

MT22-Fonctions de plusieurs variables et applications

Chapitre 1 : Fonctions de plusieurs variables

ÉQUIPE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

UTC-UTT



Sommaire

I	Fonctions de plusieurs variables	3
I.1	Fonctions de deux variables	4
I.2	Fonctions de plusieurs variables	46
A	Exercices	52
A.1	Exercices de cours	54
A.2	Exercices de TD	93
B	Documents	119

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Chapitre I

Fonctions de plusieurs variables

I.1	Fonctions de deux variables	4
I.2	Fonctions de plusieurs variables	46

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

I.1 Fonctions de deux variables

Notations-Domaine de définition	6
Éléments de topologie	8
Définition de la continuité	10
Continuité-propriétés	11
Composée de fonctions continues	13
Etude de la continuité	15
Différentiabilité	18
Dérivées partielles	20
Différentiabilité-continuité-dérivées partielles	22
Condition suffisante de différentiabilité	24
Dérivées partielles d'ordre supérieur	27
Composition et dérivation	28
Différentielle	32
Formule des accroissements finis-formule de Taylor	34
Calcul approché	37
Théorème des fonctions implicites	38
Extrema d'une fonction de deux variables	41

Certains phénomènes naturels nécessitent, pour leur analyse, l'étude de plusieurs paramètres, ainsi :

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

- La pression atmosphérique à la surface de la terre dépend de l'altitude, de la longitude et de la latitude.
- La période d'un pendule est $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = f(l, g)$.
- La pression d'un gaz parfait de volume V à la température T est $p = \frac{NRT}{V} = f(T, V)$.
- La chaleur dégagée par effet Joule dans une résistance est $P = RI^2t = f(R, I, t)$.

Toutes les fonctions citées ci-dessus sont des fonctions reliant une variable à deux ou trois autres variables.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Notations-Domaine de définition

Exercices :

[Exercice A.1.1](#)

Un vecteur de l'espace vectoriel \mathbb{R}^2 est un couple (x, y) . Si on munit le plan d'un repère orthonormé d'origine O , on peut donc identifier ce vecteur et le point M du plan de coordonnées x et y .

La **norme euclidienne** de ce vecteur sera notée suivant les cas : $\|\overrightarrow{OM}\|$ ou

$\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|$ ou $\|(x, y)\|$ et elle est égale à $\sqrt{x^2 + y^2}$.

On définit le **produit scalaire** de deux vecteurs par :

$$\overrightarrow{OM_1} \cdot \overrightarrow{OM_2} = x_1x_2 + y_1y_2,$$

d'où $\|\overrightarrow{OM}\|^2 = \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM}$.

Puisque l'on peut identifier le vecteur (x, y) de \mathbb{R}^2 au point M du plan de coordonnées (x, y) , on notera indifféremment $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$f : (x, y) \rightarrow f(x, y)$$

ou par

$$f : M \rightarrow f(M)$$

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

ou enfin par

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow f(x, y).$$

Une fonction de 2 variables n'est pas toujours définie sur \mathbb{R}^2 tout entier, mais seulement sur un sous ensemble appelé domaine de définition. Ce domaine de définition est une surface, sous ensemble du plan xOy .

**Notations-
Domaine de
définition**

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Eléments de topologie

Exercices :

[Exercice A.1.2](#)

[Exercice A.1.3](#)

[Exercice A.1.4](#)

Définition I.1.1 *A étant donné dans \mathbb{R}^2 , on appelle disque ouvert de centre A et de rayon $\rho > 0$ le sous ensemble de \mathbb{R}^2 défini par*

$$B(A, \rho) = \{M \in \mathbb{R}^2, \|\overrightarrow{AM}\| < \rho\}.$$

Définition I.1.2 *On appelle ouvert \mathcal{O} de \mathbb{R}^2 une partie de \mathbb{R}^2 qui est vide ou qui vérifie la propriété suivante : pour tout point A de \mathcal{O} , il existe un disque ouvert centré en A et contenu dans \mathcal{O} .*

Proposition I.1.1 *\mathcal{O} est un ouvert de \mathbb{R}^2 , si et seulement si \mathcal{O} est vide ou \mathcal{O} est la réunion d'un nombre quelconque de disques ouverts.*

La proposition précédente donne une propriété caractéristique des ouverts, elle aurait pu être donnée comme définition. Cette proposition se démontre très facilement.

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Définition I.1.3 *On appelle fermé tout sous ensemble de \mathbb{R}^2 qui est le complémentaire d'un ouvert.*

Proposition I.1.2 *L'intersection d'un nombre **fini** d'ouverts est un ouvert.*

Définition I.1.4 *Soit A un point de \mathbb{R}^2 , on appelle voisinage de A toute partie V de \mathbb{R}^2 qui contient un ouvert contenant A .*

Eléments de topologie

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Définition de la continuité

Exercices :

[Exercice A.1.5](#)

[Exercice A.1.6](#)

Définition I.1.5 *D est un ouvert de \mathbb{R}^2 , $M_0 \in D$, soit f une fonction définie sur D , sauf éventuellement en M_0 , à valeurs dans \mathbb{R} , on dit que f admet une limite ℓ au point M_0 , si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall M \in D, \{0 < \|\overrightarrow{M_0M}\| < \eta \implies |f(M) - \ell| < \varepsilon\}.$$

Définition I.1.6 *D est un ouvert de \mathbb{R}^2 , $M_0 \in D$, on dit qu'une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est continue au point M_0 , si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall M \in D, \{\|\overrightarrow{M_0M}\| < \eta \implies |f(M) - f(M_0)| < \varepsilon\}.$$

On peut relier la définition de continuité et de limite : la fonction f est continue en M_0 si elle admet une limite ℓ en M_0 et si cette limite vérifie $\ell = f(M_0)$.

Géométriquement la continuité signifie que lorsque le point M tend vers M_0 (dans le plan xOy), la valeur réelle $f(M)$ tend vers $f(M_0)$. La surface S d'équation $z = f(x, y)$, n'a pas de "trou" au point d'abscisse x_0 et d'ordonnée y_0 .

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Continuité-propriétés

Exercices :

[Exercice A.1.7](#)

[Exercice A.1.8](#)

Proposition I.1.3 (x_0, y_0) étant donnés, à partir de la fonction f de 2 variables on définit les fonctions d'une variable f_1 et f_2 par

$$f_1(x) = f(x, y_0), f_2(y) = f(x_0, y)$$

Si la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en (x_0, y_0) , alors f_1 est continue en x_0 et f_2 est continue en y_0 .

Remarque I.1.1 L'ensemble C_1 des points de coordonnées $(x, y_0, f_1(x))$ est une courbe tracée sur la surface S d'équation $z = f(x, y)$. De même l'ensemble C_2 des points de coordonnées $(x_0, y, f_2(y))$ est une courbe tracée sur la surface S d'équation $z = f(x, y)$. C_1 est la courbe intersection de S avec le plan d'équation $y = y_0$, C_2 est la courbe intersection de S avec le plan d'équation $x = x_0$.

La proposition [I.1.3](#) donne une condition nécessaire pour que la fonction f soit continue en (x_0, y_0) , elle est utile pour démontrer que f n'est pas continue.

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)



Proposition I.1.4 *D est un ouvert de \mathbb{R}^2 , soient f et g deux fonctions $D \rightarrow \mathbb{R}$, soit $M_0 \in D$*

- *si f et g sont continues en M_0 , $f + g$ est continue en M_0 .*
- *si f est continue en M_0 , si λ est un paramètre réel, λf est continue en M_0 .*
- *si f et g sont continues en M_0 , fg est continue en M_0 .*
- *si f et g sont continues en M_0 , et si $g(M_0) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ est continue en M_0 .*

Continuité-propriétés

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Composée de fonctions continues

Exercices :

[Exercice A.1.9](#)

La composée de fonctions continues est continue, nous allons expliciter cette propriété fondamentale dans quelques cas particuliers maintenant.

Proposition I.1.5 *Soient α et β deux fonctions réelles définies sur un voisinage de t_0 et continues en t_0 , on note $x_0 = \alpha(t_0)$, $y_0 = \beta(t_0)$.*

Soit f une fonction définie sur un voisinage de (x_0, y_0) à valeurs dans \mathbb{R} .

On définit la fonction réelle ϕ par $\phi(t) = f(\alpha(t), \beta(t))$.

Si f est continue au point (x_0, y_0) , alors la fonction ϕ est continue en t_0 .

La proposition [I.1.3](#) est un cas particulier de la proposition [I.1.5](#), le démontrer en exercice.

Proposition I.1.6 *Soient a , b et f trois fonctions de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$*

On définit $\psi(u, v) = f(a(u, v), b(u, v))$.

Si les fonctions a et b sont définies au voisinage du point (u_0, v_0) et continues en ce point,

si f est définie au voisinage du point $(a(u_0, v_0), b(u_0, v_0))$ et continue en ce point, alors la fonction ψ est continue au point (u_0, v_0)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Proposition I.1.7 Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie dans un voisinage de M_0 et continue en M_0 ,

soit $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie dans un voisinage de $f(M_0)$ et continue en $f(M_0)$,
alors

$$\alpha \circ f : (x, y) \mapsto \alpha(f(x, y))$$

est continue en M_0 .

On ne démontrera pas ces propositions.

Les propositions [I.1.4](#), [I.1.5](#), [I.1.6](#), [I.1.7](#) nous permettent de conclure quant à la continuité dans la majorité des cas. Par exemple :

- $x^3y^5 + 6xy^2$ et de façon plus générale tout polynôme en x, y est une fonction continue en tout point M_0 .
- $\cos xy$, $\exp(x^3 + y^5)$ sont continues en tout point M_0 .

Composée de fonctions continues

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Etude de la continuité

Exercices :

[Exercice A.1.10](#)

[Exercice A.1.11](#)

[Exercice A.1.12](#)

[Exercice A.1.13](#)

Proposition I.1.8 Soit $M_0(x_0, y_0)$ et $M(x, y)$, on pose

$x = x_0 + r \cos \theta, y = y_0 + r \sin \theta, (r > 0)$, alors $\left\| \overrightarrow{M_0 M} \right\| = r$.

Si l'on peut montrer que $|f(M) - f(M_0)| \leq \varepsilon(r)$

où ε est une fonction réelle (qui ne dépend que de r) dont la limite est nulle quand r tend vers 0, alors f est continue en M_0 .

