MT22/P09 Corrigé du PARTIEL 1

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction dont les dérivées partielles secondes sont continues et soient $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $\beta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par $\alpha(u,v) = u^2 - v$ et $\beta(u,v) = u^2 + v$. Soit $\phi(u,v) = f(\alpha(u,v), \beta(u,v))$. Indication, on posera $x = \alpha(u,v)$ et $y = \beta(u,v)$.

1. Déterminer les dérivées partielles premières de ϕ en fonction des dérivées partielles de f.
   Corrigé. $\frac{\partial\phi(u,v)}{\partial u} = 2u\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha(u,v),\beta(u,v)) + \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha(u,v),\beta(u,v))\right)$ et $\frac{\partial\phi(u,v)}{\partial v} = -\frac{\partial f(,)}{\partial x} + \frac{\partial f(,)}{\partial y}$.
2. Déterminer les dérivées partielles premières de f en fonction de celles de ϕ.
   Corrigé. Pour $u \neq 0$, nous pouvons en déduire (par exemple par substitution)
   $$\frac{\partial f}{\partial x}(u(x,y),v(x,y)) = \frac{1}{4u}\frac{\partial\phi(,)}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial\phi(,)}{\partial v} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(,) = \frac{1}{4u}\frac{\partial\phi(,)}{\partial u} + \frac{1}{2}\frac{\partial\phi(,)}{\partial v}$$

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4m^2xy$.

1. Déterminer les points critiques lorsque $m \neq 0$ et lorsque $m = 0$.
   Corrigé. Pour $m \neq 0$, nous avons $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 4m^2y$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 - 4m^2x$. Directement nous voyons que les dérivées partielles s'annulent simultanément au point (0,0). Donc à partir de la D. P. par rapport à x, nous avons par exemple $y = \frac{x^3}{m^2}$ et en remplaçant dans la D.P. par rapport à y nous donne $x^9 = m^8x$ or pour $x \neq 0$ ceci est équivalent à $x^8 = m^8$ d'où les points critiques autres que le point $(0,0)$ sont (m,m) et $(-m,-m)$. Lorsque $m = 0$ le seul point critique est $(0,0)$.
2. Déterminer les extrema locaux de cette fonction.
   Corrigé. Pour $m \neq 0$, nous avons $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12y^2$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) = -4m^2$. $\Delta(0,0) > 0$ donc $(0,0)$ n'est pas un extremum local. $\Delta(m,m) < 0$ et $a > 0$ donc (m,m) est un minimum local, idem pour le point $(-m,-m)$.
   Pour $m = 0$, $\Delta(0,0) = 0$ donc on regarde $f(h,k) = h^4 + k^4$ qui est toujours supérieur à $f(0,0) = 0$, d'où $(0,0)$ est un minimum local.

Exercice 3. Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dont les dérivées d'ordre 1 et 2 sont continues sur $\mathbb{R}$ et telle que $\phi(0) = 0$ et $\phi''(0) \neq 0$, et soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x\phi(y) - y\phi(x)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

1. A l'aide de la formule de Taylor, montrer que pour x dans un voisinage de 0, on peut approcher $\phi''(0)/2$ par $\frac{\phi(x) - x\phi'(0)}{x^2}$.
   Corrigé. Pour x dans un voisinage de 0, $\phi(x) = \phi(0) + x\phi'(0) + \frac{x^2}{2}\phi''(0) + x^2\epsilon(x)$, d'où l'approximation (avec $\phi(0) = 0$).
2. En utilisant le résultat précédent, montrer que f est continue en $(0,0)$. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?
   Corrigé. La fonction f vérifie $f(x,y) \approx \frac{xy^2\phi''(0) - yx^2\phi''(0)}{x^2+y^2}$. D'où $|f(r\cos\theta, r\sin\theta) - f(0,0)| \leq r\phi''(0)$, donc continue en $(0,0)$, ailleurs elle est continue en tant que quotient de deux fonctions continues.
3. Déterminer les valeurs de $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
   Corrigé. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ directement.
4. Déterminer pour $(x,y) \neq (0,0)$, les valeurs de $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.
   Corrigé.
   $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(\phi(y) - y\phi'(x))(x^2+y^2) - (x\phi(y) - y\phi(x))2x}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(x\phi'(y) - \phi(x))(x^2+y^2) - (x\phi(y) - y\phi(x))2y}{(x^2+y^2)^2}$

5. Etudier la continuité en $(0,0)$ de la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ déterminée dans la question précédente.
Corrigé. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \frac{(\phi(y)-y\phi'(0))y^2}{y^4}$, après simplification et en utilisant l'approximation de la première question on en déduit $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) \approx \frac{\phi''(0)}{2}$ qui ne converge pas vers 0 quand $y \to 0$, d'où la dérivée partielle par rapport à x n'est pas une fonction continue.

6. La fonction f est-elle différentiable en $(0,0)$?
Corrigé
D'après la question 3), l'existence des dérivées partielles par rapport à x et y au point $(0,0)$ n'est pas un problème, elles existent et valent 0. Ce qui reste à vérifier est donc si $\epsilon(h,k) = \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$ converge de façon continue vers 0, lorsque $(h,k) \longmapsto (0,0)$. Or on peut par exemple évaluer $\epsilon(2k,k) = \frac{2\phi(k)-\phi(2k)}{2^3k^2}$ et par la formule de Taylor de $\phi(k)$ puis de $\phi(2k)$, nous avons que le numérateur se comporte comme $-k^2\phi''(0)$ donc $\epsilon(2k,k) \approx -\phi''(0)/8$ qui ne converge pas vers 0. Donc f n'est pas différentiable en $(0,0)$.