MT23 P10. Examen médian : Corrigé

Exercice 1 : CHANGER DE COPIE (barème approximatif 10.5 points)

(1) **Soit E, un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soient F et G deux s.e.v. supplémentaires de E, de dimensions respectives p et q. On fixe $\{\vec{f_1}, \vec{f_2}, ..., \vec{f_p}\}$ une base de F, et $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, ..., \vec{g}_q\}$ une base de G. Pour tout $\vec{x} \in E$, on note $\vec{x}_F$ et $\vec{x}_G$, les uniques éléments de F et G respectivement, tels que $\vec{x} = \vec{x}_F + \vec{x}_G$.**

(a) **Montrer que $\mathcal{E}' := \{\vec{f_1}, ..., \vec{f_p}, \vec{g}_1, ..., \vec{g}_q\}$ est une base de E;**

Corrigé (1 pt). Nous allons d'abord montrer que cette famille est libre. Tout d'abord, soient $\lambda_1, ..., \lambda_p, \mu_1, ..., \mu_q$ des réels tels que

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i.\vec{f_i} + \sum_{j=1}^{q} \vec{g}_j = \vec{0}.$$

En particulier (nous l'avons déjà vu en cours, et lors d'un test!),

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i.\vec{f_i} = -\sum_{j=1}^{q} \vec{g}_j,$$

donc le vecteur de gauche, qui appartient à F, égale le vecteur de droite, qui appartient à G. Ce vecteur appartient donc à $F \cap G$. Comme $G \cap F = \{\vec{0}\}$, on a donc

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i.\vec{f_i} = -\sum_{j=1}^{q} \vec{g}_j = \vec{0}.$$

En particulier, $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i.\vec{f_i} = \vec{0}$ implique que les λ_i sont tous nuls puisque la famille des $\vec{f_i}$ est libre, et $\sum_{j=1}^{q} \vec{g}_j = \vec{0}$ implique que les μ_j sont tous nuls puisque la famille des $\vec{g}_j$ est libre. En conclusion, $\lambda_1 = ... = \lambda_p = \mu_1 = ... = \mu_q = 0$. Nous avons montré que la famille $\{\vec{f_1}, ..., \vec{f_p}, \vec{g}_1, ..., \vec{g}_q\}$ est libre.
Comme $E = F \oplus G$, on a donc $n = \dim E = \dim F + \dim G = p + q$. Donc, toute famille libre de $p+q$ vecteurs de E est génératrice, donc une base de E, ce qui conclut la preuve. *(On pouvait aussi montrer que la famille était génératrice, puis en déduire qu'elle est libre par ce même argument de dimension).* □

On définit s, la symétrie par rapport à F de direction G, et p, la projection sur F de direction G, de la façon suivante: pour tout $\vec{x} \in E$,

$$s(\vec{x}) = \vec{x}_F - \vec{x}_G,$$
$$p(\vec{x}) = \vec{x}_F.$$

(b) **Vérifier que p et $s \in \mathcal{L}(E, E)$.**

Corrigé (0.5 + 0.5 pt). Ces deux applications sont clairement de E dans lui-même, il reste à montrer qu'elles sont linéaires. Tout d'abord, pour tous $\vec{x}$ et $\vec{y} \in E$, on a

$$\vec{x} + \vec{y} = x_F + x_G + y_F + y_G = (x_F + y_F) + (x_G + y_G),$$

et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\lambda.\vec{x} = \lambda.(\vec{x}_F + \vec{x}_G) = \lambda.\vec{x}_F + \lambda.\vec{x}_G.$$

Comme ces deux décompositions dans $F + G$ sont uniques, on en déduit d'une part que

(1) $$(\vec{x} + \vec{y})_F = \vec{x}_F + \vec{y}_F \text{ et } (\vec{x} + \vec{y})_G = \vec{x}_G + \vec{y}_G,$$

et d'autre part que

(2) $$(\lambda.\vec{x})_F = \lambda.\vec{x}_F \text{ et } (\lambda.\vec{x})_G = \lambda.\vec{x}_G.$$

Donc, en ce qui concerne la symétrie s, on a

$$s(\vec{x} + \vec{y}) = (\vec{x} + \vec{y})_F - (\vec{x} + \vec{y})_G = (\vec{x}_F - \vec{x}_G) + (\vec{y}_F - \vec{y}_G) = s(\vec{x}) + s(\vec{y}),$$

et

$$s(\lambda.\vec{x}) = (\lambda.\vec{x})_F - (\lambda.\vec{x})_G = \lambda.\left(\vec{x}_F - \vec{x}_G\right) = \lambda.s(\vec{x}).$$

s est donc linéaire.

