

## Exercices du chapitre 6 avec corrigé succinct

### Exercice VI.1 Ch6-Exercice1

Montrer par récurrence que

$$\forall k = 1, 2, \dots, n, \quad \frac{d^k}{dx^k} x^n = n(n-1) \cdots (n+1-k)x^{n-k},$$

En déduire que

$$\frac{d^n}{dx^n} x^n = n!$$

puis que

$$\frac{d^k}{dx^k} x^n = 0, \quad \forall k > n.$$

**Solution :** La récurrence se fait sur  $k$ .

- Pour  $k = 1$ , on a  $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ .
- Supposant que la relation est vraie pour  $k$ , on a alors

$$\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} = \frac{d}{dx}(n(n-1) \cdots (n+1-k)x^{n-k}) = n(n-1) \cdots (n-k)x^{n-k-1}.$$

Les deux autres résultats s'en déduisent immédiatement.

---

### Exercice VI.2 Ch6-Exercice2

Montrer que la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 0 n'est autre que la formule des accroissements finis.

**Solution :** Si l'on fait  $n = 0$  dans la formule de Taylor-Lagrange, on obtient

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h)$$

où  $0 < \theta < 1$ . On retrouve la formule des accroissements finis avec  $b = a+h$  et  $c = a+\theta h$  est bien compris entre  $a$  et  $b$ .

---

### Exercice VI.3 Ch6-Exercice3

Montrer que si l'on applique la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre  $n$  à un polynôme de degré  $n$ , on obtient la formule de Taylor pour les polynômes.

**Solution :** En effet, si  $P$  est un polynôme de degré  $n$ , alors  $P^{(n+1)}(x) = 0$  et donc le reste dans la formule de Taylor-Lagrange est nul. On retrouve ainsi la formule de Taylor pour les polynômes.

---

### Exercice VI.4 Ch6-Exercice4

Montrer que la formule de Mac-Laurin est une application directe de la formule de Taylor-Lagrange.

**Solution :** Si on pose  $a = 0$  et  $h = x$  dans la formule de Taylor-Lagrange, on obtient la formule de Mac-Laurin.

---

**Exercice VI.5 Ch6-Exercice5**

Donner une approximation de  $\ln 2$  en utilisant le développement de Taylor de  $f(x) = \ln(1+x)$  à l'ordre 2, 3, ..., 6 et comparer à sa valeur exacte.

**Solution :**

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7(1+\theta x)^7}$$

Les approximations successives donnent :

$$\begin{aligned}\ln 2 &= 1 - 0.5 + \frac{1}{3(1+\theta)^3} = 0.5 + \frac{1}{3(1+\theta)^3} \\ \ln 2 &= 1 - 0.5 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4(1+\theta)^4} = 0.833 - \frac{1}{4(1+\theta)^4} \\ \ln 2 &= 0.583 + \frac{1}{5(1+\theta)^5} \\ \ln 2 &= 0.749 - \frac{1}{6(1+\theta)^6} \\ \ln 2 &= 0.606 - \frac{1}{7(1+\theta)^7}\end{aligned}$$

et la valeur exacte est

$$\ln 2 = 0.693\dots$$

On voit que les restes ne sont pas négligeables et qu'il faut quelques itérations supplémentaires pour avoir la deuxième décimale exacte ... puisque le terme que l'on rajoute est en  $\frac{1}{n}$ .

---

**Exercice VI.6 Ch6-Exercice6**

Donner, à l'ordre 7, le développement de  $\sin x$  et  $\cos x$  au point  $x = 0$ .

**Solution :** On obtient

$$\begin{aligned}\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} \sin(\theta x) \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} \cos(\theta x)\end{aligned}$$


---

**Exercice VI.7 Ch6-Exercice7**

Donner les développements de Mac-Laurin des fonctions  $f(x) = \frac{1}{1-x}$ ,  $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ,  $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ .

**Solution :** Calculons les dérivées successives de  $f(x) = \frac{1}{1-x}$  :

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}, \dots, \quad f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}},$$

d'où le développement de Mac-Laurin à l'ordre  $n$  :

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + x^{n+1} \frac{1}{(1-\theta x)^{n+2}}.$$

Les dérivées de  $\sinh x$  et  $\cosh x$  se calculent aisément, et on obtient à l'ordre  $2p$  :

$$\begin{aligned}\sinh x &= x + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2p-1}}{(2p-1)!} + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} \cosh(\theta x) \\ \cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} \sinh(\theta x)\end{aligned}$$

Les développements à l'ordre  $2p+1$  sont aussi faciles à écrire.

---

**Exercice VI.8** Ch6-Exercice8

1. Donner le développement de Taylor-Young de  $\sin x$  au voisinage de  $\frac{\pi}{4}$  à l'ordre 4.
2. Donner le développement de Taylor-Young de  $\sin x$  au voisinage de 0 à l'ordre 4. En déduire la limite de  $\frac{\sin x - x}{x^3}$  quand  $x$  tend vers 0.

