

## Exercices du chapitre 3 avec corrigé succinct

### Exercice III.1 Ch3-Exercice1

Soient  $\alpha$  et  $u_0$  deux réels donnés. Soit alors  $(u_n)$  une suite géométrique définie par  $u_n = \alpha u_{n-1}$ . Donner le terme général de la suite en fonction de  $n$ ,  $\alpha$  et  $u_0$ .

**Solution :**  $u_n = \alpha^n u_0$

---

### Exercice III.2 Ch3-Exercice2

Soit une suite  $u_n$  et soit la suite  $v_n = u_n - l$ , où  $l$  est un réel donné. Montrer, en utilisant la définition de la convergence que

$$((u_n) \text{ tend vers } l) \Leftrightarrow ((v_n) \text{ tend vers } 0)$$

**Solution :** La convergence de la suite  $(u_n)$  vers  $l$  s'écrit

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, (n > N) \Rightarrow (|u_n - l| < \varepsilon),$$

ce qui est équivalent à

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, (n > N) \Rightarrow (|v_n| < \varepsilon),$$

puisque  $v_n = u_n - l$ . (Il n'y a donc pas de calcul!)

---

### Exercice III.3 Ch3-Exercice3

Quelle est la limite d'une suite constante ? (On fera la démonstration en utilisant la définition).

**Solution :** La limite d'une suite constante  $u_n = a$  est  $a$  puisque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = 1, (n > N) \Rightarrow (|u_n - a| = 0 < \varepsilon).$$

---

### Exercice III.4 Ch3-Exercice4

Utiliser la définition de la convergence pour montrer que la suite  $u_n = \frac{1}{n}$ ,  $n > 0$ , tend vers 0.

**Solution :** Soit  $\varepsilon > 0$ , alors

$$n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il suffit donc de choisir ,

$$N \geq \frac{1}{\varepsilon}.$$

Par exemple

$$N = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1.$$

on a aura alors

$$(n > N) \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

---

### Exercice III.5 Ch3-Exercice5

Écrire, à l'aide de quantificateurs, la définition de la divergence d'une suite  $u_n$ . Montrer alors que la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = (-1)^n$  est divergente.

**Solution :** Rappelons nous que  $P \Rightarrow Q$  s'écrit **(non P) ou Q**, expression dont la négation est **P et (non Q)**. Nous arrivons ainsi à :

$$\forall l, \exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, (n \geq N) \text{ et } (|u_n - l| \geq \varepsilon).$$

Pour montrer que la suite  $u_n = (-1)^n$  (qui ne prend que les valeurs +1 et -1) diverge nous allons faire une démonstration cas par cas sur  $l$ .

$$- \forall l \geq 0, \exists 0 < \varepsilon \leq l + 1, \forall N, \exists n = 2N + 1 \text{ et } |u_n - l| = |-1 - l| = 1 + l \geq \varepsilon$$

$$- \forall l < 0, \exists 0 < \varepsilon \leq -l + 1, \forall N, \exists n = 2N \text{ et } |u_n - l| = |1 - l| = 1 - l \geq \varepsilon$$

---

### Exercice III.6 Ch3-Exercice6

En utilisant le lien entre les suites convergentes et les suites bornées, montrer qu'une suite qui tend vers l'infini est divergente.

**Solution :** Puisque  $P \Rightarrow Q$  est équivalent à **(non Q)  $\Rightarrow$  (non P)**, et sachant que toute suite convergente est bornée, nous arrivons à : toute suite non bornée est divergente.

---

### Exercice III.7 Ch3-Exercice7

Montrer que la suite  $u_n = \frac{n}{n+1}$  est croissante et majorée. Est-elle convergente ?

**Solution :** La suite est croissante car (le vérifier)

$$\frac{n}{n+1} \leq \frac{n+1}{n+2}$$

et elle est bornée, puisque

$$|u_n| = u_n \leq 1,$$

elle est donc convergente.

---

### Exercice III.8 Ch3-Exercice8

1. Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites croissantes. Montrer que la suite  $(u_n + v_n)$  est aussi croissante.
2. Soit  $(u_n)$  une suite croissante. Montrer que la suite  $(-u_n)$  est décroissante.

