MT23 P2010. Corrigé du TEST 2

Barème (3.5, 2, 2, 2.5)

(1) Soit $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, la base canonique de $\mathbf{R}^2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Soit φ, l'application de $\mathcal{L}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^2)$ représentée par A dans la base canonique (*i.e.*, A représente φ avec $\mathcal{E}$ comme base de départ et comme base d'arrivée).

(a) Soit $\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$. Déterminer les coordonnées de $\varphi(\vec{x})$ dans $\mathcal{E}$.

Correction (1 pt). On représente $\vec{x}$ par la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Alors, comme on l'a vu en cours, si on représente $\varphi(\vec{x})$ par la matrice colonne Y, celle-ci vérifie

$$Y = AX = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

Les coordonnées de $\varphi(\vec{x})$ dans $\mathcal{E}$ sont donc $x_1 - x_2$ et $2x_1 + x_2$.
Sinon, on pouvait retrouver ce résultat directement en appliquant la linéarité de φ. On écrit que

$$\vec{x} = x_1.\vec{e}_1 + x_2.\vec{e}_2,$$

et donc par linéarité, puis en lisant $\varphi(\vec{e}_1)$ et $\varphi(\vec{e}_2)$ en fonction de $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ sur la matrice A, on écrit que

$$\varphi(\vec{x}) = x_1.\varphi(\vec{e}_1) + x_2.\varphi(\vec{e}_2) = x_1.(\vec{e}_1 + 2.\vec{e}_2) + x_2.(-\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = (x_1 - x_2).\vec{e}_1 + (2x_1 + x_2).\vec{e}_2,$$

et on retrouve le résultat précédent. $\square$

(b) Déterminer Kerφ. φ est-elle injective? Surjective? Bijective?

Correction (0.5 + 0.25 + 0.5 pt). En vertu de la question précédente, on a

$$\vec{x} \in \mathrm{Ker}\varphi \Leftrightarrow (x_1 - x_2, 2x_1 + x_2) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ 2x_1 = -x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ 2x_1 = 0 \end{cases}$$

Donc, Ker$\varphi = \{\vec{0}\}$. Ceci montre que φ est injective. Comme φ est un endomorphisme (en particulier, les espaces de départ et d'arrivée sont de même dimension), φ est, de manière équivalente, surjective et bijective. (*On donnera 0.5 pt pour le calcul du noyau, 0.25 pt pour l'injectivité et 0.5 pour la bijectivité.*) $\square$

(c) En déduire que $\mathcal{F} = (\varphi(\vec{e}_1), \varphi(\vec{e}_2))$ est une base de $\mathbf{R}^2$. Comment peut-on donc interpréter la matrice A?

Correction (0.5 + 0.25 pt). Comme φ est bijective, $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbf{R}^2$. Alors, A représente en particulier, par définition, la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{F}$. $\square$

(d) Soit $\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Donner la formule matricielle permettant de retrouver les coordonnées de $\vec{x}$ dans $\mathcal{F}$ (on ne demande pas de les calculer).

Correction (0.5 pt). D'après la formule du cours, les coordonnées de $\vec{x}$ dans $\mathcal{F}$, notée par la matrice colonne X', vérifient

$$X' = A^{-1}X,$$

où A^{-1} est l'inverse de A.
Même si on ne demandait pas de le faire, calculons ces coordonnées. Nous devons pour cela inverser A. Nous verrons des formules dans le chapitre 3 pour le faire on peut plus rapidement, mais faisons-le "à la main": en exprimant $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ en fonction de $\vec{f}_1 := \varphi(\vec{e}_1)$ et $\vec{f}_2 := \varphi(\vec{e}_2)$. Comme $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 + 2.\vec{e}_2$ et $\vec{f}_2 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2$, on

retrouve simplement que $\vec{e}_2 = \frac{1}{3}.(\vec{f}_1 + \vec{f}_2)$ et $\vec{e}_1 = \frac{1}{3}.(\vec{f}_1 - 2.\vec{f}_2)$. Par définition, A^{-1} représente le passage de $\mathcal{F}$ à $\mathcal{E}$, ce qui nous donne que

$$A^{-1} = \frac{1}{3}.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut alors vérifier que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_2$. Du coup, les coordonnées de $\vec{x}$ dans $\mathcal{F}$ s'écrivent

$$X' = A^{-1}X = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{3} \\ \frac{-2x_1}{3} + \frac{x_2}{3} \end{pmatrix}.$$

□

(2) **Questions de cours**.

