MT90/91-Fonctions d'une variable réelle

Chapitre 8 : Nombres complexes, polynômes et fractions rationnelles

Équipe de Mathématiques Appliquées

UTC

Mai 2013

▽

Chapitre 8

Nombres complexes, polynômes et fractions rationnelles

8.1 Les nombres complexes

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

8.1.1 Lois de composition interne de $\mathbb{R}^2$

Exercices :
Exercice A.1.1

La nécessité d'étendre $\mathbb{R}$ résulte du fait que certaines équations algébriques n'ont pas de racine dans $\mathbb{R}$, la plus célèbre étant $x^2 + 1 = 0$. Mais il y a une différence fondamentale entre le passage de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$ et le passage de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$. Dans le premier cas, il s'agit d'une extension destinée à "remplir l'espace laissé vide entre les rationnels" , dans le deuxième cas, il s'agit d'une extension "algébrique" : on va agrandir l'ensemble en lui rajoutant une composante, la partie imaginaire, pour pouvoir résoudre des équations qui n'ont pas de racines dans $\mathbb{R}$.

Définition 8.1.1. *Sur $E = \mathbb{R}^2$ on définit les deux lois de composition :*
- *l'addition :* $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$,
- *la multiplication* $(x, y) \times (x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y)$.

Vous montrerez en exercice que l'addition donne à E une structure de groupe commutatif et que la multiplication a les propriétés nécessaires pour que E ait une structure de corps commutatif. Ce corps, noté $\mathbb{C}$, est appelé le **corps des nombres complexes**. Un **nombre complexe**, i.e. un élément de $\mathbb{C}$, est donc un couple de réels, obéissant aux lois de composition précédentes.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

8.1.2 Parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe

Exercices :
Exercice A.1.2
Exercice A.1.3

En utilisant les règles de l'addition et de la multiplication, on vérifie :

$$(0,1)\times(0,1)=(-1,0)$$

On identifie le nombre complexe $(x,0)$ (dont la 2ème composante est nulle) au réel x.

On note i le nombre complexe $(0,1)$, on a donc $i^2=-1$, c'est à dire i est une des racines de l'équation $z^2+1=0$.

On a d'autre part :

$$(x,y)=(x,0)+(0,y)=(x,0)+(0,1)\times(y,0).$$

On peut donc écrire un nombre complexe $z=(x,y)$ sous la forme dite **canonique** : $z=x+iy$. On dit que x est la **partie réelle** et y la **partie imaginaire** de z, et on les note respectivement $\mathbf{Re}\,\boldsymbol{z}$ et $\mathbf{Im}\,\boldsymbol{z}$:

$$z=x+iy\,(=\mathrm{Re}\,z+i\,\mathrm{Im}\,z).$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Proposition 8.1.1. *Soient z et z' deux nombres complexes, alors on a*

$$(zz' = 0) \Leftrightarrow ((z = 0) \textbf{ ou } (z' = 0)).$$

Démonstration - L'implication $\Leftarrow$ est évidente. Réciproquement, supposons que $zz' = 0$.Alors, soit $z = 0$ et c'est terminé, soit $z \neq 0$ et l'on a $z' = (\frac{1}{z}z)z' = \frac{1}{z}(zz') = \frac{1}{z}0 = 0$.

Cette propriété, qui est triviale dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$, n'est pas vraie dans certains ensembles. Par exemple, vous verrez en MT23, que l'on peut avoir deux matrices non nulles dont le produit est nul !

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

8.1.3 Formule du binôme de Newton

Exercices :
Exercice A.1.4

Proposition 8.1.2. *Pour tous nombres complexes z et z' et pour tout entier $n \geq 2$, on a*

$$(z+z')^n = z^n + C_n^1 z^{n-1} z' + \ldots + C_n^k z^{n-k} z'^k + \ldots + C_n^{n-1} z z'^{n-1} + z'^n. \tag{8.1.1}$$

Démonstration - La formule se démontre par récurrence.

– Elle est vraie pour $n = 2$ puisque $(z+z')^2 = z^2 + 2zz' + z'^2$ et que $C_2^1 = 2$.
– Supposans la vraie pour $n-1$, c'est-à-dire supposons que

$$(z+z')^{n-1} = z^{n-1} + \ldots + C_{n-1}^p z^{n-1-p} z'^p + \ldots + z'^{n-1}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}(z+z')^n &= (z+z')(z+z')^{n-1} = z(z+z')^{n-1} + z'(z+z')^{n-1} \\ &= z(z^{n-1} + \ldots + C_{n-1}^k z^{n-1-k} z'^k + \ldots + z'^{n-1}) + \\ &\quad + z'(z^{n-1} + \ldots + C_{n-1}^{k-1} z^{n-1-(k-1)} z'^{k-1} + \ldots + z'^{n-1}) \\ &= z^n + \ldots + (C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}) z^{n-k} z'^k + \ldots + z'^n.\end{aligned}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Calculons, pour $1 \leq k \leq n-1$, la somme :

$$\begin{aligned} C_{n-1}^{k} + C_{n-1}^{k-1} &= \frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-1-k+1)!} \\ &= \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k)!}((n-k)+k) = C_n^k \end{aligned} \tag{8.1.2}$$

d'où découle le résultat annoncé.

8.1.4 Conjugué et module d'un nombre complexe

Exercices :
Exercice A.1.5

Définition 8.1.2. *Soit $z = x + iy$ un nombre complexe, alors*

- *le nombre complexe $x - iy$ s'appelle le* ***conjugué*** *de z et se note $\bar{z}$,*
- *le nombre réel $\sqrt{x^2 + y^2}$ s'appelle le* ***module*** *de z et se note $|z|$.*

Voici un résumé des principales propriétés des conjugués et des modules :

- $\bar{\bar{z}} = z$, $(\overline{z_1 + z_2}) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$, $\forall z \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\bar{z}}$,
- $|z|^2 = z\bar{z}$, $|z| = |\bar{z}|$, $|zz'| = |z||z'|$, $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$,
- $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$, $|z + z'|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{z}') + |z'|^2$,
- $z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0$ et $\forall z \neq 0$, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$.

Démontrons quelques-unes de ces propriétés (vérifier les autres pour être sûr de bien les manipuler) :

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

– Tout d'abord, pour $z = x + iy$ ($\neq 0$), nous avons $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{x-iy} = \frac{x+iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{y}{x^2+y^2}.$$

– De même, si $z \neq 0$, on a $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ puisque

$$\left|\frac{1}{z}\right|^2 = \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)^2 = \frac{1}{x^2+y^2} \text{ et } \left(\frac{1}{|z|}\right)^2 = \frac{1}{x^2+y^2}$$

– Et enfin le calcul de $|z+z'|^2$ s'obtient par

$$|z+z'|^2 = (z+z')(\bar{z}+\bar{z}') = z\bar{z} + z'\bar{z} + z\bar{z}' + z'\bar{z}'$$

Or,

$$z\bar{z}' = \overline{\bar{z}z'}$$

d'où

$$z'\bar{z} + z\bar{z}' = 2\,\mathrm{Re}\left(z\bar{z}'\right)$$

de plus

$$z\bar{z} = |z|^2, \quad z'\bar{z}' = |z'|^2,$$

de sorte que l'on a bien :

$$|z+z'|^2 = |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z\bar{z}') + |z'|^2.$$

8.1.5 Inégalité triangulaire

Exercices :
Exercice A.1.6

Cours :
Nombre complexe - conjugué et module

Proposition 8.1.3. *Pour tous nombres complexes z et z', on a*

- $|\mathrm{Re}\, z| \leq |z|$ *et* $|\mathrm{Im}\, z| \leq |z|$,
- $|z+z'| \leq |z|+|z'|$ *(inégalité triangulaire)*
- $||z|-|z'|| \leq |z-z'|$.

Démonstration - Cette démonstration utilise les points du paragraphe référencé.

- Si $z = x + iy$, alors $|z|^2 = x^2 + y^2$, $|\mathrm{Re}\, z|^2 = (\mathrm{Re}\, z)^2 = x^2$ et $|\mathrm{Im}\, z|^2 = (\mathrm{Im}\, z)^2 = y^2$, ce qui donne le résultat puisque :

$$\forall a \in \mathbb{R}^+, \forall b \in \mathbb{R}^+, \quad (a^2 \leq b^2) \Leftrightarrow (a \leq b).$$

- De même, l'inégalité triangulaire est équivalente à

$$|z+z'|^2 \leq (|z|+|z'|)^2.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Or

$$\begin{aligned}(|z|+|z'|)^2-|z+z'|^2 &= |z|^2+2|z||z'|+|z'|^2\\ &-(|z|^2+2\,\mathrm{Re}(z\bar{z}')+|z'|^2)\\ &= 2(|z||\bar{z}'|-\mathrm{Re}(z\bar{z}'))\\ &= 2(|z\bar{z}'|-\mathrm{Re}(z\bar{z}')).\end{aligned}$$

La dernière quantité est positive ou nulle d'après les propriétés des complexes, d'où le résultat.

– La troisième est obtenue en appliquant l'inégalité triangulaire successivement à

$$z=(z-z')+z' \text{ et } z'=(z'-z)+z.$$

Elle vous est laissée à titre d'exercice.

8.1.6 Argument d'un nombre complexe

Exercices :
Exercice A.1.7

Les propriétés des fonctions trigonométriques cosinus et sinus, nous permettent d'affirmer que, étant donnés deux nombres réels a et b vérifiant $a^2 + b^2 = 1$, il existe un angle θ tel que

$$\cos\theta = a \text{ et } \sin\theta = b. \tag{8.1.3}$$

Nous savons aussi que :

$$((\cos\theta = \cos\phi) \textbf{ et } (\sin\theta = \sin\phi)) \Leftrightarrow (\theta = \phi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}),$$

on dit alors que $\boldsymbol{\theta}$ **est congru à** $\boldsymbol{\phi}$ **modulo** $\boldsymbol{2\pi}$ et on le note $\boldsymbol{\theta \equiv \phi\ [2\pi]}$.

Autrement dit, l'angle θ défini par les équations (8.1.3) n'est défini quà $2k\pi$ près.

Soit maintenant $z = x + iy$, un nombre complexe non nul, alors on peut l'écrire

$$z = |z|\left(\frac{x}{|z|} + i\frac{y}{|z|}\right).$$

Il existe un θ (défini à $2k\pi$ près) tel que :

$$\cos\theta = \frac{x}{|z|} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{y}{|z|} \quad \text{puisque} \quad \left(\frac{x}{|z|}\right)^2 + \left(\frac{y}{|z|}\right)^2 = 1.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Ceci nous conduit à la définition

Définition 8.1.3. *Pour tout nombre complexe z différent de 0 le nombre réel θ, défini à $2k\pi$ près, tel que $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ s'appelle l'**argument** de z et se note* $\mathbf{arg}\,\boldsymbol{z}$.

Proposition 8.1.4. *Pour tous nombres complexes z et z' non nuls on a*

$$\arg(zz') \equiv \arg z + \arg z' \;[2\pi] \;\; \textit{et} \;\; \arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg z \;[2\pi].$$

Démonstration - Soient

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) \text{ et } z' = |z'|(\cos\theta' + i\sin\theta'),$$

alors

$$\begin{aligned} zz' &= |zz'|(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i(\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta')) \\ &= |zz'|\big(\cos(\theta+\theta') + i(\sin(\theta+\theta')\big). \end{aligned}$$

d'où la première relation.
La deuxième relation est donnée en exercice.

Remarque 8.1.1. Il est parfois utile de choisir une détermination particulière de l'argument. Certains auteurs choisissent l'unique θ appartenant à l'intervalle $[0, 2\pi[$, d'autres celui de l'intervalle $]-\pi, +\pi]$. Nous ferons le premier choix et noterons donc $\mathrm{Arg}\,\boldsymbol{z}$ ($\in [0, 2\pi[$) cette détermination de l'argument.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

8.1.7 Représentation graphique des nombres complexes

Exercices :
Exercice A.1.8

Nous avons identifié un nombre complexe $z = x + i\,y$ à un élément (x, y) de $\mathbb{R}^2$, nous pouvons donc représenter ce nombre complexe par un vecteur $\overrightarrow{OM}$ de composantes x et y dans un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Le nombre z s'appelle l'**affixe** du point M. Puisque, dans le paragraphe précédent nous avons écrit z sous la forme trigonométrique $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$, les composantes du vecteur $\overrightarrow{OM}$ sont donc $|z|\cos\theta$ et $|z|\sin\theta$, ce qui veut dire que $|z|$ représente la longueur du vecteur $\overrightarrow{OM}$ et l'argument θ de z est une mesure de l'angle que fait $\overrightarrow{OM}$ avec le vecteur unitaire $\vec{u}$. Il résulte des opérations que l'on a construites sur $\mathbb{R}^2$ et que l'on a étendues à $\mathbb{C}$ que si z est associé à $\overrightarrow{OM}$, si z' est associé à $\overrightarrow{OM'}$ alors $z + z'$ est associé à $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

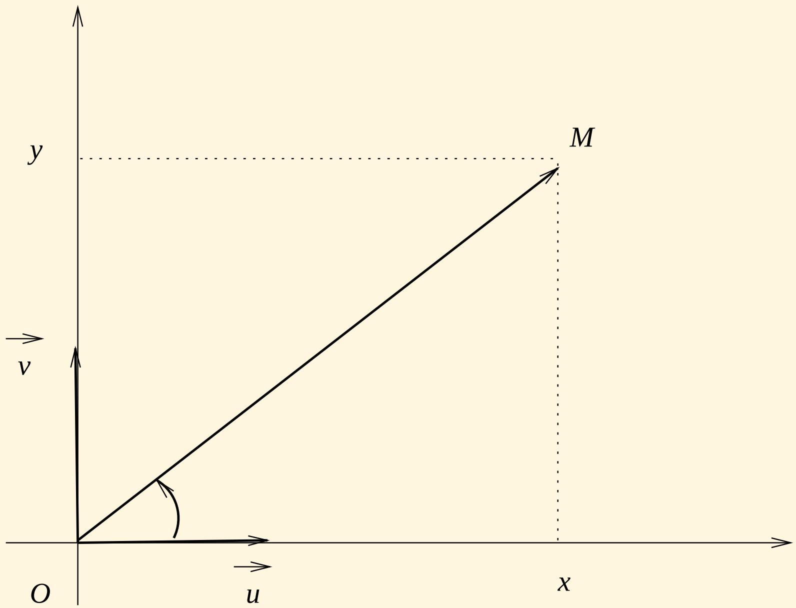

FIGURE 8.1.1 – Représentation graphique d'un nombre complexe

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

8.1.8 La formule de De Moivre

Exercices :
Exercice A.1.9

Proposition 8.1.5. *Pour tout nombre réel θ et tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

Démonstration - Cette relation se démontre par récurrence.

- La formule est évidemment vraie pour $n = 0$ et $n = 1$.
- Supposons la vraie pour $n-1$, c'est-à-dire :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{n-1} = \cos(n-1)\theta + i\sin(n-1)\theta,$$

  et démontrons la pour n. Il vient :

$$\begin{aligned}
(\cos\theta + i\sin\theta)^n &= (\cos\theta + i\sin\theta)^{n-1}(\cos\theta + i\sin\theta) \\
&= (\cos(n-1)\theta + i\sin(n-1)\theta)(\cos\theta + i\sin\theta) \\
&= (\cos(n-1)\theta\cos\theta - \sin(n-1)\theta\sin\theta) \\
&\quad + i(\cos(n-1)\theta\sin\theta + \sin(n-1)\theta\cos\theta) \\
&= \cos n\theta + i\sin n\theta.
\end{aligned}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

8.1.9 Le théorème de d'Alembert - Gauss

Exercices :
Exercice A.1.10

Le théorème suivant, de **d'Alembert - Gauss**, montre que $\mathbb{C}$ permet de résoudre certaines équations algébriques :

Théorème 8.1.1. *Toute **équation algébrique** dans $\mathbb{C}$, c'est-à-dire toute équation de la forme*

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0 = 0, \tag{8.1.4}$$

où les coefficients a_i, $0 \leq i \leq n$ sont des nombres complexes, $n \geq 1$ et $a_n \neq 0$, admet au moins une racine z dans $\mathbb{C}$.

