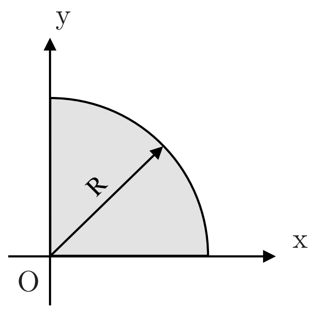
MOMENTS QUADRATIQUES - CORRECTION

Exercice 1 : Correction - quart de disque



Position du centre de gravité

$$x_G = \frac{\iint_S x dS}{S} \quad ; \quad y_G = \frac{\iint_S y dS}{S}$$

- *Définition de la section :*

Dans le cas traité, il est préférable de travailler en coordonnées cylindriques plutôt qu'en coordonnées cartésiennes. La surface S est alors définie par :

$$S = \left\{(\rho, \theta) \text{ tq } \rho \in [0, R] \text{ et } \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]\right\}$$

En coordonnées cylindriques, on a : $x = \rho \cos\theta$, $y = \rho \sin\theta$ et $dS = \rho\, d\rho d\theta$

On a donc

$$S x_G = \int_{\rho=0}^{\rho=R} \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \rho \cos\theta \, \rho \, d\rho d\theta$$

et

$$S y_G = \int_{\rho=0}^{\rho=R} \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \rho \sin\theta \, \rho \, d\rho d\theta$$

Ce qui donne :

$$\boxed{x_G = \frac{4R}{3\pi} \quad , \quad y_G = \frac{4R}{3\pi}}$$

Remarque

> *Dans la suite, nous allons calculer les moments quadratiques dans le repère Oxy (la définition de la section S est beaucoup plus facile que dans le repère Gxy).*
> *Nous utiliserons ensuite le théorème de Koenig pour déterminer les moments quadratiques dans le repère Gxy.*

Calcul des moments quadratiques dans le repère (Oxy) :

$$I_{Ox} = \iint_S y^2 dS = \int_{\rho=0}^{\rho=R} \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} (\rho \sin\theta)^2 \, \rho \, d\rho d\theta$$

$$I_{Oy} = \iint_S x^2 dS = \int_{\rho=0}^{\rho=R} \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} (\rho \cos\theta)^2 \, \rho \, d\rho d\theta$$

$$I_{Oxy} = \iint_S xy dS = \int_{\rho=0}^{\rho=R} \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \rho^2 \cos\theta \sin\theta \, \rho \, d\rho d\theta$$

On obtient :

$$\boxed{I_{Ox} = \frac{\pi R^4}{16} \, , \; I_{Oy} = \frac{\pi R^4}{16} \, , \; I_{Oxy} = \frac{R^4}{8}}$$

Détermination des moments quadratiques I_{Gx}, I_{Gy}, I_{Gxy} :

Utilisation du théorème de Koenig :

$$I_{Ox} = I_{Gx} + S y_G^2 \quad ; \quad I_{Oy} = I_{Gy} + S x_G^2 \quad ; \quad I_{Oxy} = I_{Gxy} + S x_G y_G$$

On en déduit :

$$I_{Gx} = \frac{\pi R^4}{16} - \frac{\pi R^2}{4}\left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2$$

$$I_{Gy} = \frac{\pi R^4}{16} - \frac{\pi R^2}{4}\left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2$$

$$I_{Gxy} = \frac{R^4}{8} - \frac{\pi R^2}{4}\frac{4R}{3\pi}\frac{4R}{3\pi}$$

D'où :

$$\boxed{I_{Gx} = \frac{\pi R^4}{16} - \frac{4R^4}{9\pi} \, , \; I_{Gy} = \frac{\pi R^4}{16} - \frac{4R^4}{9\pi} \, , \; I_{Gxy} = \frac{R^4}{8} - \frac{4R^4}{9\pi}}$$