La proposition précédente permet de démontrer la continuité, c'est une condition suffisante de continuité.

Pour démontrer qu'une fonction f n'est pas continue en M_0 , on peut utiliser la proposition I.1.5 que l'on va énoncer différemment :

Proposition I.1.9 Soient α et β deux fonctions réelles définies sur un voisinage de t_0 et continues en t_0 , on note $x_0 = \alpha(t_0), y_0 = \beta(t_0)$.

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Pour démontrer que f n'est pas continue en M_0 , il suffit de trouver un chemin particulier qui passe par M_0 tel que quand M tend vers M_0 le long de ce chemin, $f(M)$ ne tend pas vers $f(M_0)$. Bien sûr même lorsque f n'est pas continue en M_0 , il est parfois possible de trouver des chemins passant par M_0 sur lesquels quand M tend vers M_0 , $f(M)$ tend vers $f(M_0)$. Reprendre l'exercice [A.1.12](#)

Etude de la continuité

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Différentiabilité

Exercices :

[Exercice A.1.14](#)

[Exercice A.1.15](#)

Revoyez le chapitre dérivation des fonctions d'une variable dans le polycopié de MT21. On y a défini la dérivabilité dans le cas d'une fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Définition I.1.7 *D est un intervalle ouvert de \mathbb{R} , on dit qu'une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en x_0 appartenant à D , si la limite suivante existe :*

$$d = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Dans ce cas on dit que le nombre d est la dérivée de f au point x_0 et on note

$$d = \frac{df}{dx}(x_0).$$

On a démontré la proposition suivante :

Proposition I.1.10 *Une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction f soit dérivable au point $x_0 \in D$ est qu'il existe $d \in \mathbb{R}$ et une fonction ε tels que ,*

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

pour $x_0 + h \in D$, on puisse écrire :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hd + |h|\varepsilon(h), \quad \text{avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$$

La proposition **I.1.10** donne une autre caractérisation possible de la dérivabilité, c'est cette caractérisation qui sert à définir la notion de différentiabilité dans le cas d'une fonction de 2 variables.

Définition I.1.8 *D est un ouvert de \mathbb{R}^2 , on dit qu'une fonction*

$f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable au point (x_0, y_0) appartenant à D , s'il existe des constantes A et B et une fonction ε (de deux variables) telles que, pour $(x_0 + h, y_0 + k) \in D$, on puisse écrire

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + Ah + Bk + \|(h, k)\|\varepsilon(h, k) \quad (\text{I.1.1})$$

$$\text{avec } \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(h, k) = 0.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Dérivées partielles

Exercices :

[Exercice A.1.16](#)

[Exercice A.1.17](#)

[Exercice A.1.18](#)

On peut maintenant définir la notion de dérivée partielle :

Définition I.1.9 *D est un ouvert de \mathbb{R}^2 , $(x_0, y_0) \in D$, f est définie sur D , on appelle dérivée partielle de f par rapport à x en (x_0, y_0) , si elle existe, le réel noté*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M_0),$$

défini par

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

De la même manière on définit :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}.$$

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Pour calculer les dérivées partielles lorsqu'elles existent, par exemple $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, la variable y est fixée à y_0 . Si on note $f_1(x) = f(x, y_0)$, $f_2(y) = f(x_0, y)$, alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = \frac{df_1}{dx}(x_0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = \frac{df_2}{dy}(y_0)$$

Montrer cette propriété en exercice.

Faites attention à la différence de notation entre dérivée partielle ∂ et dérivée d .

Contrairement à ce qui se passe pour les fonctions d'une variable, il n'y a pas équivalence entre la différentiabilité et l'existence de dérivées partielles, voir le paragraphe suivant.

Dérivées partielles

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Différentiabilité-continuité-dérivées partielles

Exercices :

[Exercice A.1.19](#)

[Exercice A.1.20](#)

[Exercice A.1.21](#)

Contrairement à ce qui se passe pour les fonctions d'une variable, la propriété de différentiabilité et l'existence de dérivées partielles ne sont plus des notions équivalentes, on a seulement l'implication suivante.

Théorème I.1.1 *Si f est différentiable au point M_0 alors elle admet des dérivées partielles premières en M_0 .*

Démontrer ce théorème en exercice.

Géométriquement, on peut montrer que si f est différentiable en (x_0, y_0) , la surface S d'équation $z = f(x, y)$ admet un plan tangent au point

$P_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, donc toute courbe tracée sur S et passant par le point P_0 admet une droite tangente en P_0 (cette droite est contenue dans le plan tangent). En particulier les courbes C_1 et C_2 définies dans la remarque [I.1.1](#) ont cette propriété, on retrouve donc que f_1 et f_2 sont dérivables, donc que les dérivées partielles existent.

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Théorème I.1.2 *Si f est différentiable au point M_0 , elle est continue en M_0 .*

Démontrer ce théorème en exercice.

Il n'y a pas de d'implication entre l'existence de dérivées partielles et la propriété de continuité.

La fonction définie par $\begin{cases} f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ f(0, 0) = 0 \end{cases}$ n'est pas continue en $(0, 0)$, mais elle admet des dérivées partielles en $(0, 0)$.

Revoir les interprétations géométriques des 2 propriétés pour se convaincre qu'il n'existe pas de lien entre les 2.

Différentiabilité- continuité- dérivées partielles

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Condition suffisante de différentiabilité

Exercices :

[Exercice A.1.22](#)

[Exercice A.1.23](#)

Théorème I.1.3 *Si f admet des dérivées partielles premières continues dans un voisinage de $M_0(x_0, y_0)$, alors elle est différentiable en $M_0(x_0, y_0)$.*

Démonstration. On reprend la définition de la différentiabilité I.1.8. Il s'agit donc d'établir une formule du type (I.1.1) en partant de l'existence des dérivées partielles. On peut décomposer :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) + f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0).$$

On peut donc commencer par écrire (c'est la partie facile !) :

$$f(x_0 + h, y_0) = f(x_0, y_0) + h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + |h| \varepsilon_1(h).$$

Il suffit en effet d'écrire que la fonction $f_1(x) = f(x, y_0)$ est dérivable en x_0 .

Comme les dérivées partielles de f existent dans un voisinage de M_0 , pour h assez petit, la fonction $f_2(y) = f(x_0 + h, y)$ est dérivable en y_0 et on peut invoquer

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)



Il est clair que $\varepsilon(h, k)$ vérifie bien la propriété I.1.1 de la définition puisque

$$|\varepsilon(h, k)| \leq \frac{|h|}{\sqrt{h^2 + k^2}} |\varepsilon_1(h)| + \frac{|k|}{\sqrt{h^2 + k^2}} |\varepsilon_2(h, k)| \leq |\varepsilon_1(h)| + |\varepsilon_2(h, k)|$$

Ce qui termine la démonstration.

Définition I.1.10 *On dit qu'une fonction f est continûment différentiable sur un ouvert D si f admet des dérivées partielles continues sur D .*

**Condition
suffisante de
différentiabi-
lité**

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Dérivées partielles d'ordre supérieur

Exercices :

[Exercice A.1.24](#)

Si f est différentiable sur D ouvert de \mathbb{R}^2 , les dérivées partielles premières de f peuvent être considérées comme des fonctions de D dans \mathbb{R} , si elles sont différentiables, on peut calculer les dérivées partielles de ces fonctions, par exemple

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + h, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{h},$$

On peut définir de façon similaire $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ ainsi que les dérivées partielles croisées

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right).$$

Théorème I.1.4 (de symétrie de SCHWARZ) *Si f admet des dérivées partielles secondes au voisinage de (x_0, y_0) et si les dérivées partielles croisées $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sont continues en (x_0, y_0) alors elles sont égales en ce point.*

Ce théorème est admis.

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Composition et dérivation

Exercices :

[Exercice A.1.25](#)

[Exercice A.1.26](#)

[Exercice A.1.27](#)

[Exercice A.1.28](#)

Revoir la dérivée des fonctions composées dans le cas des fonctions d'une variable. On va maintenant énoncer quelques résultats sur les composées de fonctions de deux variables.

1^{er} Cas.

Proposition I.1.11 Soient α et β deux fonctions réelles et soit

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. On définit $\phi(t) = f(\alpha(t), \beta(t))$. Si f est différentiable au point $(\alpha(t_0), \beta(t_0))$ et si les fonctions α et β sont dérivables au point t_0 alors ϕ est dérivable en t_0 et on a :

$$\phi'(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha(t_0), \beta(t_0))\alpha'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha(t_0), \beta(t_0))\beta'(t_0)$$

Démonstration. $\phi(t_0 + h) = f(\alpha(t_0 + h), \beta(t_0 + h))$

α, β sont des fonctions dérivables en t_0 , donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial v}(u_0, v_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(a(u_0, v_0), b(u_0, v_0)) \frac{\partial a}{\partial v}(u_0, v_0) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial y}(a(u_0, v_0), b(u_0, v_0)) \frac{\partial b}{\partial v}(u_0, v_0) \end{aligned}$$

3^{me} Cas.

Proposition I.1.13 Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable au point (x_0, y_0) ,

soit α une fonction réelle dérivable au point $f(x_0, y_0)$,

on définit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par $g(x, y) = \alpha(f(x, y))$,

alors g est différentiable en (x_0, y_0) et on a :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \alpha'(f(x_0, y_0))$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \alpha'(f(x_0, y_0))$$

On verra à la fin de ce chapitre que tous ces cas particuliers sont inutiles, et que l'on peut énoncer un théorème général sur les composées des fonctions de plusieurs variables.

Composition et dérivation

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Différentielle

Si f est différentiable en (x_0, y_0) , l'application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par :

$$(h, k) \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k$$

est une application dite linéaire de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} . Cette application est appelée la différentielle de f au point (x_0, y_0) et se note $df(x_0, y_0)$.