Corollaire 8.1.1. *L'équation (8.1.4) admet exactement n racines dans $\mathbb{C}$ (en comptant chaque racine multiple autant de fois que sa multiplicité).*

La démonstration du théorème sort du cadre de ce cours, par contre on verra (au chapitre sur les polynômes) que le corollaire est tout à fait accessible (si l'on admet le théorème, bien entendu).

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Par exemple, l'équation $z^2 + 1 = 0$ ($z = (x, y)$ et $1 = (1, 0)$) admet pour racines les nombres complexes $z_1 = i$ et $z_2 = -i$.

Les paragraphes suivants permettent d'obtenir les racines dans certains cas particuliers.

8.1.10 Racines nièmes de l'unité

Exercices :
Exercice A.1.11
Exercice A.1.12
Exercice A.1.13

Étant donné un nombre complexe α non nul, on va chercher tous les nombres complexes z possibles vérifiant $z^n = \alpha$. Ces nombres complexes seront appelés les **racines nièmes de** $\boldsymbol{\alpha}$. On démontre que tout nombre complexe non nul admet exactement n racines nièmes.

Proposition 8.1.6. *Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ non nul. Alors*

$$(z^n = \alpha) \Leftrightarrow \left(|z| = \sqrt[n]{|\alpha|} \textit{ et } \mathrm{Arg}\, z = \frac{\mathrm{Arg}\, \alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \textit{ où } 0 \leq k \leq n-1\right).$$

Démonstration
Pour la notation $\mathrm{Arg}\, z$, voir la remarque 8.1.1.

a/ ($\Rightarrow$) Si $z^n = \alpha$, alors $|z|^n = |z^n| = |\alpha|$, d'où $|z| = \sqrt[n]{|\alpha|}$ et aussi $\mathrm{Arg}\, z^n = \mathrm{Arg}\, \alpha$, ce qui donne (proposition 8.1.4) $n\mathrm{Arg}\, z \equiv \mathrm{Arg}\, \alpha\, [2\pi]$. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n\mathrm{Arg}\, z = \mathrm{Arg}\, \alpha + 2k\pi$. Les inégalités

$$0 \leq \mathrm{Arg}\, z < 2\pi \text{ et } 0 \leq \mathrm{Arg}\, \alpha < 2\pi,$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

donnent aisément $-1 < k < n$, d'où le résultat.
b/ ($\Leftarrow$) Supposons les relations de droite vérifiées, alors

$$\cos(n\operatorname{Arg} z) = \cos\operatorname{Arg}\alpha,\ \sin(n\operatorname{Arg} z) = \sin\operatorname{Arg}\alpha$$

et d'après la formule de De Moivre, il vient

$$\begin{aligned} z^n &= |z|^n(\cos\operatorname{Arg} z + i\sin\operatorname{Arg} z)^n \\ &= |\alpha|(\cos n\operatorname{Arg} z + i\sin n\operatorname{Arg} z) \\ &= |\alpha|(\cos\operatorname{Arg}\alpha + i\sin\operatorname{Arg}\alpha) = \alpha. \end{aligned}$$

Un cas particulier important est celui des *racines nièmes de l'unité*. Elles sont solution de $z^n = 1$ et correspondent à $\alpha = 1$. On obtient donc $|z| = 1$ et $\operatorname{Arg} z = \frac{0}{n} + \frac{2k\pi}{n}, 0 \le k \le n-1$, soit les racines suivantes :

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \qquad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Les racines de l'unité étant de module 1 sont représentées graphiquement sur le cercle de rayon 1 et de centre O.

Remarque importante - La définition des racines d'un nombre complexe est une extension stricte du cas réel. Si $a \in \mathbb{R}$ est strictement positif, on appelle habituellement **racine carrée** de a le nombre positif r tel que $r^2 = a$. En fait, si l'on note par $\sqrt{\boldsymbol{a}}$ ce nombre r, le nombre $r' = -\sqrt{a}$ a aussi son carré égal à a, donc est une racine de a au sens de la définition ci-dessus. C'est par convention, que l'on dit que "dans $\mathbb{R}$, le nombre positif $\sqrt{a}$ est la racine de a", même si, "dans $\mathbb{C}$ il admet deux racines, les nombres $\sqrt{a}$ et $(-\sqrt{a})$", toutes deux réelles !

Si $a \in \mathbb{C}$ (non réel), alors $\sqrt{a}$ n'a pas de sens puisque le nombre complexe a a deux racines carrées et qu'il n'existe pas dans ce cas de convention pour privilégier l'une ou l'autre.

8.1.11 Racines d'une équation du second degré

Exercices :
Exercice A.1.14
Exercice A.1.15

Soient a, b, c trois nombres complexes, on suppose $a \neq 0$, on recherche les nombres complexes z qui vérifient $az^2 + bz + c = 0$. Ceci va généraliser ce que l'on sait faire lorsque les coefficients a, b, c sont réels. On peut d'ailleurs faire un raisonnement semblable.

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c &= a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} \\ &= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) \end{aligned}$$

On définit le nombre complexe $\Delta = b^2 - 4ac$.

Si $\Delta = 0$, alors
$$az^2 + bz + c = a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2$$
ce qui implique que $\dfrac{-b}{2a}$ est racine double de l'équation.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Si $\Delta \neq 0$, si on note r_0 et r_1 les deux racines carrées (complexes) de Δ, alors $\frac{r_0}{2a}, \frac{r_1}{2a}$ sont les deux racines carrées de $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$, on a donc :

$$\begin{aligned} az^2+bz+c=0 \quad &\Leftrightarrow \quad \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \\ &\Leftrightarrow \quad \left(\left(z+\frac{b}{2a}\right) = \frac{r_0}{2a} \text{ ou } \left(z+\frac{b}{2a}\right) = \frac{r_1}{2a}\right) \\ &\Leftrightarrow \quad \left(z = \frac{-b+r_0}{2a} \text{ ou } z = \frac{-b+r_1}{2a}\right) \end{aligned}$$

Montrer en exercice que dans le cas a, b, c réels, on retrouve les formules que vous connaissez.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

8.1.12 Introduction à l'exponentielle complexe

Exercices :
Exercice A.1.16
Exercice A.1.17

Il est commode de poser

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Cette notation dite "exponentielle complexe", a priori curieuse, est justifiée par le fait qu'elle entraîne les règles opératoires qui rappellent les fonctions de l'exponentielle réelle. En effet, vous montrerez en exercice que

$$e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)},\ e^{i0} = 1,\ \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}.$$

Remarquons que

$$\overline{e^{i\theta}} = (\overline{\cos\theta + i\sin\theta}) = \cos\theta - i\sin\theta = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = e^{-i\theta}.$$

Cette notation permet d'écrire un nombre complexe donné par son module ρ et son argument θ sous la forme simplifiée

$$z = \rho e^{i\theta}.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Ainsi la formule de De Moivre s'écrit

$$z^n = (\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta},\ n \in \mathbb{N}.$$

Les formules d'Euler expriment $\cos\theta$ et $\sin\theta$ à l'aide de l'exponentielle complexe :

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2},\ \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Attention ! $e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2}$ n'implique pas que $\theta_1 = \theta_2$ mais que $\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

8.1.13 Application au calcul trigonométrique

Exercices :
Exercice A.1.18

Cours :
Exponentielle complexe - définition

L'utilisation directe de la formule de De Moivre permet d'exprimer $\cos n\theta$ et $\sin n\theta$ en fonction des puissances de $\cos\theta$ et $\sin\theta$, lorsque l'on utilise la formule du binôme de Newton. Par exemple, on a $(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$, et la formule du binôme de Newton donne

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta,$$

d'où

$$\begin{cases} \cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta \\ \sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta \end{cases}$$

Mais ce qui est le plus utile c'est de pouvoir exprimer les puissances de $\cos\theta$ et $\sin\theta$ en expression linéaire de $\cos k\theta$ et $\sin k\theta$, par exemple pour pouvoir les intégrer (voir chapitre sur les intégrales). On peut alors utiliser l'exponentielle complexe (voir le paragraphe référencé). Ainsi

$$\cos^n\theta = \frac{1}{2^n}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^n, \ \sin^n\theta = \frac{1}{(2i)^n}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})^n.$$

On développe alors par le binôme de Newton et on regroupe les termes $e^{ik\theta}$ et $e^{-ik\theta}$.

Illustrons par un exemple. Choisissons $n = 4$ et appliquons la méthode précédente :

$$
\begin{aligned}
\cos^4\theta &= \frac{1}{2^4}((e^{i\theta}+e^{-i\theta})^4 \\
&= \frac{1}{16}(e^{i4\theta}+4e^{i2\theta}+6+4e^{-i2\theta}+e^{-i4\theta}) \\
&= \frac{1}{16}(2\cos 4\theta+8\cos 2\theta+6) = \frac{1}{8}\cos 4\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{3}{8}.
\end{aligned}
$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

8.2 Généralités sur les polynômes

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

8.2.1 Définition des polynômes à coefficients réels ou complexes

Exercices :
Exercice A.1.19

Documents :
Document C.1.1

Définition 8.2.1. *On appelle* **polynôme** *ou* **fonction polynomiale** *à coefficients dans* $\mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*) une fonction A définie sur* $\mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*), qui est soit nulle, soit de la forme*

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}\,(\text{ou}\,\mathbb{C}),\quad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a_0} + \boldsymbol{a_1 x} + \cdots + \boldsymbol{a_{m-1} x^{m-1}} + \boldsymbol{a_m x^m} \tag{8.2.1}$$

avec $a_m \neq 0$. *Les éléments* $(a_i)_{0\leq i\leq m} \in \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*) sont appelés* **coefficients** *du polynôme A. L'entier m s'appelle le* **degré** *de A et se note* deg(A).
On appelle **monôme** *tout polynôme de la forme*

$$\alpha x^k,\ \ \alpha \in \mathbb{R}\,(\text{ou}\,\mathbb{C}),\ k \in \mathbb{N}. \tag{8.2.2}$$

Un polynôme est donc une somme de monômes.

Lorsque l'on a besoin des coefficients de A pour des indices supérieurs à m on pose par convention

$$\forall i > m, \quad a_i = 0.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Cette convention permet par exemple, de définir de manière commode la somme de deux polynômes. Le degré du polynôme nul n'est pas défini, puisque tous les coefficients de ce polynôme sont nuls. Nous verrons que cela oblige dans beaucoup d'énoncés de théorèmes, à distinguer les cas polynôme nul ou non nul. Pour éviter cela, on peut convenir que le polynôme nul est de degré $-\infty$. Nous ne le ferons pas mais nous explicitons cette convention dans le document référencé.

Il est clair qu'une fonction polynomiale est parfaitement définie dès que l'on connaît ses coefficients. À un jeu de coefficients, $(a_i)_{0\leq i\leq m} \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), correspond une et une seule fonction polynomiale. La réciproque par contre n'est pas évidente d'où la définition suivante :

Définition 8.2.2. *Deux polynômes A et B définis par*

$$A(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_m x^m$$

$$B(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_{m-1} x^{m-1} + b_n x^n$$

sont égaux si $a_i = b_i \; \forall i \in \mathbb{N}$.

Nous montrerons plus loin, que cette définition de l'égalité des polynômes est équivalente à $A(x) = B(x) \; \forall x \in \mathbb{R}$, qui est en fait égalité entre deux fonctions (polynomiales).

Notation 8.2.1. On désigne par X le monôme défini par $X(x) = x$ et par α le polynôme constant $A(x) = \alpha$ où α est un scalaire.

Le polynôme A défini par (8.2.1) peut donc s'écrire :

$$A = a_m X^m + a_{m-1} X^{m-1} + \ldots + a_1 X + a_0. \tag{8.2.3}$$

Sous cette forme, on peut dire que A est un "polynôme à une indéterminée X" (sa valeur en un point x est obtenue en donnant à X la valeur x).

Notation 8.2.2. Si l'on note $\mathbf{K}$ le corps $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), alors on notera $\mathbf{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbf{K}$. On notera aussi $\mathbf{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n auquel on rajoute le polynôme nul.

8.2.2 Somme, produit, conjugué de polynômes

Exercices :
Exercice A.1.20
Exercice A.1.21
Exercice A.1.22
Exercice A.1.23

Nous allons définir sur l'ensemble des polynômes deux opérations l'addition et la multiplication. La définition sera simple. Elle se fera par restriction à l'ensemble des fonctions polynomiales, de l'addition et de la multiplication des fonctions de $\mathbb{R}$ (ou de $\mathbb{C}$) dans lui-même. Rappelons ces deux définitions ($\mathbf{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) :

$$\forall x \in \mathbf{K}, \quad (f+g)(x) \stackrel{\text{Déf}}{=} f(x)+g(x), \quad (fg)(x) \stackrel{\text{Déf}}{=} f(x)g(x).$$

Soient deux polynômes $A \in \mathbf{K}_m[X]$ et $B \in \mathbf{K}_n[X]$ définis par :

$$\begin{aligned} A &= a_0 + a_1 X + \cdots + a_{m-1} X^{m-1} + a_m X^m, \\ B &= b_0 + b_1 X + \cdots + b_{n-1} X^{n-1} + b_n X^n. \end{aligned} \tag{8.2.4}$$

Définition 8.2.3. *La somme $A+B$ est le polynôme C dont les coefficients sont donnés par $c_k = a_k + b_k$ pour $k = 0, \ldots, \max(m,n)$.*

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Cette définition entraîne bien que $(A+B)(x) = A(x)+B(x)$, quel que soit x. La proposition suivante est fondamentale pour les applications. Vous verrez, dans le document référencé, l'utilisation possible de la convention du degré "$-\infty$" du polynôme nul.

Proposition 8.2.1. *Soient A et B deux polynômes non nuls de $\mathbf{K}[X]$, tels que $A+B$ est non nul alors*

$$\mathrm{deg(A+B) \leq max(deg(A), deg(B))}.$$

Démonstration - Supposons que $m < n$. Cela n'enlève rien à la généralité de la démonstration puisque A et B jouent exactement le même rôle. Il vient alors :

$$A+B = (a_0+b_0)+(a_1+b_1)X+\cdots+(a_m+b_m)X^m + b_{m+1}X^{m+1}+\cdots+b_nX^n.$$

Nous voyons qu'alors, $\mathrm{deg(A+B) = n = max(deg(A), deg(B))}$.

Si maintenant $m = n$, il vient :

$$A+B = (a_0+b_0)+(a_1+b_1)X+\cdots+(a_n+b_n)X^n.$$

Si, de plus, $a_n + b_n = 0$, alors $\deg(A+B) < n$ de sorte que la proposition est bien démontrée.

Définition 8.2.4. *Le produit d'un polynôme par le polynôme nul est nul. Si A et B sont non nuls, le produit AB est le polynôme C de coefficients c_k, définis par : $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$.*

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Proposition 8.2.2. *Soient A et B deux polynômes non nuls. Alors, le polynôme produit AB vérifie :*

$$\deg(AB) = \deg(A) + \deg(B).$$

Démonstration - Effectuons le produit des deux polynômes A et B. Il vient :

$$AB = a_m b_n X^{m+n} + (a_{m-1} b_n + a_m b_{n-1}) X^{m+n-1} + \cdots + (a_0 b_1 + a_1 b_0) X + a_0 b_0.$$

On obtient bien ainsi un polynôme de degré $m+n$. En effet, le coefficient de plus haut degré, soit $a_m b_n$, est non nul puisque a_m et b_n sont tous deux différents de 0.

Définition 8.2.5. *Soit $A \in \mathbb{C}[X]$, on appelle* ***polynôme conjugué de A*** *et on note $\bar{\mathbf{A}}$ le polynôme obtenu en conjuguant les coefficients de A.*

8.2.3 Division euclidienne

Exercices :
Exercice A.1.24
Exercice A.1.25
Exercice A.1.26

Exemples :
Exemple B.1.1

Définition 8.2.6. *On dit que* $\boldsymbol{B} \in \mathbf{K}_{\boldsymbol{n}}[\boldsymbol{X}]$ ***divise*** $\boldsymbol{A} \in \mathbf{K}_{\boldsymbol{n}}[\boldsymbol{X}]$ (ou que ***A est divisible par B*** ou que ***B est un diviseur de A****)* *s'il existe* $Q \in \mathbf{K}_n[X]$ *tel que* $A = BQ$.