Maintenant, pour la projection p, on a

$$p(\vec{x}+\vec{y}) = (\vec{x}+\vec{y})_F = \vec{x}_F + \vec{y}_F = p(\vec{x}) + p(\vec{y}),$$

et

$$p(\lambda.\vec{x}) = (\lambda.\vec{x})_F = \lambda.\vec{x}_F = \lambda.p(\vec{x}),$$

ce qui montre que p est également linéaire. $\square$

(c) **Donner la matrice A' représentant s dans $\mathcal{E}'$;**

(d) **Donner la matrice B' représentant p dans $\mathcal{E}'$;**

Corrigé (2 pts pour les deux questions). Nous corrigeons (c) et (d) d'un même élan (!). Pour déterminer A' et B', il suffit de déterminer l'image par s et p de chaque vecteur de $\mathcal{E}'$. Tout d'abord, tout élément $\vec{x} \in F$ s'écrit $\vec{x} = \vec{+0}$, et donc (comme $\vec{0} \in G$!), par unicité de la décomposition dans $F+G$, on a $\vec{x}_F = \vec{x}$ et $\vec{x}_G = \vec{0}$. De même, pour tout $\vec{y} \in G$, $\vec{y}_G = \vec{y}$ et $\vec{y}_F = \vec{0}$. On a donc

$$s(\vec{x}) = \vec{x} \text{ et } p(\vec{x}) = \vec{x}, \text{ pour tout } \vec{x} \in F,$$

ce qui implique que pour tout $i = 1, ..., p$, $s(\vec{f_i}) = \vec{f_i}$ et $p(\vec{f_i}) = \vec{f_i}$.

Par ailleurs, on a aussi

$$s(\vec{y}) = -\vec{y} \text{ et } p(\vec{y}) = \vec{0}, \text{ pour tout } \vec{y} \in G,$$

ce qui implique que pour tout $j = 1, ..., q$, $s(\vec{g}_j) = -\vec{g}_j$ et $p(\vec{g}_j) = \vec{0}$. On peut donc représenter s dans $\mathcal{E}'$ par

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & & & & \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 & & \\ & & \ddots & & & & \\ \vdots & & 0 & 1 & 0 & & \\ & & & 0 & -1 & 0 & \\ 0 & & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

où les éléments diagonaux égaux à 1 se situent sur les p premières lignes et ceux égaux à -1 se situent sur les q dernières. On peut également représenter la projection p dans $\mathcal{E}'$ par la matrice

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & & & & \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 & & \\ & & \ddots & & & & \\ \vdots & & 0 & 1 & 0 & & \\ & & & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où les éléments diagonaux égaux à 1 se situent sur les p premières lignes et ceux égaux à 0 se situent sur les q dernières. $\square$

(e) **Donner explicitement les applications $s \circ s$ et $p \circ p$.**

Corrigé (2 pts pour les deux questions). Soit $\vec{x} \in E$. Tout d'abord, on a

$$s \circ s(\vec{x}) = s\left(\vec{x}_F - \vec{x}_G\right) = \left(\vec{x}_F - \vec{x}_G\right)_F - \left(\vec{x}_F - \vec{x}_G\right) = \vec{x}_F - (-\vec{x}_G) = \vec{x}_F + \vec{x}_G = \vec{x}.$$

Ceci revient donc à dire que l'application $s \circ s$ est l'identité sur E, id. Par ailleurs, on a

$$p \circ p(\vec{x}) = p\left(\vec{x}_F\right) = \left(\vec{x}_F\right)_F = \vec{x}_F = p(\vec{x}).$$