Si l'on prend comme fonction f l'application $f(x, y) = x$ (resp. $f(x, y) = y$), la différentielle de cette fonction, que l'on note dx (resp. dy) est définie par :

$$dx(x_0, y_0)(h, k) = h \text{ (resp. } dy(x_0, y_0)(h, k) = k).$$

D'où l'on a

$$df(x_0, y_0)(h, k) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx(x_0, y_0)(h, k) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy(x_0, y_0)(h, k), \quad \forall (h, k)$$

donc

$$df(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy(x_0, y_0),$$

ce qui explique la notation

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents



Si on reprend la définition de la différentiabilité on a

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = df(x_0, y_0)(h, k) + \|(h, k)\|\varepsilon(h, k)$$

Si on définit la fonction g par

$$g(h, k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$$

Alors la fonction g est approchée par l'application linéaire $df(x_0, y_0)$. Vous aurez l'occasion de définir et d'étudier les applications linéaires dans l'UV d'algèbre linéaire.

Différentielle

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Formule des accroissements finis-formule de Taylor

Exercices :

[Exercice A.1.29](#)

[Exercice A.1.30](#)

formule des accroissements finis

Revoir la formule des accroissements finis pour une fonction d'une variable.
On rappelle que si f est une fonction différentiable en (x_0, y_0) , on a :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \sqrt{(h^2 + k^2)} \varepsilon(h, k) \text{ avec } \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(h, k) = 0$$

Si on suppose maintenant que f est une fonction définie et différentiable sur un disque ouvert D de centre (x_0, y_0) , pour $(x_0 + h, y_0 + k) \in D$, on a la formule des accroissements finis :

$\exists \theta \in]0, 1[$ tel que

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)$$

Pour démontrer ce résultat, on définit la fonction réelle ϕ par

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)



$\phi(t) = f(x_0 + ht, y_0 + kt)$, on applique la formule des accroissements finis à la fonction réelle ϕ et on en déduit la formule des accroissements finis pour la fonction de 2 variables f . Traiter cette démonstration en exercice.

Formule de Taylor à l'ordre 2 On peut maintenant énoncer la formule de Taylor à l'ordre 2 :

On suppose que f admet des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre 2 sur un disque ouvert D de centre (x_0, y_0) , pour $(x_0 + h, y_0 + k) \in D$:

Il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{1}{2} \left(h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^*, y^*) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x^*, y^*) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x^*, y^*) \right)$$

avec $x^* = x_0 + \theta h, y^* = y_0 + \theta k$

Puisque les dérivées partielles secondes sont continues en (x_0, y_0) , on peut écrire une autre version de la formule de Taylor :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{1}{2} \left(h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \right) + (h^2 + k^2)\varepsilon(h, k)$$

avec $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(h, k) = 0$

Formule des accroissements finis-formule de Taylor

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Formule de Taylor à l'ordre n Si f admet des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre n sur un disque ouvert D de centre (x_0, y_0) , pour $(x_0 + h, y_0 + k) \in D$, on obtient la formule de Taylor à l'ordre n :
Il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) &= f(x_0, y_0) + h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \right) \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)(h, k) \end{aligned}$$

où

$$f^{(m)}(x_0, y_0)(h, k) = \sum_{p=0}^m C_m^p h^p k^{m-p} \frac{\partial^m f}{\partial x^p \partial y^{m-p}}(x_0, y_0)$$

$(1 \leq m \leq n)$.

Puisque les dérivées partielles n -ièmes de f sont continues, on peut écrire

$$f^n(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)(h, k) = f^n(x_0, y_0)(h, k) + (h^2 + k^2)^{\frac{n}{2}} \varepsilon(h, k).$$

$f^m(x, y)(h, k)$ est un polynôme en h, k homogène de degré m .

**Formule des
accroisse-
ments
finis-formule
de Taylor**

[Sommaire
Concepts](#)

[Exemples
Exercices
Documents](#)

Calcul approché

Exercices :

[Exercice A.1.31](#)

Si on suppose connues les valeurs de la fonction f et de ses dérivées en (x_0, y_0) , la valeur (inconnue) $f(x_0 + h, y_0 + k)$ est donnée par la formule de Taylor :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = A(h, k) + R(h, k)$$

où

- $A(h, k)$ est un polynôme en h et k "facile" à calculer.
- $R(h, k) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)(h, k)$, appelé reste, est un terme que la formule de Taylor ne permet pas de calculer car on ne connaît pas θ . Mais ce reste est petit, d'autant plus petit que n est grand. Si par exemple $h = k = 10^{-1}$, alors $h^p k^{n-p} = 10^{-n}$, donc $f^{(n)}$ qui est un polynôme homogène de degré n est de l'ordre de 10^{-n} .

$A(h, k)$ permet donc d'obtenir une approximation de $f(x_0 + h, y_0 + k)$ d'autant meilleure que n est grand.

Une des approximations les plus utilisées est celle au premier ordre :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) \approx f(x_0, y_0) + h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Théorème des fonctions implicites

Exercices :

[Exercice A.1.32](#)

Documents :

[Document B.1](#)

Une courbe du plan xOy peut avoir une équation cartésienne explicite $y = \phi(x)$ ou une équation cartésienne implicite $f(x, y) = 0$. Nous reverrons cela dans le chapitre "Courbes et surfaces".

Est-il possible de passer d'une équation à l'autre ?

Par exemple $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ est l'équation implicite d'un cercle, est-il possible de trouver une équation explicite $y = \phi(x)$ de ce même cercle ?

Théorème I.1.5 *Soit f une fonction $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continûment différentiable, soit (x_0, y_0) un point tel que $f(x_0, y_0) = 0$.*

On suppose que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \neq 0 \text{ dans un voisinage de } (x_0, y_0) \quad (\text{I.1.2})$$

Alors il existe un voisinage V de (x_0, y_0) de la forme $I \times J$ où I et J désignent des intervalles de \mathbb{R} et une fonction $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall (x, y) \in I \times J, \quad f(x, y) = 0 \iff y = \phi(x)$$

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Si de plus la fonction f est différentiable, alors la fonction ϕ est dérivable sur I et sa dérivée est donnée par :

$$\phi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \phi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \phi(x))}. \quad (\text{I.1.3})$$

Voir en document une démonstration partielle de théorème, c'est à dire lorsque l'on admet l'existence et la continuité de ϕ , vous y trouverez une démonstration de la dérivabilité de ϕ .

On va maintenant donner une démonstration "encore plus partielle", on suppose que ϕ existe et est dérivable. On va calculer ϕ' .

D'après la définition de ϕ , on a $\forall x \in I, f(x, \phi(x)) = 0$

Si on définit $g(x) = f(x, \phi(x))$, g est dérivable, pourquoi ?

De plus $\forall x \in I, g(x) = 0 \Rightarrow \forall x \in I, g'(x) = 0$

Calculer $g'(x)$ et conclure.

Evidemment le théorème ne traite pas x et y de manière symétrique. On peut échanger leurs rôles et sous l'hypothèse $\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) \neq 0$, trouver une représentation locale de S sous la forme $x = \psi(y)$.

Il y a évidemment des situations où, simultanément on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = 0$$

et là il est possible qu'il n'y ait pas de paramétrage ni en fonction de x ni en fonction de y .

Théorème des fonctions implicites

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

On peut appliquer le théorème [I.1.5](#) au calcul de la tangente à la courbe $f(x, y) = 0$. En un point (x_0, y_0) de $I \times J$ la tangente s'écrit

$$y - y_0 = \phi'(x_0)(x - x_0)$$

soit en remplaçant

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_0) = 0.$$

Théorème des fonctions implicites

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Extrema d'une fonction de deux variables

Exercices :

[Exercice A.1.33](#)

Revoir la notion d'extrema dans le chapitre dérivation de MT21

Soit f une fonction $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, on cherche un point (x^*, y^*) qui réalise le **minimum** de f , c'est-à-dire tel que

$$f(x^*, y^*) \leq f(x, y), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

On dit alors que (x^*, y^*) réalise un minimum global pour f . Si on a seulement la propriété pour (x, y) appartenant à un voisinage de (x^*, y^*) , on parle de minimum local.

Théorème I.1.6 *Si f est différentiable, une condition nécessaire d'optimalité est*

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) = 0. \end{cases}$$

Démonstration Si (x^*, y^*) réalise le minimum de f on a

$$f(x^* + h, y^*) - f(x^*, y^*) \geq 0,$$

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)



ou

$$\frac{f(x^* + h, y^*) - f(x^*, y^*)}{h} \geq 0,$$

pour $h > 0$. Soit en passant à la limite quand $h \rightarrow 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) \geq 0.$$

De même en prenant $h < 0$, on obtiendrait $\frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) \leq 0$, d'où

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) = 0 \text{ et de même } \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) = 0.$$

ATTENTION : La condition

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*), \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) \right) = (0, 0)$$

n'est pas une condition suffisante.

Exemple I.1.1 $f(x, y) = xy$. Montrer que le point $(0, 0)$ vérifie les conditions nécessaires d'optimalité. Montrer que $(0, 0)$ n'est ni un minimum ni un maximum pour f .

Si f admet des dérivées partielles secondes continues, pour voir si on est en présence d'un extremum, on peut appliquer la formule de Taylor à l'ordre 2 à la

**Extrema
d'une
fonction de
deux
variables**

[Sommaire
Concepts](#)

[Exemples
Exercices
Documents](#)

fonction f . On obtient :

$$\begin{aligned}
 f(x^* + h, y^* + k) &= f(x^*, y^*) \\
 &+ \frac{1}{2} \left(h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^*, y^*) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x^*, y^*) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x^*, y^*) \right) \\
 &+ (h^2 + k^2)\varepsilon(h, k) \text{ avec } \lim_{(h,k) \rightarrow 0} \varepsilon(h, k) = 0
 \end{aligned}$$

On a utilisé les conditions d'optimalité, donc les dérivées partielles premières sont nulles.

On note :

$$\begin{aligned}
 A &= f(x^* + h, y^* + k) - f(x^*, y^*). \\
 A_1 &= \left(h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^*, y^*) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x^*, y^*) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x^*, y^*) \right) \\
 A_2 &= (h^2 + k^2)\varepsilon(h, k) \text{ avec } \lim_{(h,k) \rightarrow 0} \varepsilon(h, k) = 0
 \end{aligned}$$

On admet que pour h et k suffisamment petits, le terme A_2 est négligeable devant $\frac{A_1}{2}$ si ce terme n'est pas nul, il suffit de comparer les ordres de ces infiniment petits pour s'en convaincre.

Pour h et k suffisamment petits, le signe de $A = f(x^* + h, y^* + k) - f(x^*, y^*)$ est donc donné par le signe de A_1 .