(a) Soient E, F et G, trois e.v. de dimensions respectives p, n et q, et deux applications linéaires $v \in \mathcal{L}(E, F)$ et $u \in \mathcal{L}(F, G)$, représentées respectivement par les matrices B et A, dans des bases fixées $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ pour E, F et G.
- Quelle application représente la matrice AB?
- Donner la formule permettant d'exprimer les coefficients de AB en fonction de ceux de A et de B.

Correction (0.5 + 0.5 pt). Par définition, la matrice AB (qui appartient à $\mathcal{M}_{qp}$ puisque $A \in \mathcal{M}_{qn}$ et $B \in \mathcal{M}_{np}$) représente l'application linéaire $u \circ v \in \mathcal{L}(E, G)$.
Par ailleurs, pour tout $i \in \{1, ..., q\}$ et tout $j \in \{1, ..., p\}$,

$$AB_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}.$$

□

(b) Soient E et F, deux K-e.v. et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que l'image de toute famille génératrice de E est génératrice d'un espace que l'on précisera.

Correction (1 pt). Soit $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ une famille génératrice de E. Nous allons montrer que son "image", la famille $\{u(\vec{e}_1), ..., u(\vec{e}_2)\}$ est génératrice de Imu.
Soit donc $\vec{y} \in$ Imu. Il existe donc $\vec{x} \in E$ tel que $\vec{y} = u(\vec{x})$. Comme $\vec{x} \in E$ et $\mathcal{E}$ est génératrice de E, $\vec{x}$ s'écrit comme une combinaison linéaire des $\vec{e}_i$. On a donc

$$\vec{y} = u(\vec{x}) = u\left(x_1.\vec{e}_1 + ... + x_n.\vec{e}_n\right) = x_1.u(\vec{e}_1) + ... + x_n.u(\vec{e}_n).$$

Donc, $\vec{y}$ s'écrit bien forcément comme une combinaison linéaires des $u(\vec{e}_i)$, qui forment donc une famille génératrice de Imu. Attention: pour que cette famille soit génératrice de F tout entier, il faut de plus que u soit surjective, et pour que cette famille soit une base de Imu, il faut que u soit injective! □

(3) Soit E, un espace vectoriel et $\varphi \in \mathcal{L}(E, E)$. On définit pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\varphi^n = \varphi \circ \varphi \circ ... \circ \varphi$. On suppose que Ker$\varphi \cap$Im$\varphi = \{\vec{0}_E\}$. Montrer que pour tout $x \in E$,

$$x \notin \text{Ker}\varphi \Longrightarrow x \notin \text{Ker}\varphi^n, \text{ pour tout } n \in \mathbf{N}^*.$$

(on pourra raisonner par récurrence).

