MT91 A10. Corrigé de l'Examen médian

Exercice 1 *(barème: 6 points).*

On considère la fonction f définie pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\setminus\{0\}$ par

$$f(x) = (\cos x)^{\frac{1}{x}}.$$

(a) **Soit $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\setminus\{0\}$. Mettre $f(x)$ sous forme exponentielle.**

Correction (0.25 pt). On a $f(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\ln\cos x\right)$ pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\setminus\{0\}$. □

(b) **Donner les développements limités en 0 à l'ordre 3 des fonctions $x \mapsto \cos x$ et $u \mapsto \ln(1+u)$.**

Correction (0.5 pt pour chaque DL). On a d'après la formule de Taylor-Young que pour tous x et u

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon_1(x);$$

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + u^3\varepsilon_2(u),$$

où les ε_i désignent des fonctions qui tendent vers 0 en 0 (attention le DL de cosinus est d'ordre 3, même si la partie régulière est de degré 2!). □

(c) **Déduire de (b) un développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \ln(\cos x)$.**

Correction (1 pt). On va appliquer le théorème de composition des DL. La partie régulière de cos x en 0 à l'ordre 3 s'écrit $1 + R(x)$, où R est un polynôme de valuation 1 qui s'écrit $R(x) = -\frac{x^2}{2}$. Celle de $\ln(1+u)$ en 0 à l'ordre 3 s'écrit $Q(u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3}$. Donc, la partie régulière du DL de ln cos x en 0 à l'ordre 3 est donnée pour tout x par la troncature de degré 3 de

$$\begin{aligned} Q \circ R(x) = Q(R(x)) &= R(x) - \frac{(R(x))^2}{2} + \frac{(R(x))^3}{3} \\ &= -\frac{x^2}{2} - \frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^3}{3} \\ &= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{24}. \end{aligned}$$

En troncant ce dernier polynôme au degré 3, on en déduit le DL de la fonction composée à l'ordre 3:

$$\ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon_3(x). \qquad (1)$$

□

(d) **En déduire avec (a) un développement limité à l'ordre 2 de f en 0.**

Correction (1 pt). Tout d'abord, on déduit de (1) que pour tout $x \neq 0$,

$$\frac{1}{x}\ln(\cos x) = -\frac{x}{2} + x^2\varepsilon_3(x).$$

Comme d'après la formule de Taylor Young,

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + u^2\varepsilon_4(u)$$

en raisonnant comme précédemment d'après le théorème de composition des DL (*i.e.* on remplace u par la partie régulière du DL de $\frac{1}{x}\ln(\cos x)$ en 0), on obtient

$$
\begin{aligned}
e^{\frac{1}{x}\ln\cos x} &= 1 + \left(-\frac{x}{2}\right) + \frac{\left(-\frac{x}{2}\right)^2}{2} + x^2\varepsilon_4(x) \\
&= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + x^2\varepsilon_4(x). \qquad (2)
\end{aligned}
$$

$\square$

(e) **Déduire de (d) la valeur de $\alpha = \lim_{x\to 0} f(x)$. En déduire que f peut être prolongée par continuité en 0.**

Correction (0.5 + 0.25 pt). Rappelons que f admet une limite en 0 si et seulement elle admet un DL d'ordre 0 en 0, et que cette limite est le terme constant de ce DL. D'après (2), on a donc

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1.$$

En particulier, f est prolongeable par continuité en 0. En appelant g ce prolongement, g est la fonction qui coïncide avec f sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\setminus\{0\}$, et telle que $g(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = 1$. La fonction g ainsi construite, d'après ce qui précède, est continue en 0. $\square$

(f) **Soit g, le prolongement par continuité de f en 0, c'est à dire:**

$$g(x) = \begin{cases} \alpha & \text{si } x = 0; \\ f(x) & \text{si } x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\setminus\{0\}. \end{cases}$$

Etudier la dérivabilité de g en 0.

Correction (1 pt). On étudie la limite du taux de variation de g en 0:

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{g(h)-g(0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-1}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1-\frac{h}{2}-1}{h} \\
&= -\frac{1}{2},
\end{aligned}
$$

où l'on a au passage utilisé le DL de f en 0 à l'ordre 1. La fonction g est donc bien dérivable en 0, de dérivée $-\frac{1}{2}$. $\square$

(g) **Déduire de (d) l'équation de la tangente à la courbe de g en 0, et la position de la courbe par rapport à cette tangente.**

Correction (1 pt). L'équation de la tangente à la courbe de g en 0 est le DL à l'ordre 1 en 0 de g, qui est égal au DL à l'ordre 1 en 0 de f (ces deux fonctions coïncident dans tout voisinage de 0 privé de 0). L'équation est donc donnée, d'après (2), par

$$y = 1 - \frac{x}{2}.$$

Quant à la position de la tangente par rapport à la courbe de g, il suffit d'étudier, pour tout x au voisinage de 0, le signe de la différence entre l'ordonnée du point d'abscisse x sur la courbe de g et l'ordonnée du point x sur la tangente. Autrement dit, on étudie le signe de la différence $g(x) - y$, qui est égale à $f(x) - y$ pour tout $x \neq 0$, et vaut vaut d'après (2)

$$\frac{x^2}{8} + x^2\varepsilon_4(x).$$

Cette dernière quantité est > 0 pour $x \neq 0$ et x suffisamment petit, puisque $\lim_{x\to 0}\varepsilon_4(x) = 0$. La courbe est donc située au dessus de sa tangente en 0. $\square$

Exercice 2 : CHANGER DE COPIE (barème: 4 points)

On se propose de calculer l'intégrale $I = \int_0^1 t^2\,dt$ par la méthode des rectangles.