On aura donc :

$$\text{si } \left(h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^*, y^*) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x^*, y^*) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x^*, y^*) \right) > 0, \forall (h, k) \neq (0, 0)$$

**Extrema
d'une
fonction de
deux
variables**

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

alors (x^*, y^*) un minimum local pour f ,

$$\text{si } \left(h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^*, y^*) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x^*, y^*) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x^*, y^*) \right) < 0, \forall (h, k) \neq (0, 0)$$

alors (x^*, y^*) un maximum local pour f .

Voyons comment étudier le signe de A_1 , on note

$$a = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^*, y^*), b = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x^*, y^*), c = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x^*, y^*)$$

$$A_1(h, k) = ah^2 + 2bhk + ck^2.$$

Supposons que $k \neq 0$, on met k^2 en facteur, on se ramène à étudier le signe de

$$B_1(t) = at^2 + 2bt + c, \text{ avec } t = \frac{h}{k}.$$

Pour étudier le signe de ce trinôme, on calcule son discriminant

$$\Delta = 4(b^2 - ac).$$

1. si $\Delta < 0$, cela suppose en particulier que a et c sont de même signe et non nuls .

(a) si $a > 0, B_1(t) > 0, \forall t$, donc $A_1(h, k) > 0, \forall (h, k) \neq (0, 0)$, en effet on vient de démontrer cette propriété pour $k \neq 0$, elle est encore vraie quand $k = 0$, puisque dans ce cas $A_1(h, k) = ah^2$.

On en déduit que $A = f(x^* + h, y^* + k) - f(x^*, y^*)$ est positif pour h et k petits donc que (x^*, y^*) est un minimum local.

Extrema d'une fonction de deux variables

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

(b) si $a < 0$, on démontre de façon analogue que $A_1(h, k) < 0, \forall (h, k) \neq (0, 0)$

On en déduit que $A = f(x^* + h, y^* + k) - f(x^*, y^*)$ est négatif pour h et k petits donc que (x^*, y^*) est un maximum local.

2. si $\Delta > 0$, B_1 change de signe, donc A_1 change de signe, donc A change de signe, il n'y a donc pas d'extremum en (x^*, y^*) .
3. si $\Delta = 0$, B_1 ne change pas de signe, mais B_1 donc A_1 peut s'annuler et alors le signe de A est donné par A_2 , il faudrait faire une étude supplémentaire.

Extrema d'une fonction de deux variables

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

I.2 Fonctions de plusieurs variables

Eléments de topologie de \mathbb{R}^n	47
Continuité et différentiabilité	48
Composition et dérivation des fonctions de plusieurs variables	50
Extrema d'une fonction de plusieurs variables	51

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Eléments de topologie de \mathbb{R}^n

On a maintenant une fonction f qui est une fonction de n variables x_1, x_2, \dots, x_n .

A partir de maintenant $M \in \mathbb{R}^n$, donc $M = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Toutes les notions introduites dans \mathbb{R}^2 demeurent valables.

On note $O = (0, \dots, 0)$. Définissons la norme euclidienne d'un vecteur de \mathbb{R}^n ,

$$\left\| \overrightarrow{OM} \right\| = \|(x_1, \dots, x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

On définit les boules ouvertes de centre $A \in \mathbb{R}^n$ et de rayon $\rho > 0$ par :

$$B(A, \rho) = \{M \in \mathbb{R}^n : \left\| \overrightarrow{AM} \right\| < \rho\}.$$

Cette notion de boule que l'on vient de définir dans \mathbb{R}^n généralise la notion de boule que vous connaissez déjà dans \mathbb{R}^3 .

On définit les ouverts, les fermés, les voisinages de façon similaire en remplaçant disque ouvert par boule ouverte.

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Continuité et différentiabilité

Exercices :

[Exercice A.1.34](#)

[Exercice A.1.35](#)

Notations. Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, on la notera $f(x_1, \dots, x_n)$ ou plus simplement $f(M)$.

Définition I.2.1 D est un ouvert de $\mathbb{R}^n, M^* \in D$, on dit qu'une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue au point M^* , si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall M \in D, \left\{ \left\| \overrightarrow{M^*M} \right\| < \eta \implies |f(M) - f(M^*)| < \varepsilon \right\}.$$

Définition I.2.2 D est un ouvert de $\mathbb{R}^n, M^* \in D$, on dit qu'une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable au point M^* appartenant à D , s'il existe des constantes A_1, \dots, A_n et une fonction ε de n variables telles que, pour $(x_1^* + h_1, x_2^* + h_2, \dots, x_n^* + h_n) \in D$, on puisse écrire

$$\begin{aligned} f(x_1^* + h_1, x_2^* + h_2, \dots, x_n^* + h_n) &= f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) + \sum_{i=1}^n A_i h_i \\ &\quad + \|(h_1, \dots, h_n)\| \varepsilon(h_1, \dots, h_n). \end{aligned}$$

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

avec $\lim_{(h_1, \dots, h_n) \rightarrow (0, \dots, 0)} \varepsilon(h_1, \dots, h_n) = 0$

Comme dans \mathbb{R}^2 , il est facile de montrer que si la fonction est différentiable au point M^* , elle possède en ce point des dérivées partielles premières et l'on a

$$A_1 = \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{f(x_1^* + h_1, x_2^* \dots, x_n^*) - f(x_1^*, x_2^* \dots, x_n^*)}{h_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(M^*)$$

On définirait les autres dérivées partielles de façon similaire et on aurait :

$$A_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(M^*)$$

Les dérivées partielles d'ordre supérieur sont définies comme dans \mathbb{R}^2 .

Les théorèmes reliant continuité, différentiabilité et existence de dérivées partielles énoncés pour les fonctions de deux variables réelles s'étendent aux fonctions de n variables.

Continuité et différentiabilité

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Composition et dérivation des fonctions de plusieurs variables

Exercices :

[Exercice A.1.36](#)

[Exercice A.1.37](#)

La situation générale est la suivante :

Proposition I.2.1 Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur \mathbb{R}^n

Soient $\begin{cases} g_1 : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R} \\ \dots \\ g_n : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R} \end{cases}$ n fonctions différentiables sur \mathbb{R}^p .

On définit $\psi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\psi(u_1, \dots, u_p) = f(g_1(u_1, \dots, u_p), \dots, g_n(u_1, \dots, u_p))$$

alors ψ est différentiable et on a pour $(i = 1, \dots, p)$

$$\frac{\partial \psi}{\partial u_i}(u_1, \dots, u_p) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(g_1(u_1, \dots, u_p), \dots, g_n(u_1, \dots, u_p)) \frac{\partial g_j}{\partial u_i}(u_1, \dots, u_p).$$

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Extrema d'une fonction de plusieurs variables

Soit f une fonction $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, on cherche un point x^* qui réalise le minimum de f , c'est-à-dire tel que

$$f(x^*) \leq f(x), \forall (x) \in \mathbb{R}^n.$$

Théorème I.2.1 *Une condition nécessaire d'optimalité est*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) = 0, \quad 1 \leq i \leq n$$

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Annexe A

Exercices

A.1	Exercices de cours	54
A.2	Exercices de TD	93

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

A.1 Exercices de cours

A.1.1	Chap1-Exercice1	55
A.1.2	Chap1-Exercice2	56
A.1.3	Chap1-Exercice3	57
A.1.4	Chap1-Exercice4	58
A.1.5	Chap1-Exercice5	59
A.1.6	Chap1-Exercice6	60
A.1.7	Chap1-Exercice7	61
A.1.8	Chap1-Exercice8	62
A.1.9	Chap1-Exercice9	63
A.1.10	Chap1-Exercice10	64
A.1.11	Chap1-Exercice11	65
A.1.12	Chap1-Exercice12	66
A.1.13	Chap1-Exercice13	67
A.1.14	Chap1-Exercice14	68
A.1.15	Chap1-Exercice15	69
A.1.16	Chap1-Exercice16	70
A.1.17	Chap1-Exercice17	71
A.1.18	Chap1-Exercice18	72
A.1.19	Chap1-Exercice19	73
A.1.20	Chap1-Exercice20	74

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

A.1.21	Chap1-Exercice21	75
A.1.22	Chap1-Exercice22	76
A.1.23	Chap1-Exercice23	77
A.1.24	Chap1-Exercice24	78
A.1.25	Chap1-Exercice25	79
A.1.26	Chap1-Exercice26	80
A.1.27	Chap1-Exercice27	81
A.1.28	Chap1-Exercice28	82
A.1.29	Chap1-Exercice29	83
A.1.30	Chap1-Exercice30	84
A.1.31	Chap1-Exercice31	85
A.1.32	Chap1-Exercice32	86
A.1.33	Chap1-Exercice33	87
A.1.34	Chap1-Exercice34	88
A.1.35	Chap1-Exercice35	89
A.1.36	Chap1-Exercice36	90
A.1.37	Chap1-Exercice37	91

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.1 Chap1-Exercice1

Représenter dans \mathbb{R}^2 les domaines de définition des fonctions suivantes :

– $f(x, y) = \ln\left(y - \frac{x}{2}\right)$

– $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.2 Chap1-Exercice2

On définit les ensembles :

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 1\}, F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 1\}, G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 2 \geq x > 1\}.$$

$\emptyset, \mathbb{R}^2, E, F, G$ sont-ils des ouverts ? Justifier votre réponse.

[Solution](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.1.3 Chap1-Exercice3

On définit les ensembles :

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 1\}, F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 1\}, G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 2 \geq x > 1\}.$$

$\emptyset, \mathbb{R}^2, E, F, G$ sont-ils des fermés ? Justifier votre réponse.

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.4 Chap1-Exercice4

1. Soient $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ deux ouverts de \mathbb{R}^2 , on suppose que leur intersection n'est pas vide, on note $\mathcal{O} = \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$, soit A un point quelconque de \mathcal{O} montrer qu'il existe un disque ouvert de centre A et de rayon $\rho, \rho > 0$ contenu dans \mathcal{O} . On pourra s'aider d'une figure, bien préciser ce que vaut ρ .
2. Soient $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \dots, \mathcal{O}_n$ n ouverts de \mathbb{R}^2 , on suppose que leur intersection n'est pas vide, on note $\mathcal{O} = \bigcap_{i=1}^n \mathcal{O}_i$, soit A un point quelconque de \mathcal{O} montrer qu'il existe un disque ouvert de centre A et de rayon $\rho, \rho > 0$ contenu dans \mathcal{O} , bien préciser ce que vaut ρ .
3. En déduire que l'intersection d'un nombre fini d'ouverts est un ouvert.
4. La démonstration que vous venez de faire dans le cas d'un nombre fini d'ouverts, serait-elle encore valable avec un nombre infini d'ouverts ?
5. A est un point fixé, on appelle \mathcal{O}_i le disque ouvert de centre A et de rayon $1/i$. Montrer que $\{A\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{O}_i$. L'ensemble $\{A\}$ est-il un ouvert ?

