Exercices du chapitre II avec corrigé succinct

Exercice II.1 Ch2-Exercice1

Les applications $f_1(x) = |x|$, $f_2(x) = \sqrt{x}$, $f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ sont-elles des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

Solution : f_1 : oui, f_2 : non (f_2 n'est définie que sur $\mathbb{R}^+$), f_3 : oui.

Exercice II.2 Ch2-Exercice2

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f : x \mapsto \sqrt{x}$. Donner son domaine de définition D. Puis considérant f comme une application de D dans $\mathbb{R}$, donner l'image de cette application.

Solution : $D = \mathbb{R}^+$, $\mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}^+$ (le démontrer par double inclusion, sachant que si $y \in \mathbb{R}^+$ il peut s'écrire $y = \sqrt{y^2}$).

Exercice II.3 Ch2-Exercice3

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$. Cette application est-elle injective ? surjective ? bijective ? Que faudrait-il modifier pour qu'elle devienne bijective ?

Solution : Elle est injective car $\sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$. Elle n'est pas surjective car $\mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}^+$ et non pas $\mathbb{R}$, donc elle n'est pas bijective. Elle serait bijective si on prenait $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$.

Exercice II.4 Ch2-Exercice4

Montrer, en utilisant les résultats du chapitre 1, que la négation de l'implication

$$\forall x \in E,\ \forall x' \in E, \quad \{(f(x) = f(x')) \ \Rightarrow\ (x = x')\}$$

est

$$\exists x \in E,\ \exists x' \in E, \quad \{(x \neq x') \ \textbf{et}\ (f(x) = f(x'))\}.$$

En déduire qu'une application n'est pas injective si

$$\exists x \in E,\ \exists x' \in E, \quad \{(x \neq x') \ \textbf{et}\ (f(x) = f(x'))\}.$$

Solution : On sait que **non** $(P \Rightarrow Q)$ s'écrit $(P$ **et** $($**non** $Q)$, d'où

$$\textbf{non}\,\{\forall x \in E, \forall x' \in E, (f(x) = f(x')) \Rightarrow (x = x')\} \Leftrightarrow \{\exists x \in E, \exists x' \in E, (f(x) = f(x'))\ \textbf{et}\ (x \neq x')$$

Exercice II.5 Ch2-Exercice5

En utilisant les résultats du chapitre 1, montrer que

$$((f(x) = f(x')) \Rightarrow (x = x')) \iff ((x \neq x') \Rightarrow (f(x) \neq f(x'))$$

En déduire qu'une application $f : E \to F$ est injective si et seulement si

$$\forall x \in E,\ \forall x' \in E, \quad ((x \neq x') \Rightarrow (f(x) \neq f(x'))) .$$

Solution : Il suffit d'appliquer :

$$(P \Rightarrow Q) \iff \{(\textbf{non}\, Q) \Rightarrow (\textbf{non}\, P)\}.$$

Exercice II.6 Ch2-Exercice6

Soit $E = \mathbb{R}\backslash\{-2\}$ et soit $f : E \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x+1}{x+2}$. Trouver $F =$Imf. Montrer que f est bijective de E sur F. Même question avec $D = \mathbb{R}_*^+$.

Solution : Après calculs on montre que tout $y \neq 1$ admet un unique antécédent qui s'écrit

$$x = \frac{1-2y}{y-1}$$

d'où $(y \in \text{Im}f) \Leftrightarrow (y \neq 1)$ et donc $\text{Im}f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.
Lorsque le domaine de définition de f est limité à $\mathbb{R}_*^+$, on a

$$x > 0 \Leftrightarrow \frac{1-2y}{y-1} > 0 \Leftrightarrow y \in]\frac{1}{2}, 1[.$$

Exercice II.7 Ch2-Exercice7

Soient E et F deux ensembles, et soit f une application de E dans F. Montrer que la composition $id_F \circ f$ est valide et que $id_F \circ f = f$.

Solution : $id_F \circ f : E \to F \to F$ et $id_F \circ f(x) = id_F(f(x)) = f(x)$.

Exercice II.8 Ch2-Exercice8

Soient les applications $f : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}_*^+$ et $g : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}$ définies par $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$. Montrer que $g \circ f = -g$ sur $\mathbb{R}_*^+$.

Solution : Tout d'abord, comme 0 et -1 sont exclus des domaines de définition, ces deux applications sont effectivement bien définies. Il suffit ensuite de calculer $g(f(x))$. En effet $g(f(x) = \dfrac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}+1} = \dfrac{1-x}{1+x}$.