**Solution :**

1. On a

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \sin\frac{\pi}{4} + x \cos\frac{\pi}{4} - \frac{x^2}{2} \sin\frac{\pi}{4} - \frac{x^3}{3!} \cos\frac{\pi}{4} + \frac{x^4}{4!} \sin\frac{\pi}{4} + x^4 \varepsilon(x)$$

et en remplaçant par les valeurs numériques

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 + x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}\right) + x^4 \varepsilon(x).$$

2. Le développement de Taylor-Young de
- $\sin x$
- au voisinage de 0 est :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + x^4 \varepsilon(x).$$

Alors

$$\frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6} + x \varepsilon(x)$$

et donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}.$$

**Exercice VI.9** Ch6-Exercice9

Montrer que les infiniment petits (au voisinage de 0)  $\sin kx$  ( $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \neq 0$ ) et  $x$  sont du même ordre et que les infiniment petits (au voisinage de 0)  $x^2$  et  $\sin x$  ne sont pas du même ordre.

**Solution :** Les fonctions  $\sin kx$ ,  $x$  et  $x^2$  tendent vers 0 quand  $x \rightarrow 0$ , ce sont donc des infiniment petits au voisinage de 0. Puisque

$$\lim_{x \rightarrow 0} k \frac{\sin kx}{kx} = k$$

les infiniment petits  $\sin kx$  et  $x$  sont du même ordre. Par contre

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \frac{\sin x}{x} = \infty$$

ce qui montre que  $\sin x$  et  $x^2$  ne sont pas des infiniment petits du même ordre.**Exercice VI.10** Ch6-Exercice10

On suppose que  $f$  est un infiniment petit d'ordre  $p$  au voisinage de  $a$  et on pose  $g(x) = f(a+x)$ . Montrer que  $g$  est un infiniment petit d'ordre  $p$  au voisinage de 0.

**Solution :**

$$f(x) = \alpha(x-a)^p(1 + \varepsilon(x-a))$$

d'où

$$g(x) (= f(a+x)) = \alpha x^p(1 + \varepsilon(x))$$

et donc  $g$  est un infiniment petit d'ordre  $p$  au voisinage de 0.

**Exercice VI.11** Ch6-Exercice11

Soit la fonction  $f(x) = x \sin(1/x)$ , montrer que c'est un infiniment petit au voisinage de  $x = 0$ , mais que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^p}$  n'existe pas pour  $p \geq 1$ . En déduire que l'infiniment petit  $f$  n'a pas d'ordre entier non nul.

**Solution** : Il est clair que

$$|f(x)| = \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|$$

aussi la fonction  $f$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers 0. Par contre

$$\frac{f(x)}{x^p} = \frac{1}{x^{p-1}} \sin \frac{1}{x}$$

et puisque  $p - 1 \geq 0$ , le terme  $\frac{1}{x^{p-1}}$  est soit égal à 1, soit tend vers l'infini et le terme  $\sin \frac{1}{x}$  n'a pas de limite quand  $x$  tend vers 0. D'où l'infiniment petit  $f$  n'a pas d'ordre.

---

**Exercice VI.12** Ch6-Exercice12

Montrer que si  $f$  et  $g$  sont deux infiniment petits au voisinage de 0, on a

$$\text{Ordre}(f(x)g(x)) = \text{Ordre}(f(x)) + \text{Ordre}(g(x))$$

et en déduire que si  $f$  est d'ordre strictement supérieur à  $g$ , alors

$$\text{Ordre} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \text{Ordre}(f(x)) - \text{Ordre}(g(x)).$$

**Solution** : Soient  $m$  et  $n$  les ordres respectifs des infiniment petits  $f$  et  $g$  au voisinage de 0 :

$$f(x) = \alpha x^m + x^m \varepsilon_1(x), \quad g(x) = \beta x^n + x^n \varepsilon_2(x).$$

En faisant le produit, il vient :

$$f(x)g(x) = \alpha\beta x^{m+n} + x^{m+n}(\beta\varepsilon_1(x) + \alpha\varepsilon_2(x) + \varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x))$$

et la fonction

$$\varepsilon(x) = \beta\varepsilon_1(x) + \alpha\varepsilon_2(x) + \varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)$$

tend vers 0 quand  $x$  tend vers 0. Pour le quotient, il suffit d'écrire

$$f(x) = g(x) \frac{f(x)}{g(x)}$$

et d'appliquer le résultat précédent.

---

**Exercice VI.13** Ch6-Exercice13

Soient  $f(x) = x$  et  $g(x) = -\sin x$ . Quel est l'ordre des infiniment petits  $f$ ,  $g$  et  $f + g$ ? Conclusion?

**Solution** : L'ordre des infiniment petits  $x$  et  $\sin x$  est évidemment 1. Par contre

$$x - \sin x = x - \left( x - \frac{x^3}{3!} + x^4 \varepsilon(x) \right)$$

et donc  $f + g$  est d'ordre 3. Il n'y a donc pas de résultat général sur l'ordre d'une somme de deux infiniment petits lorsqu'ils sont du même ordre.

