MT21 A99 Devoir 1 - corrigé

Exercice 1
Par un raisonnement "logique" (mais évidemment faux), on peut montrer que toute application est injective. Voici le raisonnement :

$$(f(x) = f(x')) \Rightarrow \{(x = x') \text{ ou } (x \neq x')\}$$

est une proposition qui est toujours vraie. D'autre part, on peut montrer que cette implication est équivalente à

$$\{(f(x) = f(x')) \Rightarrow (x = x')\} \text{ ou } \{(f(x) = f(x')) \Rightarrow (x \neq x')\}.$$

Or l'implication

$$(f(x) = f(x')) \Rightarrow (x \neq x')$$

est fausse puisque sa contraposée

$$(x = x') \Rightarrow (f(x) \neq f(x'))$$

est fausse. Donc la proposition

$$(f(x) = f(x')) \Rightarrow (x = x')$$

est toujours vraie.
Où est l'erreur ??????

Corrigé
L'implication $(f(x) = f(x')) \Rightarrow (x \neq x')$ n'est pas fausse quelle que soit f. Par exemple la fonction $f(x) = x^2$ ...

Exercice 2
Soient A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$$

et que

$$\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}.$$

Corrigé
On montre l'inégalité dans les deux sens :

- On a montré dans le TD2 que si $C \subset D$, alors $\sup C \leq \sup D$, d'où

$$A \subset A \cup B \text{ et } B \subset A \cup B \Rightarrow \sup A \leq \sup(A \cup B) \text{ et } \sup B \leq \sup(A \cup B)$$

d'où

$$\max\{\sup A, \sup B\} \leq \sup(A \cup B).$$

- On a

$$\forall x \in A \cup B, x \leq \max\{\sup A, \sup B\}$$

donc $\max\{\sup A, \sup B\}$ est un majorant de $A \cup B$. Puisque $\sup(A \cup B)$ est le plus petit des majorants de $A \cup B$, on a

$$\sup(A \cup B) \leq \max\{\sup A, \sup B\}.$$

La démonstration est analogue pour $\inf(A \cup B)$.

2. On définit le sous-ensemble $A+B$ de $\mathbb{R}$ par
$$A+B=\{a+b, a \in A, b \in B\}.$$
Montrer que
$$\sup(A+B)=\sup A+\sup B.$$
Corrigé
On montre l'inégalité dans les deux sens :
   - Par définition de la borne supérieure, on a
   $$\forall (a+b) \in A+B, a \in A, b \in B, a \leq \sup A, b \leq \sup B$$
   d'où
   $$a+b \leq \sup A+\sup B.$$
   - Puisque
   $$\forall a \in A, \forall b \in B, a+b \leq \sup(A+B),$$
   $$\forall a \in A, a \leq \sup(A+B)-b$$
   ce qui montre que $\sup(A+B)-b$ est un majorant de A, donc
   $$\sup A \leq \sup(A+B)-b.$$
   On a alors
   $$\forall b \in B, b \leq \sup(A+B)-\sup A$$
   et donc
   $$\sup B \leq \sup(A+B)-\sup A,$$
   soit
   $$\sup A+\sup B \leq \sup(A+B).$$

3. On suppose que $A \cap B \neq \emptyset$, montrer que
$$\max\{\inf A, \inf B\} \leq \inf(A \cap B) \leq \sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}.$$
Donner un exemple où ces inégalités sont strictes.

Corrigé
Le résultat découle immédiatement de $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$.
On a des inégalités strictes avec
$$A=[1,2] \cup [5,7] \cup [9,10] \text{ et } B=[3,4] \cup [6,8] \cup [11,12].$$

Exercice 3
Traiter la question 3. de l'**exercice 7** du **TD2** .