Exercice II.9 Ch2-Exercice9

En vous souvenant de $\ln x$ et e^x, donner les ensembles de départ et d'arrivée permettant de dire que l'une est l'application ré de l'autre.

Solution : $\ln x : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}$ et $e^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_*^+$, doù $e^{\ln x} : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}_*^+$ et $\ln e^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Exercice II.10 Ch2-Exercice10

Soient E et F deux ensembles, et soit f de E dans F qui admet une application réciproque f^{-1}. Montrer, à partir de la définition de f^{-1} que f^{-1} admet une application réciproque et que $(f^{-1})^{-1} = f$.

Solution : $f^{-1} \circ f = id_E$ et $f \circ f^{-1} = id_F$ caractérisent (par définition) l'inverse de f^{-1} qui est donc f.

Exercice II.11 Ch2-Exercice11

Vous avez montré (dans un exercice précédent) que $f : \mathbb{R}\backslash\{-2\} \to \mathbb{R}\backslash\{1\}, f : x \mapsto \frac{x+1}{x+2}$ est une bijection. Déterminer l'expression de $f^{-1}(y)$.

Solution : On a déjà démontré que $f^{-1}(y) = \dfrac{1-2y}{y-1}$ en résolvant l'équation $y = f(x)$.

Exercice II.12 Ch2-Exercice12

Soient les applications $f : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}_*^+$ et $g : \mathbb{R}_*^+ \to]-1,1[$ définies par $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$. Donner f^{-1}, g^{-1} puis $(g \circ f)^{-1}$. Comparer avec le résultat de l'exercice II.8

Solution : $f^{-1} : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}_*^+$ et $f^{-1}(y) = \dfrac{1}{y}$, $g^{-1} :]-1,1[\to \mathbb{R}_*^+$ et $g^{-1}(y) = \dfrac{1+y}{1-y}$ (résoudre $y = g(x)$), d'où

$$(g \circ f)^{-1}(y) = (f^{-1} \circ g^{-1})(y) = \frac{1}{\frac{1+y}{1-y}} = \frac{1-y}{1+y}.$$

Il a été montré dans l'exercice 8 que $(g \circ f)^{-1} = (-g)^{-1}$ et l'on a bien $(-g)^{-1} = \dfrac{1-y}{1+y}$ (résoudre $y = -g(x)$).

Exercice II.13 Ch2-Exercice13

Montrer que la loi "soustraction" est une loi de composition interne dans $\mathbb{Z}$. Montrer que la loi "division" n'est pas une loi de composition interne dans $\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ mais que cette loi est une loi de composition interne dans $\mathbb{Q}\backslash\{0\}$.

Solution : La soustraction de deux entiers relatifs est un entier relatif. Le quotient de deux entiers relatifs peut ne pas être un entier relatif ($\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$). Par contre le quotient de deux rationnels non nuls est un rationnel non nul, en effet $\dfrac{\frac{p}{q}}{\frac{p'}{q'}} = \dfrac{pq'}{qp'}$ les éléments p, q, p', q' étant tous des entiers non nuls.

Exercice II.14 Ch2-Exercice14

Montrer que dans un groupe $(E, \diamondsuit)$ l'élément neutre est unique, de même que l'élément inverse d'un élément quelconque de E. Enfin, montrer que la " règle de simplification " : si $a\diamondsuit c = b\diamondsuit c$, alors $a = b$, que vous connaissez bien pour l'addition dans $\mathbb{Z}$, s'applique dans un groupe quelconque.

Solution : S'il existe deux éléments neutres e_1 et e_2, on a

$$e_1\diamondsuit e_2 = e_1 \qquad \text{et} \qquad e_1\diamondsuit e_2 = e_2.$$

Et si x a deux inverses x_1 et x_2, on a

$$x_1\diamondsuit x\diamondsuit x_2 = (x_1\diamondsuit x)\diamondsuit x_2 = e\diamondsuit x_2 = x_2$$

$$x_1\diamondsuit x\diamondsuit x_2 = x_1\diamondsuit(x\diamondsuit x_2) = x_1\diamondsuit e = x_1$$

d'où $x_1 = x_2$.
On appelle c_1 l'inverse de c, alors

$$a\diamondsuit c = b\diamondsuit c \Rightarrow (a\diamondsuit c)\diamondsuit c_1 = (b\diamondsuit c)\diamondsuit c_1 \Rightarrow a\diamondsuit(c\diamondsuit c_1) = b\diamondsuit(c\diamondsuit c_1) \Rightarrow a\diamondsuit e = b\diamondsuit e \Rightarrow a = b$$

Quelles sont les propriétés que l'on a utilisées ?