Correction (2 pts). Remarque: il y avait une petite erreur dans l'énoncé, où l'on faisait varier n dans $\mathbf{N}$ et non $\mathbf{N}^*$. Nous en tiendrons compte dans la correction.
Soit $x \notin$ Kerφ. Nous allons montrer par récurrence que $x \notin$ Kerφ^n, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.
- La propriété est vraie au rang 1 par hypothèse: $x \notin$ Kerφ.
- Soit $n \geq 1$. On suppose que $x \notin$ Kerφ^n. Nous devons montrer que $x \notin$ Kerφ^n. Raisonnons par l'absurde en supposant que $x \in$ Kerφ^{n+1}. Donc $\varphi^{n+1}(x) = \varphi\left(\varphi^n(x)\right) = 0_E$. Ceci montre que $\varphi^n(x) \in$ Kerφ. Or, $\varphi^n(x) = \varphi\left(\varphi^{n-1}(x)\right)$ (en notant $\varphi^0(x) = Id(x) = x$), ce qui montre que $\varphi^n(x) \in$ Imφ. Donc, $\varphi^n(x) \in$ Ker$\varphi \cap$ Imφ, ce qui, par hypothèse, implique que $\varphi^n(x) = 0_E$. Ceci est absurde car cela contredit l'hypothèse de récurrence, à savoir $x \notin$ Kerφ^n.

La propriété "$x \notin$ Kerφ^n" est donc vraie pour tout $n \in \mathbf{N}^*$. □

(4) On rappelle que pour tout matrice A, on note A_i la i-ème colonne de A. On définit l'application suivante:

$$\Phi \ : \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{M}_{34}(\mathbf{R}) & \longrightarrow \mathcal{M}_{31} \\ A & \longmapsto A_1. \end{array} \right.$$

(a) Montrer que Φ est linéaire;

Correction (0.5 pt). Pour parler simplement, Φ associe à toute matrice de $\mathcal{M}_{34}$, sa première colonne (qui est une matrice colonne, de $\mathcal{M}_{31}$). Vérifions que Φ est linéaire. Tout d'abord, pour toutes A et $B \in \mathcal{M}_{34}$, on a

$$\Phi(A+B) = \begin{pmatrix} (A+B)_{11} \\ (A+B)_{21} \\ (A+B)_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} \\ A_{21}+B_{21} \\ A_{31}+B_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ A_{31} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \\ B_{31} \end{pmatrix} = \Phi(A) + \Phi(B).$$

De même, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$,

$$\Phi(\lambda.A) = \begin{pmatrix} (\lambda.A)_{11} \\ (\lambda.A)_{21} \\ (\lambda.A)_{31} \end{pmatrix} = \lambda. \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ A_{31} \end{pmatrix} = \lambda.\Phi(A).$$

□

(b) Déterminer KerΦ. En donner une base et sa dimension.

Correction (0.5 + 0.5 + 0.25). KerΦ est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_{34}$ dont l'image par Φ est la colonne nulle de $\mathcal{M}_{31}$, c'est à dire, l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_{34}$ dont la première colonne est nulle. Ainsi, toute matrice $A \in$ KerΦ s'écrit

$$\begin{aligned} A = & \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ 0 & A_{32} & A_{33} & A_{34} \end{pmatrix} \\ & = A_{12}. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + A_{13}. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + A_{14}. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & + A_{22}. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + A_{23}. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + A_{24}. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & + A_{32}. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + A_{33}. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + A_{34}. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc, KerΦ est engendré par la famille de 9 matrices que nous avons écrites dans la précédente combinaison linéaire. Cette famille est clairement libre (elle est incluse dans la base canonique de $\mathcal{M}_{34}$). C'est donc une base de KerΦ, qui est donc de dimension 9.
(On donnera 0.5 pour la caractérisation de KerΦ, 0.5 pt pour l'écriture de la sa base, et 0.25pt pour sa dimension). □

(c) En déduire RangΦ. Φ est-elle surjective?

Correction (0.5 + 0.25 pt). RangΦ se déduit de dim KerΦ par le théorème du rang. On a

$$\text{Rang } \Phi = \dim \mathcal{M}_{34} - \dim \text{Ker } \Phi = 12 - 9 = 3 = \dim \mathcal{M}_{31}.$$

Donc, ImΦ, qui est un s.e.v. de $\mathcal{M}_{31}$, a la même dimension que lui: on a bien Im$\Phi = \mathcal{M}_{31}$, c'est à dire, Φ est surjectif. *(On donnera 0.5pt pour l'application du théorème du rang et 0.25pt pour la surjectivité).* □