Regarder en exemple la division de $2X^3 - X^2 - X + 2$ par $X^2 - 1$ qui vous permettra de comprendre la justification théorique de la division de deux polynômes suivant les puissances décroissantes.

Théorème 8.2.1. *Soient* $A, B \in \mathbf{K}[X]$, *B non nul, alors il existe un unique couple de polynômes* (Q, R) *tel que*

$$A = BQ + R \quad \textit{avec} \begin{cases} \deg R < \deg B, \\ \textit{ou } R = 0. \end{cases} \tag{8.2.5}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Démonstration - Notons

$$A = a_0 + a_1 X + \ldots + a_m X^m, \quad B = b_0 + b_1 X + \ldots + b_n X^n$$

1. Existence - La démonstration de l'existence d'au moins une décomposition de ce type est *constructive*. Le procédé de construction qui va être décrit est **l'algorithme d'Euclide** (Comparer avec l'exemple référencé).

- Étape 0. Si $A = 0$, l'identité $A = 0 \times B + 0$ convient. Si $\deg(A) < \deg(B)$, l'identité $A = 0 \times B + A$, convient, le reste A étant alors effectivement de degré strictement inférieur à celui du diviseur B. Nous pourrons donc supposer dorénavant que $\deg(A) \geq \deg(B)$.
- Étape 1 - Elle consiste à trouver un monôme Q_1 tel que $\deg(A - BQ_1) < \deg A$. Pour ce faire, on prend

$$Q_1 = \frac{a_m}{b_n} X^{m-n}, \ R_1 = A - BQ_1.$$

  Alors, si $R_1 = 0$ ou si $\deg(R_1) < \deg(B)$, on pose $Q = Q_1$ et $R = R_1$ et c'est terminé. Sinon
- Étape 2 - on recommence l'étape 1 en remplaçant A par R_1. On obtient ainsi les polynômes Q_2 et R_2 tels que $\deg(R_1 - BQ_2) < \deg R_1$ et $R_2 = R_1 - BQ_2$ soit

$$R_2 = A - BQ_1 - BQ_2 = A - B(Q_1 + Q_2).$$

  Si $R_2 = 0$ ou $\deg(R_2) < \deg(B)$, on pose $Q = Q_1 + Q_2$ et $R = R_2$ et l'algorithme est terminé, sinon on recommence l'étape 2 en remplaçant R_1 par R_2. Comme on obtient un polynôme R_k dont le degré décroit strictement, l'algorithme se termine en un nombre fini p d'étapes qui donnent $R = R_p$ et $Q = Q_1 + \ldots + Q_p$.

2. Unicité - Supposons que l'on ait deux décompositions

$$A = BQ + R \ \text{ avec } \ \deg R < \deg B, \ A = B\hat{Q} + \hat{R} \ \text{ avec } \ \deg \hat{R} < \deg B$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

alors par différence on obtient

$$0 = B(\hat{Q} - Q) + \hat{R} - R \quad \text{soit} \quad R - \hat{R} = B(\hat{Q} - Q).$$

Si $R = \hat{R}$ alors puisque B est non nul, on a $Q = \hat{Q}$ (voir exercice A.1.21) et le résultat est établi. Si $R \neq \hat{R}$ alors on a simultanément

$$\deg(R - \hat{R}) \leq \max(\deg R, \deg \hat{R}) < \deg B$$

et

$$\deg(R - \hat{R}) = \deg B + \deg(Q - \hat{Q}) \geq \deg B$$

ce qui est impossible.

8.2.4 Division suivant les puissances croissantes

Exercices :
Exercice A.1.27

Exemples :
Exemple B.1.2

Regarder l'exemple qui va montrer la façon pratique de mener les calculs.

Théorème 8.2.2. *Soient A et B deux polynômes tels que $A \neq 0$ et tels que le terme constant de B ne soit pas nul. Alors quel que soit l'entier $k \geq 0$, il existe un couple unique (Q, R) tel que*

$$A = BQ + X^{k+1}R, \quad \textit{avec} \begin{cases} \textit{ou bien } Q = 0, \\ \textit{ou bien } \deg(Q) \leq k \end{cases} \tag{8.2.6}$$

Démonstration - Elle repose sur la même démarche que la division euclidienne. La principale différence consiste à ranger les termes des polynômes par ordre croissant de leurs degrés. L'algorithme se termine lorsque le reste R_i peut s'écrire $R_i(x) = x^{k+1}R(x)$.

8.3 Factorisation des polynômes

L'ensemble des polynômes muni de l'addition, de la multiplication et de la division euclidienne, possède les propriétés de structure de $\mathbb{Z}$, muni de ses addition, multiplication et division euclidienne. Plus précisément, on peut construire sur $\mathbf{K}[X]$ une arithmétique très proche de l'arithmétique usuelle des entiers. Les théorèmes fondamentaux s'énoncent exactement de la même manière.

La construction de cette arithmétique relève d'un cours d'algèbre. Nous nous contenterons d'énoncer quelques définitions et de démontrer les théorèmes avec toujours en vue notre objectif : apprendre à calculer des primitives de fractions rationnelles.

8.3.1 Polynômes irréductibles

Exercices :
Exercice A.1.28

Définition 8.3.1. *On dit qu'un polynôme $P \in \mathbf{K}[X]$ est **irréductible** ou **premier** s'il admet comme seuls diviseurs les polynômes constants ou proportionnels à P, c'est-à-dire α et βP ($\alpha, \beta \in \mathbf{K}^*$).*

Les polynômes irréductibles jouent le même rôle que les nombres premiers en arithmétique d'où la dénomination de polynôme premier. L'irréductibilité dépend de $\mathbf{K}$. Par exemple, dans $\mathbb{R}[X]$

- le polynôme $X^2 - 1$ n'est pas irréductible car $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$,
- le polynôme $X^2 + 1$ est irréductible.

Dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $X^2 + 1 = (X+i)(X-i)1$ n'est pas irréductible.

Définition 8.3.2. *Deux polynômes sont dits **premiers entre eux** s'ils admettent comme seuls diviseurs communs les polynômes constants.*

Par exemple, les polynômes $A = X + a$ et $B = X + b$ sont premiers entre eux si $a \neq b$. Les polynômes $A = X + a$ et $B = X^2 + 1$ sont premiers entre eux quel que soit le réel a.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

8.3.2 Factorisation des polynômes de $\mathbb{C}[X]$

Exercices :
Exercice A.1.29
Exercice A.1.30

Proposition 8.3.1. *$A \in \mathbf{K}[X]$ est divisible par $(X-r)$ si et seulement si r est un zéro du polynôme A c'est-à-dire $A(r) = 0$.*

Démonstration - D'après le théorème 8.2.1, on a :

$$A = (X-r)Q + R \quad \text{avec} \left\{ \begin{array}{l} \deg(R) < \deg(X-r) = 1 \\ \text{ou } R = 0 \end{array} \right. \tag{8.3.1}$$

et donc R est un polynôme constant $R = \rho$ tel que $A(r) = R(r) = \rho$. On obtient ainsi que

$$\{A(r) = 0\} \iff \{R = 0\}$$

ce qui est bien le résultat annoncé.

Le résultat fondamental suivant (non démontré) permettra de démontrer le théorème, qui suit, sur la factorisation dans $\mathbb{C}$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Théorème 8.3.1 (Théorème de d'Alembert). *Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$, de degré supérieur ou égal à un, a un zéro, au moins, dans $\mathbb{C}$.*

Théorème 8.3.2. *Tout polynôme $A \in \mathbb{C}[X]$ avec $\deg A = n \geq 1$ peut se mettre sous la forme*

$$A = \alpha(X - z_1)(X - z_2)\ldots(X - z_n) \tag{8.3.2}$$

où $\alpha, z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$.

Démonstration - Si $n = 1$, alors $A = \alpha X + \beta$ avec $\alpha \neq 0$ puisque $\deg A \geq 1$ et donc

$$A = \alpha\left(X - \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)\right).$$

La proposition est vraie pour $n = 1$, on va faire une démonstration par récurrence, supposons donc le résultat vrai pour les polynômes de degré inférieur ou égal à $n - 1$.

Soit maintenant un polynôme A de degré n alors, d'après le théorème de d'Alembert, A a au moins un zéro $z_1 \in \mathbb{C}$ et donc $(X - z_1)$ divise A d'après la proposition 8.3.1, soit $A = (X - z_1)A_1$ avec $\deg A_1 = n - 1$. On applique l'hypothèse de récurrence à A_1 : $A_1 = \alpha(X - z_2)(X - z_3)\ldots(X - z_n)$ et on obtient $A = \alpha(X - z_1)(X - z_2)\ldots(X - z_n)$

La constante α est évidemment le coefficient du terme de degré n de A. Les nombres z_j ne sont pas tous distincts, on peut donc les regrouper pour obtenir :

$$A = \alpha(X - z_1)^{n_1}(X - z_2)^{n_2}\ldots(X - z_p)^{n_p} \tag{8.3.3}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

expression dans laquelle les z_j sont tous distincts et $n_1 + \ldots + n_p = n$. On dit que les z_i sont des **zéros d'ordre n_i**, c'est-à-dire des zéros tels que $(X - z_i)^{n_i}$ divise A mais pas $(X - z_i)^{n_i+1}$.

Proposition 8.3.2.

- *Les seuls polynômes premiers de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes constants et les polynômes de degré 1.*
- *Un polynôme de degré n sur $\mathbb{C}$ admet exactement n zéros (à condition de compter chacun d'eux autant de fois que sa multiplicité).*
- *Deux polynômes A et B sont égaux si et seulement si $A(x) = B(x)\ \forall x \in \mathbb{C}$*

Démonstration - Le seul résultat à démontrer est le dernier.

$A = B \Rightarrow A(x) = B(x)\ \forall x \in \mathbb{C}$.

Réciproquement

$$\begin{aligned} A \neq B \quad &\Rightarrow \quad A - B \neq 0 \Rightarrow \deg(A - B) = p \\ &\Rightarrow \quad A - B \text{ admet exactement } p \text{ racines dans } \mathbb{C} \Rightarrow \exists x \in \mathbb{C},\ (A - B)(x) \neq 0 \end{aligned}$$

Remarquons que cette dernière propriété montre bien l'équivalence sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, de la notion de polynôme, conçu comme suite de coefficients et de la notion de fonction polynomiale.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

8.3.3 Factorisation des polynômes de $\mathbb{R}[X]$

Exercices :
Exercice A.1.31
Exercice A.1.32

Cours :
Factorisation dans le corps des complexes

Puisque $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ peut toujours être considéré comme un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ et donc tous les résultats du paragraphe référencé sont applicables. Le but de ce paragraphe est de factoriser en restant dans $\mathbb{R}[X]$.

Proposition 8.3.3. *Soit $A \in \mathbb{R}[X]$, si A admet un zéro ρ non réel, de multiplicité m, il admet aussi $\bar{\rho}$ comme zéro de même multiplicité et est divisible par $S = X^2 - \beta X + \gamma$ où $\beta = 2\,\mathrm{Re}\,\rho$ et $\gamma = |\rho|^2$.*

Démonstration - Si A admet un zéro ρ non réel, de multiplicité m, alors

$$A = (X-\rho)^m Q \text{ où } Q(\rho) \neq 0.$$

Prenons les conjugués des deux membres (le conjugué $\bar{A}$ de A s'obtient, par définition,en conjuguant les coefficients de A qui sont réels donc $\bar{A} = A$)

$$A = \bar{A} = (X-\bar{\rho})^m \bar{Q} \text{ avec } \bar{Q}(\bar{\rho}) = \overline{Q(\rho)} \neq 0.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Ainsi $\bar{\rho}$ est aussi un zéro d'ordre m de A et d'après (8.3.3)

$$S = (X-\rho)^m (X-\bar{\rho})^m = (X^2 - \beta X + \gamma)^m$$

est un diviseur de A. Notons que S étant à coefficients réels le quotient de A par S est aussi à coefficients réels.

Théorème 8.3.3. *Soit $A \in \mathbb{R}[X]$, alors A peut se factoriser sous la forme*

$$A = \alpha (X - r_1)^{m_1} \dots (X - r_p)^{m_p} (X^2 - \beta_1 X + \gamma_1)^{n_1} \dots (X^2 - \beta_q X + \gamma_q)^{n_q} \quad (8.3.4)$$

où les r_i sont les racines réelles distinctes et où si l'on note $(r'_k, \bar{r}'_k)$ les couples distincts de racines conjuguées complexes non réelles, $X^2 - \beta_k X + \gamma_k = (X - r'_k)(X - \bar{r}'_k)$. On a donc $\beta_k = 2 \mathrm{Re}\, e r'_k$ et $\gamma = |r'_k|^2$.

Démonstration - Dans le paragraphe référencé, on a obtenu la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ suivante

$$A = \alpha (X - z_1)^{n_1} (X - z_2)^{n_2} \dots (X - z_p)^{n_p}.$$

Dans l'équation 8.3.4, les r_i sont donc des zéros réels de A de multiplicité m_i et les r'_k, $\bar{r}'_k$ des zéros complexes non réels de multiplicité n_k, par suite

$$m_1 + \dots + m_p + 2(n_1 + \dots + n_q) = n.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Proposition 8.3.4. *Les seuls polynômes irréductibles de* $\mathbb{R}[X]$ *sont les polynômes constants, les polynômes du premier degré et les polynômes de degré* 2 *n'ayant pas de racines réelles :* $\alpha X^2 - \beta X + \gamma$ *tels que* $\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$.

La démonstration découle de manière évidente du résultat précédent. Mais, attention, un polynôme à coefficients réels peut avoir une décomposition dans $\mathbb{R}$ sans avoir de zéros réels.

$$X^4 + 4 = (X^2 - 2X + 2)(X^2 + 2X + 2).$$

8.3.4 Lien entre multiplicité des racines et dérivées

Exercices :
Exercice A.1.33

Cours :
Factorisation dans le corps des réels

Théorème 8.3.4. *Soient $A \in \mathbb{R}[X]$ et $m \leq \deg(A)$. Alors, $r \in \mathbb{R}$ est un zéro de multiplicité m de A si et seulement si*

$$A(r) = A'(r) = A''(r) = \ldots = A^{(m-1)}(r) = 0 \;\; et \;\; A^{(m)}(r) \neq 0. \tag{8.3.5}$$

où $A^{(k)}$ désigne la dérivée d'ordre k de la fonction polynôme $x \mapsto A(x)$.

Démonstration -

- *Condition nécessaire.* Par définition $r \in \mathbb{R}$ est un zéro de A de multiplicité m est équivalent à $A = (X-r)^m Q$, avec $Q(r) \neq 0$.
  On va démontrer par récurrence que cette propriété implique (8.3.5)
  Si $m = 1$, $A(r) = (r-r)Q(r) = 0$, $A'(x) = (x-r)Q'(x) + Q(x)$, $A'(r) = Q(r) \neq 0$
  Supposons que

$$\begin{cases} A(x) = (x-r)^m Q(x) \\ Q(r) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow A(r) = A'(r) = \ldots = A^{(m-1)}(r) = 0 \text{ et } A^{(m)}(r) \neq 0$$

On va montrer la propriété à l'ordre $m+1$:

$$\left\{\begin{array}{l} A(x)=(x-r)^{m+1}Q(x) \\ Q(r)\neq 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A(r)=0 \\ A'(x)=(x-r)^{m}Q_1(x) \end{array}\right.$$

On a $Q_1(x)=(m+1)Q(x)+(x-r)Q'(x)$ donc $Q_1(r)=(m+1)Q(r)\neq 0$, on peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence au polynôme A', on obtient

$$A'(r)=\ldots=(A')^{(m-1)}(r)=0,(A')^{(m)}(r)\neq 0 \Leftrightarrow$$
$$A'(r)=\ldots=A^{(m)}(r)=0,\ A^{(m+1)}(r)\neq 0,$$

ce qui termine la démonstration.

