MT22/P09 CORRIGE FINAL

Exercice 1. Soit V_R défini par

$$V_R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2z \geq x^2 + y^2, 0 \leq z \leq R\}$$

1. Calculer le volume de V_R.
   Corrigé : Le volume de V_R est égal à

$$\int\int\int_{V_R} dxdydz = \int_0^R \left(\int\int_{\{x^2+y^2\leq 2z\}} dxdy\right) dz = \int_0^R \pi 2z dz = \pi R^2.$$

2. Calculer l'aire de la surface S_R delimitant le volume de V_R.
   Corrigé : On doit calculer l'aire du disque de rayon R ($2\pi R^2$) et on rajoute l'aire de la paroi (notée A_R).
   Calcul de l'aire de la paroi : Soit T_x le vecteur de composantes $T_x = (1, 0, x)$ et $T_y = (0, 1, y)$ alors $T_x \wedge T_y = (-x, y, 1)$ et sa norme $\|T_x \wedge T_y\| = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$. En coordonnées polaires $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, d'où

$$A_R = \int\int_{\{x^2+y^2\leq 2R\}} \sqrt{1 + x^2 + y^2} dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2R} \sqrt{1 + r^2} r dr d\theta = \frac{2\pi}{3}\left((1 + 2R)^{3/2} - 1\right).$$

   Ainsi l'aire de la sur face $S_R = 2\pi R^2 + \frac{2\pi}{3}\left((1 + 2R)^{3/2} - 1\right)$

CHANGER DE FEUILLE !

Exercice 2. On considère le domaine D défini par

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x^2 + y^2 \geq 1\right\}$$

Le bord de D est orienté dans le sens direct et les extremités sont données par les points $A(1,0)$, $B(1,1)$ et $C(0,1)$. On désigne par γ l'arc de cercle joignant C et A.
On considère de plus le champ de vecteurs $V\left((x-y)^2, (x+y)^2\right)$.

1. Représenter graphiquement le domaine D.
   Corrigé : Simple
2. Calculer $\int\int_D 4xdxdy$.
   Corrigé $\int\int_D 4xdxdy = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{1-y^2}}^1 4xdx\right) dy = 2\int_0^1 \left(1 - (1-y^2)\right) dy = \frac{2}{3}$.
3. Calculer la circulation du champ de vecteurs V entre A et B, puis entre B et C.
   Corrigé :
   $$\tau_{AB}(V) = \int_0^1 (1+y^2)dy = \frac{7}{3}.$$
   et
   $$\tau_{BC}(V) = -\int_0^1 (1-x^2)dx = -\frac{1}{3}.$$
4. A l'aide d'un théorème vu dans le cours (enoncer et vérifier les hypothèses!!) en deduire la circulation du champ de vecteurs V entre C et A (c'est à dire sur l'arc γ).
   Corrigé : Les composantes du vecteur V sont bien définies sur D, si on note $P(x,y) = (x-y)^2$ et $Q(x,y) = (x+y)^2$ on a
   $$\frac{\partial P}{\partial y} = -2(x-y) \text{ et } \frac{\partial Q}{\partial x} = 2(x+y),$$
   par le théorème de Green-Riemmann et en notant ∂D le bord de D, nous avons
   $$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = \int\int_D 4xdxdy = \frac{2}{3},$$
   et comme $\partial D = AB \cup BC \cup \gamma$, on en deduit que $\int_\gamma Pdx + Qdy = \frac{2}{3} - \left(\frac{7}{3} - \frac{1}{3}\right) = -\frac{4}{3}$.
5. Calculer directement la circulation du champ de vecteurs V entre C et A (c'est à dire sur l'arc γ).
   Corrigé : On paramétrise ainsi
   $$\int_\gamma Pdx + Qdy = -\int_0^{\pi/2} \left(-(\cos\theta - \sin\theta)^2 \sin\theta + (\cos\theta + \sin\theta)^2 \cos\theta\right) d\theta$$
   $$= \int_0^{\pi/2} \left(-\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)(\sin\theta - \cos\theta)\right) d\theta - 2\int_0^{\pi/2} \left(\cos\theta \sin^2\theta + \sin\theta\cos^2\theta\right) d\theta = -\frac{4}{3}$$

Exercice 3. Soit (S) la surface définie par

$$(S) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 4;\ z \geq 0\ ;\ x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

que l'on supposera orientée selon la normale faisant un angle aigu avec le vecteur $\vec{k}$ (troisième composante positive). On considère $\vec{F}$ le champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} z^2 \\ x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}.$$