On retrouve donc le résultat (connu) suivant: $p \circ p = p$. $\square$

(2) **On se place maintenant sur $E = \mathbb{R}^3$, dont on note $\mathcal{E}$, la base canonique. On définit les deux s.e.v. suivants:**

$$F = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; 2x_1 + x_2 - x_3 = 0\right\},$$
$$G = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0,\ x_1 - x_2 - x_3 = 0\right\}.$$

(a) **Donner une base $\mathcal{F}$ de F, et une base $\mathcal{G}$ de G;**

Corrigé (0.5 + 0.5 pt). Tout d'abord, tout $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in F$ s'écrit

$$\vec{x} = (x_1, x_3 - 2x_1, x_3) = x_1.(1, -2, 0) + x_3.(0, 1, 1).$$

Donc, F est engendré par $\mathcal{F} := \{(1, -2, 0), (0, 1, 1)\}$, qui est clairement une famille libre de $\mathbb{R}^3$, et donc une base de F.
De même, tout $\vec{x} \in F$ s'écrit

$$\vec{x} = (x_1, x_1 - x_3, 2x_2 - 2x_1) = (x_1, x_1, 0) = x_1.(1, 1, 0).$$

Donc G est engendré par la famille (libre car réduite à un vecteur non nul) $\mathcal{G} := \{(1, 1, 0)\}$, qui est une base de G. □

(b) **Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$, et en déduire une base $\mathcal{E}'$ de $\mathbb{R}^3$ construite à partir de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sur le modèle de 1.(a);**

Corrigé (0.5 + 0.5 pt). Le système

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 & = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 & = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 & = 0 \end{cases}$$

admet l'unique solution $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$, ce qui signifie donc que $F \cap G = \{\vec{0}\}$. Comme de plus $\dim F + \dim G = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, on en déduit que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$. Sur le modèle de 1.(a), on peut donc construire la base suivante de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{E}' = \left\{\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'\right\}, \text{ où } \vec{e}_1' = (1, -2, 0),\ \vec{e}_2' = (0, 1, 1),\ \vec{e}_3' = (1, 1, 0).$$

□

(c) **Ecrire la matrice de passage P de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$;**

Corrigé (0.5 pt). On peut donc écrire simplement la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}'$:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

(d) **Exprimer les vecteurs de $\mathcal{E}$ en fonction de ceux de $\mathcal{E}'$, et en déduire P^{-1};**

Corrigé (1 pt). Les vecteurs de $\mathcal{E}'$ s'écrivent donc comme suit en fonction de ceux de $\mathcal{E}$:

$$\begin{cases} \vec{e}_1' & = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2; \\ \vec{e}_2' & = \vec{e}_2 + \vec{e}_3; \\ \vec{e}_3' & = \vec{e}_1 + \vec{e}_2. \end{cases}$$

Attention, ceci n'est pas un *système linéaire*, dont les inconnues sont des *scalaires*!! C'est une liste de trois égalités vectorielles, que l'on peut réécrire de la façon suivante:

$$\begin{cases} \vec{e}_1 & = \vec{e}_3' - \vec{e}_2; \\ 3\vec{e}_2 & = \vec{e}_3' - \vec{e}_1'; \\ \vec{e}_3 & = \vec{e}_2' - \vec{e}_2. \end{cases} \iff \begin{cases} \vec{e}_1 & = \frac{1}{3}.\left(\vec{e}_1' + 2\vec{e}_3'\right); \\ \vec{e}_2 & = \frac{1}{3}.(-\vec{e}_1' + \vec{e}_3'); \\ \vec{e}_3 & = \frac{1}{3}.\left(\vec{e}_1' + 3\vec{e}_2' - \vec{e}_3'\right). \end{cases}$$

La matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}'$, qui est l'inverse de P, s'écrit donc

$$P^{-1} = \frac{1}{3}.\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

et l'on peut vérifier que $PP^{-1} = P^{-1}P = I_3$. □

Comme en 1., on définit s, la symétrie par rapport à F de direction G.

