MT94/P11/TD - Problèmes non linéaires (1)

La section 1 a pour but de vous faire découvrir comment fonctionne la méthode de Newton. A partir de la section 2, nous utiliserons la macro `fsolve` *de Scilab.*

1 Entrée en matière

1.1 Résolution d'une équation à une inconnue

On cherche à résoudre l'équation

$$x^2 = 2. \tag{1}$$

1. Donner un intervalle $[a, b]$ dans lequel se situe $\hat{x}$ une seule solution de (1). Dans la suite on prendra systématiquement $x_0 = (a + b)/2$.
2. L'équation (1) peut s'écrire de façon équivalente $f(x) = 0$ ou $x = g(x)$ avec
$$f(x) = x^2 - 2,\ g(x) = \frac{x+2}{x+1},$$
et on cherche à comparer plusieurs méthodes pour trouver $\hat{x}$:
   (a) méthode de dichotomie,
   (b) méthode dite "de point fixe" (vérifiez que $\hat{x} = g(\hat{x})$)
$$x_{k+1} = g(x_k),$$
   (c) méthode de Newton
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$
   (d) méthode de la sécante
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1}).$$
   Quel lien de parenté voyez-vous entre cette méthode et la méthode de Newton ?

   L'ordre de convergence $\alpha \geq 1$ d'une méthode est défini par
$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - \hat{x}|}{|x_k - \hat{x}|^\alpha} = q > 0.$$
   En utilisant Scilab, retrouvez expérimentalement que (a) et (b) sont d'ordre 1, (c) d'ordre 2 et (d) d'ordre $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (le nombre d'or). Le test d'arrêt de chaque méthode sera défini par $f(x_k) < \varepsilon$ avec $\varepsilon = 10^{-10}$.

1.2 La fractale de Newton

On cherche à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^3 - 1 = 0. \tag{2}$$

1. Mettez (2) sous la forme $f(x) = 0$ avec $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et calculez f'.
2. Ecrivez une fonction Scilab

   ```
   function [f,fprime]=zCubeMinusOne(x)
   ...
   endfunction
   ```

   calculant f et f' pour un x donné. Comment pouvez-vous vérifier numériquement que votre calcul de f' est correct ?
3. Ecrivez un programme Scilab mettant en oeuvre la méthode de Newton pour un x_0 donné. On définira la précision `eps` et le nombre maximum `itmax` d'itérations.
4. (Facultatif) Lorsque l'on choisit un x_0 donné la méthode de Newton peut converger vers l'une des trois solutions ou ne pas converger du tout. Dans ce dernier cas, x_0 appartient à la fractale de Newton. On considère une discrétisation à N^2 points du rectangle $[-1, 1] \times [-1, 1]$, c'est à dire deux matrices X et Y où chaque point i, j du rectangle a pour coordonnées (x_{ij}, y_{ij}) :

   ```
   [X,Y]=meshgrid(linspace(-1,1,N));
   ```

   On peut représenter cette fractale, ainsi que les bassins d'attraction en construisant une matrice M que l'on représentera ensuite avec `imagesc`. Le terme m_{ij} est défini ainsi : le vecteur (x_{ij}, y_{ij}) est utilisé comme condition initiale pour la méthode de Newton. Si la méthode converge vers l'une des racines on attribue le nombre 1,2 ou 3 à m_{ij}. Les zéros restants correspondront à des points sur la fractale de Newton.

2 Applications

2.1 La macro `fsolve`

La macro `fsolve` de Scilab permet de résoudre des systèmes d'équations non-linéaires avec une méthode inspirée de la méthode de Newton. Voici par exemple ce qu'il faut écrire pour résoudre $x^2 = 2$:

```
function y=f(x)
  y=x^2-2;
endfunction

function d=fprime(x)
  d=2*x;
endfunction

x0=1.5;
x=fsolve(x0,f,fprime)
```

2.2 Les points de Lagrange du Système Terre-Lune

Considérons la rotation synchrone de la Terre et de la Lune autour de leur centre de gravité, qui sera pris pour origine de notre repère (non galiléen, car en rotation uniforme). Un point de Lagrange est un point où les attractions de la Terre et de la Lune compensent exactement la force centripète. La période de rotation de ce point est de plus la même que celle de rotation du système Terre-Lune. Ces points, au nombre de 5, possèdent la propriété remarquable d'être immobiles par rapport à l'axe Terre-Lune.