(1) **On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on note pour tout $k = 0, ..., n$, $x_k = \frac{k}{n}$.**

(a) **Pour tout $k = 1, ..., n$, pour tout $x \in [x_{k-1}, x_k[$, on pose**

$$u_n(x) = \left(\frac{k-1}{n}\right)^2;$$
$$U_n(x) = \left(\frac{k}{n}\right)^2.$$

Que peut-on dire des fonction u_n et U_n? Faire un dessin pour un n assez petit pour représenter les fonctions u_n et U_n.

Correction (0.5 pt pour la description + 0.5 pt pour le dessin). Pour cet n, la famille $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ est une subdivision de $[0, 1]$. Par ailleurs, les fonctions u_n et U_n sont constantes (respectivement égales à $\left(\frac{k-1}{n}\right)^2$ et $\left(\frac{k}{n}\right)^2$) sur tout petit intervalle $[x_{k-1}, x_k[$, donc ces deux fonctions sont *étagées* sur $[0, 1]$, et la subdivision $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ est adaptée à u_n et U_n. Sur un dession, il faut mettre en évidence que la subdivision est à pas constant $\frac{1}{n}$, et que u_n et U_n sont constantes par morceaux et croissantes sur $[0, 1[$. □

(b) **Montrer que pour tout $x \in [0, 1[$,**

$$u_n(x) \leq x^2 \leq U_n(x).$$

Correction (1 pt). En fait, u_n et U_n sont construites de sorte à encadrer la fonction carré, comme on l'a vu en cours dans la construction de l'intégrale. Vérifions-le. Comme $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ est une subdivision de $[0, 1[$, pour tout $x \in [0, 1[$ il existe $k \in \{1, ..., n\}$ tel que $x \in [x_{k-1}, x_k[= \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right[$. Par ailleurs, comme la fonction $t \to t^2$ est croissante sur $[0, 1[$, on a

$$\frac{k-1}{n} \leq x < \frac{k}{n} \Longrightarrow \left(\frac{k-1}{n}\right)^2 \leq x^2 \leq \left(\frac{k}{n}\right)^2 \Longleftrightarrow u_n(x) \leq x^2 \leq U_n(x).$$

Ceci est vrai pour tout $x \in [0, 1[$. □

(c) **Soient $a_n = \int_0^1 u_n(x)\,dx$ et $b_n = \int_0^1 U_n(x)\,dx$.**
Montrer que $a_n = \dfrac{2n^2 - 3n + 1}{6n^2}$ et $b_n = \dfrac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2}$.
(*indication: on a* $\sum_{k=1}^{p} k^2 = \dfrac{p(p+1)(2p+1)}{6}$ *pour tout* $p \geq 1$).

Correction (0.5 pt pour a_n et 0.5 pt pour b_n). L'intégrale $\int_0^1 u_n(x)\,dx$ correspond, comme pour toute fonction étagée, à une somme d'aires de rectangles. Plus précisément,

$$\begin{aligned}
a_n = \int_0^1 u_n(x)\,dx &= \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left(\frac{k-1}{n}\right)^2 dx \\
&= \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \left(\frac{k-1}{n}\right)^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \left(\frac{k-1}{n}\right)^2 \\
&= \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} (k-1)^2.
\end{aligned}$$

En faisant le changement d'indice $j = k - 1$, cette dernière somme vaut $\sum_{j=0}^{n-1} j^2$, ou encore $\sum_{j=1}^{n-1} j^2$ puisque le terme correspondant à $j = 0$ est nul. Donc on a

$$a_n = \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^{n-1} j^2 = \frac{1}{n^3} \frac{(n-1)(n-1+1(2(n-1)+1)}{6} = \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6n^3} = \frac{2n^2 - 3n + 1}{6n^2},$$

en appliquant le résultat donné en indication à $p = n - 1$.

De même, on obtient que

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2}.$$

□

(2) (a) **Montrer que les suites (a_n) et (b_n) convergent vers la même limite ℓ, et donner la valeur de ℓ.**

Correction (0.5 pt). Il est facile, avec les expressions trouvées en 1.(d), de conclure que

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} b_n = \frac{1}{3}.$$

□

(b) **Déduire de tout ce qui précède, la valeur de I (sans la calculer directement, bien sûr!).**

Correction (1 pt). On déduit de 1.(b) que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^1 u_n(x)\, dx \leq \int_0^1 x^2\, dx \leq \int_0^1 U_n(x)\, dx,$$

ou autrement dit, $a_n \leq I \leq b_n$. Comme (a_n) et (b_n) tendent vers la même limite $\frac{1}{3}$, on déduit du théorème d'encadrement que $I = \frac{1}{3}$. □