**Solution :**

1. Se déduit immédiatement du fait que :

$$\begin{aligned} & \forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \\ & \left\{ \{(m \leq n) \Rightarrow (u_m \leq u_n)\} \text{ et } \{(m \leq n) \Rightarrow (v_m \leq v_n)\} \right\} \\ & \Rightarrow \{(m \leq n) \Rightarrow (u_m + v_m \leq u_n + v_n)\} \end{aligned}$$

2. Se déduit immédiatement du fait que :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \{(m \leq n) \Rightarrow (u_m \leq u_n)\} \Rightarrow \{(m \leq n) \Rightarrow (-u_m \geq -u_n)\}$$

---

### Exercice III.9 Ch3-Exercice9

Soit  $(u_n)$  une suite croissante. Montrer que si  $(u_n)$  converge vers une limite  $l$ , alors quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $u_n \leq l$ .

**Solution :** On va montrer la contraposée, c'est à dire :

S'il existe un entier  $N$  tel que  $l < u_N$ , alors la suite  $(u_n)$  ne converge pas vers  $l$ .

Si  $l < u_N$ , alors, du fait de la croissance de la suite  $(u_n)$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N) \Rightarrow (l < u_N \leq u_n),$$

de sorte que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N) \Rightarrow (0 < u_N - l \leq u_n - l).$$

La proposition  $(u_n)$  converge vers  $l$  se traduit par :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N' \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n > N' \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon),$$

Donc sa négation se traduit par :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall N' \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, (n > N') \text{ et } (|u_n - l| \geq \varepsilon),$$

On peut choisir  $\varepsilon = u_N - l$ .

Pour tout  $N'$ , on peut choisir  $n = \max(N' + 1, N)$ .

On a alors  $n > N'$  et  $n \geq N$  donc  $u_n - l \geq u_N - l = \varepsilon$  donc  $|u_n - l| \geq \varepsilon$ .

Ceci termine de démontrer que la suite  $(u_n)$  ne converge pas vers  $l$ .

---

### Exercice III.10 ChC3-Exercice10

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , deux suites convergentes dont on notera  $\hat{u}$  et  $\hat{v}$  les limites respectives. En utilisant la définition de la convergence, montrer que la suite  $(u_n + v_n)$  converge vers  $\hat{u} + \hat{v}$  (on pensera à utiliser l'inégalité triangulaire :  $|u_n + v_n - \hat{u} - \hat{v}| \leq |u_n - \hat{u}| + |v_n - \hat{v}|$ ).

**Solution :** On écrit que les deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  convergent, soit pour tout  $\varepsilon > 0$  donné,

$$\exists N_1, (n > N_1) \Rightarrow (|u_n - \hat{u}| < \frac{\varepsilon}{2})$$

$$\exists N_2, (n > N_2) \Rightarrow (|v_n - \hat{v}| < \frac{\varepsilon}{2})$$

et par conséquent

$$\exists N = \max(N_1, N_2), (n > N) \Rightarrow (|u_n + v_n - \hat{u} - \hat{v}| \leq |u_n - \hat{u}| + |v_n - \hat{v}| < \varepsilon)$$

---

### Exercice III.11 Ch3-Exercice11

Soit  $(v_n)$  une suite convergeant vers 0 et soit la suite  $(u_n)$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq v_n$ . Montrer que la suite  $(u_n)$  tend vers 0.

**Solution :** On a donc  $-v_n \leq u_n \leq v_n$ ,  $-v_n$  et  $v_n$  ont pour limite 0, on applique le théorème 3.1.3 qui permet de conclure que  $u_n$  tend vers 0.

---

**Exercice III.12** Ch3-Exercice12

Soit  $(v_n)$  une suite convergeant vers 0 et soit  $(u_n)$  une suite bornée, montrer que la suite  $(u_n v_n)$  tend vers 0.

**Solution :** On a  $|u_n v_n| = |u_n| |v_n| \leq M |v_n|$ .

Or

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M |v_n| = 0.$$

D'où (en utilisant l'exercice précédent) la suite  $(u_n v_n)$  tend vers 0.

---

**Exercice III.13** Ch3-Exercice13

1. Donner des exemples de suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  qui tendent respectivement vers  $+\infty$  et  $-\infty$  telles que :

- (a)  $(u_n + v_n)$  tende vers  $-\infty$ .
- (b)  $(u_n + v_n)$  tende vers  $+\infty$ .
- (c)  $(u_n + v_n)$  converge vers  $l$ .

2. Donner des exemples de suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  qui tendent respectivement vers  $+\infty$  et 0 telles que :

- (a)  $(u_n v_n)$  tende vers  $+\infty$ .
- (b)  $(u_n v_n)$  converge vers 0.
- (c)  $(u_n v_n)$  converge vers  $l \neq 0$ .