(e) **Déduire de 1.(c), la matrice A' représentant s dans $\mathcal{E}'$;**

Corrigé (0.5 pt). Comme dans la question 1.(c) (avec $p = 2$ et $q = 1$, on représente s dans $\mathcal{E}'$ de la façon très simple suivante):

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

□

(f) **En déduire la matrice A représentant s dans $\mathcal{E}$.**

Corrigé (1 pt). La matrice A' s'écrit simplement, car la base considérée est précisément composée de vecteurs de F et de vecteurs de G. A priori, la forme de A sera plus complexe car les vecteurs de la base canonique n'ont rien à voir avec ceux de F et de G. On retrouve bien sûr A avec la formule $A = PA'P^{-1}$, soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{3}. \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}. \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}. \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

□

(g) **Calculer A^2 et retrouver le résultat de 1.(e).**

Corrigé (1 pt). On déduit de la question précédente que

$$A^2 = \frac{1}{3}. \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{3}. \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}. \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = I_3.$$

On a vérifié le résultat de 2.(d): la matrice $I_3 = A^2$ représente $s \circ s$, qui est l'application identité. □

Exercice 2: CHANGER DE COPIE (barème approximatif : 10 points)

(1) **Soit α, un paramètre réel et A_α, la matrice suivante:**

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 & 2\alpha \\ 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha+2 & \alpha & 1 \\ \alpha & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

(a) **Calculer detA_α en fonction de α;**

Corrigé (1 pt). Développons le déterminant suivant la dernière ligne. Pour tout α,

$$\begin{vmatrix} \alpha & 0 & 1 & 2\alpha \\ 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha+2 & \alpha & 1 \\ \alpha & 0 & 0 & \alpha \end{vmatrix} = -\alpha \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2\alpha \\ \alpha & 0 & 0 \\ 2\alpha+2 & \alpha & 1 \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 2\alpha+2 & \alpha \end{vmatrix}$$

$$= -\alpha(-\alpha) \begin{vmatrix} 1 & 2\alpha \\ \alpha & 1 \end{vmatrix} + \alpha \left(\alpha \begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ 2\alpha+2 & \alpha \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 2\alpha+2 \end{vmatrix} \right)$$

$$= \alpha^2 \left(1 - 2\alpha^2\right) + \alpha \left(\alpha^3 + 2\alpha + 2\right)$$

$$= -\alpha^4 + 3\alpha^2 + 2\alpha = -\alpha \left(\alpha + 1\right)^2 \left(\alpha - 2\right).$$

□

(b) **Donner le rang de A_α, suivant la valeur de α.**

Corrigé (1.5 pt). De la question précédente, l'on déduit que pour $\alpha \neq -1, 0$ et 2, det$A_\alpha \neq 0$ et donc A_α est inversible, soit Rang $A_\alpha = 4$. Ensuite, pour $\alpha = -1, 0$ et 2 le rang est strictement inférieur à 4, et on commence donc par chercher des matrices extraites de rang 3.

- **Pour** $\alpha = -1$, il n'est pas difficile de voir que la matrice extraite
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
admet pour déterminant -1, et est donc inversible. Donc A_{-1} est de rang 3.
- **Pour** $\alpha = -1$, remarquons que la matrice extraite
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$
admet pour déterminant 2, et est donc inversible. A_0 est donc de rang 3.
- **Pour** $\alpha = 2$ finalement, par exemple la matrice extraite
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
admet pour déterminant 8, et est donc inversible. Donc A_2 est aussi de rang 3.

□

(2) **Soit B, une matrice carrée de taille quelconque $p \times p$, où $p \geq 1$.**

(a) **Quelles relations existent entre les espaces ImB et ImB^2, et entre les espaces Ker$B$ et KerB^2? De quel(s) espace(s), ces espaces sont-ils des sous-espaces vectoriels?**

Corrigé (1 pt). Comme B est carrée de taille n, l'application $X \to BX$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_{n1}$ dans lui-même. De même pour B^2 et l'application $X \to B^2X$. Donc, Ker$B$, KerB^2, ImB et ImB^2 sont tous des s.e.v. de $\mathcal{M}_{n1}$. Par ailleurs, on a vu plusieurs fois en exercice que pour tout X, $BX = \mathbf{0}$ implique $B^2X = \mathbf{0}$, et donc Ker$B \subset$ KerB^2, et par ailleurs que pour tout Y, si $Y = A^2X$ pour un certain X, alors $Y = A(AX)$, et donc $\mathrm{Im}A^2 \subset \mathrm{Im}A$. $\square$

(b) **Montrer que**

$$\mathcal{M}_{p1} = \mathrm{Ker}B \oplus \mathrm{Im}B \Longleftrightarrow \mathrm{Ker}B = \mathrm{Ker}B^2.$$

Corrigé (0.5 pt pour chaque implication, donc 1 pt).

