4. Action de groupe

1. Deux points de vue équivalents sur l'action d'un groupe sur un ensemble
2. Exemples d'actions de groupe
3. Orbites et stabilisateurs ; action transitive, action fidèle
4. Formule des classes
5. Trois actions d'un groupe G dans lui-même
6. Théorème de Cayley
7. L'action naturelle de $\mathfrak{S}_n$ sur $[\![1, n]\!]$

1. Deux points de vue équivalents sur l'action d'un groupe sur un ensemble

Soient $(G, *, e)$ un groupe et X un ensemble.

Définition (action de groupe, 1^{er} point de vue)

On appelle action ou opération du groupe G sur l'ensemble X une application

$$\begin{array}{rcl} \Phi : G \times X & \longrightarrow & X \\ (g, x) & \longmapsto & g \cdot x \end{array}$$

telles que :

1. $(\forall x \in X) \qquad e \cdot x = x$
2. $(\forall x \in X)(\forall g, g' \in G) \qquad g' \cdot (g \cdot x) = (g' * g) \cdot x$

On dit aussi que G agit ou opère sur X.

Remarque : On ne considère ici que des actions **à gauche**.

Second point de vue sur l'action de $(G, *, e)$ sur X

Définition-proposition (action de groupe, 2^{nd} point de vue)

1. *A toute action de G sur X est associé un morphisme de groupe*

$$\begin{array}{rcl} \rho : G & \longrightarrow & Bij(X) \\ g & \longmapsto & \rho(g) : x \mapsto g \cdot x \end{array}$$

2. *Réciproquement, un morphisme de groupe $\rho : G \to Bij(X)$ définit une action du groupe G sur X par*

$$\begin{array}{rcl} \Phi : G \times X & \longrightarrow & X \\ (g, x) & \longmapsto & \rho(g)(x) \end{array}$$

Un tel morphisme $\rho : G \to Bij(X)$ s'appelle une représentation du groupe G sur l'ensemble X.

Démonstration : simple vérification (exercice). $\square$

2. Exemples d'actions de groupe

1. L'exemple générique : Soit X un ensemble non vide. Tout sous-groupe G de $(\mathrm{Bij}(X), \circ, \mathrm{Id}_{X)}$ induit une action sur X par l'injection canonique

$$\rho \ : \ G \hookrightarrow \mathrm{Bij}(X)$$

C'est l'opération naturelle de G sur X.

2. Représentation linéaire : Soit X un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On considère son groupe linéaire $\mathrm{GL}(X) \hookrightarrow \mathrm{Bij}(X)$. Soit G un groupe. Un morphisme de groupe

$$\rho \ : \ G \hookrightarrow \mathrm{GL}(X)$$

s'appelle une représentation linéaire de G sur X. On dit aussi que G opère linéairement sur X.

3. Orbites et stabilisateurs

Soient un groupe $(G, *, e)$, un ensemble X et une action $\Phi : G \times X \to X$.

Définition (orbite)

On appelle orbite de $x \in X$ sous l'action de G,

$$\mathrm{Orb}(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \Phi\left(G \times \{x\}\right) = \{g \cdot x \ : \quad g \in G\} \qquad \subset X$$

Exercice :
Les orbites forment une partition de X. Elles sont les classes d'équivalence de la relation

$$(\forall x, x' \in X) \qquad x \mathcal{R} x' \stackrel{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} \left(\exists g \in G \ : \quad x' = g \cdot x\right)$$

Exemple visuel : $X = \mathbb{R}^2$ sur lequel on fait opérer naturellement son groupe orthogonal $O(\mathbb{R}^2) = \{\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \ \text{ isométrie}\} \hookrightarrow GL(\mathbb{R}^2)$. Les orbites sont les cercles centrés sur l'origine.

X/G ensemble des orbites de X sous l'action de G

Soient un groupe $(G, *, e)$, un ensemble X et une action $\Phi : G \times X \to X$.
Les orbites sont les classes d'équivalence de la relation

$$(\forall x, x' \in X) \qquad x\mathcal{R}x' \overset{\text{déf}}{\iff} \big(\exists g \in G \ : \ x' = g \cdot x\big)$$

L'ensemble quotient $X/\mathcal{R}$ est noté X/G, c'est l'ensemble des orbites.
Objectif : déterminer et paramétrer les orbites. (problème de classification)

Définition (section de $\pi : X \to X/G$)

On appelle section de l'application (surjective) $\pi : X \to X/G$ une application $s : X/G \to X$ telle que $\pi \circ s = \mathrm{Id}_{X/G}$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\pi"] \\ X/G \arrow[u, bend left, "s"] \end{tikzcd}$$

$$\boxed{X = \bigsqcup_{x \in s(X/G)} \mathrm{Orb}(x)}$$

union disjointe

action transitive, action fidèle

Soient un groupe $(G, *, e)$, un ensemble X et une action $\Phi : G \times X \to X$.

