SY01: Corrigé de l'exercice 5
du chapitre 5

Soient X et Y, deux v.a.r. indépendantes de même loi, de densité f donnée pour tout tout t par $f(t) = te^{-t}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)$. On définit par ailleurs les v.a.r. $U = X + Y$ et $V = X/(X + Y)$.

(a) **Calculer la densité du couple (U, V).**

On définit la fonction suivante:

$$g : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto (u, v) = (x + y, x/(x + y)) . \end{cases}$$

Remarquons déjà que $(U, V) = g((X, Y))$ et que g est mesurable du plan dans lui-même. Nous allons retrouver la densité de (U, V), comme d'habitude, par changement de variable. Pour toute fonction $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que l'intégrale suivante existe, on a, en vertu de l'indépendance de X et Y,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[\Phi((U, V))] &= \mathbf{E}[\Phi \circ g(X, Y))] \\
&= \int\int_{\mathbb{R}^2} \Phi \circ g((x, y)) f_{(X,Y)}((x, y))\, dx\, dy \\
&= \int\int_{\mathbb{R}^2} \Phi \circ g((x, y)) f_X(x) f_Y(y)\, dx\, dy \\
&= \int\int_{\mathbb{R}^2} \Phi \circ g((x, y)) xye^{-(x+y)}\mathbf{1}_{\mathbb{R}+}(x)\mathbf{1}_{\mathbb{R}+}(y)\, dx\, dy \\
&= \int\int_{\mathbb{R}^2} \Phi((u, v)) xye^{-(x+y)}\mathbf{1}_{\mathbb{R}+}(x)\mathbf{1}_{\mathbb{R}+}(y)\, dx\, dy,
\end{aligned} \tag{1}$$

en posant $(u, v) = g((x, y)) = (x + y, x/(x + y))$. On va écrire le reste de l'intégrande en fonction de u et v. D'une part,

$$\mathbf{1}_{\mathbb{R}+}(x)\mathbf{1}_{\mathbb{R}+}(y) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}+}(u) = \mathbf{1}_{[0,1]}(v),$$

puisqu'il est facile de voir que la somme de deux nombres positifs est positifs e que $x+y$ est plus grand que x. Ensuite, on peut écrire g^{-1}, c'est à dire exprimer x et y en fonction de u et v. On voit clairement que $x = uv$, puis que $y = u - x = u - uv = u(1 - v)$. Donc, l'application réciproque g^{-1} de g s'écrit

$$g^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^2 \\ (u, v) & \mapsto (x, y) = (uv, u(1 - v)) . \end{cases}$$

D'une part, on a donc pour tous x et y que

$$xye^{-(x+y)} = uvu(1 - v)e^{-u} = u^2v(1 - v)e^{-u}.$$

D'autre part, on a

$$dx\, dy = \mid DJ_{g^{-1}} \mid\, du\, dv,$$

où $DJ_{g^{-1}}$ est le déterminant de la matrice Jacobienne de g^{-1}, qui s'écrit elle-même

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v & u \\ 1 - v & -u \end{pmatrix}.$$

Le déterminant $DJ_{g^{-1}}$ de cette matrice vaut donc $v(-u) - u(1 - v) = -u$, et donc

$$\mid DJ_{g^{-1}} \mid = u,$$

puisque u est positif. Remarquez que l'on trouve le même résultat en prenant $(\mid DJ_g \mid)^{-1}$. C'est toujours le cas!!

Finalement, on rassemble toutes ces informations dans (1) et on obtient

$$\mathbf{E}[\Phi((U, V))] = \int\int_{\mathbb{R}^2} \Phi((u, v)) u^2v(1 - v)e^{-u}\mathbf{1}_{\mathbb{R}+}(u)\mathbf{1}_{[0,1]}(v) u\, du\, dv,$$

et l'on reconnait en identifiant que la densité du couple (U,V) vaut pour tout (u,v)

$$f_{(U,V)}((u,v)) = u^2 v(1-v)e^{-u}\mathbf{1}_{\mathbb{R}+}(u)\mathbf{1}_{[0,1]}(v).$$

(b) **Quelles sont les densités de U et V? Que peut-on en déduire?**
On remarque en particulier que les v.a. U et V sont indépendantes puisque $f_{(U,V)}$ peut se scinder comme une fonction de u fois une fonction de v. On retrouve la marginale de U en écrivant pour tout u:

$$\begin{aligned}
f_U(u) &= \int_{\mathbb{R}} f_{(U,V)}((u,v))\,dv \\
&= \int_0^1 v(1-v)u^3 e^{-u}\mathbf{1}_{\mathbb{R}+}(u)\,dv \\
&= u^3 e^{-u}\mathbf{1}_{\mathbb{R}+}(u)\int_0^1 v(1-v)\,dv \\
&= u^3 e^{-u}\mathbf{1}_{\mathbb{R}+}(u)\left[\frac{v^2}{2}-\frac{v^3}{3}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{6}u^3 e^{-u}\mathbf{1}_{\mathbb{R}+}(u).
\end{aligned}$$

De même, on retrouve pour tout $v \in \mathbb{R}$ que

$$f_V(v) = \int_{\mathbb{R}} f_{(U,V)}((u,v))\,du = 6v(1-v)\mathbf{1}_{[0,1]}(v).$$

On vérifie bien en particulier que

$$f_{(U,V)}((u,v)) = f_U(u)f_V(v), \text{ pour tous } u \text{ et } v.$$