1. Représenter (S). La figure devra être obligatoirement dessinée au crayon et clairement représentée.
2. Calculer le flux $\displaystyle\int\int_{(S)} \overrightarrow{rot}(\vec{F}).\overrightarrow{dS}$ du rotationnel du champ de vecteurs $\vec{F}$ à travers (S).
3. Montrer que le champ $\vec{F}$ dérive d'un champ de vecteurs $\vec{W}$. Calculer $\vec{W}$ en le cherchant sous la forme $\vec{W} = (P(y), Q(z), R(x))$.
4. Soit (C) le bord de (S).
   (a) Ecrire l' équation paramétrique de (C).
   (b) Retrouver le flux calculé en la question 2) en utilisant le théorème de Stokes. On précisera l'orientation du contour.
5. Soit $(\mathcal{V})$ le volume

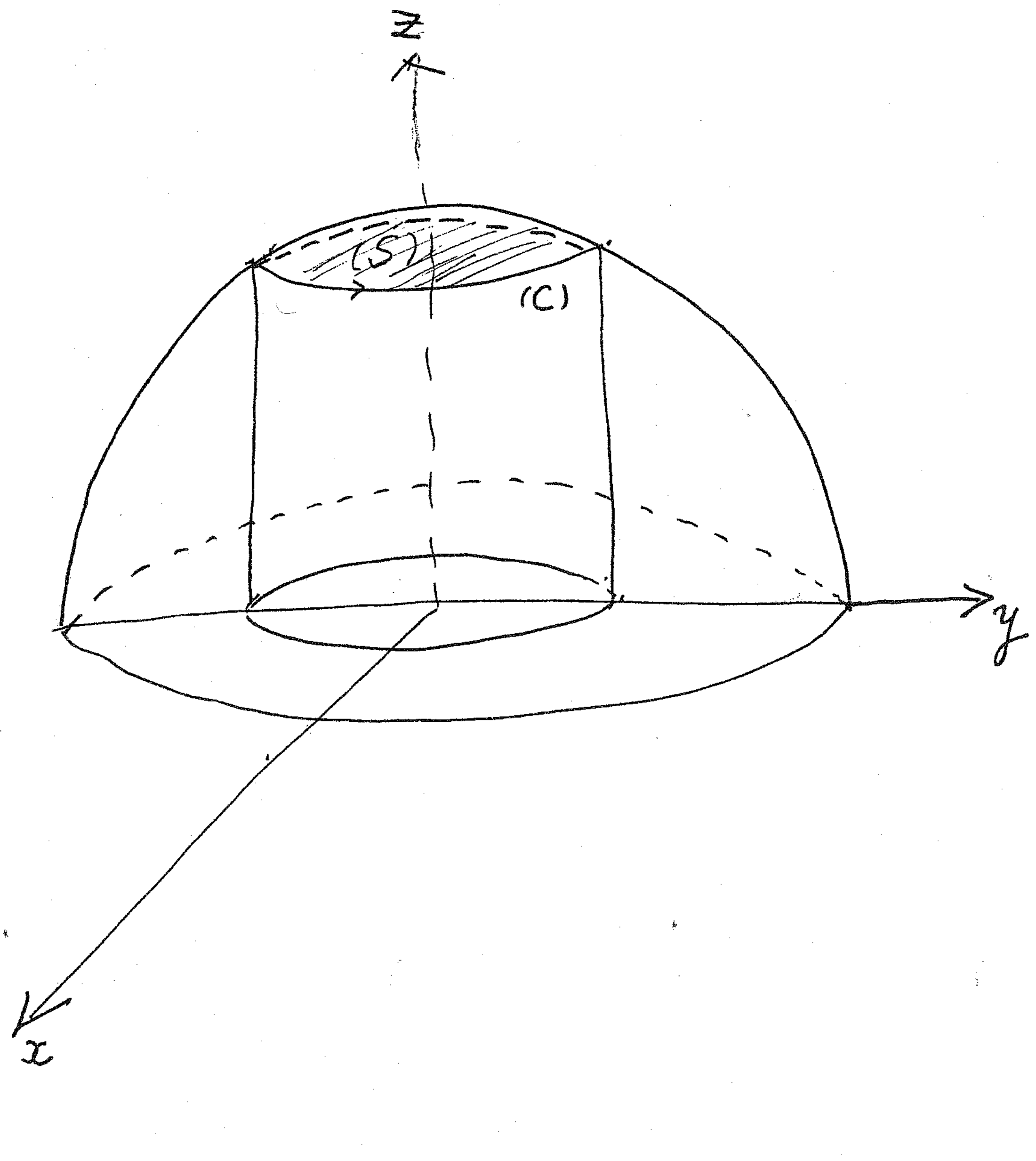
$$(\mathcal{V}) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ :\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4;\ z \geq 0\ ;\ x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

   et soit $\vec{V}$ le champ de vecteurs défini par

$$\vec{V} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

   (a) Calculer directement le flux du champ de vecteurs $\vec{V}$ à travers (Σ) la surface fermée délimitant le volume $(\mathcal{V})$.
   (b) Retrouver ce résultat en utilisant le théorème de Gauss-Ostrogradsky. Que représente ce flux par rapport à $(\mathcal{V})$?
   (c) Expliquer comment calculer le volume d'un volume $(\mathcal{V})$ à partir du flux d'un champ de vecteurs, que l'on précisera, à travers la surface délimitant le volume.