Corrigé

$$(1+j)^n=1+C_n^1 j+C_n^2 j^2+\ldots+C_n^{n-1} j^{n-1}+j^n.$$

Puisque $j = e^{i2\pi/3}$, on a

$$1 = j^3 = j^6 = \ldots, j = j^4 = j^7 = \ldots, j^2 = j^5 = j^8 = \ldots$$

d'où

$$(1+j)^n = A + Bj + Cj^2$$

avec

$$A = 1 + C_n^3 + C_n^6 + \ldots, B = C_n^4 + C_n^7 + \ldots, C = C_n^2 + C_n^5 + \ldots$$

On a aussi

$$(1+j)^n = A + B(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) + C(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = A - \frac{B+C}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}(B-C).$$

On peut encore écrire (grâce à la formule de Moivre)

$$(1+j)^n = (1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^n = (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^n = \cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3}.$$

Enfin, si l'on fait $x = 1$ dans le développement du binôme de Newton $(1+x)^n$, on obtient

$$2^n = A + B + C.$$

La résolution des trois équations à trois inconnues suivantes:

$$\begin{cases} A - \frac{B+C}{2} = \cos\frac{n\pi}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}(B-C) = \sin\frac{n\pi}{3} \\ A + B + C = 2^n \end{cases}$$

donne les formules demandées.

Exercice 4
Traiter l'**exercice 9** du **TD3**.

Corrigé

1. On va montrer que

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N, n \geq N \;\Rightarrow\; |y_n - l| \leq \varepsilon.$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l \;\Rightarrow\; \exists N_1, n \geq N_1 \Rightarrow |x_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On écrit

$$y_n - l = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} - l = \frac{x_1 + \ldots + x_n - nl}{n} = \frac{(x_1 - l) + \ldots + (x_n - l)}{n},$$

$$y_n - l = \frac{(x_1 - l) + \ldots + (x_{N_1} - l)}{n} + \frac{(x_{N_1+1} - l) + \ldots + (x_n - l)}{n}.$$

Alors

$$|y_n - l| \leq \frac{N_1 \max_{i\in\{1,\ldots,N_1\}} |x_i - l|}{n} + \frac{(n - N_1)\frac{\varepsilon}{2}}{n}.$$

Le premier terme tend vers 0 car le numérateur est une quantité indépendante de n et donc

$$\exists N_2, n \geq N_2 \;\Rightarrow\; \frac{N_1 \max_{i\in\{1,\ldots,N_1\}} |x_i - l|}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre part, on peut majorer le deuxième terme

$$\frac{(n-N_1)\frac{\varepsilon}{2}}{n} = \left(1 - \frac{N_1}{n}\right)\frac{\varepsilon}{2}.$$

D'où si l'on choisit $N = \max\{N_1,N_2\}$, on a démontré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, n \geq N \Rightarrow |y_n - l| \leq \varepsilon.$$

2. Dans la première question on a montré que

$$\lim_{n\to\infty} y_n = l \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{y_1 + \ldots + y_n}{n} = l.$$

$$Y_{n-1} = \frac{y_1 + \ldots + y_n}{n} = \frac{(x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \ldots + (x_n - x_{n-1})}{n} = \frac{-x_1 + x_n}{n}.$$

Or $\lim_{n\to\infty} \frac{x_1}{n} = 0$, d'où

$$\lim_{n\to\infty} Y_{n-1} = l = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n}.$$

3. En utilisant la fonction logarithme, on a

$$y_n = (x_1 \ldots x_n)^{1/n} \Rightarrow \ln y_n = \frac{\ln x_1 + \ldots + \ln x_n}{n}.$$

(Il est évident que la suite (x_n) est à termes positifs.) Puisque la fonction logarithme est continue, on a

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \ln x_n = \ln l.$$

D'après la première question, on a

$$\lim_{n\to\infty} \ln y_n = \ln l$$

d'où, en utilisant la continuité de la fonction exponentielle,

$$\lim_{n\to\infty} y_n = l.$$

4. Utilisons les propriétés de la fonction logarithme (on suppose que la suite (x_n) est à termes positifs.)

$$\ln \sqrt[n]{x_n} = \frac{\ln x_n}{n}.$$

D'autre part

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \ln \frac{x_{n+1}}{x_n} = \ln l \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (\ln x_{n+1} - \ln x_n) = \ln l.$$

Alors d'après la deuxième question, on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln x_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{x_n} = \ln l$$

ce qui donne

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = l.$$