Chapitre IV - Transformée de Fourier ($\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$)

1. L'espace $\mathcal{S}$ des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à dérivées à décroissance rapide

D'abord un outil pour comparer des fonctions positives :

Définition (grand O de Landau)

Soient deux fonctions $f,\ g : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$.

$$f = O(g) \overset{\text{déf}}{\iff} (\exists \lambda > 0)(\exists A > 0)(\forall x \in \mathbb{R}) \qquad |x| \geq A \Longrightarrow f(x) \leq \lambda g(x)$$

en français :
suffisamment loin de 0, f est majoré par une constante fois g.

Fonctions à décroissance rapide

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Définition (décroissance rapide)

On dit que f est à décroissance rapide si

$$(\forall \rho > 0) \qquad |f| = O\left(|x|^{-\rho}\right)$$

i.e. $|f|$ décroît plus vite que l'inverse de tout polynôme.

Exemples :

1. $e^{-|x|}$, e^{-x^2} sont à décroissance rapide.
2. les fonctions à support compact sont à décroissance rapide.
3. $f, \ g$ à décroissance rapide $\implies$ $f + g$, fg, Pf (où P est un polynôme) sont aussi à décroissance rapide.

L'espace de Schwartz $\mathcal{S}$

Définition

$\mathcal{S}$ est l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$, dont toutes les dérivées sont à décroissance rapide.

$$\mathcal{S} \overset{\text{déf}}{=} \left\{\varphi \in \mathcal{C}^\infty \quad : \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \qquad \varphi^{(n)} \text{ à décroissance rapide}\right\}$$

Exemples :

1. $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$
2. $e^{-x^2} \in \mathcal{S}$ (mais $e^{-x^2} \notin \mathcal{D}$)
3. $e^{-|x|} \notin \mathcal{S}$ (pas dérivable en 0)

Propriétés de $\mathcal{S}$

1. $\mathcal{S}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
2. stable par dérivation : $\varphi \in \mathcal{S} \Longrightarrow \varphi' \in \mathcal{S}$
3. stable par produit : $\varphi, \psi \in \mathcal{S} \Longrightarrow \varphi\psi \in \mathcal{S}$
4. stable par produit avec des polynômes : $\varphi \in \mathcal{S},\ P \in \mathbb{C}[X] \ \Longrightarrow \varphi P \in \mathcal{S}$
5. stable par convolution : $\varphi, \psi \in \mathcal{S} \Longrightarrow \varphi * \psi \in \mathcal{S}$

Définition (convergence dans $\mathcal{S}$)

Soient $\varphi \in \mathcal{S}$ et $\varphi_n \in \mathcal{S}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

$$\varphi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{S}} \varphi \ \overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} \ (\forall m \in \mathbb{N}) \qquad p_m(\varphi_n - \varphi) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$$\text{où} \ : \quad p_m(\varphi) \overset{\text{déf}}{=} \sup_{\substack{x\in\mathbb{R} \\ k,k'\in[\![0,m]\!]}} |x|^k |\varphi^{(k')}(x)| \quad < \infty$$

2. Fourier dans $\mathcal{S}$: un formulaire raisonné

1. Définition, notations
2. Linéarité
3. Translation - Modulation
4. Changement d'échelle
5. Régularité - Décroissance
6. Exemple fondamental : $g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ a pour T.F. $\hat{g}(\xi) = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{\xi^2}{2}}$
7. Echange
8. Inversion
9. Convolution - Produit
10. Parseval
11. Isomorphisme continu $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$

1. Définition, notations

Soit $\varphi \in \mathcal{S}$.

Définition (transformée de Fourier)

On désigne par $\widehat{\varphi}$, par $\mathcal{F}\varphi$, ou par $\mathcal{F}[\varphi]$ (s'il faut préciser) la transformée de Fourier de φ, *i.e.*

$$(\forall \xi \in \mathbb{R}) \qquad \widehat{\varphi}(\xi) \overset{\text{not.}}{=} \mathcal{F}\varphi(\xi) \overset{\text{not.}}{=} \mathcal{F}[\varphi](\xi) \overset{\text{déf}}{=} \int \varphi(x) e^{-ix\xi} dx$$

Remarques :

1. C'est une intégrale de Lebesgue dès que φ mesurable et $\displaystyle\int |\varphi| < +\infty$, *i.e.* dès que $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$, *a fortiori* pour $\varphi \in \mathcal{S}$.
2. On va établir un formulaire dans $\mathcal{S}$ pour garantir la dérivabilité à tout ordre, l'intégrabilité des dérivées, l'annulation des crochets d'I.P.P. ...
3. Certaines formules s'étendront à des espaces fonctionnels "plus gros" que $\mathcal{S}$.