"$\Rightarrow$" On suppose que $\mathcal{M}_{p1} = \mathrm{Ker}B \oplus \mathrm{Im}B$. D'après la question précédente, il ne reste qu'à montrer que $\mathrm{Ker}B^2 \subset \mathrm{Ker}B$ puisque l'autre inclusion est toujours vraie. Soit donc X tel que $B^2X = \mathbf{0}$. Alors, $B(BX) = \mathbf{0}$, ce qui montre que le vecteur BX, qui appartient à $\mathrm{Im}B$ par définition, appartient aussi à $\mathrm{Ker}B = 0$. Donc $BX \in \mathrm{Ker}B \cap \mathrm{Im}B$. Or, comme $\mathrm{Ker}B \cap \mathrm{Im}B = \{\mathbf{0}\}$ puisque $\mathrm{Im}B$ et $\mathrm{Ker}B$ sont en somme directe par hypothèse, on a donc $BX = \mathbf{0}$, et donc $X \in \mathrm{Ker}B$. Cela montre bien que $\mathrm{Ker}B^2 \subset \mathrm{Ker}B$.

"$\Leftarrow$" On suppose donc en particulier que $\mathrm{Ker}B^2 \subset \mathrm{Ker}B$. Soit $X \in \mathrm{Ker}B \cap \mathrm{Im}B$. Donc, $BX = \mathbf{0}$ et il existe $Y \in \mathcal{M}_{n1}$ tel que $X = BY$. On a donc $B^2Y = B(BY) = BX = 0$. Donc $Y \in \mathrm{Ker}B^2$, or comme $\mathrm{Ker}B^2 \subset \mathrm{Ker}B$, $Y \in \mathrm{Ker}B$, ce qui signifie que $X = BY = \mathbf{0}$. Donc $X = \mathbf{0}$, ce qui montre bien que $\mathrm{Im}B \cap \mathrm{Ker}B = \{\mathbf{0}\}$. Comme, d'après le théorème du rang, on a aussi $n = \dim\mathcal{M}_{n1} = \dim\mathrm{Ker}B + \dim\mathrm{Im}B$, on en déduit finalement que $\mathrm{Im}B \oplus \mathrm{Ker}B = \mathcal{M}_{n1}$.

$\square$

(c) **Montrer que**

$$\mathrm{Ker}B = \mathrm{Ker}B^2 \Longleftrightarrow \mathrm{Im}B = \mathrm{Im}B^2.$$

Corrigé (0.5 pt pour chaque implication, donc 1 pt).

"$\Rightarrow$" On suppose que $\mathrm{Ker}B = \mathrm{Ker}B^2$. On a, d'après le théorème du rang,

$$n = \dim\mathcal{M}_{n1} = \dim\mathrm{Ker}B + \dim\mathrm{Im}B = \dim\mathrm{Ker}B^2 + \dim\mathrm{Im}B^2. \tag{3}$$

Comme $\mathrm{Ker}B = \mathrm{Ker}B^2$, on a donc $\dim\mathrm{Im}B = \dim\mathrm{Im}B^2$. Or, comme $\mathrm{Im}B^2 \subset \mathrm{Im}B$, on a bien $\mathrm{Im}B^2 = \mathrm{Im}B$.

"$\Leftarrow$" On suppose que $\mathrm{Im}B^2 = \mathrm{Im}B$. Toujours d'après (3), on a donc $\dim\mathrm{Ker}B = \dim\mathrm{Ker}B^2$. Comme, d'après (a), $\mathrm{Ker}B \subset \mathrm{Ker}B^2$, on a bien $\mathrm{Ker}B = \mathrm{Ker}B^2$.