**Solution :**

1. (a)

$$u_n = n, v_n = -n^2, u_n + v_n = n(1 - n).$$

(b)

$$u_n = n^2, v_n = -n, u_n + v_n = n(n - 1).$$

(c)

$$u_n = n, v_n = -n, u_n + v_n = 0.$$

2. (a)

$$u_n = n^4, v_n = \frac{1}{n^2}, u_n v_n = n^2.$$

(b)

$$u_n = n^2, v_n = \frac{1}{n^4}, u_n v_n = \frac{1}{n^2}.$$

(c)

$$u_n = n^2, v_n = \frac{1}{n^2}, u_n v_n = 1.$$


---

**Exercice III.14** Ch3-Exercice14

Soit  $(u_n)$  une suite convergente de limite  $l$  strictement positive.

1. Montrer qu'il existe un entier naturel  $N$  tel que, pour tout  $n$  supérieur à  $N$ , on ait  $u_n > 0$ .
2. Si on définit la suite  $(v_n)$  par  $v_n = 1/u_n$ , pour  $n$  supérieur au  $N$  précédent, les  $N$  premiers termes de la suite étant quelconques, quelle est la limite de la suite  $(v_n)$  ?
3. Peut-on faire le même raisonnement si  $l < 0$  ?

**Solution :**

1. Puisque  $l > 0$ , il existe  $0 < \varepsilon < l$ . On choisit un tel  $\varepsilon$ . Puisque la suite converge, on a

$$\exists N, (n > N) \Rightarrow (l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon).$$

Or  $l - \varepsilon > 0$ , d'où  $u_n > 0$  pour  $n > N$ .

2. Les éléments de la suite  $v_n$  existent donc pour  $n > N$  et on sait que la limite du quotient de deux suites convergentes, dans ce cas, est le quotient des limites, soit  $\frac{1}{l}$ .

3. Le raisonnement est le même pour  $l < 0$  car dans ce cas il suffit d'utiliser la suite  $(-u_n)$ .

---

### Exercice III.15 Ch3-Exercice15

Soit  $(a_n)_{n \geq 1}$  une suite d'entiers compris entre 0 et 9. On associe à  $(a_n)_{n \geq 1}$ , les suites de nombres rationnels suivantes :

$$\alpha_n = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{10^k}, \quad \beta_n = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{10^k} + \frac{1}{10^n}$$

Montrer que ces deux suites  $(\alpha_n)$  et  $(\beta_n)$  sont adjacentes.

[Elles définissent un réel  $x$ , leur limite commune, dont  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  sont les **approximations décimales à  $10^{-n}$  près**, respectivement par défaut et par excès.]

**Solution :** On peut vérifier aisément que  $\alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} \geq 0$ , que  $\beta_{n+1} - \beta_n = \frac{a_{n+1} - 9}{10^{n+1}} \leq 0$  et que  $\beta_n - \alpha_n = \frac{1}{10^n} > 0$  tend vers 0. Les deux suites sont donc adjacentes.

---

### Exercice III.16 Ch3-Exercice16

Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \{(m \geq N) \text{ et } (n \geq N)\} \Rightarrow (|u_m - u_n| \leq \varepsilon),$$

est équivalent à

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \{(n \geq N) \text{ et } (p \in \mathbb{N})\} \Rightarrow (|u_{n+p} - u_n| \leq \varepsilon).$$

(Une des deux implications est claire, pour l'autre il faut voir que si deux entiers sont quelconques, l'un est nécessairement supérieur ou égal à l'autre).

**Solution :**

1. L'implication de la deuxième proposition par la première est claire, puisque, quel que soit l'entier naturel  $p$ ,  $n + p$  est supérieur ou égal à  $n$ .
  2. L'implication réciproque provient du fait que si on prend  $m$  et  $n$  quelconques, nécessairement l'un des deux est supérieur ou égal à l'autre, par exemple  $m \geq n \geq N$  et on peut alors poser  $m = n + p$  ( $p \geq 0$ ).
- 

### Exercice III.17 Ch3-Exercice17

Montrer, en utilisant les suites de Cauchy, que la suite  $(u_n)$ , définie par  $u_n = (-1)^n$  est divergente.