[Solution](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.1.5 Chap1-Exercice5

Rappeler la définition de la continuité pour une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

[Solution](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.1.6 Chap1-Exercice6

Utiliser la définition pour montrer que la fonction définie par $f(x, y) = x^2 + y^2$ est continue en $(0, 0)$.

[Solution](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.1.7 Chap1-Exercice7

f est une fonction de 2 variables continue en (x_0, y_0) .

On définit les fonctions d'une variable f_1 et f_2 par $f_1(x) = f(x, y_0)$, $f_2(y) = f(x_0, y)$

Montrer que f_1 est continue en x_0 et que f_2 est continue en y_0 .

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.8 Chap1-Exercice8

Montrer que la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x, y) = 2 & \text{si } x \leq 1 \\ f(x, y) = 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ n'est pas continue en $(1, y_0)$ (y_0 est un nombre réel quelconque).

Représenter graphiquement la surface d'équation $z = f(x, y)$.

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.9 Chap1-Exercice9

Montrer que la proposition [I.1.3](#) est un cas particulier de la proposition [I.1.5](#).
Pour f_1 comment faut-il choisir les fonctions α et β ? Pour f_2 comment faut-il choisir les fonctions α et β ?

[Solution](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.1.10 Chap1-Exercice10

Démontrer la proposition [I.1.8](#).

[Solution](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.1.11 Chap1-Exercice11

On définit la fonction f par :

$$f(x, y) = \frac{x^3 y}{x^2 + y^2}, \text{ si } (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 0.$$

On note $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$.

1. Montrer que $|f(M) - f(O)| \leq r^2$.
2. En déduire que f est continue en O .

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.12 Chap1-Exercice12

On définit la fonction f par :

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \text{ si } (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 0.$$

1. On définit la fonction réelle ϕ par $\phi(t) = f(t, 0)$, la fonction ϕ est-elle continue en 0? Est-il possible, sans calculs supplémentaires, de conclure quant à la continuité de f en $(0, 0)$?
2. On définit la fonction réelle ϕ par $\phi(t) = f(t, t)$, la fonction ϕ est-elle continue en 0? Est-il possible, sans calculs supplémentaires, de conclure quant à la continuité de f en $(0, 0)$?

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.13 Chap1-Exercice13

On définit f par :
$$\begin{cases} f(x, y) = \frac{x^2}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ f(x, 0) = 0 \end{cases}$$

La fonction f est-elle continue en $(0, 0)$?

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.14 Chap1-Exercice14

Utiliser la définition pour montrer que la fonction définie par $f(x, y) = x^2 + y^2$ est différentiable en $(0,0)$. Préciser ce que valent A et B .

[Solution](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.1.15 Chap1-Exercice15

1. x_0, y_0 sont 2 nombres réels donnés, montrer que la fonction définie par

$$\varepsilon(h, k) = \frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}}(y_0h + 2x_0k + hk) \text{ pour } (h, k) \neq 0$$

tend vers 0 quand (h, k) tend vers $(0, 0)$.

2. En déduire que la fonction f définie par $f(x, y) = x^2y$ est différentiable en (x_0, y_0) . Préciser ce que valent A et B .

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.16 Chap1-Exercice16

f est une fonction différentiable en (x_0, y_0) , on définit $f_1(x) = f(x, y_0)$, $f_2(y) = f(x_0, y)$.

Montrer que f_1 est dérivable en x_0 et que $\frac{df_1}{dx}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)$. Montrer que f_2 est dérivable en y_0 et que $\frac{df_2}{dy}(y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)$.

Solution

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.1.17 Chap1-Exercice17

Calculer les dérivées partielles en (x_0, y_0) des fonctions

$$f(x, y) = x^3y^5, f(x, y) = \sin(xy^2)$$

[Solution](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.1.18 Chap1-Exercice18

On définit la fonction f par :

$$\begin{cases} f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ f(0, 0) = 0 \end{cases}$$

1. Calculer les dérivées partielles de f en $(0, 0)$.
2. Calculer les dérivées partielles de f en $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$.

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.19 Chap1-Exercice19

Montrer la propriété suivante :

Si f est différentiable au point M_0 alors elle admet des dérivées partielles premières en M_0 .

[Solution](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.1.20 Chap1-Exercice20

Montrer la propriété suivante : Si f est différentiable au point M_0 alors elle est continue en M_0 .

[Solution](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.1.21 Chap1-Exercice21

La fonction f définie par : $\begin{cases} f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ f(0, 0) = 0 \end{cases}$ est-elle différentiable en $(0, 0)$?

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.22 Chap1-Exercice22

Donner une condition nécessaire pour que f soit différentiable en (x_0, y_0) ,
donner une condition suffisante pour que f soit différentiable en (x_0, y_0) .

[Solution](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.1.23 Chap1-Exercice23

On définit les propositions suivantes :

1 : f est continue en (x_0, y_0) .

2 : f est différentiable en (x_0, y_0) .

3 : f admet des dérivées partielles en (x_0, y_0) .

4 : f admet des dérivées partielles continues dans un voisinage de (x_0, y_0) .

Donner des implications correctes entre ces 4 propositions.

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.24 Chap1-Exercice24

Soit $f(x, y) = 2xy^3$, calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$.

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.25 Chap1-Exercice25

1. f est une fonction différentiable dont on note $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ les dérivées partielles, on définit $\phi(t) = f(\cos t, \sin t)$.
Montrer que ϕ est une fonction réelle dérivable, calculer sa dérivée ϕ' .
2. On choisit $f(x, y) = x^2 + y^2$, vérifier que dans ce cas particulier $\phi'(t) = 0 \quad \forall t$.

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.26 Chap1-Exercice26

f est une fonction différentiable dont on note $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ les dérivées partielles, x_0, y_0, h, k sont des réels donnés, on définit $\phi(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk)$.

Montrer que ϕ est une fonction réelle dérivable, calculer sa dérivée ϕ' .

[Solution](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.1.27 Chap1-Exercice27

f est une fonction différentiable dont on note $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ les dérivées partielles, on définit $\psi(u, v) = f(u^2 - v^2, uv)$.

Montrer que ψ est différentiable, calculer ses dérivées partielles $\frac{\partial \psi}{\partial u}$, $\frac{\partial \psi}{\partial v}$.

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.28 Chap1-Exercice28

f est une fonction différentiable dont on note $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ les dérivées partielles, on définit $\psi(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$

1. Montrer que ψ est différentiable, exprimer les dérivées partielles $\frac{\partial \psi}{\partial r}(r, \theta), \frac{\partial \psi}{\partial \theta}(r, \theta)$ à l'aide des dérivées partielles de f .
2. On suppose $r \neq 0$, montrer qu'il est possible d'exprimer les dérivées partielles de f à l'aide des dérivées partielles de ψ . Bien préciser dans chacun des cas en quel point on évalue les dérivées partielles.

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.29 Chap1-Exercice29

f est une fonction différentiable sur \mathbb{R}^2 , on définit $\phi(t) = f(x_0 + ht, y_0 + kt)$.

1. Calculer $\phi(0), \phi(1)$.
2. Calculer $\phi'(t)$, revoir l'exercice [A.1.26](#) .
- 3.

$$\exists \theta \in]0, 1[, \phi(1) = \phi(0) + \phi'(\theta),$$

pourquoi ?

4. En déduire que

$$\exists \theta \in]0, 1[\text{ tel que } f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta h, y_0+\theta k) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0+\theta h, y_0+\theta k)$$

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.30 Chap1-Exercice30

f est une fonction 2 fois continûment différentiable sur \mathbb{R}^2 , on définit $\phi(t) = f(x_0 + ht, y_0 + kt)$.

1. Calculer $\phi''(t)$.
2. Démontrer la formule de Taylor à l'ordre 2.

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.31 Chap1-Exercice31

Quelle est l'approximation au premier ordre de l'aire d'un rectangle de longueur $L + \Delta L$ et de largeur $l + \Delta l$.

Montrer que l'aire exacte diffère de l'aire approchée d'un infiniment petit d'ordre $\Delta l \Delta L$

[Solution](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.1.32 Chap1-Exercice32

Appliquer le théorème [I.1.5](#) à la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. En quels points la condition [\(I.1.2\)](#) est-elle satisfaite? Déterminer ϕ dans ces cas. Que faire quand la condition [\(I.1.2\)](#) n'est pas satisfaite?

[Solution](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.1.33 Chap1-Exercice33

On définit $f(x, y) = x^2 + y^2(1 + \alpha) - 2xy - 2\alpha y + \alpha$ où α est un paramètre réel.

1. Enoncer les conditions nécessaires d'optimalité. Déterminer leur solution x^*, y^* .
2. (x^*, y^*) est-il un extremum ? Discuter suivant les valeurs du paramètre α .

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.34 Chap1-Exercice34

Appliquer la définition de la différentiabilité [I.2.2](#) avec $n = 2$, montrer que l'on retrouve bien la définition [I.1.8](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.1.35 Chap1-Exercice35

Calculer les dérivées partielles de la fonction de 3 variables

$$f(x, y, z) = x^2yz^5 + xz^2 + y^3$$

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.36 Chap1-Exercice36

Montrer que la proposition [I.2.1](#) est une généralisation des 3 propositions du paragraphe "[Composition et dérivation](#)". Reprendre ces propositions et préciser ce que vaut n , p et quelles sont les fonctions utilisées.

[Solution](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.1.37 Chap1-Exercice37

1. On rappelle les formules qui permettent d'obtenir les coordonnées cartésiennes à partir des coordonnées cylindriques :

$$\begin{cases} x = a(r, \theta, z) = r \cos \theta, & r \in \mathbb{R}^+, \\ y = b(r, \theta, z) = r \sin \theta, & \theta \in [0, 2\pi[, \\ z = c(r, \theta, z) = z, & z \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Soit f une fonction différentiable définie sur \mathbb{R}^3 , on note $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ ses dérivées partielles.