Exercice II.15 Ch2-Exercice15

Montrer que les lois "addition" et "multiplication" ne sont pas des lois internes dans l'ensemble des nombres irrationnels.

Solution : Par exemple $\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$ et $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$, or 0 et 2 ne sont pas des irrationnels !

Exercice II.16 Ch2-Exercice16

Montrer que si x est irrationnel, p, q sont entiers, $p \neq 0$ alors $\dfrac{px}{q}$ est irrationnel.

Solution : On peut raisonner par l'absurde : on suppose que x est irrationnel, p, q sont entiers, $p \neq 0$, $\dfrac{px}{q}$ est rationnel.

On a donc x est irrationnel, p, q sont entiers, $p \neq 0$, $\dfrac{px}{q} = \dfrac{p'}{q'}$.

Ce qui implique que x est irrationnel, p, q sont entiers et $x = \dfrac{p'q}{q'p}$, ce qui est absurde.

Exercice II.17 Ch2-Exercice17

Montrer que la relation " $<$ " n'est pas réflexive ni symétrique.

Solution : Quels que soient les réels x et y, les propriétés $x < x$ et $(x < y) \Rightarrow (y < x)$ sont clairement fausses.

Exercice II.18 Ch2-Exercice18

Montrer que :
- i/ $(a \leq b) \Leftrightarrow (-b \leq -a)$,
- ii/ $\{(a \leq b)$ **et** $(c \leq d)\} \Rightarrow (a + c \leq b + d)$,
- iii/ $\{(a \leq b)$ **et** $(0 \leq c)\} \Rightarrow (ac \leq bc)$,
- iv/ La propriété suivante de $\mathbb{R}$ est équivalente à la propriété d'Archimède :

$$\forall a > 0,\ \forall A \in \mathbb{R}; \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } na > A.$$

Solution : Toutes ces inégalités se démontrent à partir des propriétés élémentaires de "$\leq$". Ainsi

$$\{(a \leq b) \textbf{ et } (c \leq d)\} \Rightarrow \{(a + c \leq b + c) \textbf{et } (b + c \leq b + d)\} \Rightarrow (a + c \leq b + d).$$

Appelons P la propriété d'Archimède, Q la proposition

$$\forall a > 0,\ \forall A \in \mathbb{R}; \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } na > A.$$

On montre $P \Rightarrow Q$. Il suffit d'appliquer la propriété d'Archimède au nombre réel $B = \frac{A}{a}$
On montre $Q \Rightarrow P$, il suffit d'appliquer la proposition Q avec $a = 1$.

Exercice II.19 Ch2-Exercice19

Tracer le graphe de la fonction partie entière $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Solution : On obtient une fonction en "escalier" (voir la figure **??**).

