Exercices du chapitre VI avec corrigé succinct

Exercice VI.1 Ch6-Exercice1

Montrer par récurrence que

$$\forall k = 1, 2, \ldots, n, \quad \frac{d^k}{dx^k} x^n = n(n-1)\cdots(n+1-k)x^{n-k},$$

En déduire que

$$\frac{d^n}{dx^n} x^n = n!$$

puis que

$$\frac{d^k}{dx^k} x^n = 0, \ \forall k > n.$$

Solution : La récurrence se fait sur k.

– Pour $k = 1$, on a $\dfrac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$.

– Supposant que la relation est vraie pour k, on a alors

$$\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} = \frac{d}{dx}(n(n-1)\cdots(n+1-k)x^{n-k}) = n(n-1)\cdots(n-k)x^{n-k-1}.$$

Les deux autres résultats s'en déduisent immédiatement.

Exercice VI.2 Ch6-Exercice2

Montrer que la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 0 n'est autre que la formule des accroissements finis.

Solution : Si l'on fait $n = 0$ dans la formule de Taylor-Lagrange, on obtient

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h)$$

où $0 < \theta < 1$. On retrouve la formule des accroissements finis avec $b = a + h$ et $c = a + \theta h$ est bien compris entre a et b.

Exercice VI.3 Ch6-Exercice3

Montrer que si l'on applique la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n à un polynôme de degré n, on obtient la formule de Taylor pour les polynômes.

Solution : En effet, si P est un polynôme de degré n, alors $P^{(n+1)}(x) = 0$ et donc le reste dans la formule de Taylor-Lagrange est nul. On retrouve ainsi la formule de Taylor pour les polynômes.

Exercice VI.4 Ch6-Exercice4

Montrer que la formule de Mac-Laurin est une application directe de la formule de Taylor-Lagrange.

Solution : Si on pose $a = 0$ et $h = x$ dans la formule de Taylor-Lagrange, on obtient la formule de Mac-Laurin.

Exercice VI.5 Ch6-Exercice5

Donner une approximation de $\ln 2$ en utilisant le développement de Taylor de $f(x) = \ln(1+x)$ à l'ordre 2, 3, ...,6 et comparer à sa valeur exacte.

Solution :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7(1+\theta x)^7}$$

Les approximations successives donnent :

$$\ln 2 = 1 - 0.5 + \frac{1}{3(1+\theta)^3} = 0.5 + \frac{1}{3(1+\theta)^3}$$

$$\ln 2 = 1 - 0.5 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4(1+\theta)^4} = 0.833 - \frac{1}{4(1+\theta)^4}$$

$$\ln 2 = 0.583 + \frac{1}{5(1+\theta)^5}$$

$$\ln 2 = 0.749 - \frac{1}{6(1+\theta)^6}$$

$$\ln 2 = 0.606 - \frac{1}{7(1+\theta)^7}$$

et la valeur exacte est

$$\ln 2 = 0.693\ldots$$

On voit que les restes ne sont pas négligeables et qu'il faut quelques itérations supplémentaires pour avoir la deuxième décimale exacte ... puisque le terme que l'on rajoute est en $\frac{1}{n}$.

Exercice VI.6 Ch6-Exercice6

Donner, à l'ordre 7, le développement de $\sin x$ et $\cos x$ au point $x = 0$.

Solution : On obtient

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!}\sin(\theta x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!}\cos(\theta x)$$

Exercice VI.7 Ch6-Exercice7

Donner les développements de Mac-Laurin des fonctions $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Solution : Calculons les dérivées successives de $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$:

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}, \cdots, \quad f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}},$$

d'où le développement de Mac-Laurin à l'ordre n :

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + x^{n+1}\frac{1}{(1-\theta x)^{n+2}}.$$

Les dérivées de $\sinh x$ et $\cosh x$ se calculent aisément, et on obtient à l'ordre 2p :

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2p-1}}{(2p-1)!} + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}\cosh(\theta x)$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}\sinh(\theta x)$$

Les développements à l'ordre $2p+1$ sont aussi faciles à écrire.

Exercice VI.8 Ch6-Exercice8

1. Donner le développement de Taylor-Young de $\sin x$ au voisinage de $\frac{\pi}{4}$ à l'ordre 4.
2. Donner le développement de Taylor-Young de $\sin x$ au voisinage de 0 à l'ordre 4. En déduire la limite de $\dfrac{\sin x - x}{x^3}$ quand x tend vers 0.

