MT22/P09 Corrigé PARTIEL 2

Exercice 1. On considère la surface $(\Sigma) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 = 4, \quad 0 \leq z \leq 4\}$.

1. Nommer (Σ).
   Corrigé : Il s'agit d'un cylindre d'axe (OZ) et $0 \leq z \leq 4$
2. Paramétriser (Σ).
   Corrigé :
$$\begin{cases} x(\theta) = 2\cos\theta, & \theta \in [0, 2\pi] \\ y(\theta) = 2\sin\theta & \\ z = t, & t \in [0, 2] \end{cases}$$
3. Ecrire l'équation du plan tangent en $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$ à (Σ).
   Corrigé : $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4 = 0$ son gradient est le vecteur$(2x, 2y, 0)$ est donc l'équation du plan tangent est
$$2\sqrt{2}(x - \sqrt{2}) + 2\sqrt{2}(y - \sqrt{2}) = 0, \text{ soit } x + y - 2\sqrt{2} = 0,\ 0 \leq z \leq 4.$$
4. Soit $(\mathcal{P})$ le plan d'équation $y + z = 4$. On considère la courbe $(C) = (\Sigma) \cap (\mathcal{P})$ obtenue en intersectant (Σ) avec $(\mathcal{P})$. Dessiner (C).
   Corrigé : (C) est une partie d'ellipse
5. Ecrire l'équation paramétrique de (C).
   Corrigé :
$$\begin{cases} x(\theta) = 2\cos\theta, & \theta \in [0, \pi] \\ y(\theta) = 2\sin\theta & \\ z = 4 - y = 4 - 2\sin\theta, & \end{cases}$$

Exercice 2. Considérons un triangle noté T de sommets $O = (0, 0), B = (2, 1)$ et $C = (1, 2)$.

1. A l'aide des intégrales doubles déterminer l'aire de ce triangle.
   Corrigé : $Aire(T) = \int_0^1 \int_{x/2}^{2x} dydx + \int_1^2 \int_{x/2}^{3-x} dydx = \int_0^1 \frac{3x}{2} dx + \int_1^2 (3 - \frac{3x}{2})dx = \frac{3}{2}$.
2. Supposons $\mu(x, y) = \mu_0$ déterminer les coordonnées du centre de gravité du triangle.
   Corrigé : $m = \frac{3\mu_0}{2}$ et $x_g = \frac{1}{m} \int\int_T \mu_0 x dxdy = \frac{2}{3} \int\int_T xdxdy$
   $= \frac{2}{3}\left(\int_0^1 \frac{3x^2}{2} dx + \int_1^2 (3x - \frac{3x^2}{2})dx\right) = 1$. Pour des raisons de symétrie $x_G = y_G$.

Exercice 3.

1. Etudier les points singuliers pour la courbe suivante (on précisera le nom de chaque point singulier trouvé) :
$$\begin{cases} x(t) &= t + \dfrac{4}{t^2} \\ y(t) &= t^2 + \dfrac{16}{t} \end{cases}$$
   Corrigé : On vérifie que $\frac{dOM(t)}{dt} = 0$ pour $t = 2$ donc le point de coordonnées $(x(2), y(2))$ est un point singulier. De plus, $\frac{d''OM(t)}{dt}|_{t=2} \neq 0$ et $\frac{d'''OM(t)}{dt}|_{t=2} \neq 0$ et que ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc $p = 2$ pair et $q = 3$ impair, le point de coordonnées $(x(2), y(2)) = (3, 12)$ est un point de rebroussement de première espèce.
2. Tracer soigneusement l'allure "au niveau du (ou des) point(s) singulier(s)".

Exercice 4. Soit $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\right\}$ où a et b sont des constantes non nulles et positives.

1. Représenter graphiquement le domaine A.
   Corrigé. Domaine délimité par l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ et $x \geq 0, y \geq 0$.
2. Soit I l'intégrale définie par :
   $$I = \int\int_A f(x,y)dxdy.$$
   Exprimer I de deux façons différentes à l'aide des intégrales en x et en y.
   Corrigé :
   Pour $0 \leq x \leq a$ et $0 \leq y \leq b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \beta(x)$, nous avons
   $$I = \int_0^a \left(\int_0^{\beta(x)} f(x,y)dy\right) dx$$
   et pour $0 \leq y \leq b$ et $0 \leq x \leq a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} = \alpha(y)$ nous avons
   $$I = \int_0^b \left(\int_0^{\alpha(y)} f(x,y)dx\right) dy.$$
3. Soit J l'intégrale définie par :
   $$J = \int\int_A (x^2 - y^2)dxdy.$$
   Calculer J, avec ou sans changement de variables.
   Corrigé :
   Par changement de variables : On commence par remarquer que le changement de variables pour une ellipse est donné dans l'exercice de cours A.1.10 du Poly version électronique (cf. Site de l'uv !!).
   Posons donc $x = ar\cos\theta$, $y = br\sin\theta$ $0 \leq r \leq 1$ et $0 \leq \theta \leq \pi/2$, la valeur absolue du Jacobien étant égale à abr, nous avons
   $$J = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \left(a^2\cos^2\theta - b^2\sin^2\theta\right) r^3 ab d\theta dr = ab\int_0^1 r^3 dr \int_0^{\pi/2} \left(a^2\cos^2\theta - b^2\sin^2\theta\right) d\theta.$$
   Le produit des deux intégrales simples donne $J = \frac{ab}{4}\int_0^{\pi/2}\left(a^2\cos^2\theta - b^2\sin^2\theta\right) d\theta$, en utilisant de plus la linéarisation c.a.d. $\cos^2\theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$ et $\sin^2\theta = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$ et en évaluant l'intégrale en θ, nous obtenons finalement
   $$J = \frac{\pi ab(a^2 - b^2)}{16}.$$
   Sans changement de variables, d'après la question 2, on a
   $$J = \int_0^a \left(\int_0^{\beta(x)} (x^2 - y^2)dy\right) dx = \int_0^a \left[x^2 y - \frac{y^3}{3}\right]_0^{\beta(x)} dx,$$
   d'où
   $$J = \int_0^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \left((1 + \frac{b^2}{3a^2})x^2 - \frac{b^2}{3}\right) dx,$$
   le changement de variable au (sens de l'intégrale simple !) $x = a\sin t$ donne finalement
   $$J = ab\int_0^{\pi/2} \cos^2 t \left[\left(a^2 + \frac{b^2}{3}\right)\sin^2 t - \frac{b^2}{3}\right] dt$$
   il suffit de linéariser les fonctions $\sin^2 t$ et $\cos^2 t$ pour aboutir au résultat.