– *Condition suffisante.* Utilisons la formule de Taylor pour les polynômes (vue au chapitre 6). Alors si n est le degré de A on a

$$A(x)=A(r)+(x-r)A'(r)+\frac{(x-r)^2}{2!}A''(r)+\cdots+\frac{(x-r)^n}{n!}A^{(n)}(r).$$

Puisque $A(r)=A'(r)=A''(r)=\ldots=A^{(m-1)}(r)=0$, on a

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{(x-r)^m}{m!}A^{(m)}(r)+\cdots+\frac{(x-r)^n}{n!}A^{(n)}(r) && (8.3.6)\\ &= (x-r)^m\left(\frac{1}{m!}A^{(m)}(r)+\cdots+\frac{(x-r)^{n-m}}{n!}A^{(n)}(r)\right) && (8.3.7) \end{aligned}$$

On a donc $A=(X-r)^mQ$, avec $Q(r)=\frac{1}{m!}A^{(m)}(r)\neq 0$, r est donc zéro de multiplicité m de A.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

8.4 Fractions rationnelles

8.4.1 Définition des fractions rationnelles

Exercices :
Exercice A.1.34

Les entiers naturels (sauf 0) n'ont pas d'opposé pour la loi d'addition. C'est ce qui a conduit à la construction de $\mathbb{Z}$, ensemble des entiers relatifs. Cet ensemble contient les entiers naturels n et leurs opposés $-n$.

De même les entiers relatifs (sauf 1) n'ont pas d'inverses pour la loi de multiplication. C'est pour cela qu'ont été construits les nombres rationnels ($\mathbb{Q}$). Tout entier m de $\mathbb{Z}$ a un inverse dans $\mathbb{Q}$, $1/m$.

Pour les polynômes, chaque polynôme P a un opposé $-P$, mais aucun d'eux, mis à part le polynôme 1, n'a d'inverse pour la multiplication des polynômes. Les fractions rationnelles sont construites afin que chaque polynôme P ait un inverse $1/P$.

Notre objectif est de décomposer toute fraction rationnelle en une somme d' éléments simples dont on sait calculer les primitives, ce qui va utiliser la factorisation des polynômes. Mais avant nous allons définir les fractions rationnelles.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Définition 8.4.1. *Soit P et Q deux fonctions polynomiales, on appelle **fraction** ou **fonction rationnelle**, la fonction notée $\mathbf{F}$ dont le domaine de définition est $\{x \in \mathbf{K} | Q(x) \neq 0\}$ qui est définie par $F(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$.*

On suppose que Q est non nul car, pour $Q = 0$, le domaine de définition de F est vide, ce qui n'a aucun intérêt.

Soient P et Q deux polynômes de $\mathbf{K}[X]$ s'ils ont un diviseur commun $D \in \mathbf{K}[X]$, c'est-à-dire $P = DP_1$ et $Q = DQ_1$, alors la fraction rationnelle $\dfrac{P}{Q}$ est identifiable à la fraction rationnelle $\dfrac{P_1}{Q_1}$. Désormais on ne considérera que des fractions irréductibles.

Notation 8.4.1. On notera $\mathbf{K}(X)$ l'ensemble des fractions rationnelles dont le numérateur et le dénominateur sont des polynômes de $\mathbf{K}[X]$. On définit ainsi les ensembles $\mathbb{R}(X)$ et $\mathbb{C}(X)$ puisque l'on rappelle que $\mathbf{K}$ est soit le corps des nombres réels, soit le corps des nombres complexes.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

8.4.2 Partie entière d'une fraction rationnelle

Exercices :
Exercice A.1.35
Exercice A.1.36

Proposition 8.4.1. *Soit* $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbf{K}(X)$ *alors la décomposition*

$$F = E + \frac{P_0}{Q} \text{ avec ou bien } P_0 = 0 \text{ ou bien } \deg P_0 < \deg Q \qquad (8.4.1)$$

est unique. On appelle E *la* ***partie entière de F*** *et on note* $\mathbf{E} = \mathscr{E}(\boldsymbol{F})$.

Démonstration -

Existence - Si $\deg P < \deg Q$ alors (8.4.1) est immédiate avec $E = 0$, $P_0 = P$. Sinon on peut effectuer la division euclidienne de P par Q qui donne $P = EQ + P_0$, d'où le résultat.

Unicité - Supposons que l'on a deux décompositions :

$$F = E + \frac{P_0}{Q} = \hat{E} + \frac{\hat{P}_0}{Q}.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Si $\hat{P}_0 \neq P_0$, alors

$$E - \hat{E} = \frac{\hat{P}_0 - P_0}{Q} \text{ avec } \deg(\hat{P}_0 - P_0) < \deg Q$$

ce qui est une contradiction puisque Q ne peut pas diviser $(\hat{P}_0 - P_0)$ pour des raisons de degré.

Proposition 8.4.2. *Soient deux fractions rationnelles F et $\hat{F}$ alors*

$$\mathscr{E}(F + \hat{F}) = \mathscr{E}(F) + \mathscr{E}(\hat{F}).$$

La démonstration de cette proposition est faite en exercice.

8.4.3 Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$

Exercices :
Exercice A.1.37

Cours :
Division - puissances croissantes

Définition 8.4.2. *On dit que z est un* ***pôle d'ordre p*** *de la fraction irréductible* $F = \dfrac{P}{Q}$ *si z est un zéro d'ordre p de Q.*

Proposition 8.4.3. *Si z est pôle d'ordre p de* $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{C}(X)$, *on peut décomposer F de manière unique sous la forme*

$$\frac{P}{Q} = \frac{\alpha_1}{X-z} + \ldots + \frac{\alpha_p}{(X-z)^p} + \frac{P_1}{Q_1} \tag{8.4.2}$$

où la fraction rationnelle $\dfrac{P_1}{Q_1}$ *n'admet plus z comme pôle.*

Démonstration -

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

1. Existence. Nous pouvons écrire le dénominateur de F sous la forme
$$Q(x) = (x-z)^p Q_1(x) \text{ où} Q_1(z) \neq 0.$$
Posons
$$y = x - z, \tilde{P}(y) = P(y+z) = P(x), \tilde{Q}(y) = Q(y+z) = Q(x), \tilde{Q}_1(y) = Q_1(y+z) = Q_1(x),$$
nous obtenons
$$\frac{P}{Q}(x) = \frac{P(y+z)}{Q(y+z)} = \frac{\tilde{P}(y)}{\tilde{Q}(y)} = \frac{\tilde{P}(y)}{y^p \tilde{Q}_1(y)}$$
où $\tilde{Q}_1(0) = Q_1(z) \neq 0$. Nous pouvons donc faire la division de $\tilde{P}$ par $\tilde{Q}_1$ suivant les puissances croissantes, ce qui donne
$$\tilde{P}(y) = (\alpha_p + \alpha_{p-1} y + \cdots + \alpha_1 y^{p-1}) \tilde{Q}_1(y) + y^p \tilde{P}_1(y)$$
d'où
$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{\tilde{P}(y)}{y^p \tilde{Q}_1(y)} = \frac{\alpha_p}{y^p} + \frac{\alpha_{p-1}}{y^{p-1}} + \ldots + \frac{\alpha_1}{y} + \frac{\tilde{P}_1(y)}{\tilde{Q}_1(y)} \\ &= \frac{\alpha_p}{(x-z)^p} + \frac{\alpha_{p-1}}{(x-z)^{p-1}} + \ldots + \frac{\alpha_1}{(x-z)} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \end{aligned}$$
où l'on a noté $P_1(x) = \tilde{P}_1(x-z)$.
2. Unicité. Supposons qu'il existe deux décompositions de la forme (8.4.2) :
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\alpha_1}{x-z} + \ldots + \frac{\alpha_p}{(x-z)^p} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)},$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\hat{\alpha}_1}{x-z} + \ldots + \frac{\hat{\alpha}_p}{(x-z)^p} + \frac{\hat{P}_1(x)}{\hat{Q}_1(x)}.$$

La factorisation $Q(x) = (x-z)^p Q_1(x)$ étant unique on a $Q_1 = \hat{Q}_1$. En écrivant l'égalité des seconds membres des deux décompositions, puis en multipliant par $(x-z)^p$ et en faisant $x = z$ on obtient $\alpha_p = \hat{\alpha}_p$. On continue alors de la même manière en multipliant par $(x-z)^{p-1}$ et en faisant $x = z$ etc... ce qui donne l'égalité $\alpha_k = \hat{\alpha}_k \ \forall k = p-1, \ldots, 1$. Il ne reste plus que deux fractions ayant le même dénominateur soit $P_1 = \hat{P}_1$.

Cette proposition permet de démontrer aisément le théorème fondamental suivant.

Théorème 8.4.1. *Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{C}(X)$ irréductible, alors si Q admet la factorisation*

$$Q = \alpha(X-z_1)^{n_1}(X-z_2)^{n_2}\ldots(X-z_p)^{n_p}$$

alors F admet la décomposition unique en éléments simples suivante

$$\begin{aligned}\frac{P}{Q} = E \quad & + \frac{a_{11}}{X-z_1} + \frac{a_{12}}{(X-z_1)^2} + \ldots + \frac{a_{1n_1}}{(X-z_1)^{n_1}} \\ & + \frac{a_{21}}{X-z_2} + \frac{a_{22}}{(X-z_2)^2} + \ldots + \frac{a_{2n_2}}{(X-z_2)^{n_2}} \\ & + \ldots \\ & + \frac{a_{p1}}{X-z_p} + \frac{a_{p2}}{(X-z_p)^2} + \ldots + \frac{a_{pn_p}}{(X-z_p)^{n_p}}\end{aligned} \tag{8.4.3}$$

où les a_{ij} sont des nombres complexes.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

La démonstration du théorème 8.4.3 fournit déjà une méthode systématique pour calculer les coefficients a_{ij}. Mais la détermination pratique de ces coefficients est réalisée grâce à l'utilisation des propriétés de la fonction rationnelle associée (comportement à l'infini, valeur en des points particuliers, conjugaison de nombres complexes, ...), ce que nous verrons dans le paragraphe "Calcul pratique de la décomposition en éléments simples).

8.4.4 Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$

Cours :
Fractions rationnelles - Décomposition
dans les complexes

Puisqu'une fraction rationnelle à coefficients réels peut être considérée comme une fraction rationnelle à coefficients complexes, on peut obtenir la décomposition (8.4.3) du paragraphe référencé. D'autre part, si z est un pôle réel de la fraction, les coefficients des éléments simples correspondants sont aussi réels (car obtenus comme coefficients du quotient d'une division suivant les puissances croissantes de polynômes à coefficients réels). Par contre, si z est un pôle complexe, $\bar{z}$ est aussi un pôle de même ordre (proposition 8.3.3), par suite dans la décomposition (8.4.3) on a autant de termes correspondants à z que ceux correspondants à $\bar{z}$. L'argumentation de la proposition 8.3.3 montre d'autre part que leurs coefficients sont conjugués les uns des autres. La démonstration (admise) nécessite en fait le recours aux théorèmes de l'arithmétique des polynômes.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Théorème 8.4.2. *Soit* $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{R}(X)$ *irréductible, alors si* Q *admet la factorisation*

$$Q = \alpha(X - r_1)^{m_1} \ldots (X - r_p)^{m_p} (X^2 - \beta_1 X + \gamma_1)^{n_1} \ldots (X^2 - \beta_q X + \gamma_q)^{n_q}$$

où les polynômes $X^2 - \beta_k X + \gamma_k$ *n'ont pas de racines réelles alors* F *admet la décomposition unique en éléments simples suivante*

$$\begin{aligned} \frac{P}{Q} &= E + \frac{a_{11}}{X - r_1} + \frac{a_{12}}{(X - r_1)^2} + \ldots + \frac{a_{1m_1}}{(X - r_1)^{m_1}} + \cdots \\ &+ \cdots \\ &+ \frac{a_{p1}}{X - r_p} + \frac{a_{p2}}{(X - r_p)^2} + \ldots + \frac{a_{pm_p}}{(X - r_p)^{m_p}} \\ &+ \frac{\mu_{11} X + \nu_{11}}{X^2 - \beta_1 X + \gamma_1} + \frac{\mu_{12} X + \nu_{12}}{(X^2 - \beta_1 X + \gamma_1)^2} + \ldots + \frac{\mu_{1n_1} X + \nu_{1n_1}}{(X^2 - \beta_1 X + \gamma_1)^{n_1}} \\ &+ \cdots \\ &+ \frac{\mu_{q1} X + \nu_{q1}}{X^2 - \beta_q X + \gamma_q} + \frac{\mu_{q2} X + \nu_{q2}}{(X^2 - \beta_q X + \gamma_q)^2} + \ldots + \frac{\mu_{qn_q} X + \nu_{qn_q}}{(X^2 - \beta_q X + \gamma_q)^{n_q}} \end{aligned} \tag{8.4.4}$$

où les a_{ij}, μ_{kl} *et* ν_{kl} *sont des nombres réels.*

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

8.4.5 Calcul pratique de la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$

Exercices :
Exercice A.1.38
Exercice A.1.39

Nous allons présenter ici plusieurs exemples de calcul des coefficients du développement.

- Pôles réels simples

Soit à calculer la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $1/(X^2-1)$. Cette fraction admet deux pôles simples 1 et -1. Elle admet donc une décomposition de la forme :

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \tag{8.4.5}$$

Une méthode simple permet d'avoir rapidement A et B. Elle consiste à multiplier les deux membres de l'identité ci-dessus par $x-1$, ce qui donne :

$$\frac{1}{x+1} = A + B\frac{x-1}{x+1} \tag{8.4.6}$$

puis à 'faire' $x=1$, ce qui aboutit à $A = 1/2$. De même en multipliant maintenant l'identité (8.4.5) par $x+1$, on obtient :

$$\frac{1}{x-1} = A\frac{x+1}{x-1} + B \tag{8.4.7}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Faisons alors $x = -1$, nous obtenons aussitôt $B = -1/2$, d'où :

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right\} \tag{8.4.8}$$

- Pôles réels

Soit à calculer la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle

$$\frac{1}{X^2(X^2-1)}. \tag{8.4.9}$$

Cette fraction admet deux pôles simples 1 et -1 et un pôle double 0. Elle admet donc une décomposition de la forme :

$$\frac{1}{x^2(x^2-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x} + \frac{D}{x^2}. \tag{8.4.10}$$

Nous déterminons A et B exactement comme précédemment. Il vient successivement :

$$\frac{1}{x^2(x+1)} = A + (x-1)\left(\frac{B}{x+1} + \frac{C}{x} + \frac{D}{x^2}\right). \tag{8.4.11}$$

ce qui donne pour $x = 1$, $A = 1/2$, puis :

$$\frac{1}{x^2(x-1)} = B + (x+1)\left(\frac{A}{x-1} + \frac{C}{x} + \frac{D}{x^2}\right). \tag{8.4.12}$$

ce qui donne pour $x = -1$, $B = -1/2$. Nous obtenons D, par la même méthode, en multipliant cette fois-ci par x^2. Il vient alors :

$$\frac{1}{(x^2-1)} = x^2\left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}\right) + Cx + D \tag{8.4.13}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

d'où en faisant $x = 0$, la valeur de D, soit $D = -1$.

Pour calculer maintenant C, il faut procéder différemment. Nous pouvons donner à x une valeur quelconque, puis la reporter dans (8.4.10). En substituant en outre à A, B et D, leurs valeurs, nous obtenons une équation où la seule inconnue est C. Il est évidemment recommandé de choisir la valeur de x de manière à rendre les calculs aussi simples que possible. Les valeurs privilégiées sont en général $x = 0$, $x = 1$ et $x = -1$. Ici toutes les trois sont des pôles et ont donc déjà été utilisées. Plutôt que de prendre une valeur de x, telle que $x = 2$ par exemple, on a intérêt à faire tendre x vers $+\infty$. Précisons. Nous multiplions les deux membres de (8.4.10) par x. Il vient :

$$\frac{1}{x(x^2-1)} = A\frac{x}{x-1} + B\frac{x}{x+1} + C + D\frac{1}{x} \qquad (8.4.14)$$

puis faisons tendre x vers $+\infty$. Il vient :

$$0 = A + B + C, \qquad (8.4.15)$$

ce qui donne $C = 0$, d'où la décomposition cherchée :

$$\frac{1}{x^2(x^2-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) - \frac{1}{x^2}. \qquad (8.4.16)$$

Facteur irréductible du second degré

Soit à calculer la décomposition en éléments simples de

$$\frac{1}{X(X^2+1)}. \qquad (8.4.17)$$

Cette fraction admet un pôle réel simple 0 et deux pôles complexes simples i et $-i$. Elle admet donc, sur $\mathbb{R}$, une décomposition de la forme :

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}. \tag{8.4.18}$$

Nous déterminons A exactement comme précédemment. Nous multiplions (8.4.18) par x. Il vient :

$$\frac{1}{x^2+1} = A + \frac{Bx^2+Cx}{x^2+1}.$$

de sorte qu'en faisant $x = 0$, nous obtenons $A = 1$.