Solution :

1. On a

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \sin\frac{\pi}{4} + x\cos\frac{\pi}{4} - \frac{x^2}{2}\sin\frac{\pi}{4} - \frac{x^3}{3!}\cos\frac{\pi}{4} + \frac{x^4}{4!}\sin\frac{\pi}{4} + x^4\varepsilon(x)$$

et en remplaçant par les valeurs numériques

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}\right) + x^4\varepsilon(x).$$

2. Le développement de Taylor-Young de $\sin x$ au voisinage de 0 est :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + x^4\varepsilon(x).$$

Alors

$$\frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6} + x\varepsilon(x)$$

et donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}.$$

Exercice VI.9 Ch6-Exercice9

Montrer que les infiniment petits (au voisinage de 0) $\sin kx$ ($k \in \mathbb{N}$, $k \neq 0$) et x sont du même ordre et que les infiniment petits (au voisinage de 0) x^2 et $\sin x$ ne sont pas du même ordre.

Solution : Les fonctions $\sin kx$, x et x^2 tendent vers 0 quand $x \to 0$, ce sont donc des infiniment petits au voisinage de 0. Puisque

$$\lim_{x\to 0} k\frac{\sin kx}{kx} = k$$

les infiniment petits $\sin kx$ et x sont du même ordre. Par contre

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\frac{\sin x}{x} = \infty$$

ce qui montre que $\sin x$ et x^2 ne sont pas des infiniment petits du même ordre.

Exercice VI.10 Ch6-Exercice10

On suppose que f est un infiniment petit d'ordre p au voisinage de a et on pose $g(x) = f(a+x)$. Montrer que g est un infiniment petit d'ordre p au voisinage de 0.

Solution :

$$f(x) = \alpha(x-a)^p(1+\varepsilon(x-a))$$

d'où

$$g(x)(= f(a+x)) = \alpha x^p(1+\varepsilon(x))$$

et donc g est un infiniment petit d'ordre p au voisinage de 0.

Exercice VI.11 Ch6-Exercice11

Soit la fonction $f(x) = x\sin(1/x)$, montrer que c'est un infiniment petit au voisinage de $x = 0$, mais que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^p}$ n'existe pas pour $p \geq 1$. En déduire que l'infiniment petit f n'a pas d'ordre entier non nul.

Solution : Il est clair que

$$|f(x)| = |x\sin\frac{1}{x}| \leq |x|$$

aussi la fonction f tend vers 0 quand x tend vers 0. Par contre

$$\frac{f(x)}{x^p} = \frac{1}{x^{p-1}}\sin\frac{1}{x}$$

et puisque $p-1 \geq 0$, le terme $\frac{1}{x^{p-1}}$ est soit égal à 1, soit tend vers l'infini et le terme $\sin\frac{1}{x}$ n'a pas de limite quand x tend vers 0. D'où l'infiniment petit f n'a pas d'ordre.

Exercice VI.12 Ch6-Exercice12

Montrer que si f et g sont deux infiniment petits au voisinage de 0, on a

$$\text{Ordre}\,(f(x)g(x)) = \text{Ordre}\,(f(x)) + \text{Ordre}\,(g(x))$$

et en déduire que si f est d'ordre strictement supérieur à g, alors

$$\text{Ordre}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \text{Ordre}\,(f(x)) - \text{Ordre}\,(g(x)).$$

Solution : Soient m et n les ordres respectifs des infiniment petits f et g au voisinage de 0 :

$$f(x) = \alpha x^m + x^m \varepsilon_1(x), \quad g(x) = \beta x^n + x^n \varepsilon_2(x).$$

En faisant le produit, il vient :

$$f(x)g(x) = \alpha\beta x^{m+n} + x^{m+n}(\beta\varepsilon_1(x) + \alpha\varepsilon_2(x) + \varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x))$$

et la fonction

$$\varepsilon(x) = \beta\varepsilon_1(x) + \alpha\varepsilon_2(x) + \varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)$$

tend vers 0 quand x tend vers 0. Pour le quotient, il suffit d'écrire

$$f(x) = g(x)\,\frac{f(x)}{g(x)}$$

et d'appliquer le résultat précédent.

Exercice VI.13 Ch6-Exercice13

Soient $f(x) = x$ et $g(x) = -\sin x$. Quel est l'ordre des infiniment petits f, g et $f+g$? Conclusion ?

Solution : L'ordre des infiniment petits x et $\sin x$ est évidemment 1. Par contre

$$x - \sin x = x - (x - \frac{x^3}{3!} + x^4\varepsilon(x))$$

et donc $f+g$ est d'ordre 3. Il n'y a donc pas de résultat général sur l'ordre d'une somme de deux infiniment petits lorsqu'ils sont du même ordre.

