\ldots,4\}} A_i) = \sum_{i=1}^{4} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1\leq i_1<i_2\leq 4} \mathbb{P}(A_{i_1}\cap A_{i_2}) + \sum_{1\leq i_1<i_2<i_3\leq 4} \mathbb{P}(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3}) - \mathbb{P}(\bigcap_{i\in\{1,\ldots,4\}} A_i)$
2. $B = \bigcup_{i\in\{1,\ldots,4\}} A_i$. L'événement B correspond à l'événement "le premier salarié récupère la clef de sa chambre OU BIEN le second salarié récupère la clef de sa chambre OU BIEN le troisième salarié récupère la clef de sa chambre OU BIEN le quatrième salarié récupère la clef de sa chambre". Le terme OU BIEN n'est pas exclusif.
3. Le cardinal de l'univers est égal à 4! (permutations d'un ensemble à 4 éléments): situation d'équiprobabilité.
$\forall i \in \{1, \ldots, 4\},\ \mathbb{P}(A_i) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \frac{3!}{4!} = \frac{1}{4}$, où le nombre de cas favorables correspond au nombre de permutations d'un ensemble à 3 éléments puisque, le salarié i ayant récupéré sa clef, il reste les trois autres clefs à associer à trois chambres.
De même, $\forall (i, j) \in \{1, \ldots, 4\}^2,\ i \neq j, \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \frac{2!}{4!} = \frac{1}{12}$. $\forall (i, j, k) \in \{1, \ldots, 4\}^3,\ i \neq j \neq k, \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}$. Et $\mathbb{P}(\bigcap_{i\in\{1,\ldots,4\}} A_i) = \frac{1}{4!}$.
On obtient alors, $\mathbb{P}(B) = 4\frac{1}{4} - C_4^2\frac{1}{12} + C_4^3\frac{1}{24} - \frac{1}{24} = \frac{24-12+4-1}{24} = \frac{15}{24}$.

Exercice 2.

1. Donner la définition d'une probabilité sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{F})$.

2. Soit l'expérience $\mathcal{E}$: on lance deux dés, à six faces, bien équilibrés. L'un est noir, l'autre est rouge.
   Considérons les événements A, B et C :
   A : le chiffre du dé noir est pair.
   B : le chiffre du dé rouge est impair.
   C : les deux chiffres ont même parité.

   - (a) Déterminer l'espace fondamental Ω de $\mathcal{E}$.
   - (b) En situation d'équiprobabilité, notons $I\!P$ la probabilité définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, où $\mathcal{P}(\Omega)$ désigne l'ensemble des parties de Ω.
     (i) Déterminer $I\!P(A)$, $I\!P(B)$, $I\!P(C)$, $I\!P(A \cap B)$, $I\!P(A \cap C)$, $I\!P(C \cap B)$ et $I\!P(A \cap B \cap C)$.
     (ii) Que peut-on conclure quant à l'indépendance stochastique, relativement à $I\!P$, de A et B, de A et C, de B et C, et de la famille (A, B, C) ?
   - (c) Définissons une probabilité $\tilde{I\!P}$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ par : $\forall D \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\tilde{I\!P}(D) = I\!P(D|C)$ ($D|C$: "D sachant C").
     (i) Déterminer $\tilde{I\!P}(A)$, $\tilde{I\!P}(B)$ et $\tilde{I\!P}(A \cap B)$.
     (ii) Que peut-on conclure quant à l'indépendance stochastique, relativement à $\tilde{I\!P}$, des événements A et B ?

Correction.

1. Une probabilité P sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{F})$ est une application de $\mathcal{F}$ dans $I\!R$ telle que :
$$\begin{cases} I\!P(\Omega) = 1, \\ \forall B \in \mathcal{F}, I\!P(B) \in [0,1], \\ (\sigma\text{-additivité}) \ \forall (B_i)_{i \in I},\ I \subseteq I\!N, \text{ tel que } \forall (i,j) \in I^2,\ i \neq j,\ B_i \cap B_j = \emptyset,\ I\!P(\bigcup_{i \in I} B_i) = \sum_{i \in I} I\!P(B_i). \end{cases}$$