Définitions (action transitive, action fidèle)

On dit que :

1. G opère **transitivement** sur X si on a :

$$(\forall x, x' \in X)(\exists g \in G) \qquad g \cdot x = x'$$

2. G opère **fidèlement** sur X si on a :

$$((\forall x \in X) \quad g \cdot x = x) \implies g = e$$

<u>Exercices</u> : (de compréhension)

1. G opère transitivement sur X si et seulement s'il existe $x \in X$ tel que $\mathrm{Orb}(x) = X$. G opère transitivement sur ses orbites.
2. G opère fidèlement sur X si et seulement $\rho : G \to \mathrm{Bij}(X)$ est injective. $G/\mathrm{Ker}(\rho)$ opère fidèlement sur X.

Stabilisateurs

Soient un groupe $(G, *, e)$, un ensemble X et une action $\Phi : G \times X \to X$.

Définition (stabilisateur)

On appelle stabilisateur de $x \in X$ sous l'action de G,

$$\mathrm{Stab}(x) \overset{\text{déf}}{=} \{g \in G \ : \quad g \cdot x = x\} \hookrightarrow G$$

Exercices : (de compréhension)

1. Vérifier que $\mathrm{Stab}(x)$ est un sous-groupe de G.
2. Montrer que si x et x' appartiennent à la même orbite, alors $\mathrm{Stab}(x)$ et $\mathrm{Stab}(x')$ sont conjugués, précisément

$$(\forall (g, x) \in G \times X) \qquad \mathrm{Stab}(g \cdot x) = g * \mathrm{Stab}(x) * g^{-1} = i_g\left(\mathrm{Stab}(x)\right)$$

3. $\boxed{\mathrm{Ker}(\rho) = \bigcap_{x \in X} \mathrm{Stab}(x)}$ (où ρ est la représentation de l'action)

Lien entre $\mathrm{Orb}(x)$ et $\mathrm{Stab}(x)$

Soit une action du groupe $(G, *, e)$ sur l'ensemble X et soit $x \in X$.

$$\begin{array}{rcl} \Theta : G & \longrightarrow & \mathrm{Orb}(x) \\ g & \longmapsto & g \cdot x \end{array}$$

est une application surjective. (ce n'est pas un morphisme, dire pourquoi !)
On a (exercice)

$$\Theta(g) = \Theta(g') \iff g' \in g * \mathrm{Stab}(x) \qquad \text{(classe à gauche)}$$

donc Θ se factorise en une bijection $\widetilde{\Theta}$ par le quotient :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\Theta"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathrm{Orb}(x) \\ G/\mathrm{Stab}(x) \arrow[ur, "\widetilde{\Theta}"'] & \end{tikzcd}$$

$$\boxed{\mathrm{card}\,(G/\mathrm{Stab}(x)) = \mathrm{card}\,(\mathrm{Orb}(x))}$$

4. Formule des classes

Soit un groupe <u>fini</u> $(G, *, e)$ qui opère sur un ensemble <u>fini</u> X.
Dans ce cas il n'y a qu'un nombre fini d'orbites, et elles ont toutes un nombre fini d'éléments.
Soit $s : X/G \to X$ une section de la projection canonique $\pi : X \to X/G$

Lemme (formule des classes)

$$card(X) = \sum_{x \in s(X/G)} \frac{ord(G)}{ord\,(Stab(x))}$$

<u>Démonstration</u> :

1. $X = \bigsqcup_{x \in s(X/G)} \mathrm{Orb}(x)$
2. $\mathrm{card}\,(G/\mathrm{Stab}(x)) = \mathrm{card}\,(\mathrm{Orb}(x))$
3. $\mathrm{ord}(G) = \mathrm{card}\,(G/\mathrm{Stab}(x))\,\mathrm{ord}\,(\mathrm{Stab}(x))$ $(\longleftrightarrow$ Lagrange$)$

$\square$

5. Trois actions d'un groupe G dans lui-même

Soit un groupe $(G, *, e)$.
(1) G opère sur lui-même par translation à gauche

$$\begin{array}{rcl} \Phi_g : G \times G & \longrightarrow & G \\ (g, x) & \longmapsto & g \cdot x = g * x \end{array}$$

$\boxed{\mathrm{Orb}(x) = G}$ L'action est transitive et même simplement transitive, *i.e.*

$$(\forall x, x' \in G)(\exists! g \in G) \qquad x' = g * x$$

$\boxed{\mathrm{Stab}(x) = \{e\}}$ en particulier, l'action est fidèle. On a donc un morphisme

$$\rho : G \to \mathrm{Bij}(G) \qquad \textbf{injectif}.$$

On en déduira le théorème de Cayley . . .

(2) G opère sur lui-même par translation à droite

$$\begin{array}{rcl} \Phi_d : G \times G & \longrightarrow & G \\ (g,x) & \longmapsto & g \cdot x = x * g^{-1} \end{array}$$

$\boxed{\mathrm{Orb}(x) = G}$ L'action est transitive et même simplement transitive, *i.e.*

$$(\forall x, x' \in G)(\exists! g \in G) \qquad x' = x * g^{-1}$$

$\boxed{\mathrm{Stab}(x) = \{e\}}$ en particulier, l'action est fidèle. On a donc un morphisme

$$\rho : G \to \mathrm{Bij}(G) \qquad \textbf{injectif}.$$

<u>Exercices</u> : (de compréhension)

1. Dire pourquoi $(g,x) \mapsto x * g$ n'est pas une action (à gauche !).
2. Soit H un sous-groupe de G. Faire agir H sur G par translation à gauche, puis à droite.