2. Linéarité

$\mathcal{F}$ est linéaire sur $\mathcal{S}$

$$
\begin{array}{rrcl}
(\forall \varphi,\ \psi \in \mathcal{S}) & \mathcal{F}\left[\varphi + \psi\right] & = & \mathcal{F}\varphi + \mathcal{F}\psi \\
(\forall \lambda \in \mathbb{C})(\forall \varphi \in \mathcal{S}) & \mathcal{F}\left[\lambda\varphi\right] & = & \lambda\mathcal{F}\varphi
\end{array}
$$

3. Translation - Modulation

Translation - Modulation

$(\forall a \in \mathbb{R})(\forall \varphi \in \mathcal{S})$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[\mathcal{T}_a \varphi\right] &= e^{-ia\xi}\widehat{\varphi} \\ \mathcal{T}_a \widehat{\varphi} &= \mathcal{F}\left[e^{iax}\varphi\right] \end{aligned}$$

4. Changement d'échelle

changement d'échelle

Soit $\varphi \in \mathcal{S}$.

$$(\forall \lambda > 0) \qquad \mathcal{F}\left[\varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right] = \lambda\widehat{\varphi}(\lambda\xi)$$

Exercices :

1. Montrer que : $(\forall \lambda \neq 0) \qquad \mathcal{F}\left[\varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right] = |\lambda|\widehat{\varphi}(\lambda\xi)$
2. On désigne par P l'opérateur de parité défini par $P\varphi(x) = \varphi(-x)$. En déduire que P et $\mathcal{F}$ commutent : $\boxed{\mathcal{F}P = P\mathcal{F}}$
3. Montrer que :

$$\boxed{\mathcal{F}\left[\overline{\varphi}\right] = \overline{P\widehat{\varphi}} = P\overline{\widehat{\varphi}}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\overline{\widehat{\varphi}} = P\mathcal{F}\left[\overline{\varphi}\right]}$$

5. Régularité - Décroissance

Régularité - Décroissance

$(\forall \varphi \in \mathcal{S})(\forall n \in \mathbb{N})$,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[\varphi^{(n)}\right] &= (i\xi)^n \,\widehat{\varphi} \\ \widehat{\varphi}^{(n)} &= \mathcal{F}\left[(-ix)^n \varphi\right] \end{aligned}$$

Exercices :

1. f à décroissance rapide $\Longrightarrow$ $\widehat{f} \in \mathcal{C}^\infty$
2. $\boxed{\varphi \in \mathcal{S} \implies \widehat{\varphi} \in \mathcal{S}}$, mais en général si $\varphi \in \mathcal{D}$ alors $\widehat{\varphi}$ n'est pas à support compact.

6. Exemple fondamental

la TF d'une gaussienne est une gaussienne

$$g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \Longrightarrow \quad \widehat{g}(\xi) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

<u>Démonstration</u> : (exercice de TD)

1. g est l'unique solution de l'équa. diff. $\begin{cases} g' + xg = 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$ (admis, voir Th. de Cauchy).
2. $\mathcal{F}\left[g' + xg\right] = i\xi\widehat{g} + i\widehat{g}'$.
3. $\widehat{g}(0) = \displaystyle\int e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$.

$\square$

7. Echange

échange

$$(\forall \varphi, \psi \in \mathcal{S}) \qquad \int \widehat{\varphi}(s)\psi(s)ds = \int \varphi(s)\widehat{\psi}(s)ds$$

<u>Démonstration</u> : (exercice)

Comme $\displaystyle\int |\varphi(x)||\psi(s)|dxds < +\infty$, on peut utiliser Fubini :

$$\int \left(\int \varphi(x)e^{-isx}dx \right) \psi(s)ds = \int \varphi(x) \left(\int \psi(s)e^{-isx}ds \right) dx$$