Pour déterminer B et C, nous faisons $x = 1$ puis $x = -1$ dans l'identité (8.4.18). Il vient ainsi

$$\text{pour } x = 1, \quad \frac{1}{2} = A + \frac{B+C}{2}, \text{ pour } x = -1, \quad -\frac{1}{2} = -A + \frac{-B+C}{2},$$

d'où découle aussitôt $B = -1$ et $C = 0$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

8.4.6 Calcul pratique de la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$

Exercices :
Exercice A.1.40
Exercice A.1.41

$$F = \frac{X^4+1}{(X^2+1)(X-1)^2}.$$

Cette fraction rationnelle admet 4 pôles complexes $i, -i$ sont 2 pôles simples, 1 est pôle double

1. Ici, le degré du numérateur n'est pas strictement inférieur au degré du dénominateur. Aussi, la division euclidienne donne

   $$F = 1 + 2F_1 \text{ où } F_1 = \frac{X^3 - X^2 + X}{(X^2+1)(X-1)^2}.$$

   La décomposition (8.4.3) donne alors

   $$F_1 = \frac{\alpha}{X+i} + \frac{\beta}{X-i} + \frac{c}{X-1} + \frac{d}{(X-1)^2}, \ \alpha, \beta, c, d \in \mathbb{C}. \tag{8.4.19}$$

2. Comme précédemment on va calculer le coefficient du terme de plus haut degré associé à un pôle quelconque, par exemple, le coefficient d. Elle consiste à multiplier les deux

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

membres de (8.4.19) par $(x-1)^2$, puis à donner à x la valeur 1. Nous obtenons ainsi

$$\frac{1^3-1^2+1}{(1^2+1)} = d, \text{ d'où } d = \frac{1}{2}$$

tous les autres termes du membre de droite étant nuls.

De même en multipliant les deux membres de (8.4.19) par $(x-i)$, puis en faisant $x = i$, nous obtenons

$$\frac{i^3-i^2+i}{(i+i)(i-1)^2} = \beta, \text{ d'où } \beta = \frac{1}{4}.$$

3. Comme F_1 est réelle et comme les coefficients c et d sont réels, en prenant les conjugués des deux membres de (8.4.19), nous obtenons (par unicité de la décomposition) $\alpha = \bar{\beta} = \frac{1}{4}$.

   Si l'on se sent mal à l'aise avec le raisonnement précédent, on peut alternativement, multiplier les deux membres de (8.4.19) par $(x+i)$, puis en faisant $x = -i$, retrouver $\alpha = 1/4$.

4. Il reste à calculer c. Faisant $x = 0$ dans les deux membres de (8.4.19), il vient $c = d = \frac{1}{2}$.

5. Une autre façon consisterait à multiplier les deux membres de l'identité (8.4.19) par $(x-1)$ puis à faire tendre x vers l'infini ce qui donnerait $1 = \alpha + \beta + c$, soit à nouveau $c = \frac{1}{2}$.

Finalement la décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{C}$ est

$$F = 1 + 2F_1 = 1 + \left(\frac{1}{2(X+i)} + \frac{1}{2(X-i)} + \frac{1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2}\right)$$

Pour obtenir la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de F, il suffit de regrouper les deux premiers termes du développement, ce qui donne

$$F = 1 + \left(\frac{X}{X^2+1} + \frac{1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2}\right).$$

Une méthode qui est toujours valable mais pas très efficace, car elle conduit à la résolution d'un nombre d'équations correspondant au nombre de coefficients inconnus de la décomposition, consiste à réduire au même dénominateur le membre de droite de la décomposition et à identifier les coefficients du numérateur.

8.5 Calcul des primitives des fractions rationnelles

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

8.5.1 Primitive de $1/(t-r)^n$, $n \geq 1$

Exercices :
Exercice A.1.42
Exercice A.1.43

- $n = 1$ - La réponse est immédiate :

$$\int \frac{dt}{t-r} = \ln|t-r| + C \tag{8.5.1}$$

- $n > 1$ - La réponse s'obtient rapidement à nouveau, on arrive à :

$$\int \frac{dt}{(t-r)^n} = \frac{1}{(1-n)(t-r)^{n-1}} + C \tag{8.5.2}$$

Nous voyons ainsi que, lorsque toutes les racines du dénominateur (c'est-à-dire, tous les pôles de la fraction rationnelle considérée), sont réelles, on obtient sans difficulté, une fois la décomposition en éléments simples calculée, les primitives correspondantes. Par contre, la situation est plus délicate, en présence de racines complexes.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

8.5.2 Primitive de $\dfrac{\mu t+\nu}{t^2-\beta t+\gamma}$

Exercices :
Exercice A.1.44

On suppose que $\dfrac{\mu t+\nu}{t^2-\beta t+\gamma}$ est un élément simple dans $\mathbb{R}(X)$, c'est à dire que $t^2-\beta t+\gamma$ n'a pas de racine réelle, on a donc $4\gamma-\beta^2>0$.

$$\frac{\mu t+\nu}{t^2-\beta t+\gamma}=\left(\frac{\mu}{2}\right)\frac{2t-\beta}{t^2-\beta t+\gamma}+\left(\nu+\frac{\beta\mu}{2}\right)\frac{1}{t^2-\beta t+\gamma}$$

donc

$$\int\frac{\mu t+\nu}{t^2-\beta t+\gamma}dt=\frac{\mu}{2}J(t)+\left(\nu+\frac{\beta\mu}{2}\right)K(t)$$

Le calcul de J est simple :

$$J(t)=\ln(t^2-\beta t+\gamma)+C$$

Notons que puisque le trinôme $t^2-\beta t+\gamma$ n'a pas de racines réelles, il garde toujours le même signe $(+)$. Il n'est donc pas nécessaire de prendre sa valeur absolue avant le logarithme.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Pour le calcul de K, il faut écrire le dénominateur sous la forme :

$$D(t) = t^2 - \beta t + \gamma = \left(t - \frac{\beta}{2}\right)^2 + \gamma - \frac{\beta^2}{4} = \left(\gamma - \frac{\beta^2}{4}\right)\left(1 + \left(\frac{t - \frac{\beta}{2}}{\sqrt{\gamma - \frac{\beta^2}{4}}}\right)^2\right).$$

si on effectue le changement de variable $y = \dfrac{t - \frac{\beta}{2}}{\alpha}$ avec $\alpha = \sqrt{\gamma - \dfrac{\beta^2}{4}}$, alors

$$K(t) = \frac{1}{\alpha^2}\int \frac{dt}{1 + \left(\frac{t - \frac{\beta}{2}}{\alpha}\right)^2} = \frac{1}{\alpha}\int \frac{dy}{1 + y^2} = \frac{1}{\alpha}\text{Arc}\tan y + C = \frac{1}{\alpha}\text{Arc}\tan\left(\frac{t - \frac{\beta}{2}}{\alpha}\right) + C$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

8.5.3 Primitive de $\frac{\mu t+\nu}{(t^2-\beta t+\gamma)^n}$, $n>1$

$$\begin{aligned} I(t)=\int \frac{\mu t+\nu}{(t^2-\beta t+\gamma)^n} &= \frac{\mu}{2}\int \frac{2t-\beta}{(t^2-\beta t+\gamma)^n}\,dt+\left(\nu+\mu\frac{\beta}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2-\beta t+\gamma)^n} \\ &= J(t)+\left(\nu+\mu\frac{\beta}{2}\right)K(t) \end{aligned}$$

J se calcule facilement. On arrive cette fois-ci à :

$$J(t)=\frac{\mu}{2(1-n)(t^2-\beta t+\gamma)^{n-1}}+C$$

En ce qui concerne K, par contre, nous allons seulement pouvoir obtenir une relation de récurrence. Posons donc :

$$K_n(t)=\int \frac{dt}{(t^2-\beta t+\gamma)^n}=\int \frac{dt}{((t-\frac{\beta}{2})^2+\alpha^2)^n}=\frac{1}{\alpha^{2n-1}}\int \frac{dy}{(1+y^2)^n}$$

où l'on a posé à nouveau $y=\frac{t-\frac{\beta}{2}}{\alpha}$ avec $\alpha=\sqrt{\gamma-\frac{\beta^2}{4}}$. Posons maintenant :

$$M_n = \int \frac{dy}{(1+y^2)^n}=\int \frac{1+y^2}{(1+y^2)^n}\,dy-\int \frac{y^2}{(1+y^2)^n}\,dy=M_{n-1}-L_n$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Il reste à calculer L_n. Nous allons le faire par parties, en notant que $2y$ est la dérivée de y^2, puis en posant :

$$u'(y) = \frac{2y}{(1+y^2)^n}, \qquad v(y) = y,$$

d'où :

$$u(y) = \frac{1}{(1-n)(1+y^2)^{n-1}} \qquad v'(y) = 1$$

ce qui conduit à :

$$L_n = \frac{y}{2(1-n)(1+y^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(1-n)} \int \frac{dy}{(1+y^2)^{n-1}}$$

de sorte que, en regroupant, nous obtenons :

$$M_n = M_{n-1} - \frac{y}{2(1-n)(1+y^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(1-n)} M_{n-1}$$

soit finalement :

$$M_n = \frac{3-2n}{2(1-n)} M_{n-1} - \frac{y}{2(1-n)(1+y^2)^{n-1}}$$

Annexe A
Exercices

A.1 Exercices du chapitre 8

Exercice A.1.1 Ch2-Exercice27

Soient les deux lois définies sur $\mathbb{R}^2$ de la manière suivante. Étant donnés deux couples (x, y) et (x', y') de $\mathbb{R}^2$, on pose :

- $(x, y) + (x', y') \stackrel{\text{Déf}}{=} (x + x', y + y')$ (addition),
- $(x, y) \times (x', y') \stackrel{\text{Déf}}{=} (xx' - yy', xy' + x'y)$ (multiplication)

Montrer que ce sont des lois de composition interne dans $\mathbb{R}^2$, que l'addition est commutative, associative, que son élément neutre est $(0,0)$ et que l'opposé de (x, y) est $(-x, -y)$. Montrer que la multiplication est commutative, associative, que son élément neutre est $(1,0)$ et que l'inverse de $(x, y) \neq (0,0)$ est $\left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}\right)$. Enfin, montrer que la multiplication est distributive par rapport à l'addition.

Retour au cours

Solution

Exercice A.1.2 Ch2-Exercice28

1/ Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, et soit la somme $z + z'$ et le produit zz'. Ecrire $z + z'$ et zz' sous la forme canonique (règles d'addition et de multiplication " habituelles " - ne pas oublier que $i^2 = -1$).
2/ On suppose $z = (x, y) = x + iy$ non nul (c'est-à-dire $\neq (0,0)$), vérifier que son inverse, c-à-d le nombre complexe z' tel que $zz' = z'z = 1$, est $(z' =)\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$.

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.3 Ch2-Exercice29

Montrer que les racines carrées d'un nombre réel négatif a, c'est-à-dire les solutions de $z^2 = a$ sont $\pm i\sqrt{-a}$.

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.4 Ch2-Exercice30

Calculer, en utilisant la formule du binôme de Newton, $(z+z')^3$ et $(z+z')^4$.

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.5 Ch2-Exercice31

Soit $z \neq \frac{1}{2}, z \in \mathbb{C}$, montrer que $\dfrac{2z+1}{2z-1} = \dfrac{4|z|^2-1}{|2z-1|^2} - i\dfrac{4\,\mathrm{Im}\,z}{|2z-1|^2}$.

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.6 Ch2-Exercice32

En appliquant l'inégalité triangulaire successivement à $z = (z - z') + z'$ et $z' = (z' - z) + z$, montrer que

$$||z| - |z'|| \leq |z - z'|$$

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.7 Ch2-Exercice33

Montrer que $\operatorname{Arg}\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\operatorname{Arg} z \; [2\pi]$.

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.8 Ch2-Exercice34

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, représenter un nombre complexe en précisant son module et son argument. Plus précisément donner la représentation graphique de 1, i, $1+i$ et $1-i$.

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.9 Ch2-Exercice35

Déduire de la formule de De Moivre que pour tout $z \in \mathbb{C}$ non nul et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\operatorname{Arg} z^n \equiv n \operatorname{Arg} z \; [2\pi]$.

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.10 Ch2-Exercice36

Déterminer les quatre racines de l'quation $z^4 + z^2 = 0$

Retour au cours

Solution

Exercice A.1.11 Ch2-Exercice37

Donner les racines cubiques de l'unité (on les note habituellement $\{1, j, j^2\}$) et les représenter graphiquement. Justifier la notation j^2 et montrer que $\bar{j} = j^2$, $1 + j + j^2 = 0$.

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.12 Ch2-Exercice38

Déterminer les racines carrées de i et j.

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.13 Ch2-Exercice39

Calculer les deux racines carrées de $-5+12i$.

Retour au cours

Solution

Exercice A.1.14 Ch2-Exercice40

On suppose que a, b, c sont réels, $a \neq 0$, $\Delta = b^2 - 4ac \neq 0$.

Rappeler l'expression des deux racines z_0, z_1 de l'équation $az^2 + bz + c = 0$, distinguer les cas $\Delta > 0$ et $\Delta < 0$.

On note r_0, r_1 les deux racines carrées de Δ, montrer que l'on a

$$z_0 = \frac{-b + r_0}{2a}, z_1 = \frac{-b + r_1}{2a}$$

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.15 Ch2-Exercice41

Résoudre l'équation du second degré : $z^2 - iz + 1 - 3i = 0$.

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.16 Ch2-Exercice42

Démontrer que

$$e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)},\ e^{i0} = 1,\ \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}.$$

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.17 Ch2-Exercice43

Démontrer les formules d'Euler

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.18 Ch2-Exercice44

Montrer que $\sin^5\theta = \frac{1}{16}\sin 5\theta - \frac{5}{16}\sin 3\theta + \frac{5}{8}\sin\theta$.

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.19 Ch8-Exercice1

Le polynôme $(1+i)X^2 - 3X + i$ peut-il être considéré comme un polynôme sur $\mathbb{C}$? sur $\mathbb{R}$? Quel est le degré de ce polynôme ?

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.20 Ch8-Exercice2

Montrer sur un exemple que la définition du produit de deux polynômes est cohérente avec le produit des fonctions polynomiales que vous connaissez (choisir par exemple $n = 2$ $m = 3$).

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.21 Ch8-Exercice3

Montrer, par contraposée, que si $AB = 0$ alors $A = 0$ ou $B = 0$.

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.22 Ch8-Exercice4

Soit $A \in \mathbf{K}_n[X]$ et $B \in \mathbf{K}_n[X]$, montrer que $A + B \in \mathbf{K}_n[X]$, que $\alpha A \in \mathbf{K}_n[X]$ ($\alpha \in \mathbf{K}$). Est-ce que $AB \in \mathbf{K}_n[X]$?

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.23 Ch8-Exercice5

Quel est le conjugué de $A = 3X^2 + (2i - 1)X + i$?

Retour au cours

Solution

Exercice A.1.24 Ch8-Exercice6

Montrer que $X+2$ est un diviseur de X^4-16. Donner les autres diviseurs de X^4-16 dans $\mathbb{R}[X]$.

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.25 Ch8-Exercice7

Soit $A = BQ + R$ montrer que si D divise A et B, alors D divise R.