Exercice VI.14 Ch6-Exercice14

Montrer que si f admet un développement limité à l'ordre n en a, elle y admet un développement à n'importe quel ordre $m < n$.

Solution : Soit

$$f(a+h) = \alpha_0 + \alpha_1 h + \alpha_2 h^2 + \cdots + \alpha_m h^m + \cdots + \alpha_n h^n + h^n\varepsilon(h)$$

alors

$$f(a+h) = \alpha_0 + \alpha_1 h + \alpha_2 h^2 + \cdots + \alpha_m h^m + h^m(\alpha_{m+1}h + \cdots + \alpha_n h^{n-m} + h^{n-m}\varepsilon(h))$$

et la fonction $\alpha_{m+1}h + \cdots + \alpha_n h^{n-m} + h^{n-m}\varepsilon(h)$ tend évidemment vers 0 quand h tend vers 0.

Exercice VI.15 Ch6-Exercice15

Donner des exemples de développement limité dans lequel la partie régulière du développement est un polynôme de degré strictement inférieur à l'ordre du développement.

Solution : Un exemple trivial est

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + x^4\varepsilon(x)$$

dans lequel l'ordre du développement est 4 et le polynôme est de degré 3.

Exercice VI.16 Ch6-Exercice16

Donner le développement limité à l'ordre 3 de $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Solution : La fonction $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ étant paire, il suffit de ne calculer que les termes pairs du développement, soit

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, \quad f''(x) = \frac{-2}{(1+x^2)^2} + x(\cdots)$$

ce qui donne $f''(0) = -2$ d'où

$$f(x) = 1 - x^2 + x^3\varepsilon(x).$$

Exercice VI.17 Ch6-Exercice17

Donner, à l'ordre 2, le développement limité de e^x et $\sin x$. En déduire le développement limité à l'ordre 2 de $e^x \sin x$. Retrouver ce résultat en utilisant la formule de Taylor.

Solution : A l'ordre 2, le développement de e^x et $\sin x$

$$e^x \sin x = (1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_1(x))(x + x^2\varepsilon_2(x))$$

soit

$$e^x \sin x = x + x^2 + x^2\varepsilon(x).$$

Vous pouvez calculer les dérivées de $e^x \sin x$ pour vérifier ce résultat.

Exercice VI.18 Ch6-Exercice18

Donner le développement limité à l'ordre 7 de $\sin x$ et $\cos x$. Effectuer la division suivant les puissantes croissantes des deux parties principales pour montrer que le développement limité à l'ordre 7 de $\tan x$ est :

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + 2\frac{x^5}{15} + 17\frac{x^7}{315} + x^7\varepsilon(x).$$

Solution : Il faut diviser suivant les puissances croissantes les deux polynômes suivants :

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$
$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}.$$

Exercice VI.19 Ch6-Exercice19

Donner le développement limité à l'ordre 5 de $\frac{1}{1+x^2}$ (en utilisant celui de $(1+x)^{-1}$).

Solution : Le développement de $(1+y)^{-1}$ s'obtient en faisant $\alpha = -1$ dans celui de $(1+y)^\alpha$:

$$(1+y)^{-1} = 1 - y + y^2 - y^3 + y^4 - y^5 + y^5\varepsilon(y)$$

ce qui donne

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + x^5\varepsilon(x).$$

Les calculs sont beaucoup moins importants que si l'on avait dû calculer les dérivées jusqu'à l'ordre 4.

Exercice VI.20 Ch6-Exercice20

Donner le développement limité de $(1-x^2)^{-1/2}$ à l'ordre 5. En déduire (par intégration) le développement limité de $\operatorname{Arc}\sin x$ à l'ordre 6. Comment calculeriez vous celui de $\operatorname{Arc}\tan x$?

Solution : On prend le développement de $(1+y)^\alpha$ avec $\alpha = -\frac{1}{2}$, ce qui donne

$$(1+y)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}y + \frac{3}{8}y^2 + y^2\varepsilon(y)$$

soit

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + x^5\varepsilon(x)$$

soit en intégrant ($\operatorname{Arc}\sin x$ est une fonction impaire) :

$$\operatorname{Arc}\sin x = C + x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + x^6\varepsilon(x).$$

Or $C = \operatorname{Arc}\sin 0 = 0$, donc

$$\operatorname{Arc}\sin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + x^6\varepsilon(x).$$

La dérivée de $\operatorname{Arc}\tan x$ est $\dfrac{1}{1+x^2}$, dont nous avons calculé un développement limité dans l'exercice VI.19. Il suffit alors d'intégrer ce développement limité pour obtenir celui de $\operatorname{Arc}\tan x$.