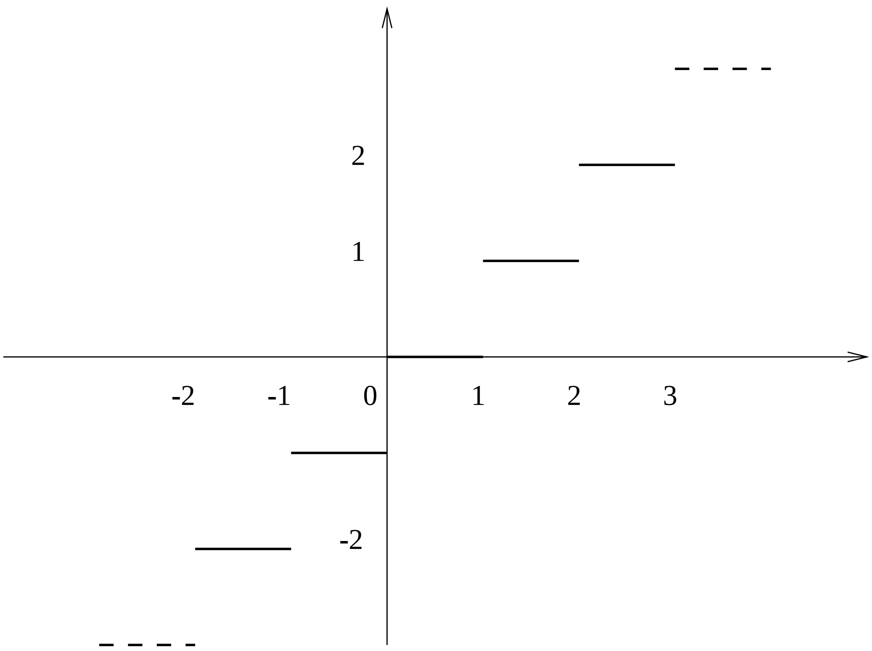

FIG. 1.1 – graphe de partie entière

Exercice II.20 Ch2-Exercice20

Montrer que si M est un majorant de A tout réel $M' \geq M$ est aussi un majorant. De même si m est un minorant de A tout réel $m' \leq m$ est aussi un minorant.

Solution : Puisque $M \leq M'$, on a $(x \leq M) \Rightarrow (x \leq M')$ et donc M' est un majorant de A. La démonstration est la même pour m'.

Exercice II.21 Ch2-Exercice21

Montrer qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est bornée si et seulement si il existe un nombre $M \geq 0$ tel que $\forall x \in A, |x| \leq M$ (on rappelle que $|x|$ désigne la valeur absolue de x).

Solution : Si $|x| \leq M$, alors $-M \leq x \leq M$ et donc A est bornée.
Réciproquement, si $\alpha \leq x \leq \beta$, on pose $M = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$ et l'on a $-M \leq x \leq M$.
(Aidez-vous d'un dessin si cela ne vous paraît pas évident car ce résultat est souvent utilisé).

Exercice II.22 Ch2-Exercice22

Montrer que l'ensemble $A = \{x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ x = \dfrac{n}{n+1}\}$ est borné.

Solution : Comme $n < n+1$, il est clair que $\forall x \in A$, on a $0 \leq x \leq 1$.

Exercice II.23 Ch2-Exercice23

Soit $a < b$, en utilisant la caractérisation de la borne supérieure, montrer que sup $[a, b[= b$.

Solution : On utilise la caractérisation de la borne supérieure.
– $\forall x \in [a, b[$, on a $x \leq b$, donc b est majorant de [a, b[, montrons que c'est le plus petit.
– Soit $c < b$, deux cas peuvent alors se présenter
  - $c < a$, or a est un élément de $[a, b[$ donc c n'est pas majorant de $[a, b[$.
  - $c \geq a$ alors $\frac{c+b}{2}$ est un élément de $[a, b[$ qui est strictement supérieur à c, donc c n'est pas majorant de $[a, b[$.
  On vient donc de démontrer que b est le plus petit des majorants de $[a, b[$.

Exercice II.24 Ch2-Exercice24

Montrer que $\sup A = \sqrt{2}$, si $A = \{x \in \mathbb{R},\ x \text{ rationnel et } x^2 < 2\}$.

Solution : On utilise la caractérisation de la borne supérieure.
– $\forall x \in A$, on a $x \leq \sqrt{2}$
– Soit $t < \sqrt{2}$, alors entre deux nombres réels il existe toujours un rationnel, d'où $\exists q \in \mathbb{Q}$ tel que $t < q < \sqrt{2}$ et donc $q \in A$ vérifie bien $t < q$.

Exercice II.25 Ch2-Exercice25

Montrer que a est le plus grand des minorants de $I = [a, +\infty[$.

Solution : Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un minorant m de I tel que $a < m$. Alors il existe un réel α tel que $a < \alpha < m$ et donc il existe un réel α appartenant à I ($a < \alpha$) qui est strictement plus petit que m, ce qui est absurde puisque m est un minorant de I.

Exercice II.26 Ch2-Exercice26

En appliquant l'axiome de la borne supérieure, démontrer que toute partie A non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Solution : Soit m un minorant de A. Alors :

$$(x \in A) \Rightarrow (x \geq m) \Rightarrow (-x \leq -m).$$

Définissons l'ensemble $B = \{y \in \mathbb{R}, y = -x, x \in A\}$. Alors B est majoré par $-m$ et B admet une borne supérieure (axiome de la borne supérieure) s qui vérifie donc :
– $\forall y \in B$, on a $y \leq s$
– Soit $t < s$, alors $\exists y \in B$ tel que $t < y$.
Si l'on revient aux éléments de A ($x = -y$), on trouve
– $\forall x \in A$, on a $x \geq -s$
– Soit $-t > -s$, alors $\exists x \in A$ tel que $-t > x$.
Ceci est la caractérisation de "$-s$" est la borne inférieure de A.