CORRIGÉ EX 3

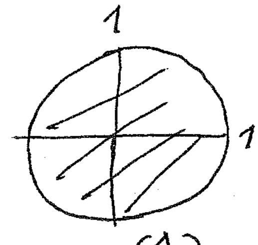


2) Tout d'abord, on a :

$$\overrightarrow{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ z^2 & x^2 & y^2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ 2z \\ 2x \end{pmatrix}.$$

Pour l'équation paramétrique de (S), on commence par en chercher l'équation de la projection orthogonale sur le plan $z=0$; soit (Δ) cette projection, on a alors :

$$\begin{aligned}
(x,y,0) \in (\Delta) &\iff \exists z \geq 0 \ / \ (x,y,z) \in (S) \\
&\iff \exists z \ / \ z = \sqrt{4-x^2-y^2} \quad \text{et } x^2+y^2 \leq 1 \\
&\iff x^2+y^2 \leq 4 \quad \text{et } x^2+y^2 \leq 1 \\
&\iff x^2+y^2 \leq 1
\end{aligned}$$



(Δ)

L'équation paramétrique de (S) :

$$(x,y) \in (\Delta) \xrightarrow{\ \vec{\sigma}\ } \begin{cases} x = \\ y \\ z = \sqrt{4-x^2-y^2}. \end{cases}$$

Une normale en tout point $(x,y,z) \in (S)$ est donnée par

$$\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial x} \wedge \frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial y} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \\ -\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

cette normale est dirigée vers les $z>0$, on prendra donc $\varepsilon = 1$ dans la formule :

$$\iint_{(S)} \overrightarrow{rot}(\vec{F}).\vec{n}\, d\sigma = \varepsilon \iint_{(\Delta)} \overrightarrow{rot}(\vec{F}).\left(\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial x} \wedge \frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial y}\right) dx\,dy \, ;$$

ainsi

$$\iint_{(S)} \overrightarrow{rot}\vec{F}.\vec{n}\, d\sigma = \iint_{(\Delta)} \left(\frac{2xy}{\sqrt{4-x^2-y^2}} + 2y + 2x\right) dx\,dy$$

Pour le calcul, on passe en coordonnées polaires :

On pose $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ où $\begin{array}{l} 0 \leq \theta < 2\pi \\ 0 \leq r \leq 1 \end{array}$,

pour avoir :

$$\iint_{(S)} \vec{rot}(\vec{F})\,\vec{n}\,d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{2r^2}{\sqrt{4-r^2}} \sin\theta\cos\theta\, r\,dr\,d\theta + \int_0^{2\pi}\int_0^1 2r(\sin\theta+\cos\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^1 \frac{2r^3}{\sqrt{4-r^2}}\left(\int_0^{2\pi}\sin\theta\cos\theta\,d\theta\right)dr + \int_0^1 2r\left(\int_0^{2\pi}(\sin\theta+\cos\theta)\,d\theta\right)dr$$

$$= 0.$$

3. Cherchons la projection orthogonale de (C) :

$(x,y) \in$ proj $\Leftrightarrow \exists z$: $\begin{array}{c} x^2+y^2+z^2=4 \\ z \geq 0 \\ x^2+y^2=1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} z^2=3,\ z\geq 0 \\ x^2+y^2=1 \end{array}$

d'où l'équation paramétrique de (C) :

$$\theta \in [0,2\pi] \longrightarrow \begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \\ z = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x' = -\sin\theta \\ y' = \cos\theta \\ z' = 0 \end{array}$$

(b) On a, après avoir orienté (C) selon la règle d'Ampère

$$\iint \vec{rot}\,\vec{F}\,\vec{d\sigma} = \int_{(C)} \vec{F}.\,d\vec{\gamma} = \int_{(C)} \vec{F}.\Bigg(\ ^{0}$$

$$= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 3 \\ \cos^2\theta \\ \sin^2\theta \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} d\theta$$

$$= 3\Big[\cos\theta\Big]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos^3\theta\, d\theta$$

$$= 3(1-1) + \int_0^{2\pi} (1-\sin^2\theta)\cos\theta\,d\theta$$

$$= 0 + \left[\sin\theta - \frac{\sin^3\theta}{3}\right]_0^{2\pi} = 0.$$

4). (a) Le calcul direct :

(S) est fermée donc devra être orientée selon la normale extérieure.