$\square$

8. Inversion

inversion

$$(\forall \varphi \in \mathcal{S}) \qquad \varphi(x) = \mathcal{F}^{-1}\left[\widehat{\varphi}\right](x) \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{2\pi}\int \widehat{\varphi}(\xi)e^{ix\xi}d\xi$$

<u>Démonstration</u> :

1. Par échange, puis changement de variable,

$$(\forall \lambda > 0) \quad \int \widehat{\varphi}(s)g\left(\frac{s}{\lambda}\right)ds = \int \varphi(s)\lambda\widehat{g}(\lambda s)ds = \int \varphi\left(\frac{u}{\lambda}\right)\widehat{g}(u)du$$

2. Avec $\lambda \to +\infty$, par TCD, $g(0)\int \widehat{\varphi}(s)ds = \varphi(0)\int \widehat{g}(u)du$, soit

$$\varphi(0) = \frac{1}{2\pi}\int \widehat{\varphi}(s)ds$$

3. par translation,

$$\varphi(x) = \left(\mathcal{T}_{-x}\varphi\right)(0) = \frac{1}{2\pi}\int \mathcal{F}\left[\mathcal{T}_{-x}\varphi\right](\xi)d\xi = \frac{1}{2\pi}\int \widehat{\varphi}(\xi)e^{ix\xi}d\xi \qquad \square$$

Exercices (de manipulation ...)

On rappelle que l'opérateur de parité est défini par $P\varphi(x) = \varphi(-x)$.

1.
$$\mathcal{F}^{-1} = \frac{1}{2\pi} P\mathcal{F} = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}P \quad \text{et} \quad \mathcal{F} = 2\pi P\mathcal{F}^{-1} = 2\pi\mathcal{F}^{-1}P$$

2.
$$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} = Id_{\mathcal{S}} = \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}$$

3.
$$\boxed{\mathcal{F}\mathcal{F} = 2\pi P}$$

9. Convolution - Produit

Convolution - Produit

$(\forall \varphi, \psi \in \mathcal{S})$,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\varphi * \psi] &= \widehat{\varphi}\widehat{\psi} \\ \mathcal{F}[\varphi\psi] &= \frac{1}{2\pi}\widehat{\varphi} * \widehat{\psi} \end{aligned}$$

<u>Démonstration</u> :

1. Comme $\displaystyle\int |\varphi(s)||\psi(x-s)|dxds < +\infty$, on peut utiliser Fubini :

$$\int \left(\int \varphi(s)\psi(x-s)ds \right) e^{-ix\xi}dx = \int \varphi(s) \left(\int \psi(x-s)e^{-ix\xi}dx \right) ds$$

2. exercice (utiliser $\mathcal{F}^{-1}$, plusieurs façons).

$\square$

10. Parseval

Conservation du produit scalaire et de la norme L^2

$$(\forall \varphi, \psi \in \mathcal{S}) \qquad (\varphi, \psi) = \frac{1}{2\pi}(\widehat{\varphi}, \widehat{\psi})$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
(\widehat{\varphi}, \widehat{\psi}) &= \int \widehat{\varphi}\overline{\widehat{\psi}} \\
&= \int \widehat{\varphi}(\xi)\overline{\left(\int \psi(x)e^{-ix\xi}dx\right)}d\xi
\end{aligned}$$

(suite en exercice : Fubini, . . .) $\square$

11. Isomorphisme continu $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$

Les résultats précédents montrent que

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F} : \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathcal{S} \\ \varphi & \longmapsto & \widehat{\varphi} \end{array}$$

est linéaire et bijective : c'est un isomorphisme de $\mathbb{C}$-e.v.

$\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ est continu

$$(\forall m \in \mathbb{N})(\exists c_m > 0)(\forall \varphi \in \mathcal{S}) \qquad p_m(\widehat{\varphi}) \leq c_m p_{m+2}(\varphi)$$

En particulier :

$$\varphi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{S}} \varphi \quad \Longrightarrow \quad \widehat{\varphi_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{S}} \widehat{\varphi}$$

<u>Démonstration</u> :

$$|\xi|^k |\widehat{\varphi}^{(k')}(\xi)| = \left| (i\xi)^k \mathcal{F}\left[(-ix)^{k'} \varphi \right](\xi) \right| = \left| \mathcal{F}\left[\left((-ix)^{k'} \varphi \right)^{(k)} \right](\xi) \right|$$

suite en exercice $\square$