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.26 Ch8-Exercice8

Effectuer la division euclidienne de X^4+1 par $(X^2+1)(X-1)^2$.

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.27 Ch8-Exercice9

- Diviser suivant les puissances croissantes le polynôme $A = X^4 + 1$ par $(X^2 + 1)(X - 1)^2$ de façon à pouvoir mettre X^2 en facteur dans le reste.
- Diviser suivant les puissances croissantes $Y^2 + Y + 2$ par $Y + 1$ de façon à pouvoir mettre Y^3 en facteur dans le reste.

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.28 Ch8-Exercice10

Montrer que dans $\mathbf{K}[X]$ tout polynôme de degré 1 est irréductible. Peut-on trouver un polynôme de degré 2 qui soit irréductible dans $\mathbb{C}[X]$?

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.29 Ch8-Exercice11

Soient $x_1 = i$, $x_2 = 4 + i$, $x_3 = 3$. Existe-t-il un polynôme de degré 2 qui s'annule en ces trois points ? Un polynôme de degré 3 ? Un polynôme de degré 4 ? Si oui, en donner un.

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.30 Ch8-Exercice12

Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme

$$A = X^4 + 3X^2 + 2.$$

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.31 Ch8-Exercice13

Soient $x_1 = i, x_2 = 4, x_3 = 3$, existe-t-il un polynôme de degré 3 à coefficients réels qui s'annule en ces trois points ? Un polynôme de degré 4 à coefficients réels ? Si oui en donner un.

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.32 Ch8-Exercice14

Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme

$$A = X^5 - X^4 + 3X^3 - 3X^2 + 2X - 2.$$

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.33 Ch8-Exercice15

Soit le polynôme

$$A = X^7 + 3X^6 + 5X^5.$$

Pour quelles valeurs de $k \in \mathbb{N}$ a-t-on $A^{(k)}(0) = 0$ (ne pas calculer les dérivées) ?

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.34 Ch8-Exercice16

La fraction rationnelle

$$F = \frac{X^3 - X^2 + X - 1}{3X^2 - X - 2}$$

est-elle irréductible ? Dans le cas contraire, la simplifier.

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.35 Ch8-Exercice17

Calculer la partie entière de

$$F = \frac{X^4+1}{(X^2+1)(X-1)^2}.$$

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.36 Ch8-Exercice18

Montrer la proposition suivante :
Soient deux fractions rationnelles F et $\hat{F}$ alors

$$\mathscr{E}(F+\hat{F}) = \mathscr{E}(F) + \mathscr{E}(\hat{F}).$$

où l'on a noté $\mathscr{E}(F)$ la partie entière de F.

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.37 Ch8-Exercice19

Soit la fraction rationnelle

$$F = \frac{X^2 - X + 2}{(X-1)^3 X}$$

Mettre F la sous la forme de la décomposition (8.4.2).

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.38 Ch8-Exercice20

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle suivante :

$$\frac{2X+3}{X^2-5X+6}.$$

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.39 Ch8-Exercice21

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle suivante :

$$\frac{2X+1}{(X-2)^3}.$$

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.40 Ch8-Exercice22

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle suivante :

$$F = \frac{X^4+1}{(X^2+1)(X-1)^2}.$$

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.41 Ch8-Exercice23

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ puis dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction rationnelle suivante :

$$\frac{2X^3+X^2+3X+1}{(X^2+1)(X^2+2)}.$$

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.42 Ch8-Exercice24

Intégrer la fraction rationnelle suivante :

$$\frac{2x+3}{x^2-5x+6}.$$

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.43 Ch8-Exercice25

Intégrer la fraction rationnelle suivante :

$$\frac{2x+1}{(x-2)^3}.$$

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.44 Ch8-Exercice26

Intégrer la fraction rationnelle suivante :

$$\frac{2x^3+x^2+3x+1}{(x^2+1)(x^2+2)}.$$

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

A.2 Exercices de TD

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.1 TD2-Exercice8

Le but de cet exercice est de démontrer quelques sommations classiques dans $\mathbb{C}$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer le module et l'argument des nombres complexes $(1+i)^3$, $(1+i)^4$ et $(1+i)^n$. En déduire que :

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{2p\leq n} (-1)^p C_n^{2p} (= 1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \cdots \quad) &= (\sqrt{2})^n \cos(n\frac{\pi}{4})\\ \sum_{p=0}^{2p+1\leq n} (-1)^p C_n^{2p+1} (= C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \cdots \quad) &= (\sqrt{2})^n \sin(n\frac{\pi}{4})\end{aligned}$$

2. Montrer que

$$\begin{aligned}2^n &= 1 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \cdots\\ 0 &= 1 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \cdots\end{aligned}$$

3. Soit $j = \cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3)$. Montrer que $(1+j)^n = A + Bj + Cj^2$ avec :

$$\begin{aligned}A &= 1 + C_n^3 + C_n^6 + \cdots\\ B &= C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + \cdots\\ C &= C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 + \cdots\end{aligned}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.1
TD2-Exercice8

Trouver trois équations vérifiées par A, B et C et en déduire que :

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos(\frac{n\pi}{3})\right) \\
B &= \frac{1}{3}\left(2^n - 2\cos(\frac{(n+1)\pi}{3})\right) \\
C &= \frac{1}{3}\left(2^n - 2\cos(\frac{(n-1)\pi}{3})\right)
\end{aligned}
$$

Question 1 Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 2 Aide 1 Aide 2
Question 3 Aide 1 Aide 2

Exercice A.2.2 TD2-Exercice9

On désigne par P le demi-plan complexe supérieur, par D le disque unité et par U le cercle unité, c'est-à-dire :

$$\begin{array}{rcll} P & = & \{z \in \mathbb{C}; & \operatorname{Im} z > 0\} \\ D & = & \{z \in \mathbb{C}; & |z| < 1\} \\ U & = & \{z \in \mathbb{C}; & |z| = 1\} \end{array}$$

On considère l'application suivante $f : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \to \mathbb{C}$, $z \longmapsto f(z) = \frac{z-i}{z+i}$.

1. Montrer que f est injective.
2. Montrer que $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$, on a $f(z) \neq 1$.
3. Montrer que $\operatorname{Im} f = \mathbb{C} \setminus \{1\}$.
4. Montrer que $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$, on a $1 - |f(z)|^2 = 4\dfrac{\operatorname{Im} z}{|z+i|^2}$.
5. On considère f_1 la restriction de f à $\mathbb{R}$. Montrer que f_1 est une application de $\mathbb{R}$ dans $U \setminus \{1\}$ et qu'elle est surjective.
6. On considère f_2 la restriction de f à P. Montrer que f_2 est une application de P sur D et que cette application est bijective.

Exercice A.2.2
TD2-Exercice9

Question 1	Aide 1	Aide 2		
Question 2	Aide 1			
Question 3	Aide 1	Aide 2	Aide 3	Aide 4
Question 4	Aide 1	Aide 2		
Question 5	Aide 1	Aide 2	Aide 3	Aide 4
Question 6	Aide 1	Aide 2		

Exercice A.2.3 TD2-Exercice10

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

1. $1+z+z^2=0$
2. $z^2+z+2=0$
3. $(1-i)z^2-(7+i)z+4+6i=0$
4. $z^3=-8$
5. $z^7=64-64i\sqrt{3}$

Question 1 Aide 1 Aide 2
Question 2 Aide 1 Aide 2
Question 3 Aide 1 Aide 2
Question 4 Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 5 Aide 1 Aide 2

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.4 TD8-Exercice1

1. Déterminer le réel a pour que le polynôme p défini par $p(x) = x^4 - x + a$ soit divisible par $x-2$.
   Pour cette valeur de a est-ce que p est divisible par $(x-2)^2$?
2. Soit $n \in \mathbb{N}_*$, déterminer a et b pour que $ax^{n+1} + bx^n + 1$ soit divisible par $(x-1)^2$. Déterminer alors le quotient.

Exercice A.2.5 TD8-Exercice2

Décomposer en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes $x^4+1,\ x^6-7x^3-8$.

Exercice A.2.6 TD8-Exercice3

1. On définit les polynômes $P(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1$, $Q(x) = x^2 + x + 1$.
   (a) Diviser P par Q suivant les puissances croissantes (on veut un reste de valuation 3).
   (b) En déduire une primitive de la fonction $\dfrac{x^3 + 3x^2 + x + 1}{x^3(x^2 + x + 1)}$.
   Réponse : $-\dfrac{1}{2x^2} + 2\ln|x| - \ln(x^2 + x + 1) + C$
2. En s'inspirant de la méthode précédente, trouver une primitive de $\dfrac{1}{x^4(x+1)}$.
   Réponse : $-\dfrac{1}{3x^3} + \dfrac{1}{2x^2} - \dfrac{1}{x} + \ln\left(\dfrac{|1+x|}{|x|}\right) + C$

Exercice A.2.7 TD8-Exercice4

1. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ et dans $\mathbb{C}(X)$ les fractions rationnelles suivantes :
$$\frac{1}{1-x^2},\ \frac{x^2+2x+1}{x^2-5x+6},\ \frac{1}{x^2-x+1},\ \frac{x^4+6x^2-2x+5}{(x^2+4)(x-1)},\ \frac{1}{(x-1)^8(x-2)}$$
Réponses :
$$\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{2(1+x)}+\frac{1}{2(1-x)},\ \frac{x^2+2x+1}{x^2-5x+6}=1-\frac{9}{x-2}+\frac{16}{x-3},$$
$$\frac{1}{x^2-x+1}=\frac{i}{\sqrt{3}(x+j)}-\frac{i}{\sqrt{3}(x+j^2)},$$
$$\frac{x^4+6x^2-2x+5}{(x^2+4)(x-1)}=x+1+\frac{x-1}{(x^2+4)}+\frac{2}{(x-1)}=x+1+\frac{2+i}{4(x-2i)}+\frac{2-i}{4(x+2i)}+\frac{2}{(x-1)}$$
$$\frac{1}{(x-1)^8(x-2)}=-\frac{1}{(x-1)^8}-\frac{1}{(x-1)^7}-\ldots-\frac{1}{(x-1)}+\frac{1}{(x-2)}$$
2. Décomposer en élément simples dans $\mathbb{R}(X)$ les fractions rationnelles suivantes :
$$\frac{x}{(x-a)(x-b)},\ \frac{2x^3+5x^2+6x+3}{x^2+x+1},\ \frac{1}{(x^2+1)^2(x^2-1)},\ \frac{3x+4}{(x^2+2x+3)^2},\ \frac{\alpha x+\beta}{(x^2-2x+5)^2}$$
Réponses :
$$\text{si } a\neq b,\ \frac{x}{(x-a)(x-b)}=\frac{a}{(a-b)(x-a)}+\frac{b}{(b-a)(x-b)},$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.7
TD8-Exercice4

$$\text{si } a=b \quad \frac{x}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{x-a} + \frac{a}{(x-a)^2}$$

$$\frac{2x^3+5x^2+6x+3}{x^2+x+1} = 2x+3+\frac{x}{x^2+x+1} = 2x+3+\frac{1-j^2}{3(x-j)} + \frac{1-j}{3(x-j^2)}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x^2+1)^2(x^2-1)} &= \frac{1}{8(x+i)^2} - \frac{i}{4(x+i)} + \frac{1}{8(x-i)^2} + \frac{i}{4(x-i)} \\ &\quad + \frac{1}{8(x-1)} - \frac{1}{8(x+1)} \\ &= -\frac{1}{2(x^2+1)^2} - \frac{1}{4(x^2+1)} + \frac{1}{8(x-1)} - \frac{1}{8(x+1)}\end{aligned}$$

3. Décomposer en élément simples dans $\mathbb{R}(X)$

$$\frac{3+x}{x^3-x^2+x-1}, \quad \frac{2}{(x-1)^4(x^2+1)}, \quad \frac{1}{x^n(x-1)}$$

Réponses :

$$\frac{3+x}{x^3-x^2+x-1} = \frac{2}{x-1} - \frac{2x+1}{x^2+1},$$

$$\frac{2}{(x-1)^4(x^2+1)} = \frac{1}{(x-1)^4} - \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{1}{2(x^2+1)},$$

$$\frac{1}{x^n(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x^k}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.8 TD8-Exercice5

Caculer les primitives des fractions rationnelles de l'exercice précédent.
Réponses :

$$\int \frac{1}{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\ln\frac{|1+x|}{|1-x|}+C,\ \int \frac{x^2+2x+1}{x^2-5x+6}dx = x-9\ln|x-2|+16\ln|x-3|+C,$$

$$\int \frac{1}{x^2-x+1}dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+C,$$

$$\int \frac{x^4+6x^2-2x+5}{(x^2+4)(x-1)}dx = \frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}\ln(x^2+4)-\frac{1}{2}\operatorname{Arctan}\frac{x}{2}+2\ln|x-1|+C$$

$$\int \frac{1}{(x-1)^8(x-2)}dx = \frac{1}{7(x-1)^7}+\ldots+\frac{1}{2(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}+\ln\frac{|x-2|}{|x-1|}+C$$

$$\int \frac{2x^3+5x^2+6x+3}{x^2+x+1}dx = x^2+3x+\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C,$$

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2(x^2-1)}dx = -\frac{x}{4(x^2+1)}-\frac{1}{2}\operatorname{Arctan}x+\frac{1}{8}\ln\frac{|x-1|}{|x+1|}+C,$$

$$\int \frac{3x+4}{(x^2+2x+3)^2}dx = -\frac{3}{2}\frac{1}{x^2+2x+3}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+\frac{x+1}{4(x^2+2x+3)}+C$$

$$\int \frac{\alpha x+\beta}{(x^2-2x+5)^2}dx = -\frac{\alpha}{2}\frac{1}{x^2-2x+5}+\frac{\alpha+\beta}{16}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x-1}{2}\right)+\frac{\alpha+\beta}{8}\frac{x-1}{x^2-2x+5}+C$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

$$\int \frac{3+x}{x^3-x^2+x-1}dx = 2\ln|x-1| - \ln(x^2+1) - \operatorname{Arctan} x + C,$$

$$\int \frac{2}{(x-1)^4(x^2+1)}dx = -\frac{1}{3(x-1)^3} + \frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2}\operatorname{Arctan} x + C,$$

$$\int \frac{1}{x^n(x-1)} = \ln|x-1| - \ln|x| + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i x^i} + C.$$

Exercice A.2.8
TD8-Exercice5

Exercice A.2.9 TD8-Exercice6

1. Calculer une primitive de la fraction rationnelle $\dfrac{1}{1+x^3}$.

   Réponse : $F(x) = \dfrac{\ln|x+1|}{3} - \dfrac{\ln(x^2-x+1)}{6} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{Arc\,tan}\left(\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C.$

2. En vous inspirant de la façon dont on a calculé une primitive de $\dfrac{1}{(1+x^2)^2}$, calculer une primitive de $\dfrac{1}{(1+x^3)^2}$

   Réponse : $\frac{2}{3}F(x) + \dfrac{x}{3(1+x^3)}$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.10 TD8-Exercice7

1. Calculer
$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x} dx,\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx,\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx$$
Réponses : $\frac{1}{4},\ 1-\frac{\pi}{4},\ \frac{1}{2}$.
2. On rappelle que
$$\cos x = \frac{1-\tan^2 \frac{x}{2}}{1+\tan^2 \frac{x}{2}},\ \sin x = \frac{2\tan \frac{x}{2}}{1+\tan^2 \frac{x}{2}}$$
On pose $t = \tan \frac{x}{2}$, utiliser ce changement de variable pour calculer :
$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x},\ \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x},\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$$
Réponses : $\ln(2+\sqrt{3}),\ \frac{1}{2}\ln 3,\ \frac{\sqrt{3}\pi}{9}$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Annexe B
Exemples

B.1 Exemples du chapitre 8

Exemple B.1.1 Division euclidienne

$$
\begin{array}{rcccc|c}
A: & 2X^3 & -X^2 & -X & +2 & X^2-1 \\
\cline{6-6}
-BQ_1: & -2X^3 & & 2X & & 2X-1 \\
\cline{1-5}
R_1: & & -X^2 & +X & +2 & \\
-BQ_2: & & X^2 & & -1 & \\
\cline{1-5}
R: & & & X & +1 &
\end{array}
$$