Faisons le bilan des surfaces : $(S) = (S_1) \cup (S_2) \cup (S_3)$

où $(S_1) = \left\{ (x,y,z) \,/\, x^2+y^2+z^2 = 4,\ z \geq 0 \quad x^2+y^2 \leq 1 \right\}$

$(S_2) = \left\{ (x,y,z) \,/\, z = 0 \,,\ x^2+y^2 \leq 1 \right\}$

$(S_3) : \left\{ (x,y,z) \,/\, 0 \leq z \leq \sqrt{3} \,,\ x^2+y^2 = 1 \right\}$

Calculons $\Phi_1 = \iint_{S_1} \vec{V} \cdot \vec{dS}$.

On a (S_1) : $(x,y) \in$ disque unité $\xrightarrow{\vec{\sigma}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{4-x^2-y^2} \end{pmatrix}$

d'où $\dfrac{\partial \vec{\sigma}}{\partial x} \wedge \dfrac{\partial \vec{\sigma}}{\partial y} = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \\ \dfrac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc

$$\vec{V} \cdot \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial x} \wedge \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial y} = \left(\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2-y^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{4-x^2-y^2}} + \sqrt{4-x^2-y^2} \right) \frac{1}{3}$$

$$= \left(\frac{x^2+y^2}{\sqrt{4-x^2-y^2}} + \sqrt{4-x^2-y^2} \right) \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3} \frac{4}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$$

D'où

$$\Phi_1 = \frac{\varepsilon}{3} \iint_{D(0,1)} \frac{4}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\, dx\, dy = \frac{\varepsilon}{3} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{4}{\sqrt{4-r^2}}\, r\, dr\, d\theta$$

$$= 4\frac{\varepsilon}{3} \left[-\sqrt{4-r^2} \right]_0^1 (2\pi) = \frac{8\pi}{3}\varepsilon \left[-\sqrt{3} + 2 \right]$$

Comme la normale $\dfrac{\partial \vec{\sigma}}{\partial x} \wedge \dfrac{\partial \vec{\sigma}}{\partial y}$ est orientée vers l'extérieur, on prendra $\varepsilon = 1$

d'où $\phi_1 = \frac{8\pi}{3}(2-\sqrt{3})$.

Calcul de ϕ_2 :

$(x,y) \in$ disque unité $\xrightarrow{\vec{\sigma}} \begin{pmatrix} x = x \\ y \\ z = 0 \end{pmatrix}$

$\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial x} \wedge \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Cette normale est intérieure, on prendra $\varepsilon = -1$ dans la formule du flux calculé avec cette normale.

On a $\vec{V} . \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial x} \wedge \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial y} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

Ainsi $\Phi_2 = 0$.

Calcul de ϕ_3 :

$(\theta, z) \xrightarrow{\vec{\sigma}} \begin{pmatrix} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \\ z \end{pmatrix}$ avec $\begin{array}{l} \theta \in (0, 2\pi) \\ z \in (0, \sqrt{3}) \end{array}$

on a $\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial z} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$.

et $\vec{V} . \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial z} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ z \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \frac{1}{3}$

d'où

$$\Phi_3 = \varepsilon \int_0^{\sqrt{3}}\int_0^{2\pi} \frac{1}{3}\, d\theta\, dz = \frac{\varepsilon}{3}\sqrt{3} \times 2\pi$$

La normale $\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial z}$ est extérieure, donc $\varepsilon = 1$.

Finalement :

$$\boxed{\Phi = \frac{2\pi}{3}\sqrt{3} + \frac{16\pi}{3} - \frac{8\pi}{3}\sqrt{3} = \frac{16\pi}{3} - \frac{6\pi\sqrt{3}}{3} = \frac{2\pi}{3}(8 - 3\sqrt{3})}$$

(b) A l'aide de la formule de Gauss-Ostrogradsky :

$$\oiint_S \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = \iiint_V \operatorname{div}(v)$$

$$= \iiint \left(\frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z)\right) \cdot \frac{1}{3} \; dx\, dy\, dz$$

$$= \iiint dx\, dy\, dz$$

On a

$$\iiint dx\, dy\, dz = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz \right) dx\, dy$$

$$= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \sqrt{4-x^2-y^2} \; dx\, dy$$

$$= \int_0 \int_0 (4-r^2)^{\frac{1}{2}} \, r\, dr\, d\theta$$

$$= 2\pi \left[-\frac{(4-r^2)^{3/2}}{3} \right]_0^1$$

$$= 2\pi \left[-\frac{3^{3/2}}{3} + \frac{4^{3/2}}{3} \right]$$

$$= \frac{2\pi}{3} \left[8 - 3\sqrt{3} \right]$$

On retrouve ainsi le résultat précédent.

(c) Il suffit de prendre le flux d'un champ de vecteurs $\vec{V}$ tel que $\operatorname{div}(V) = 1$.