(3) G opère sur lui-même par automorphismes intérieurs

$$\begin{array}{rcl}\Phi_i : G \times G & \longrightarrow & G \\ (g,x) & \longmapsto & g \cdot x = i_g(x) = g * x * g^{-1}\end{array}$$

Les orbites s'appellent des classes de conjugaison. Cette action n'est pas transitive : on a $\boxed{\mathrm{Orb}(e) = \{e\}}$. Si G est commutatif, on a même $(\forall x \in G) \quad \mathrm{Orb}(x) = \{x\}$.
$\mathrm{Stab}(x)$ est l'ensemble des éléments qui commutent avec x.

$$\boxed{\mathrm{Stab}(x) = \{g \in G \;\; : \quad g * x = x * g\}}$$

On a donc :

$$Z(G) = \bigcap_{x \in G} \mathrm{Stab}(x)$$

Ainsi, l'action est fidèle si et seulement si $Z(G) = \{e\}$.

6. Théorème de Cayley

Soit un groupe $(G, *, e)$.

Théorème (Cayley)

Si $card(G) = n \in \mathbb{N}$, *alors* G *est isomorphe à un sous-groupe de* $\mathfrak{S}_n$

Démonstration :

1. L'action de G dans lui-même par translation à gauche donne un morphisme injectif $\rho : G \to \mathrm{Bij}(G)$.
2. Soit une bijection $f : [\![1, n]\!] \to G$.

$$\begin{array}{rcl} \Psi : \mathrm{Bij}(G) & \longrightarrow & \mathfrak{S}_n \\ \varphi & \longmapsto & f^{-1} \circ \varphi \circ f \end{array}$$

   est un isomorphisme.
3. $\Psi \circ \rho : G \to \mathfrak{S}_n$ est un morphisme injectif, et G est donc isomorphe à $\Psi \circ \rho(G)$, sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$.

$\square$

7. L'action naturelle de $\mathfrak{S}_n$ sur $[\![1, n]\!]$

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \mathfrak{S}_n \times [\![1, n]\!] & \longrightarrow & [\![1, n]\!] \\ (\sigma, x) & \longmapsto & \sigma \cdot x = \sigma(x) \end{array}$$

<u>Exercices</u> :

1. L'action est transitive : $(\forall x \in [\![1, n]\!]) \quad \mathrm{Orb}(x) = [\![1, n]\!]$.
2. La représentation associée est $\rho = \mathrm{Id}_{\mathfrak{S}_n}$; en particulier, l'action est fidèle.
3. $\mathrm{Stab}(n)$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_{n-1}$.
4. Ecrire la formule des classes. En déduire $\boxed{\mathrm{ord}(\mathfrak{S}_n) = n!}$

Décomposition d'une permutation en cycles disjoints

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Le sous-groupe $< \sigma >$ opère (aussi) naturellement sur $[\![1, n]\!]$.

<u>Exercices</u> :

1. Désignons par $O_1, \ldots, O_r$ les r orbites de $[\![1, n]\!]$ sous l'action de$< \sigma >$. Pour $l \in [\![1, r]\!]$, décrire O_l à l'aide de σ et d'un élément $k \in O_l$.
2. Pour $l \in [\![1, r]\!]$, on définit une permutation par

$$(\forall x \in [\![1, n]\!]) \qquad \sigma_l(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \left| \begin{array}{ccc} x & \text{si} & x \notin O_l \\ \sigma(x) & \text{si} & x \in O_l \end{array} \right.$$

   Montrer que les σ_l sont des cycles de supports disjoints (et donc permutables).
3. Conclure $\sigma = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_r$.
4. Ecrire un cycle comme produit de transpositions (2 façons "naturelles").

Les parties à k éléments de $[\![1,n]\!]$

$\mathfrak{S}_n$ agit aussi “naturellement” sur les parties à k éléments de $[\![1,n]\!]$,

$$\mathcal{P}_{n,k} \stackrel{\text{déf}}{=} \{A \subset [\![1,n]\!] \ : \quad \mathrm{card}(A) = k\},$$

par

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \mathfrak{S}_n \times \mathcal{P}_{n,k} & \longrightarrow & \mathcal{P}_{n,k} \\ (\sigma, A) & \longmapsto & \sigma \cdot A = \{\sigma(x) \ : \quad x \in A\} \end{array}$$

<u>Exercices</u> :

1. L'action est transitive : $\mathrm{Orb}([\![1,k]\!]) = \mathcal{P}_{n,k}$.
2. L'action est-elle fidèle ?
3. $\mathrm{Stab}([\![1,k]\!])$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_{n-k}$.
4. Ecrire la formule des classes. En déduire $\boxed{\mathrm{card}(\mathcal{P}_{n,k}) = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}}$