2.
   - (a) $\Omega = \{1_N, \ldots, 6_N\} \times \{1_R, \ldots, 6_R\}$, où i_R et i_N désignent le chiffre i du dé rouge, respectivement du dé noir. Le cardinal de Ω est égal à 36.
   - (b) Situation d'équiprobabilité – $I\!P$. La détermination des probabilités revient à dénombrer le nombre de cas favorables (le nombre de cas possibles étant 36).
     (i) $I\!P(A) = \frac{6 \times 3}{36} = \frac{1}{2}$, $I\!P(B) = \frac{1}{2}$, $I\!P(C) = \frac{2 \times 3 \times 3}{36} = \frac{1}{2}$, $I\!P(A \cap B) = \frac{3 \times 3}{36} = \frac{1}{4}$, $I\!P(A \cap C) = \frac{3 \times 3}{36} = \frac{1}{4}$, $I\!P(C \cap B) = \frac{3 \times 3}{36} = \frac{1}{4}$ et $I\!P(A \cap B \cap C) = \frac{0}{36} = 0$.
     (ii) Les événements A , B et C sont deux à deux stochastiquement indépendants (relativement à $I\!P$) puisque la probabilité de leur intersection est égale au produit de leur probabilité. Mais $I\!P(A \cap B \cap C) \neq I\!P(A) \times I\!P(B) \times I\!P(C)$ implique que la famille d'événements (A, B, C) n'est pas mutuellement indépendante, relativement à $I\!P$.
   - (c) Probabilité $\tilde{I\!P}$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.
     (i) La définition d'une probabilité conditionnelle et les calculs de la question (b) (ii) permettent d'obtenir : $\tilde{I\!P}(A) = \frac{I\!P(A \cap C)}{I\!P(C)} = \frac{1}{2}$, $\tilde{I\!P}(B) = \frac{I\!P(B \cap C)}{I\!P(C)} = \frac{1}{2}$ et $\tilde{I\!P}(A \cap B) = \frac{I\!P(A \cap B \cap C)}{I\!P(C)} = 0$.
     (ii) Les événements A et B ne sont pas, relativement à $\tilde{I\!P}$, stochastiquement indépendants puisque
$$\tilde{I\!P}(A \cap B) \neq \tilde{I\!P}(A) \times \tilde{I\!P}(B).$$

Exercice 3. Un message binaire est transmis sous la forme “0” ou bien “1” ; à sa réception, il est également de la forme “0” ou bien “1”. Durant le transfert, la proportion des messages transformés de “0” (message transmis) en “1” (message réceptionné) est égale à 2/5 et celle des messages transformés de “1” (message transmis) en “0” (message réceptionné) est égale à 1/3. Parmi les messages transmis, la proportion des messages “0” est égale à $\frac{5}{3}$ fois la proportion des messages “1”.

1. Déterminer la probabilité qu'un message transmis soit “0”.
2. Supposons que le message réceptionné soit “0”. Déterminer alors la probabilité que le message transmis ait été “0”.
3. Supposons que le message réceptionné soit “1”. Déterminer alors la probabilité que le message transmis ait été “1”.

Correction. Considérons les événements suivants:
R_0 : le message réceptionné est “0”, R_1 : le message réceptionné est “1” ,
T_0 : le message transmis est “0” et T_1 : le message transmis est “1”.
L'espace fondamental est $\Omega = \{(0,0),(0,1),(1,1),(1,0)\}$, où (i,j) est tel que $i \in \{0,1\}$ est le message transmis et $j \in \{0,1\}$ est le message réceptionné. On munit Ω de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$ (l'ensemble des parties de Ω) et de la probabilité $I\!\!P$ définie par l'énoncé.

D'après l'énoncé, $\frac{I\!\!P(T_0)}{I\!\!P(T_1)} = 5/3$, $I\!\!P(R_1|T_0) = \frac{2}{5}$ et $I\!\!P(R_0|T_1) = \frac{1}{3}$.

1. $I\!\!P(T_0) + I\!\!P(T_1) = 1 \Longleftrightarrow I\!\!P(T_0) + \frac{3}{5}I\!\!P(T_0) = 1 \Longleftrightarrow I\!\!P(T_0) = \frac{5}{8}$.
2. On cherche $I\!\!P(T_0|R_0)$. D'après la formule de Bayes,

$$\begin{aligned} I\!\!P(T_0|R_0) &= \frac{I\!\!P(R_0|T_0)I\!\!P(T_0)}{I\!\!P(R_0)} \\ &= \frac{I\!\!P(R_0|T_0)I\!\!P(T_0)}{I\!\!P(R_0|T_0)I\!\!P(T_0) + I\!\!P(R_0|T_1)I\!\!P(T_1)} \\ &= \frac{\frac{3}{5}\times\frac{5}{8}}{\frac{3}{5}\times\frac{5}{8}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{8}} \\ &= \frac{\frac{3}{8}}{\frac{3}{8}+\frac{1}{8}} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

3. On cherche $I\!\!P(T_1|R_1)$. D'après la formule de Bayes,

$$\begin{aligned} I\!\!P(T_1|R_1) &= \frac{I\!\!P(R_1|T_1)I\!\!P(T_1)}{I\!\!P(R_1)} \\ &= \frac{I\!\!P(R_1|T_1)I\!\!P(T_1)}{I\!\!P(R_1|T_1)I\!\!P(T_1) + I\!\!P(R_1|T_0)I\!\!P(T_0)} \\ &= \frac{\frac{2}{3}\times\frac{3}{8}}{\frac{2}{3}\times\frac{3}{8}+\frac{2}{5}\times\frac{5}{8}} \\ &= \frac{\frac{2}{8}}{\frac{2}{8}+\frac{2}{8}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$