On obtient donc

$$2X^3 - X^2 - X + 2 = (X^2-1)(2X-1) + X + 1.$$

Retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exemple B.1.2 Division suivant les puissances croissantes

Soient les polynômes $A = 2 - X + X^2 - 3X^3$, $B = 1 - X^2$ et effectuons la division suivant les puissances croissantes de façon à pouvoir mettre X^4 en facteur dans le reste.

$$
\begin{array}{rcccccc|c}
A: & 2 & -X & +X^2 & -3X^3 & & & 1-X^2 \\
\cline{8-8}
-BQ_1: & -2 & & 2X^2 & & & & 2-X+3X^2-4X^3 \\
\cline{1-7}
R_1: & & -X & +3X^2 & -3X^3 & & & \\
-BQ_2: & & +X & & -X^3 & & & \\
\cline{1-7}
R_2: & & & 3X^2 & -4X^3 & & & \\
-BQ_3: & & & -3X^2 & & +3X^4 & & \\
\cline{1-7}
R_3: & & & & -4X^3 & +3X^4 & & \\
-BQ_4: & & & & +4X^3 & & -4X^5 & \\
\cline{1-7}
R_4: & & & & & 3X^4 & -4X^5 &
\end{array}
$$

On obtient donc

$$2 - X + X^2 - 3X^3 = (1 - X^2)(2 - X + 3X^3 - 4X^3) + X^4(3 - 4X)$$

Retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Annexe C
Documents

C.1 Documents du chapitre 8

Document C.1.1 Le Polynôme nul

Il est gênant que le polynôme nul n'ait pas de degré, car on rencontre beaucoup ce polynôme. Nous verrons que cela oblige dans beaucoup d'énoncés de théorèmes, à distinguer les cas polynôme nul ou non nul. Pour éviter cela, on adopte classiquement la convention ci-dessous :

$$\deg(\mathbf{0}) = -\infty$$

avec les règles de calcul :

$$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \quad -\infty < \boldsymbol{n}, \quad -\infty + \boldsymbol{n} = -\infty, \quad -\infty + (-\infty) = -\infty.$$

Insistons bien sur le fait que cette convention ne change rien à l'essentiel. Elle permet seulement, mais cela en vaut la peine, de simplifier plusieurs énoncés importants.
Insistons aussi sur le fait qu'il n'est pas possible de convenir du fait que le degré du polynôme nul est 0 : cela conduit à des contradictions. Pour connaître le degré d'un polynôme constant, R, il faut savoir si R est nul ou pas. Tout ce que l'on peut dire sinon, c'est que : $\deg(R) \leq n$, quel que soit n dans $\mathbb{N}$.
Voyons par exemple sur l'addition des polynômes la convention précédente. Elle nous permet d'énoncer un résultat sans avoir à distinguer dans l'énoncé les cas où l'un des trois polynômes A, B ou $A+B$ est nul.

Proposition C.1.1. *Soient A et B deux polynômes de $\mathbf{K}[X]$, alors*

$$\deg(A+B) \leq \max(\deg(A), \deg(B)).$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Démonstration - Si aucun des polynômes n'est nul, la démonstration est faite dans le paragraphe du cours. Il reste à examiner les cas où l'un des trois polynômes est nul. Si A est nul, alors $\deg(A) = -\infty$ et $A + B = B$, de sorte que la proposition est bien vérifiée avec les deux règles de calcul :

$$-\infty + \deg(B) = -\infty \qquad \text{et} \qquad -\infty \leq \deg(B).$$

Enfin, si $A + B$ est nul, on a bien encore dans tous les cas

$$-\infty \leq \max(\deg(A), \deg(B)).$$

Retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Index des concepts

Le gras indique un grain où le concept est défini ; l'italique indique un renvoi à un exercice ou un exemple, le gras italique à un document, et le romain à un grain où le concept est mentionné.

Solution de l'exercice A.1.1

Pour l'addition, les propriétés sont évidentes. La multiplication est commutative car $(x,y)\times(x',y')=(x',y')\times(x,y)$, son élément neutre est bien $(1,0)$ puisque $(x,y)\times(1,0)=(x,y)$, l'élément inverse de (x,y) est bien $(\frac{x}{x^2+y^2},-\frac{y}{x^2+y^2})$ puisque $(x,y)\times(\frac{x}{x^2+y^2},-\frac{y}{x^2+y^2})=(1,0)$. Enfin

$$(x,y)\times((x',y')+(x'',y''))=(x,y)\times(x'+x'',y'+y'')=(x(x'+x'')-y(y'+y''),x(y'+y'')+y(x'+x''))$$

et

$$(x,y)\times(x',y')+(x,y)\times(x'',y'')=(xx'-yy',xy'+yx')+(xx''-yy'',xy''+yx'')$$

d'où la distributivité du produit par rapport à l'addition.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.2

- $z+z' = (x+x')+i(y+y')$,
  $zz' = (x+iy)(x'+iy') = xx' + i^2 yy' + i(xy'+x'y) = xx' - yy' + i(xy'+x'y)$.
- $(x+iy)(\frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}) = 1$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.3

Si l'on résout $(x+iy)(x+iy)=a$, on obtient $x^2-y^2+i2xy=a$, ce qui donne $x^2-y^2=a$ et $xy=0$. Puisque $a<0$, la seule solution (x et y sont réels) est donnée par $x=0$ et $y=\pm i\sqrt{-a}$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l’exercice A.1.4

$(z+z')^3 = z^3 + 3z^2z' + 3zz'^2 + z'^3$ et $(z+z')^4 = z^4 + 4z^3z' + 6z^2z'^2 + 4zz'^3 + z'^4$.

Retour à l’exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.5

On multiplie numérateur et dénominateur par la quantié conjuguée du dénominateur. On obtient ainsi $|2z-1|^2$ au dénominateur et

$$(2z+1)(2\bar{z}-1) = 4|z|^2 + 2(\bar{z}-z) - 1 = 4|z|^2 - 1 - 4i\,\mathrm{Im}\,z$$

au numérateur.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.6

On a $|z| \leq |z - z'| + |z'|$ et $|z'| \leq |z - z'| + |z|$, d'où $-|z - z'| \leq |z| - |z'| \leq |z - z'|$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.7

$\mathrm{Arg}\,(z \times \frac{1}{z}) \equiv \mathrm{Arg}\,z + \mathrm{Arg}\,\frac{1}{z}\ [2\pi]$. On remarque alors que $\mathrm{Arg}\,(z \times \frac{1}{z}) = \mathrm{Arg}\,1, \equiv 0\ [2\pi]$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.8

Voir la figure C.1.1.

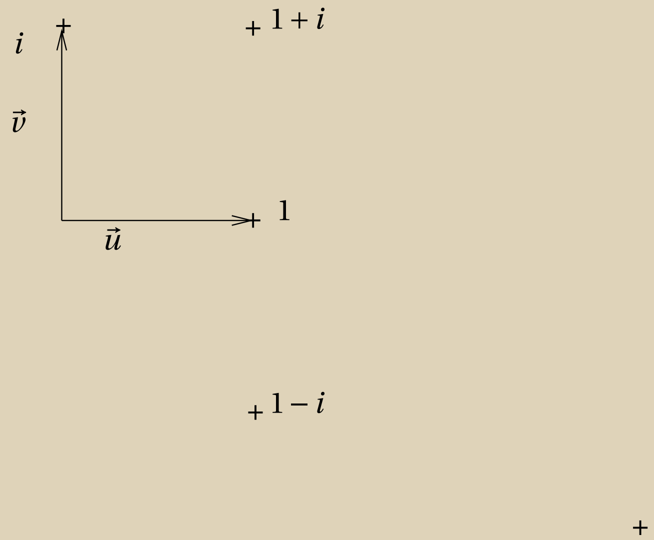

FIGURE C.1.1 – Représentation graphique de complexes

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.9

Si on pose $\theta = \operatorname{Arg} z$, alors on a $\operatorname{Arg}(z)^n = \operatorname{Arg}(\cos n\theta + i \sin n\theta)$, d'où $\operatorname{Arg}(z)^n \equiv n\theta\ [2\pi]$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.10

$z^4 + z^2 = z^2(z^2 + 1)$, 0 est racine double, i est racine simple, $-i$ est racine simple.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.11

$z^3 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$ et $\operatorname{Arg} z = \frac{2k\pi}{3}$, $k = 0, 1, 2$. On a donc les trois racines

$z_1 = 1$, $z_2 = j = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_3 = j^2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (qui est bien le carré de j par la formule de De Moivre). Voir la figure C.1.2. On voit aisément que z_3 est le conjugué de z_2 et que $z_2 + z_3 = 2\cos\frac{2\pi}{3} = -1$.

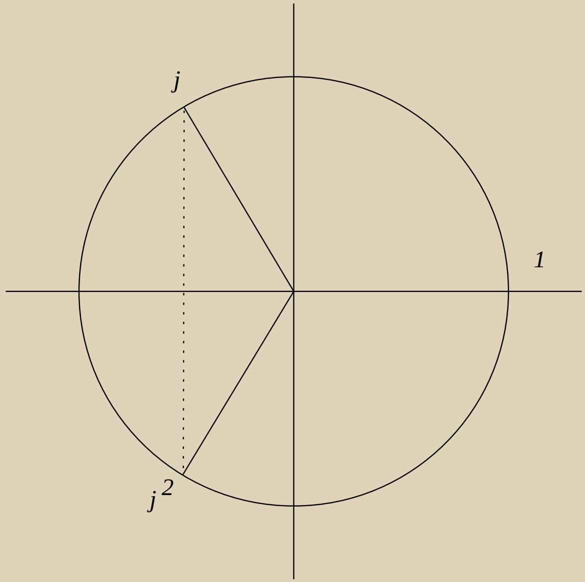

FIGURE C.1.2 – Racines cubiques de l'unité

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.12

$|i| = 1, \operatorname{Arg} i = \frac{\pi}{2}$, les racines carrées de i doivent vérifier :

$|z| = 1$ et $\operatorname{Arg} z = \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k = 0, 1.$

D'où les deux racines

$z_0 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$z_1 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

On a bien sûr $z_1 = -z_0$.

On calcule de la même manière les racines carrées de j.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.13

On cherche $z = a + ib$ tel que $z^2 = -5 + 12i$, on doit donc avoir :

$(a^2 - b^2 = -5, ab = 6) \Leftrightarrow (ab = 6, a^4 + 5a^2 - 36 = 0) \Leftrightarrow (ab = 6, a^2 = 4) \Leftrightarrow ((a = 2, b = 3) \text{ ou } (a = -2, b = -3))$

On obtient donc $z_0 = 2 + 3i, z_1 = -2 - 3i$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.14

- si $\Delta > 0$, $z_0 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, $z_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- si $\Delta < 0$, $z_0 = \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$, $z_1 = \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Or Si $\Delta > 0$ les 2 racines carrées de Δ sont $r_0 = \sqrt{\Delta}$ et $r_1 = -\sqrt{\Delta}$.
Si $\Delta < 0$ les 2 racines carrées de Δ sont $r_0 = i\sqrt{-\Delta}$ et $r_1 = -i\sqrt{-\Delta}$.
Ce qui termine la démonstration.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.15

On calcule $\Delta = -5+12i$, on a vu dans l'exercice A.1.13 que les deux racines carrées de Δ sont $r_1 = 2+3i$, $r_2 = -2-3i$, donc

$$z_1 = \frac{i+r_1}{2} = \frac{4i+2}{2} = 2i+1, z_2 = \frac{i+r_2}{2} = \frac{-2-2i}{2} = -1-i$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.16

Ceci se déduit strictement de la proposition du paragraphe Argument d'un nombre complexe. En effet l'argument du produit est la somme des arguments et l'argument de l'inverse est l'opposé de l'argument.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.17

Faites la somme puis la différence de

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta,$$
$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta.$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.18

$$\sin^5\theta = \frac{1}{(2i)^5}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})^5.$$

Les coefficients du binôme de Newton sont alors $1, 5, 10, 10, 5, 1$. Il vous reste à finir le calcul ...

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.19

Puisque les coefficients sont complexes, le polynôme est défini sur $\mathbb{C}$. Son degré est évidemment 2.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.20

$$(a_0+a_1x+a_2x^2)(b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3) = a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2$$
$$+(a_0b_3+a_1b_2+a_2b_1)x^3+(a_1b_3+a_2b_2)x^4+a_2b_3x^5$$

Remarquons que si l'on utilise la formule générale

$$c_k=\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$$

pour $k=4$ pa exemple on obtient

$$c_4 = a_0b_4+a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1+a_4b_0$$

mais les coefficients b_4, a_3, a_4 sont nuls.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.21

La contraposée de

$$(AB = 0) \Rightarrow (A = 0) \text{ ou } (B = 0)$$

est

$$(A \neq 0) \text{ et } (B \neq 0) \Rightarrow (AB \neq 0).$$

Supposons donc que A et B soient des polynômes non nuls. Alors leur degré est défini et ils s'écrivent

$$A = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n,\ B = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$$

avec $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$. Le coefficient de x^{m+n} dans le produit AB est donné par

$$c_{n+m} = \sum_{i=0}^{n+m} a_i b_{k-i} = a_0 b_{n+m} + \ldots + a_n b_m + \ldots + a_{n+m} b_0.$$

Or dans cette somme, seul le terme $a_n b_m$ est non nul. En effet dans les termes qui le précèdent, ce sont les coefficients $(b_j)_{j=n+m,\ldots,m+1}$ qui sont nuls et dans les termes qui le suivent ce sont les termes $(a_i)_{i=n+1,\ldots,n+m}$ qui sont nuls. Le coefficient de x^{n+m} est donc non nul et le polynôme AB est donc non nul.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.22

Vous venez de voir que le degré de la somme de deux polynômes A et B est tel que

$$deg(A+B) \leq \max\{deg(A), deg(B)\}.$$

Donc, si $deg(A) \leq n$ et $deg(B) \leq n$, alors

$$\max\{deg(A), deg(B)\} \leq n$$

et donc $A+B \in \mathbf{K}_n[X]$. Si l'un des deux polynômes est nul, par exemple A, alors $A+B = A \in K_n[X]$. Il est évident que $deg(\alpha A) = deg(A)$ si $\alpha \neq 0$ et que $\alpha A = 0$ si $\alpha = 0$. Dans tous les cas on obtient un polynôme de $\mathbf{K}_n[X]$.

Par contre deg(AB) =deg$A$+deg$B$ entraine seulement que $AB \in K_{2n}[X]$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.23

$$\bar{A} = 3X^2 + (-2i - 1)X - i.$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.24

$$X^4 - 16 = (X^2 - 4)(X^2 + 4) = (X - 2)(X + 2)(X^2 + 4).$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.25

Si D divise A et B cela signifie qu'il existe deux polynômes S et T tels que

$$A = DS,\ B = DT$$

d'où

$$DS = DTQ + R$$

soit

$$R = D(S - TQ)$$

ce qui montre bien que D divise R.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.26

Avant d'effectuer la division développer le deuxième polynôme. Si vous ne faites pas d'erreurs de calcul, vous trouverez

$$X^4 + 1 = (X^2 + 1)(X - 1)^2 + (2X^3 - 2X^2 + 2X).$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.27

- Tout d'abord
$$(X^2+1)(X-1)^2 = X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1.$$
Le résultat donne
$$1 + X^4 = (1-2X+2X^2-2X^3+X^4)(1+2X) + X^2(2-2X+4X^2-2X^3),$$
ce qui n'a rien à voir avec la division euclidienne ...
- On a
$$2 + Y + Y^2 = (2 - Y + 2Y^2)(1+Y) - 2Y^3.$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.28

Si un polynôme A de degré 1 admettait un diviseur D qui ne soit ni un polynôme constant, ni βA, on aurait

$$A = DQ$$

et Q ne pourrait pas être un polynôme constant. A serait donc le produit de deux polynômes de degré strictement positif dont le degré serait supérieur ou égal à 2, ce qui est impossible. A est donc irréductible.