---

**Exercice VI.14** Ch6-Exercice14

Montrer que si  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en  $a$ , elle y admet un développement à n'importe quel ordre  $m < n$ .

**Solution :** Soit

$$f(a+h) = \alpha_0 + \alpha_1 h + \alpha_2 h^2 + \dots + \alpha_m h^m + \dots + \alpha_n h^n + h^n \varepsilon(h)$$

alors

$$f(a+h) = \alpha_0 + \alpha_1 h + \alpha_2 h^2 + \dots + \alpha_m h^m + h^m (\alpha_{m+1} h + \dots + \alpha_n h^{n-m} + h^{n-m} \varepsilon(h))$$

et la fonction  $\alpha_{m+1} h + \dots + \alpha_n h^{n-m} + h^{n-m} \varepsilon(h)$  tend évidemment vers 0 quand  $h$  tend vers 0.

---

**Exercice VI.15** Ch6-Exercice15

Donner des exemples de développement limité dans lequel la partie régulière du développement est un polynôme de degré strictement inférieur à l'ordre du développement.

**Solution :** Un exemple trivial est

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + x^4 \varepsilon(x)$$

dans lequel l'ordre du développement est 4 et le polynôme est de degré 3.

---

**Exercice VI.16** Ch6-Exercice16

Donner le développement limité à l'ordre 3 de  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ .

**Solution :** La fonction  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  étant paire, il suffit de ne calculer que les termes pairs du développement, soit

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, \quad f''(x) = \frac{-2}{(1+x^2)^2} + x(\dots)$$

ce qui donne  $f''(0) = -2$  d'où

$$f(x) = 1 - x^2 + x^3 \varepsilon(x).$$


---

**Exercice VI.17** Ch6-Exercice17

Donner, à l'ordre 2, le développement limité de  $e^x$  et  $\sin x$ . En déduire le développement limité à l'ordre 2 de  $e^x \sin x$ . Retrouver ce résultat en utilisant la formule de Taylor.

**Solution :** A l'ordre 2, le développement de  $e^x$  et  $\sin x$

$$e^x \sin x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon_1(x)\right) (x + x^2 \varepsilon_2(x))$$

soit

$$e^x \sin x = x + x^2 + x^2 \varepsilon(x).$$

Vous pouvez calculer les dérivées de  $e^x \sin x$  pour vérifier ce résultat.

---

**Exercice VI.18** Ch6-Exercice18

Donner le développement limité à l'ordre 7 de  $\sin x$  et  $\cos x$ . Effectuer la division suivant les puissances croissantes des deux parties principales pour montrer que le développement limité à l'ordre 7 de  $\tan x$  est :

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + 2\frac{x^5}{15} + 17\frac{x^7}{315} + x^7 \varepsilon(x).$$

**Solution** : Il faut diviser suivant les puissances croissantes les deux polynômes suivants :

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}.$$


---

**Exercice VI.19** Ch6-Exercice19

Donner le développement limité à l'ordre 5 de  $\frac{1}{1+x^2}$  (en utilisant celui de  $(1+x)^{-1}$ ).

**Solution** : Le développement de  $(1+y)^{-1}$  s'obtient en faisant  $\alpha = -1$  dans celui de  $(1+y)^\alpha$  :

$$(1+y)^{-1} = 1 - y + y^2 - y^3 + y^4 - y^5 + y^5 \varepsilon(y)$$

ce qui donne

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + x^5 \varepsilon(x).$$

Les calculs sont beaucoup moins importants que si l'on avait dû calculer les dérivées jusqu'à l'ordre 4.

---

**Exercice VI.20** Ch6-Exercice20

Donner le développement limité de  $(1-x^2)^{-1/2}$  à l'ordre 5. En déduire (par intégration) le développement limité de  $\text{Arcsin } x$  à l'ordre 6. Comment calculeriez vous celui de  $\text{Arc tan } x$  ?

**Solution** : On prend le développement de  $(1+y)^\alpha$  avec  $\alpha = -\frac{1}{2}$ , ce qui donne

$$(1+y)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}y + \frac{3}{8}y^2 + y^2 \varepsilon(y)$$

soit

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + x^5 \varepsilon(x)$$

soit en intégrant ( $\text{Arcsin } x$  est une fonction impaire) :

$$\text{Arcsin } x = C + x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + x^6 \varepsilon(x).$$

Or  $C = \text{Arcsin } 0 = 0$ , donc

$$\text{Arcsin } x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + x^6 \varepsilon(x).$$

La dérivée de  $\text{Arc tan } x$  est  $\frac{1}{1+x^2}$ , dont nous avons calculé un développement limité dans l'exercice VI.19. Il suffit alors d'intégrer ce développement limité pour obtenir celui de  $\text{Arc tan } x$ .

---