On définit

$$\psi(r, \theta, z) = f(a(r, \theta, z), b(r, \theta, z), c(r, \theta, z))$$

Caculer les dérivées partielles de ψ à l'aide des dérivées partielles de f .

2. Même question avec les coordonnées sphériques

$$\begin{cases} a(\rho, \theta, \phi) = \rho \cos \theta \cos \phi, & \rho \in \mathbb{R}^+, \\ b(\rho, \theta, \phi) = \rho \sin \theta \cos \phi, & \theta \in [0, 2\pi[, \\ c(\rho, \theta, \phi) = \rho \sin \phi, & \phi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

A.2 Exercices de TD

A.2.1	la science du remplacement	94
A.2.2	domaine de définition	95
A.2.3	continuité	96
A.2.4	continuité	97
A.2.5	continuité	98
A.2.6	continuité	99
A.2.7	dérivées directionnelles et différentiation	100
A.2.8	continuité et dérivées directionnelles	101
A.2.9	dérivées partielles	102
A.2.10	dérivées partielles	103
A.2.11	dérivées partielles	104
A.2.12	interprétation géométrique de la différentielle	105
A.2.13	différentielle, définition	106
A.2.14	calcul de différentielles	108
A.2.15	calcul de différentielles	109
A.2.16	forme générale des solutions de l'équation des ondes	110
A.2.17	passage en polaires et calcul des dérivées partielles	111
A.2.18	théorème de Schwarz	112
A.2.19	intégrer une différentielle ?	113
A.2.20	fonctions implicites	114

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

A.2.21	fonctions implicites	116
A.2.22	développement de Taylor	117
A.2.23	développement de Taylor et extrema	118

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.1 la science du remplacement

Soit $f(x, y) = x^2 - 4xy + 3y^2$. Calculer les expressions suivantes :

1. $f(-2, 3)$

2. $f(x, x)$

3. $f\left(\frac{1}{y}, \frac{2}{x}\right)$

4. $\forall h \neq 0, \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.2 domaine de définition

Déterminer (et on fera un beau dessin) le domaine de définition des fonctions suivantes :

1. $f(x, y) = \ln((9 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 1))$
2. $f(x, y) = \sqrt{6 - (2x + 3y)}$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.3 continuité

Etudier la continuité des fonctions de 2 variables suivantes en tout point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ (utiliser des théorèmes sur les sommes, produits, ..., de fonctions continues pour traiter rapidement le cas $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, on s'attardera sur le cas problématique $(x_0, y_0) = (0, 0)$).

$$(1) \begin{cases} f(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2} & , \forall (x, y) \neq (0, 0) \\ f(0, 0) = 0 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} f(x, y) = \frac{x^2}{x^2+y^2} & , \forall (x, y) \neq (0, 0) \\ f(0, 0) = 0 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} f(x, y) = \frac{x^3}{x^2+y^2} & , \forall (x, y) \neq (0, 0) \\ f(0, 0) = 0 \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} f(x, y) = \frac{y^2}{x} & , \text{ si } x \neq 0 \\ f(0, 0) = 0 \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} f(x, y) = \frac{1-\cos \sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} & , \forall (x, y) \neq (0, 0) \\ f(0, 0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$(6) \begin{cases} f(x, y) = \frac{1-\cos x}{x^2+y^2} & , \forall (x, y) \neq (0, 0) \\ f(0, 0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.4 continuité

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue au point $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

1. On suppose que $f(x) > 0$. Montrer qu'il existe alors un voisinage V de x tel que $f(t) > 0$ pour tout $t \in V$.
2. On suppose que $f(x) < 0$. Que dire de $f(t)$ pour t voisin de x ?
3. On suppose que $f(x) \neq 0$. Que dire de $f(t)$ pour t voisin de x ?
4. On suppose que $f(x) = 0$. Que dire de $f(t)$ pour t voisin de x ?

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.5 continuité

Soit $f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} (\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y))$, puis $\lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 1} f(x, y))$.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y))$, puis $\lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y))$.
3. Expliquer en étudiant la continuité de f . Proposer une définition pour la limite double

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.6 continuité

Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0 \text{ et } 0 < y < x^2\}$.

1. Montrer que toute droite passant par $(0, 0)$ contient un intervalle ouvert contenant $(0, 0)$ et contenu dans $\mathbb{R}^2 \setminus A$.
2. On définit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(x) = 0$ si $x \notin A$ et $f(x) = 1$ si $x \in A$. Pour tout $h \in \mathbb{R}^2$, on définit $g_h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $g_h(t) = f(th)$. Montrer que chaque g_h est continu en 0, mais que f n'est pas continu en $(0, 0)$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.7 dérivées directionnelles et différentiation

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. On rappelle que si, pour $a, x \in \mathbb{R}^n$, la limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tx) - f(a)}{t}$$

existe, on l'appelle dérivée directionnelle de f en a dans la direction x et on la note $D_x f(a)$.

1. Montrer que $D_{e_i} f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}$.
2. Montrer que $D_{tx} f(a) = t D_x f(a)$.
3. Si de plus f est différentiable en a , montrer que $D_x f(a) = df(a)x$. En déduire que $D_{x+y} f(a) = D_x f(a) + D_y f(a)$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.8 continuité et dérivées directionnelles

Soit la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x, y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2} & , \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ f(0, 0) = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f admet à l'origine des dérivées dans toutes les directions.
2. Montrer que f n'est pas continue à l'origine.
3. Conclure.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.9 dérivées partielles

Soit la fonction définie par $f(x, y) = x^3y + e^{xy^2}$. Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Commenter l'égalité des deux derniers résultats.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.10 dérivées partielles

Soit la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2} & , \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ f(0, 0) = 0 \end{cases}$$

1. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.
2. f est-elle continue à l'origine ? Commenter.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.11 dérivées partielles

Montrer que la fonction définie par $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ vérifie l'équation de Laplace dans $\mathbb{R}^3 \setminus 0$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

(Une telle équation s'appelle équation aux dérivées partielles)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.2.12 interprétation géométrique de la différentielle

Soit la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ M &\longmapsto f(M) = x^2y - 3y \end{aligned}$$

et examinons le graphe de f autour du point $M_0 = (2, 1)$.

1. Déterminer l'équation de la coupe du graphe de f par le plan d'équation $x = 2$. Calculer le coefficient directeur de la tangente à cette courbe au point de coordonnée $y = 1$. Faire un dessin.
2. Déterminer l'équation de la coupe du graphe de f par le plan d'équation $y = 1$. Calculer le coefficient directeur de la tangente à cette courbe au point de coordonnée $x = 2$. Faire un dessin.
3. Calculer $df(M_0)$. Donner l'équation du plan tangent au graphe de f en M_0 . Donner une base de ce plan.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.13 différentielle, définition

Soit une fonction $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$. On dit que f est bilinéaire si $\forall x, x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n, \forall y, y_1, y_2 \in \mathbb{R}^p, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f(\lambda x, y) &= \lambda f(x, y) = f(x, \lambda y) \\ f(x_1 + x_2, y) &= f(x_1, y) + f(x_2, y) \\ f(x, y_1 + y_2) &= f(x, y_1) + f(x, y_2) \end{aligned}$$

Ou autrement dit f est linéaire par rapport à chacune de ses deux variables $x \in \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^p$.

1. Montrer que si f est bilinéaire, alors

$$|f(h, k)| \leq |h| |k| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |f(e_i, u_j)|$$

où $(e_i)_{i=1, \dots, n}$ est la base canonique de \mathbb{R}^n et $(u_j)_{j=1, \dots, p}$ celle de \mathbb{R}^p . En déduire que

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{|f(h, k)|}{|(h, k)|} = 0$$

2. Montrer que si f est bilinéaire, alors elle est différentiable et $df(a, b)(h, k) = f(a, k) + f(h, b)$. Commenter l'analogie avec la formule donnant la dérivée d'un produit de fonctions dérivables, bien connue dans le cas d'une seule variable réelle.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents



3. En déduire les différentielles des applications suivantes :

– produit scalaire dans \mathbb{R}^3

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto p(u, v) = u \cdot v \end{aligned}$$

– produit vectoriel dans \mathbb{R}^3

$$\begin{aligned} b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto b(u, v) = u \wedge v \end{aligned}$$

Exercice

A.2.13

différentielle,
définition

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.2.14 calcul de différentielles

Calculer la différentielle (là où elle existe) des fonctions suivantes :

1. $f(x, y) = \sin(xy)$
2. $f(x, y) = \sin(x \sin y)$
3. $f(x, y) = x^y$
4. $f(x, y, z) = x^y$ (ce n'est pas une erreur d'énoncé)
5. $f(x, y, z) = x^{y+z}$
6. $f(x, y, z) = \sin(x \sin(y \sin z))$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.15 calcul de différentielles

Dans ce qui suit, f , g , h , k sont des fonctions différentiables. Dans chacun des cas suivants, dire pourquoi F est différentiable et calculer sa différentielle.

1. $F(x, y) = f(x + y)$
2. $F(x, y) = f(g(x)k(y), g(x) + h(y))$
3. $F(x, y, z) = f(g(x + y), h(y + z))$
4. $F(x, y) = f(x, g(x), h(x, y))$
5. $F(x, y) = f(g(x, y), h(x), k(y))$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.16 forme générale des solutions de l'équation des ondes

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 solution de l'équation aux dérivées partielles suivante, dite équation des ondes,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

dans laquelle c est une constante réelle positive qu'on interprète comme une vitesse.

1. Si on considère deux réels non nuls α et β , on peut faire le changement de variable suivant

$$\begin{aligned} t &= \alpha(u + v) \\ x &= \beta(u - v) \end{aligned}$$

et on pose $\phi(u, v) = f(\alpha(u + v), \beta(u - v))$. Montrer qu'il est possible de choisir α et β de telle sorte que l'équation des ondes devienne

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v} = 0$$

2. Résoudre cette équation en ϕ .
3. En déduire que la forme générale des solutions de l'équation des ondes est

$$f(t, x) = g(x + ct) + h(x - ct)$$

Exercice A.2.17 passage en polaires et calcul des dérivées partielles

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{3/2}$.

1. Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.
2. On utilise les coordonnées polaires habituelles pour exprimer $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$. Calculer $\frac{\partial g}{\partial r}$ et $\frac{\partial g}{\partial \theta}$. En déduire une expression de $\frac{\partial f}{\partial x}$ en fonction de r et θ que l'on notera $g_1(r, \theta)$.
3. De même, calculer $\frac{\partial g_1}{\partial r}$ et $\frac{\partial g_1}{\partial \theta}$, puis en déduire une expression de $\frac{\partial f^2}{\partial x^2}$ en fonction de r et θ . Comparer avec l'expression obtenue en 1.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.18 théorème de Schwarz

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & , \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ f(0, 0) = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = -y$ pour tout y et que $\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = x$ pour tout x .
2. Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$.
3. Commenter ce résultat en utilisant le théorème de Schwarz.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.19 intégrer une différentielle ?

1. De quelle fonction l'expression $(3x^2y - 2y^2)dx + (x^3 - 4xy + 6y^2)dy$ est-elle la différentielle.
2. Donner une condition nécessaire pour $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ soit la différentielle d'une fonction de classe \mathcal{C}^2 . Vérifier cette condition dans l'exemple précédent.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.20 fonctions implicites

Soit $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable.

1. Si on suppose que l'équation $F(x, y, z) = 0$ définit une fonction $z(x, y)$, montrer (sans utiliser les résultats du théorème des fonctions implicites) que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

dès que $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$.

2. Quelle condition suffit-il d'imposer à F pour que l'équation $F(x, y, z) = 0$ définisse une fonction $z(x, y)$ (utiliser le théorème des fonctions implicites) ?
3. En thermodynamique, on rencontre fréquemment une équation liant température, volume et pression d'un gaz du type $F(P, V, T) = 0$. En utilisant le théorème des fonctions implicites (on fera les hypothèses qui vont bien ...), montrer que :

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{V=cte} \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_{P=cte} = -\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_{T=cte}$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{V=cte} \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_{P=cte} \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{T=cte} = -1$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents



Vérifier ces relations pour la loi des gaz parfaits $PV = nRT$ où n et R sont des constantes.

4. Ecrire (et justifier) des relations analogues dans le cas d'une équation d'état à quatre variables $F(x, y, z, t) = 0$.

Exercice
A.2.20
fonctions
implicites

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.21 fonctions implicites

Si $U = x^3y$, déterminer $\frac{dU}{dt}$ dans le cas où on a les relations

$$\begin{cases} x^5 + y & = t \\ x^2 + y^3 & = t^2 \end{cases}$$

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.2.22 développement de Taylor

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^3 . Pour $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, on définit $\phi(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk)$. Ecrire la formule de Taylor à l'ordre 3 pour ϕ en $t = 0$. On écrira les dérivées de ϕ à l'aide de dérivées partielles de f . Que dire du reste ?
2. Soit $f(x, y) = x^2y + 3y - 2$. En utilisant un développement de Taylor à l'ordre 3, développer $f(x, y)$ en puissance de $(x - 1)$ et $(y + 2)$.
3. Développer $f(x, y) = f(x - 1 + 1, y + 2 - 2)$ pour retrouver le même résultat. Cette astuce convient-elle pour toute fonction de classe \mathcal{C}^3 ?

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.23 développement de Taylor et extrema

1. Déterminer les extrema (locaux) de $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$. Dans chaque cas, dire s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum.
2. Peut-on faire de même avec la fonction $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20 \cos(xy)$?

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Annexe B

Documents

B.1 Théorème des fonctions implicites 120

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Document B.1 Théorème des fonctions implicites

Théorème B.0.1 Soit f une fonction $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continûment différentiable, soit (x_0, y_0) un point tel que $f(x_0, y_0) = 0$.

On suppose que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \neq 0 \text{ dans un voisinage de } (x_0, y_0) \tag{B.1}$$

Alors il existe un voisinage V de (x_0, y_0) de la forme $I \times J$ où I et J désignent des intervalles de \mathbb{R} et une fonction $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ tels que pour tout $(x, y) \in I \times J$ on ait l'équivalence :

$$f(x, y) = 0 \iff y = \phi(x)$$

Si de plus la fonction f est différentiable, alors la fonction ϕ est dérivable sur I et sa dérivée est donnée par :

$$\phi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \phi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \phi(x))}. \tag{B.2}$$

Démonstration :

On suppose donc que la fonction ϕ existe, qu'elle est continue, et on veut montrer que ϕ est dérivable en tout point $a \in I$. Grâce aux hypothèses faites sur f , on peut écrire pour $x \neq 0$ assez petit :

$$f(a + x, \phi(a + x)) = f(a, \phi(a)) + x \frac{\partial f}{\partial x}(x', y') + [\phi(a + x) - \phi(a)] \frac{\partial f}{\partial y}(x', y')$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents



avec $x' = a + \theta x$, $y' = (1 - \theta)\phi(a) + \theta\phi(a + x)$, avec $0 < \theta < 1$. Mais, comme

$$f(a + x, \phi(a + x)) = f(a, \phi(a)) = 0$$

on a, après division par x ,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x', y') + \frac{\phi(a + x) - \phi(a)}{x} \frac{\partial f}{\partial y}(x', y') = 0.$$

Les dérivées partielles de f étant continues, on peut supposer, grâce à (B.1), que pour $M'(x', y') \in I \times J$ on a également $\frac{\partial f}{\partial y}(M') \neq 0$ et donc

$$\frac{\phi(a + x) - \phi(a)}{x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x', y')}{\frac{\partial f}{\partial y}(x', y')}$$

On peut alors passer à la limite, quand x tend vers 0, sur cette dernière relation, ce qui donne l'expression (B.2). Il faut noter que ce passage à la limite est licite grâce au fait que $y' \rightarrow \phi(a)$ quand $x \rightarrow 0$, ce qui résulte de la continuité de ϕ .

Document B.1

Théorème des fonctions implicites

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Index des concepts

Le gras indique un grain où le concept est défini ; l'italique indique un renvoi à un exercice ou un exemple, le gras italique à un document, et le romain à un grain où le concept est mentionné.

C

Calcul approché.....	37
Composition et continuité	13
Composition et dérivation	28
Composition et dérivation des fonctions de plusieurs variables.....	50
Condition suffisante de différentiabilité	24
Continuité et différentiabilité d'une fonc-	

tion de plusieurs variables ..	48
Continuité, définition.....	10
Continuité-étude.....	15
Continuité-propriétés.....	11

D

Dérivées partielles.....	20
Dérivées partielles d'ordre supérieur	27
Différentiabilité	18
Différentiabilité-continuité-dérivées par- tielles.....	22
Différentielle	32

E

Extrema	41
---------------	-----------

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)



Extrema d'une fonction de plusieurs variables **51**

F

Fonctions implicites **38**

N

Notations **6**

T

Taylor **34**

Topologie **8**

Topologie **47**

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)



Solution de l'exercice A.1.1

1. Il faut $y > \frac{x}{2}$
2. Il faut $|x| \leq 2$ et $|y| \leq 1$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.2

1. E est ouvert.
2. F est fermé, puisque $B^c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x < 1\}$ est ouvert.
3. G n'est ni ouvert, ni fermé.
4. \emptyset et \mathbb{R}^2 sont ouverts, et comme ils sont complémentaires, ils sont aussi fermés.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.3

Voir exercice précédent.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.4

1. $\rho = \min(\rho_1, \rho_2) > 0$
2. $\rho = \min(\rho_1, \dots, \rho_n) > 0$
3. Non, car la suite des ρ_n n'a pas forcément de minorant strictement positif.
4. Comme $A \in \mathcal{O}_i$ pour tout i , on a $A \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{O}_i$. D'autre part, si $B \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{O}_i$, on a $\|B - A\| \leq \frac{1}{i}$ pour tout i , et donc $B = A$.
L'ensemble $\{A\}$ n'est pas ouvert car il n'existe pas de $\rho > 0$ tel que la boule de centre A et de rayon ρ soit incluse dans $\{A\}$. Par ce contre-exemple, on a montré qu'une intersection d'un nombre infini d'ouverts n'est pas forcément ouverte.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.5

Par définition (revoir MT21), $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en $a \in \mathbb{R}$ si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \quad |x - a| < \eta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.6

Soit $\epsilon > 0$. Comme $|f(x, y)| < \epsilon$ dès que $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} < \sqrt{\epsilon}$, on a

$$\forall \epsilon > 0, \quad \|(x, y) - (0, 0)\| < \sqrt{\epsilon} \implies |f(x, y) - f(0, 0)| < \epsilon$$

Ce qui prouve la continuité de f en $(0, 0)$.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.7

Soit $\epsilon > 0$. Comme f est continue en $M_0 = (x_0, y_0)$, il existe $\eta > 0$ tel que $\|\overrightarrow{M_0M}\| < \eta \implies |f(M) - f(M_0)| < \epsilon$. En particulier, on a

$$|x - x_0| < \eta \implies \|(x, y_0) - (x_0, y_0)\| < \eta \implies |f_1(x) - f_1(x_0)| < \epsilon$$

. Pareil pour f_2 .

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.8

En effet, $f(1, y_0) = 2$ mais $\forall \eta > 0$, $f(1 + \eta, y_0) = 1$ et $\|(1 + \eta, y_0) - (1, y_0)\| = \eta$, ce qui contredit la définition de la continuité au point $(1, y_0)$.

On pouvait aussi invoquer le critère de non-continuité : la fonction

$$f_1(x) = f(x, y_0) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

n'est pas continue en $x = 1$, donc f n'est pas continue en $(1, y_0)$.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.9

En effet, $f_1(x) = f(x, y_0) = f(\alpha(x), \beta(x))$ avec $\alpha(x) = x$ et $\beta(x) = y_0$ qui sont 2 fonctions continues d'une variable réelle.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.10

On applique la définition. Soit $\tilde{\epsilon} > 0$. Comme $\lim_{r \rightarrow 0} \epsilon(r) = 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $r < \eta \implies \epsilon(r) < \tilde{\epsilon}$.
Et donc :

$$r = \|\overrightarrow{M_0 M}\| < \eta \implies |f(M) - f(M_0)| < \tilde{\epsilon}$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.11

1. $f(M) - f(O) = \frac{r^3 \cos^3 \theta r \sin \theta}{r^2} \leq r^2$
2. Appliquer le critère donné en proposition [I.1.8](#).