**Solution :** Puisqu'il y a équivalence entre suite de Cauchy et suite convergente, il suffit de démontrer que la suite  $(u_n)$  n'est pas une suite de Cauchy, c'est à dire

$$\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists m \geq N \text{ et } \exists n \geq N \text{ et } |u_m - u_n| > \varepsilon.$$

En effet si l'on prend  $\varepsilon = 1$ ,  $m = 2N$ ,  $n = 2N + 1$ , on obtient  $|u_m - u_n| = 2 > 1$ , ce qui achève la démonstration.

---

### Exercice III.18 Ch3-Exercice18

Montrer que la suite récurrente

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = Ku_n, n \geq 0. \end{cases}$$

où  $0 \leq K < 1$  est une suite convergente. Puis montrer que sa limite est nulle.

**Solution :** On montre par récurrence que  $u_n = K^n$ . Donc  $u_n \geq 0$ .

La suite  $(u_n)$  est décroissante ( $u_{n+1} - u_n = (K - 1)u_n \leq 0$ ).

La suite  $(u_n)$  est décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente. Soit  $l$  sa limite.

Puisque la suite  $(u_{n+1})$  a la même limite que la suite  $(u_n)$ , on a

$$l = Kl \Leftrightarrow l(K - 1) = 0$$

et comme  $K < 1$ , la seule solution est  $l = 0$ .

---

### Exercice III.19 Ch3-Exercice19

Étudier, selon le nombre réel  $\alpha$ , la suite récurrente *linéaire* d'ordre 1 définie par

$$\begin{cases} u_0 \text{ donné,} \\ u_{n+1} = \alpha u_n, n \geq 0. \end{cases}$$

**Solution :** On peut montrer par récurrence que  $u_n = \alpha^n u_0$ .

- Lorsque  $-1 < \alpha < 1$ , on définit  $v_n = |u_n| = |u_0| |\alpha|^n$ . On a démontré dans l'exercice III.18 que la suite  $|\alpha|^n$  convergeait vers 0. La suite  $(v_n = |u_n|)$  converge donc vers 0 et donc la suite  $(u_n)$  converge vers 0.
  - Lorsque  $1 < \alpha$ , on pose  $v_n = 1/u_n$ , on utilise l'exercice III.18 pour montrer que  $(v_n)$  converge vers 0, donc  $u_n$  tend vers  $+\infty$ , donc la suite  $(u_n)$  ne converge pas.
  - Lorsque  $\alpha < -1$ , on pose  $v_n = 1/|u_n|$ , on utilise l'exercice III.18 pour montrer que  $v_n$  converge vers 0, donc  $|u_n|$  tend vers  $+\infty$ , donc la suite  $(u_n)$  ne converge pas.
  - Lorsque  $\alpha = 1$ , on obtient une suite constante (laquelle?).
  - Lorsque  $\alpha = -1$ , on obtient une suite divergente bien connue (laquelle?).
- 

### Exercice III.20 Ch3-Exercice20

Soit  $f$  une fonction réelle telle que

$$(L) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|,$$

où  $0 < K < 1$  est donné. Montrer que si l'équation  $u = f(u)$  a une solution, celle-ci est unique.

**Solution :** Supposons qu'il existe deux solutions distinctes  $l_1$  et  $l_2$  de l'équation  $u = f(u)$ , soit  $l_1 = f(l_1)$  et  $l_2 = f(l_2)$ . Alors, on a

$$|l_1 - l_2| = |f(l_1) - f(l_2)| \leq K|l_1 - l_2| < |l_1 - l_2|$$

ce qui est impossible ...

---

### Exercice III.21 Ch3-Exercice21

Soit la série  $(u_n)$ , définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_n = \frac{1}{n}, \text{ pour } (n > 0). \end{cases}$$

Notons  $(S_n)$ , la suite des sommes partielles associées.

1. Montrer que  $S_n = S_{n-1} + 1/n$ ,  $S_0 = 0$ .
2. Nous avons déjà étudié la convergence de cette suite. Vous souvenez-vous du résultat ?
3. Est-ce que la suite  $(u_n)$  tend vers 0 ? Ce résultat permet-il de conclure que la série  $(u_n)$  converge ?

**Solution :**

1.  $S_0 = u_0 = 0$ ,  $S_n = u_0 + \dots + u_{n-1} + u_n = S_{n-1} + u_n$ .
  2. On a montré, par les suites de Cauchy, que la suite  $S_n$  est divergente.
  3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ . Le fait que la suite  $(u_n)$  tende vers 0 est un condition nécessaire mais non suffisante pour que la série  $(u_n)$  converge, comme le montre cet exemple.
-