Voici les données dont nous avons besoin :

- distance Terre-Lune, $d_{TL} = 3,84402.10^8 m$
- Masses des Corps, M_T $5,975.10^{24} Kg$, M_L $7,35.10^{22} Kg$
- Periode de rotation , $T_r = 27,55$ *jours* (à convertir en secondes) soit une pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T_r}$
- $g = 6,67.10^{-11}$
- $x_T = -\frac{M_L}{M_T} d_{TL}, \quad y_T = 0$
- $x_L = d_{TL} + x_T, \quad y_L = 0$

L'accélération à laquelle est soumis un objet en rotation synchrone avec le système Terre-Lune dépend de ses coordonnées (x, y) et s'écrit

$$a(x, y) = \begin{pmatrix} \omega^2 x - gM_T \frac{x - x_T}{((x - x_T)^2 + y^2)^{3/2}} - gM_L \frac{x - x_L}{((x - x_L)^2 + y^2)^{3/2}} \\ \omega^2 y - gM_T \frac{y}{((x - x_T)^2 + y^2)^{3/2}} - gM_L \frac{y}{((x - x_L)^2 + y^2)^{3/2}} \end{pmatrix}$$

Le problème que nous vous demandons de résoudre est de trouver les cinq points (x, y) qui annulent cette fonction.

2.3 GPS

Le GPS est un système de positionnement basé sur la connaissance, avec une précision extrême, de la distance du récepteur R à trois satellites (situés à des orbites de l'ordre de 28000km).

On suppose que les trois satellites au moment du calcul de distance ont les positions suivantes dans un repère cartésien d'origine le centre de la terre (unité=km) :

$$\begin{aligned} S_1 &= (-11716.227778, -10118.754628, 21741.083973) \\ S_2 &= (-12082.643974, -20428.242179, 11741.374154) \\ S_3 &= (14373.286650, -10448.439349, 19596.404858) \end{aligned}$$

Sachant que les trois distances respectives au récepteur ont été calculées et valent

$$(d_1, d_2, d_3) = (22163.847742, 21492.777482, 21492.469326),$$

déterminer la position du récepteur R (et vérifier que celui-ci se trouve bien à la surface de la terre...).

2.4 Cinématique inverse

On considère un bras robot articulé dans le plan (x_1, x_2), d'origine O, avec un premier segment de longeur l_1 et faisant un angle θ_1 avec $(0, x_1)$ et un deuxième segment de longueur l_2 faisant un angle θ_2 avec le premier segment. L'extrémité du bras a pour coordonnées

$$M(\theta) = (l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2), l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2))\,.$$

1. Ecrire une macro Scilab déterminant θ tel que $M(\theta) = A$ où A est un point du plan.
2. On prend $l_1 = l_2 = 1$. Ecrire un programme Scilab représentant les positions successives du bras lorsque le point $A(t)$ est défini par une courbe paramétrique, par exemple

$$A(t) = \begin{cases} x_1(t) = 1 + \frac{1}{2}\cos t, \\ x_2(t) = 1 + \frac{1}{2}\sin t. \end{cases}$$

Voici comment faire une animation simple en Scilab :

```
t=linspace(0,2*%pi,100);
drawlater
plot(1+0.5*cos(t),1+0.5*sin(t),'--');
hold on
h=plot([0 1+0.5*cos(t(1))],[0 1+0.5*sin(t(1))],'-og');
hold off
axis([0 2 0 2]);
axis equal;
drawnow

for i=1:100
  set(h,'xdata',[0 1+0.5*cos(t(i))],'ydata',[0 1+0.5*sin(t(i))])
end
```