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.12

1. $\phi(t) = f(t, 0) = 0, \forall t \neq 0$ et $\phi(0) = 0$. ϕ est continue en 0. On ne peut rien dire quant à la continuité de f .
2. $\phi(t) = f(t, t) = \frac{1}{2}, \forall t \neq 0$ et $\phi(0) = 0$. ϕ n'est pas continue en 0. Par suite, f n'est pas continue en $(0, 0)$.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.13

f n'est pas continue en $(0, 0)$ car $\phi(t) = f(t, t^3) = \frac{1}{t}$, $\forall t \neq 0$ n'est pas continue en 0.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.14

$f(x, y) - f(0, 0) = x^2 + y^2 = \|(x, y)\|^2$. Donc f est différentiable en $(0, 0)$ et $A = B = 0$.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.15

1. En utilisant $|h| < \sqrt{h^2 + k^2}$ et $|k| < \sqrt{h^2 + k^2}$, on obtient :

$$|\varepsilon(h, k)| \leq \left(|y_0| + 2|x_0| + \sqrt{h^2 + k^2} \right) \sqrt{h^2 + k^2}$$

qui tend vers 0 quand (h, k) tend vers $(0, 0)$.

2.

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = (x_0 + h)^2(y_0 + k) - x_0^2 y_0 = \underbrace{2x_0 y_0}_A h + \underbrace{x_0^2}_B k + \underbrace{2x_0 h k + y_0 h^2 + h^2 k}_{\sqrt{h^2 + k^2} \varepsilon(h, k)}$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.16

Comme f est différentiable en (x_0, y_0) ,

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)(y - y_0) + \|\overrightarrow{M_0 M}\| \epsilon(M - M_0)$$

En particulier, pour $y = y_0$, on obtient :

$$f_1(x) = f_1(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)(x - x_0) + |x - x_0| \epsilon(x - x_0)$$

ce qui prouve que f_1 est dérivable en x_0 et que $\frac{df_1}{dx}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)$.

Pareil pour f_2 en prenant $x = x_0$.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.17

1. $\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = 3x_0^2 y_0^5$, $\frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = 5x_0^3 y_0^4$
2. $\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = y_0^2 \cos(x_0 y_0^2)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = 2x_0 y_0 \cos(x_0 y_0^2)$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.18

1. Pour tout $x \neq 0$, on a $\frac{f(x,0)}{x} = 0$. Par suite $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. Pareil pour $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.
2. Pour $M_0 = (x_0, y_0) \neq (0,0)$, il n'y a aucun problème à utiliser les formules habituelles de dérivation. On obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) &= \frac{(x_0^2 + y_0^2)y_0 - 2x_0^2y_0}{(x_0^2 + y_0^2)^2} = \frac{y_0(y_0^2 - x_0^2)}{(x_0^2 + y_0^2)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) &= \frac{(x_0^2 + y_0^2)x_0 - 2x_0y_0^2}{(x_0^2 + y_0^2)^2} = \frac{x_0(x_0^2 - y_0^2)}{(x_0^2 + y_0^2)^2}\end{aligned}$$

Observer le rôle symétrique de x et y .

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.19

(Re)voir l'exercice [A.1.16](#) .

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.20

En effet, puisque f est différentiable au point $M_0 = (x_0, y_0)$,

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)k + \sqrt{h^2 + k^2}\epsilon(h, k)$$

tend vers 0 quand (h, k) tend vers $(0, 0)$.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.21

f n'étant pas continue en $(0, 0)$ (voir l'exercice [A.1.12](#)), elle ne peut pas y être différentiable.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.22

1. condition nécessaire : f continue en (x_0, y_0) .
2. condition suffisante : $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent dans un voisinage de (x_0, y_0) et sont continues en (x_0, y_0) .

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.23

$4 \implies 2$, $2 \implies 1$, $2 \implies 3$

Attention : le fait que f admette des dérivées partielles en (x_0, y_0) n'indique rien sur la continuité de f en (x_0, y_0) . A ce propos, méditer le contre-exemple formé par les exercices [A.1.12](#) et [A.1.18](#) .

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.24

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2y^3 & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 0 & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= 6y^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 6xy^2 & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 12xy & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= 6y^2 \end{aligned}$$

Voir le théorème de Schwarz concernant l'égalité $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.25

1. ϕ est dérivable car composée d'applications différentiables. Pour calculer sa dérivée, on applique la formule de différentiation d'une composée d'applications (voir le cas 1 du poly, ou utiliser la chain rule du cours donné en amphi) :

$$\phi'(t) = -\frac{\partial f}{\partial x}(\cos t, \sin t) \sin t + \frac{\partial f}{\partial y}(\cos t, \sin t) \cos t$$

2. Pour $f(x, y) = x^2 + y^2$, on a $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$. En remplaçant dans l'expression ci-dessus, on trouve $\phi'(t) = -2 \cos t \sin t + 2 \sin t \cos t = 0$. C'est bien rassurant puisque $\phi(t) = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.26

Il s'agit encore du cas 1 du poly. Par le théorème de différentiation des fonctions composées, ϕ est dérivable et

$$\phi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(M)h + \frac{\partial f}{\partial y}(M)k$$

où on a posé $M = (x_0 + th, y_0 + tk)$.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.27

Par le théorème de différentiation des fonctions composées, ψ est différentiable et (voir le cas 2 du poly, ou utiliser la chain rule du cours donné en amphi) :

$$\frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v) = 2u \frac{\partial f}{\partial x}(u^2 - v^2, uv) + v \frac{\partial f}{\partial y}(u^2 - v^2, uv)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v) = -2v \frac{\partial f}{\partial x}(u^2 - v^2, uv) + u \frac{\partial f}{\partial y}(u^2 - v^2, uv)$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.28

1.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial r}(r, \theta) &= \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin \theta \\ \frac{\partial \psi}{\partial \theta}(r, \theta) &= -\frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) r \sin \theta + \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) r \cos \theta\end{aligned}$$

2. Pour $r \neq 0$, on peut résoudre ce système d'inconnues $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$. On trouve (procéder par élimination) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) &= \cos \theta \frac{\partial \psi}{\partial r}(r, \theta) - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}(r, \theta) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) &= \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial r}(r, \theta) + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}(r, \theta)\end{aligned}$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.29

1. $\phi(0) = f(x_0, y_0)$ et $\phi(1) = f(x_0 + h, y_0 + k)$.

2.

$$\phi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + ht, y_0 + kt)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + ht, y_0 + kt)k$$

3. Comme ϕ est continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$, par le théorème des accroissements finis (revoir MT21)

$$\exists \theta \in]0, 1[, \phi(1) = \phi(0) + \phi'(\theta)$$

4. Il suffit de regrouper les résultats précédents.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.30

1. On rappelle (voir exercice précédent) :

$$\phi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + ht, y_0 + kt)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + ht, y_0 + kt)k$$

On re-dérive et on obtient en utilisant le théorème de Schwarz pour la seconde égalité (et en notant $M = (x_0 + ht, y_0 + kt)$) :

$$\phi''(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M)h^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(M)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M)k^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M)hk$$

$$\phi''(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M)k^2$$

2. Il suffit d'appliquer Taylor à l'ordre 2 à ϕ entre 0 et 1 (même technique qu'à l'exercice précédent).

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.31

En effet,

$$(L + \Delta L)(l + \Delta l) = Ll + l\Delta L + L\Delta l + \Delta L\Delta l$$

(reconnaitre $d(Ll) = ldL + Ldl$).

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.32

$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y \neq 0$ pour tout $y \neq 0$. Dans ce cas :

$$y = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{au voisinage de } y_0 > 0$$

$$y = -\sqrt{1 - x^2} \quad \text{au voisinage de } y_0 < 0$$

Au voisinage de $(x_0, y_0) = (1, 0)$ ou de $(x_0, y_0) = (-1, 0)$, on ne peut pas exprimer y comme une fonction de x . Par contre, on peut ici exprimer x comme fonction de y .

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.33

1. Les conditions nécessaires d'optimalité s'écrivent :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2x - 2y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 2(1 + \alpha)y - 2x - 2\alpha = 0\end{aligned}$$

Elles n'ont ici qu'une seule solution $(x^*, y^*) = (1, 1)$.

2. On a toujours $f(1, 1) = 0$ et $f(x, y) = (x - y)^2 + \alpha(y - 1)^2$. On voit alors que pour $\alpha \geq 0$, le point $(1, 1)$ est bien un minimum, mais si $\alpha < 0$, $(1, 1)$ n'est pas un extremum.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.34

Si vous n'y parvenez pas, c'est sans doute parce que vous ne regardez pas les bonnes définitions . . .

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.35

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xyz^5 + z^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2z^5 + 3y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 5x^2yz^4 + 2xz$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.36

A faire avec le poly sous les yeux!!!

1. $p = 1, n = 2, g_1 = \alpha, g_2 = \beta$

2. $p = 2, n = 2, g_1 = a, g_2 = b$

3. $p = 2, n = 1, g_1 = f$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.37

1.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta \\ \frac{\partial \psi}{\partial \theta} &= -\frac{\partial f}{\partial x} r \sin \theta + \frac{\partial f}{\partial y} r \cos \theta \\ \frac{\partial \psi}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial z}\end{aligned}$$

où les dérivées partielles de f sont prises au point $(a(r, \theta, z), b(r, \theta, z), c(r, \theta, z))$.

2.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial \rho} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta \cos \phi + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta \cos \phi + \frac{\partial f}{\partial z} \sin \phi \\ \frac{\partial \psi}{\partial \theta} &= -\frac{\partial f}{\partial x} \rho \sin \theta \cos \phi + \frac{\partial f}{\partial y} \rho \cos \theta \cos \phi \\ \frac{\partial \psi}{\partial \phi} &= -\frac{\partial f}{\partial x} \rho \cos \theta \sin \phi - \frac{\partial f}{\partial y} \rho \sin \theta \sin \phi + \frac{\partial f}{\partial z} \rho \cos \phi\end{aligned}$$

où les dérivées partielles de f sont prises au point $(a(\rho, \theta, \phi), b(\rho, \theta, \phi), c(\rho, \theta, \phi))$.

[Retour à l'exercice ▲](#)