$\square$

(3) **On fixe $\alpha = -1$, et on considère donc la matrice**

$$A_{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) **Donner une base et la dimension de KerA_{-1};**

Corrigé (0.5 pt). On résoud l'équation $A_{-1}X = \mathbf{0}$, ce qui revient, en posant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$,

au système homogène

$$\left\{ \begin{array}{c} -x_1 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ -x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 - x_4 = 0. \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_2 = x_1 \\ x_3 = -x_1 \\ x_4 = -x_1. \end{array} \right.$$

Donc, tout vecteur $X \in \text{Ker}A_{-1}$ s'écrit $X = x_1.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, ce qui montre qu'une base de $\text{Ker}A_{-1}$ est donnée par $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$. On retrouve en particulier que $\dim\text{Ker}A_{-1}$ puisque $\text{rang}A_{-1} = 3$ (question 1.(b)). □

(b) **Donner une base et la dimension de ImA_{-1};**

Corrigé (0.5 pt). Nous savons déjà que $\text{rang}A_{-1} = 3$, donc nous cherchons une base de $\text{Im}A_{-1}$ (engendrée par les colonnes de A_{-1}) de 3 vecteurs. On constate que les 3 premières colonnes de A_{-1} forment une famille libre: c'est donc une base de A_{-1}. $\text{Im}A_{-1}$ s'écrit donc

$$(4)\quad \begin{aligned}\text{Im}A_{-1} &= \left\{X \in \mathcal{M}_{n1}, X = \alpha.\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta.\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}; x_1 = -x_3 + x_4\right\}.\end{aligned}$$

□

(c) **Déterminer Ker$A_{-1} \cap$ ImA_{-1}. En déduire avec 2.(b) et 2.(c), la forme de Im$(A_{-1})^2$;**

Corrigé (1 pt). En vertu des deux questions précédentes, tout $X \in \text{Ker}A_{-1} \cap \text{Im}A_{-1}$ vérifie le système homogène

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 + x_4 \\ x_2 = x_1 \\ x_3 = -x_1 \\ x_4 = -x_1. \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Donc, $\text{Ker}A_{-1} \cap \text{Im}A_{-1} = \{\mathbf{0}\}$.
On en déduit donc que $\mathcal{M}_{n1} = \text{Ker}A_{-1} \oplus \text{Im}A_{-1}$ avec le théorème du rang. En enchaînant les deux équivalences 2.(b) et 2.(c), on retrouve bien que $\text{Im}\,(A_{-1})^2 = \text{Im}A_{-1}$. □

(d) **Soit $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donner la forme de l'ensemble des solutions du système $A_{-1}X = B$ (on ne demande pas de calculer les solutions).**

Corrigé (0.5 pt). Le rang de A_{-1} n'est pas 4, donc il existe des seconds membres B qui n'appartiennent pas à $\text{Im}A_{-1}$. En particulier, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \text{Im}A_{-1}$ (question (b)), ce qui montre que le système $A_{-1}X = B$ n'admet aucune solution. □

(4) **On fixe maintenant $\alpha = 1$, et on considère donc la matrice** $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit également la matrice colonne $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(a) **Sans calcul, quelle est la forme de l'ensemble des solutions du système $A_1X = B$?**

Corrigé (0.5 pt). On a vu dans la question 1.(b) que A_1 est inversible, donc il existe une solution unique à tout système $AX = B$ (A représente une application bijective, pour laquelle tout B admet un antécédent unique), donnée par $X = A^{-1}B$. □

(b) **Ramener le système $A_1X = B$ à un système triangulaire supérieur par la méthode de Gauss (on ne demande pas de le résoudre explicitement);**

Corrigé (1.5 pt). On résoud le système par la méthode de Gauss en le représentant de la façon suivante:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 - L_1 \to L_2; L_4 - L_1 \to L_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 - 4L_2 \to L_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_4 + \frac{1}{5}4L_3 \to L_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right).$$

□

(c) **Retrouver le déterminant calculé en 1.(a), à l'aide des matrices obtenues en 4.(b).**

Corrigé (0.5 pt). Comme on passe d'une matrice à l'autre dans l'algorithme de Gauss par des opérations élémentaires (qui conservent le déterminant), le déterminant de A_1 égale celui de la dernière matrice triangulaire, soit $1 \times 1 \times 5 \times \frac{4}{5} = 4$. On retrouve ainsi le résultat de 1.(a) pour $\alpha = 1$. □