Puisque vous savez qu'un polynôme de degré 2 a deux racines réelles ou complexes, distinctes ou confondues, il n'est donc jamais irréductible dans $\mathbb{C}[X]$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.29

Un polynôme de degré 2 a au plus deux racines distinctes. Il ne peut donc pas s'annuler en trois points distincts. Un polynôme de degré 3 à coefficients complexes qui s'annule en ces trois points est

$$A = (X - i)(X - 4 - i)(X - 3).$$

Tout polynôme qui admet A comme diviseur s'annule en (x_1, x_2, x_3). Un polynôme de degré 4 serait par exemple

$$B = X\,A.$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.30

Ce pôlynôme s'écrit

$$A = (X^2 + 2)(X^2 + 1)$$

soit, puisque les deux polynômes ont des racines complexes évidentes

$$A = (X - \sqrt{2}i)(X + \sqrt{2}i)(X - i)(X + i).$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.31

Un polynôme à coefficients réels est tel que si un nombre complexe est racine de ce polynôme, son conjugué est aussi racine. Donc si x_1 est racine d'un polynôme A à coefficients réels, $\bar{x}_1$ est racine de A. Le polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de plus petit degré qui a pour racines (x_1, x_2, x_3), s'écrit donc

$$A = \alpha(X - x_1)(X - \bar{x}_1)(X - x_2)(X - x_3)$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$. C'est donc un polynôme de degré 4 et non pas 3 ! Bien vérifier que bien que x_1 et $\bar{x}_1$ ne sont pas réels, les coefficients de A sont réels.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.32

Ce pôlynôme s'écrit

$$A = (X^2 + 2)(X^2 + 1)(X - 1)$$

et puisque les deux premiers polynômes n'ont pas de racines réelles, on ne peut factoriser davantage dans $\mathbb{R}[X]$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.33

Puisque

$$A = X^5(X^2 + 3X + 5)$$

la racine $x = 0$ est de multiplicité 5 et donc $A^{(k)}(0) = 0$ pour $k = 0, \dots, 4$ et $A^{(5)}(0) \neq 0$. Puisque le polynôme A est de degré 7, alors $A^{(k)}(x) = 0$ pour $k > 7$, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, et donc en particulier pour $x = 0$. Pour ce qui est de $A^{(6)}(0)$ et $A^{(7)}(0)$, vous pouvez utiliser la formule de Taylor on obtient $A^{(6)}(0) = 6! \times 3$, $A^{(7)}(0) = 7!$ et plus précisément $A^{(5)}(0) = 5! \times 5$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.34

On voit que $x = 1$ est racine du numérateur et du dénominateur. On peut donc factoriser par $x - 1$ le numérateur et le dénominateur :

$$F(x) = \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{3x^2 - x - 2} = \frac{(x-1)(x^2+1)}{(x-1)(3x+2)}$$

ce qui donne, après simplification

$$F(x) = \frac{x^2+1}{3x+2}.$$

Puisque $x = -\frac{2}{3}$ n'est pas racine du numérateur, cette fraction est irréductible alors que la fraction de l'énoncé n'était pas irréductible.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.35

On a calculé dans l'exercice A.1.26 la division euclidienne du numérateur par le dénominateur et on a trouvé

$$\frac{x^4+1}{(x^2+1)(x-1)^2} = 1 + \frac{2x^3-2x^2+2x}{(x^2+1)(x-1)^2}.$$

La partie entière est donc le polynôme constant 1.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.36

On a

$$F = E + \frac{P_0}{Q},\ \hat{F} = \hat{E} + \frac{\hat{P}_0}{\hat{Q}}$$

ce qui donne

$$F + \hat{F} = E + \hat{E} + \frac{P_0}{Q} + \frac{\hat{P}_0}{\hat{Q}}.$$

Si l'on réduit au même dénominateur la somme des deux fractions :

$$F + \hat{F} = E + \hat{E} + \frac{P_0\hat{Q} + \hat{P}_0 Q}{Q\hat{Q}}.$$

Or $deg(P_0) < deg(Q)$ et $deg(\hat{P}_0) < deg(\hat{Q})$, d'où

$$deg(P_0\hat{Q} + \hat{P}_0 Q) \leq max\{deg(P_0\hat{Q}), deg(\hat{P}_0 Q\} < deg(Q) + deg(\hat{Q})$$

soit

$$deg(P_0\hat{Q} + \hat{P}_0 Q) < deg(Q\hat{Q}).$$

On a donc la bonne décomposition pour calculer la partie entière de $F + \hat{F}$, ce qui montre la proposition.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.37

On effectue le changement de variable $y = x - 1$, et on obtient

$$F(x) = \frac{y^2 + y + 2}{y^3(y+1)}.$$

Il reste à effectuer la division suivant les puissances croissantes de $y^2 + y + 2$ par $y + 1$ de façon à pouvoir mettre y^3 en facteur dans le reste, ce qui a été fait dans l'exercice A.1.27. On a obtenu

$$2 + y + y^2 = (2 - y + 2y^2)(1 + y) - 2y^3$$

ce qui donne

$$F(x) = \frac{2 - y + 2y^2}{y^3} - \frac{2}{y+1},$$

soit

$$F(x) = \frac{2}{y^3} - \frac{1}{y^2} + \frac{2}{y} - \frac{2}{y+1}.$$

On peut alors revenir à x, ce qui donne

$$F(x) = \frac{2}{(x-1)^3} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1} - \frac{2}{x}.$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.38

La décomposition en éléments simples est de la forme :

$$\frac{2x+3}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2}.$$

On multiplie par $(x-3)$ ce qui donne

$$\frac{2x+3}{x-2} = A + \frac{B(x-3)}{x-2},$$

et on fait $x=3$

$$9 = A.$$

On fait de même pour B et on trouve $B=-7$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.39

La décomposition en éléments simples est de la forme :

$$\frac{2x+1}{(x-2)^3} = \frac{A}{(x-2)^3} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x-2}.$$

On multiplie par $(x-2)^3$ et on fait $x = 2$ ce qui donne

$$A = 5.$$

Par identification, on obtient

$$5 + B(x-2) + C(x-2)^2 = 2x + 1.$$

Ce qui donne aisément $C = 0$ (coefficient de x^2) puis $B = 2$ (coefficient de x).

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.40

On a déjà calculé dans le cours la décomposition de cette fraction dans $\mathbb{C}(X)$, en particulier la partie entière a déjà été déterminée. On doit donc maintenant décomposer la fraction F_1 dans $\mathbb{R}(X)$

$$F = 1 + 2F_1,\ F_1 = \frac{X^3 - X^2 + X}{(X^2+1)(X-1)^2}.$$

$$F_1(x) = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{c}{x-1} + \frac{d}{(x-1)^2}. \tag{C.1.1}$$

Le calcul de d est inchangé par rapport à celui effectué dans $\mathbb{C}$ dans le cours. On utilise d'autres idées pour calculer a, b, c.

– Multipliant les deux membres de (C.1.1) par x et faisant tendre x vers l'infini, on a

$$1 = a + c.$$

– Faisant $x = 0$ dans les deux membres de (C.1.1) on obtient

$$0 = b - c + d.$$

– Réduisant les deux membres de (C.1.1) au même dénominateur, on obtient l'égalité

$$\frac{x^3 - x^2 + x}{(x^2+1)(x-1)^2} = \frac{(ax+b)(x-1)^2 + (x^2+1)(cx-c+d)}{(x^2+1)(x-1)^2}$$

et l'identification des coefficients de x au numérateur donne

$$1 - a - 2b + c.$$

On a ainsi trois équations à trois inconnues et la résolution de ces trois équations donne aisément $b = 0$ puis $c = d = \frac{1}{2}$ et enfin $a = \frac{1}{2}$.

En comparant à ce qui a été trouvé dans $\mathbb{C}(X)$, on peut vérifier que

$$\frac{\frac{x}{2}}{x^2+1} = \frac{\frac{1}{4}}{x-i} + \frac{\frac{1}{4}}{x+i}.$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.41

La décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ est de la forme :

$$\frac{2x^3+x^2+3x+1}{(x^2+1)(x^2+2)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2}.$$

Par identification, on obtient

$$(Ax+B)(x^2+2)+(Cx+D)(x^2+1) = 2x^3+x^2+3x+1.$$

On identifie les coefficients des puissances de x, ce qui donne un système d'équations. Les équations

$$A+C=2,\ 2A+C=3,$$

donnent

$$A=C=1.$$

Les équations

$$B+D=1,\ 2B+D=1,$$

donnent

$$B=0,\ D=1.$$

La décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ est de la forme

$$\frac{2x^3+x^2+3x+1}{(x^2+1)(x^2+2)} = \frac{A}{x+i} + \frac{B}{x-i} + \frac{C}{x+\sqrt{2}i} + \frac{D}{x-\sqrt{2}i}.$$

Les coefficients peuvent s'obtenir en multipliant des deux côtés par l'un des dénominateurs puis à prendre la valeur de x qui annule ce dénominateur. Ainsi, en multipliant par $(x-i)$ puis en posant $x=-i$, on obtient

$$\frac{2i-1-3i+1}{(-2i)(-1+2)} = A$$

soit $A = 1/2$. On peut calculer de la même manière $C = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} i$. En utilisant l'unicité de la décomposition et en prenant le conjugué de la décomposition, on obtient

$$A = \bar{B},\ C = \bar{D}.$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.42

On utilise la décomposition en éléments simples de l'exercice A.1.38 et on intègre, ce qui donne :

$$9\ln|x-3| - 7\ln|x-2| + Cte.$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.43

On utilise la décomposition en éléments simples de l'exercice A.1.39 et on intègre, ce qui donne :

$$-\frac{5}{2}\frac{1}{(x-2)^2}-2\frac{1}{x-2}+Cte.$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.44

On utilise la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de l'exercice A.1.41 et on intègre, ce qui donne :

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\frac{1}{2}\ln(x^2+2)+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Arc}\tan\frac{x}{\sqrt{2}}+Cte.$$

Retour à l'exercice ▲

Voir les paragraphes : De Moivre-formuleet Binôme de Newton.

Retour à l'exercice ▲

Il est facile de montrer que

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

En utilisant la formule de De moivre on peut donc obtenir les modules et les arguments de $(1+i)^3$, $(1+i)^4$ et $(1+i)^n$. L'autre membre est obtenu par le binôme de Newton puis par identification des parties réelles et imaginaires.

Retour à l'exercice ▲

Regroupez les puissances paires et les puissances impaires du binôme de Newton en deux sommes différentes et utilisez le fait que

$$i^{2p} = (-1)^p,\ i^{2p+1} = (-1)^p i.$$

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe : Binôme de Newton et calculer deux binômes bien particuliers !

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 2, Exercice A.2.1

Que pensez-vous de $2 = 1 + 1$ et $0 = 1 - 1$? C'est la clé du résultat.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 3, Exercice A.2.1

Que vaut $A+B+C$? On rappelle que $1+j=-j^2$

Retour à l'exercice ▲

$-j^2 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$, en déduire les parties réelles et imaginaires de $(1+j)^n$, identifier avec les parties réelles et imaginaires de $A + Bj + Cj^2$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1, Exercice A.2.2

La définition d'une application injective (Voir le paragraphe est valable même si les espaces sont complexes.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 1, Exercice A.2.2

Résolvez $f(z_1) = f(z_2)$ pour z_1 et z_2 dans $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$. Vous obtiendrez facilement l'injectivité de f.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2, Exercice A.2.2

Vous pouvez raisonner par l'absurde ce qui permet d'avoir une démonstration très courte.

Retour à l'exercice ▲

Quelle est la définition de l'image d'une application ? (Voir le paragraphe : .)

Retour à l'exercice ▲

Pour montrer que deux ensembles sont égaux on procède souvent par double inclusion. L'une des inclusions est évidente, laquelle ?

Retour à l'exercice ▲

On a montré dans la question précédente que $\operatorname{Im} f \subset \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Pour l'autre inclusion, il faut montrer que pour tout élément de $t \in \operatorname{Im} f \subset \mathbb{C} \setminus \{1\}$ il existe $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$ tel que $t = f(z)$.

Retour à l'exercice ▲

Résolvez $t = f(z)$, ce qui va vous permettre de construire explicitement z et de voir que z appartient bien à l'ensemble de départ de f.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 4, Exercice A.2.2

Il suffit de faire le calcul, il n'y a aucune difficulté particulière. Partez du membre de gauche et réduisez au même dénominateur.

Retour à l'exercice ▲

Pour ceux qui ont du mal, revoyez le carré de la somme des modules dans le paragraphe Nombre complexe - conjugué et module, puis comparez la partie réelle de iz avec la partie imaginaire de z.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 5, Exercice A.2.2

Il faut déjà démontrer que $f_1 : \mathbb{R} \to U \setminus \{1\}$ puis que f est surjective. Utiliser la question précédente pour montrer que si z est réelle alors $|f(z)| = 1$ puis la deuxième question pour finir la première partie.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 5, Exercice A.2.2

Pour la surjectivité, on sait déjà que pour $\forall t \in U \setminus \{1\}, \exists z, f(z) = t$, il reste à montrer que z est réel. Comment caractériser un nombre réel ?

Retour à l'exercice ▲

Utiliser la question 4).

Retour à l'exercice ▲

Si $t \in U \setminus \{1\}$, alors $|f(z)| = 1$, donc $\operatorname{Im} z = 0$.

Donc z est réel.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 6, Exercice A.2.2

Il faut montrer que $f_2 : P \to D$, que f_2 est injective (vous l'avez déjà montré, où ?) et enfin que f_2 est surjective.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 6, Exercice A.2.2

Utiliser la quatrième question pour montrer aisément que $f_2 : P \to D$. Pour la surjectivité, utilisez le calcul du z tel que $t = f(z)$ de la cinquième question et déduisez en $\operatorname{Im} z$. Que faut-il alors démontrer ?

Retour à l'exercice ▲

Résolvez comme un trinôme du second degré.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 1, Exercice A.2.3

Pour vérifier votre résultat, vous pouvez utiliser la factorisation :

$$1 - z^3 = (1 - z)(1 + z + z^2)$$

et les racines cubiques de l'unité données dans le paragraphe : Racines nièmes de l'unité.

Retour à l'exercice ▲

Résolvez comme un trinôme du second degré.

Retour à l'exercice ▲

Les racines sont : $\dfrac{-1+i\sqrt{7}}{2}$ et $\dfrac{-1-i\sqrt{7}}{2}$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 3, Exercice A.2.3

Revoir le paragraphe Racines d'une équation du second degré. Attention, ici les coefficients sont complexes donc le discriminant est un nombre complexe dont il faut calculer les racines carrées.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 3, Exercice A.2.3

Le discriminant est : $8+6i=9+6i-i^2=(3+i)^2$. Si vous ne voyez pas "l'astuce", vous résolvez $(a+ib)^2=8+6i$ comme vous le faisiez en terminal. Les solutions sont alors

$$z_1=\frac{5+i}{1-i}=2+3i,\ \ z_2=\frac{2}{1-i}=1+i.$$

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe : Racines nièmes de l'unité.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 4, Exercice A.2.3

$$z^3 = (2)^3(\cos\pi + i\sin\pi)$$

d'où les racines ont pour module 2 et pour argument

$$\operatorname{Arg} z = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3},\ k = 0, 1, 2.$$

Elles s'écrivent

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}\right),\ z_2 = 2(\cos\pi + \sin\pi),\ z_3 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + \sin\frac{5\pi}{3}\right),$$

expressions que vous pouvez encore simplifier ... Représentez les solutions sur un cercle du plan complexe de rayon 2.

Retour à l'exercice ▲

$z_1 = -2j^2, z_2 = -2, z_3 = -2j$

Retour à l’exercice ▲

Voir le paragraphe : Racines nièmes de l'unité. Calculez le module et l'argument du membre de droite.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 5, Exercice A.2.3

Le module de $64 - 64i\sqrt{3}$ est 128 et l'argument est $-\frac{\pi}{3}$ à $2k\pi$ près, soit

$$\operatorname{Arg}(64 - 64i\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{3}$$

(pour la définition de Arg z, voir le paragraphe Argument d'un nombre complexe.

$$z^7 = (2)^7(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3})$$

A vous de donner les 7 racines de l'équation.

Retour à l'exercice ▲